Tome I, volume 1. Fascicule 1.

ENCYCLOPÉDIE

DES

ENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY

TOME I (PREMIER VOLUME),
ARITHMÉTIQUE

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

FRANÇOIS MEYER,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,
B. G. TEUBNER,

1904
(10 AOUT)

Tome I; premier volume: premier fascicule.

Sommaire.

Avis.

Cette Encyclopédie est un exposé simple, concis et, autant que possible complet, des résultats acquis dans les diverses branches de la science mathématique. On y trouvera des renseignements bibliographiques permettant de suivre le développement des méthodes propres à chacune de ces sciences; on s'est d'ailleurs particulièrement attaché à suivre ce développement depuis le commencement du 19[e] siècle.

Pour les Mathématiques pures, on insistera sur les définitions et sur l'enchaînement des théories, sans donner de démonstrations. Pour les applications des mathématiques, les diverses sciences techniques seront exposées avec de larges développements: de la sorte, le mathématicien pourra facilement prendre connaissance des questions de science pure qu'il aura à traiter; l'astronome, le physicien, l'ingénieur pourront, eux aussi, se reporter aux solutions des problèmes qui les intéressent.

Chacun, sans études préalables spéciales, peut aborder la lecture de l'Encyclopédie et y puiser les données générales sur l'ensemble des mathématiques pures et appliquées. Cet ouvrage rendra également service aux spécialistes, désireux de se documenter sur quelque point particulier de la science.

La rédaction est assistée d'une Commission composée de délégués des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne. Cette commission comprend actuellement MM. Walther von Dyck à Munich, Gustave von Escherich à Vienne, Otto Hölder à Leipzig, Félix Klein à Göttingue, Louis Boltzmann à Vienne, Hugo von Seeliger à Munich et Henri Weber à Strasbourg.

L'édition française de l'Encyclopédie est divisée en sept tomes, comprenant chacun trois ou quatre volumes, grand in-8°, qui paraissent par livraisons. On trouve à la fin de chaque volume un index alphabétique se rapportant aux matières contenues dans le volume.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des usages et habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français, seront mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple, n'échappera à personne.

Les tomes I—III, consacrés aux mathématiques pures, sont rédigés dans l'édition allemande par MM. François Meyer à Königsberg (Algèbre et Géométrie) et Henri Burkhardt à Zurich (Analyse); dans l'édition française ils seront rédigés, d'après l'édition allemande, par M. Jules Molk à Nancy. Les articles de l'édition allemande sont dus à MM. „Ahrens, Bôcher, Bohlmann, v. Bortkevitch, Brunel, Fano, Fricke,

☞ **Toute rectification ou addition, se rapportant à l'édition française, adressée à J. Molk, 8 rue d'Alliance, Nancy, sera insérée, s'il y a lieu, avec mention du nom et de l'adresse de son auteur, dès le fascicule suivant.**

Abréviations.

Dans les publications de l'Académie des sciences de Paris, **H.** signifie Histoire; **M** signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, 19) = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

Abh. = Abhandlungen.
Acad. = Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algèbre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = arithmetik, arithmétique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah. = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = définition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. = Ecole.
éd. = édité à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz, Lps = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaft.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numismatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. par exemple
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomatique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.

polyt. — polytechnique.
pontif. — pontificia.
posth. — posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. scientifique.
s. d. sans date.
sect. — section.
Selsk. — Selskabs.
sign. — signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
Soc. = Société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. — Transactions.
Unterh. — Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung, Verhandlingar.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. — Vierteljahresschrift.
Vol. = Volume.
Vorles. — Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. — Zeitschrift.

I 1. PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ARITHMÉTIQUE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **H. SCHUBERT** (HAMBOURG),
PAR **J. TANNERY** (PARIS) ET **J. MOLK** (NANCY).

Notion du nombre naturel.

1. Nombre cardinal. *Le nombre naturel peut être considéré à deux points de vue: le nombre *cardinal* (quotité) répond à la question „combien?"; le nombre *ordinal* (numéro) désigne le „rang" d'un objet[1]).*

L'idée du nombre cardinal suppose l'idée d'objets *distincts* réunis dans un tout, une collection, distincte elle-même de ce qui n'est pas elle; la collection peut d'ailleurs ne contenir qu'un objet. Le nombre attaché à une collection n'est autre chose que l'idée même de cette collection, quand on fait abstraction de la nature des objets distincts qui la constituent[2]). Par cela même qu'on fait abstraction de tout

1) *G. W. Leibniz* affirme, contre l'opinion des scolastiques, qu'on peut compter des objets immatériels [Diss. de arte combin. Leipzig 1666; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 12]. *Cette même idée était d'ailleurs exprimée, avant *Leibniz,* dans nos auteurs français [voir p. ex. *J. A. Le Tenneur,* Traité des quantitez incomensurables, Paris 1640, p. 3].* On la rencontre aussi dans *J. Locke,* An essay concerning human understanding, Londres 1690; trad. *P. Coste,* Amsterdam 1700; éd. *J. F. Thurot* 2, Paris 1822, p. 65. *Pour *G. Berkeley* [Principles of human knowledge, Dublin 1710; trad. Critique philos. 5^2 (1889), p. 35] le nombre est entièrement la création de l'esprit, mais, pour lui, toutes nos idées ne sont que les résultats d'impressions autrefois éprouvées.* Pour *J. Stuart Mill* [System of logic, Londres 1843; trad. *L. Peisse* 2, Paris 1867, p. 147] le fait énoncé dans la définition d'un nombre est un fait physique; *E. Mach* [Prinzipien der Wärmelehre, Leipzig 1896, p. 65 et suiv.] regarde aussi le nombre comme s'appliquant aux objets physiques.

2) *Cf. *P. Tannery,* Revue philos. 38 (1894), p. 60: Le concept de pluralité . . . se forme par une abstraction indépendante de la nature des objets réunis et par réflexion sur leur liaison collective; . . . s'ils sont perçus successivement, cette circonstance n'intervient pas dans la représentation de leur pluralité.*

ce qui distingue chacun de ces objets, sauf de ce que chacun est distinct des autres, les objets de la collection, ou *unités*, sont regardés comme *équivalents*[3]). Une partie d'une collection est une collection, dite *partielle*, dont les éléments sont quelques objets de cette collection, mais non tous.

*Dire qu'à un objet d'une collection *correspond* un objet déterminé d'une autre collection, c'est dire que la pensée de l'objet de la première collection éveille la pensée de l'objet de la seconde collection. Si, réciproquement, c'est la pensée du même objet de la première collection qu'éveille uniquement la pensée de cet objet déterminé de la seconde collection, on dira de ces deux objets qu'ils *se correspondent mutuellement*. Lorsque à chaque objet de chacune des deux collections correspond ainsi un et un seul objet de l'autre collection, et que, si A est un objet de l'une des collections et A′ son correspondant dans l'autre, les deux objets A et A′ *se correspondent mutuellement*, on dira que la correspondance entre les deux collections est *parfaite* (uniunivoque, eineindeutig) ou que les deux collections *se correspondent parfaitement*. Deux collections ont le *même* nombre (ou, si l'on veut, des nombres *égaux*) si l'on peut établir une correspondance parfaite entre elles.*

2. Collections finies ou infinies. Une collection peut être *finie* ou *infinie*. Il est assez difficile de définir ces deux termes. Si l'on regarde la signification du premier comme nous étant donnée par l'expérience, on pourra regarder le second comme étant défini négativement. Une collection finie ne peut avoir le même nombre qu'une de ses parties; au contraire, on peut établir une correspondance parfaite entre une collection infinie et une de ses parties[4]), en sorte que, d'après la définition précédente, la collection (infinie) a le même nombre qu'une de ses parties. Rien n'empêche de regarder cette dernière proposition comme contenant une *définition positive* du terme infini[5]): *Une collection est infinie, lorsqu'il existe une partie de cette collection qui lui correspond parfaitement;* mais alors le terme fini est défini

---

3) *E. Schröder* [Lehrb. der Arith. und Alg. 1, Leipzig 1873, p. 4] insiste sur ce que tout dénombrement d'objets présuppose d'une part le rassemblement dans un tout de ces objets, d'autre part la connaissance du fait que ces objets sont équivalents.

4) *B. Bolzano,* Paradoxien des Unendlichen, publ. par *F. Přihonsky,* Leipzig 1851, réimp. Berlin 1889, § 20, p. 28/31 [1847/8].

5) *R. Dedekind* [Was sind und was sollen die Zahlen, Brunswick 1888; 2e éd. 1893, p. 17; voir aussi préf. 2e éd.] semble être le premier qui ait ainsi *défini positivement* le terme infini.

négativement: *Une collection est finie, lorsqu'il n'existe pas de partie de cette collection qui lui corresponde parfaitement.*

*D'après *Ch. Peirce*[6]), une collection est finie, si, de quelque façon que l'on passe d'un objet à un autre, de cet autre à un autre,..., on revient nécessairement à l'un des objets rencontrés. Pour que cette définition eût un sens positif, il faudrait que l'on pût constater, afin de savoir qu'une collection est finie, qu'on a bien essayé tous les modes de passage, et, par conséquent, avoir établi que le nombre de ces modes est fini[7]).*

Dans cet article il ne sera question que de nombres finis.

3. Suite naturelle des nombres. Zéro. Si deux collections finies ne sont pas égales en nombre, c'est qu'on peut faire correspondre les unités de l'une aux unités d'une partie de l'autre: le nombre de celle-ci est dit *plus grand* que le nombre de la première qui est dit *plus petit.* Les nombres rangés dans un ordre tel que chacun soit plus grand que le précédent et plus petit que le suivant, forment la *suite immédiate des nombres naturels*[8]), ou *suite naturelle des nombres*[9]).

Comme *signe* d'un nombre on peut employer une collection d'objets réels faciles à figurer ou à manier: traits parallèles, mot „un" répété, jetons, cailloux, ou des symboles conventionnels: termes de la numération parlée, chiffres et assemblage de chiffres. Ces signes ou ces symboles s'appellent aussi des nombres[10]). *Compter* les objets d'une collection, *dénombrer* ces objets, c'est déterminer le signe qui, d'après les conventions adoptées, représente le nombre de ces objets[11]).

---

6) *Amer. J. math. 7 (1885), p. 202.*

7) **E. Schröder* estime que cette définition de *Ch. Peirce* est essentiellement positive. Si l'on se place à son point de vue, il est nécessaire de montrer que les définitions de *Peirce* et de *Dedekind* sont équivalentes; c'est ce qu'a fait *Schröder* en 1896 [Nova Acta Acad. Leop. 71 (1898), p. 303, [1896]]; *C. J. Keyser* [Bull. Amer. math. Soc. 7 (1900/1), p. 218] cherche à approfondir la même question.*

8) *Cette locution, classique au moyen âge, est venue des Grecs: φυσικὸς ἀριθμός [Nicomachi Geraseni Pythagorei Introd. arith.; éd. *R. Hoche,* Leipzig 1866, p. 52, 88, 91] par l'intermédiaire de *Boèce* [A. M. T. S. Boetii de instit. arith. éd. *G. Friedlein,* Leipzig 1867, p. 47, 48, 50, ...]; elle était encore d'un usage courant au 18e siècle.*

9) *Cette locution, en usage au 18e siècle, prête à ambiguité depuis que l'on a donné au mot nombre un sens plus général.*

10) *E. Schröder,* Lehrb. [3]) 1, p. 5, distingue entre les *unités,* objets de la collection primitive, et les *uns,* objets de la collection qui en est le signe.

11) Le nombre ainsi défini est le nombre *abstrait.* Une collection d'objets de même espèce peut être désignée par un nombre abstrait suivi de la spécification des objets dont elle est formée, c'est à dire par un nombre *concret.* On ne considérera, dans le texte, que des nombres abstraits; l'introduction des nom-

Zéro* indique l'absence de tout objet dans une collection qui ainsi est vide et, à proprement parler, n'existe pas; mais il est, aussi bien que n'importe quel nombre, la réponse à la question „combien?" et, à ce titre, doit être regardé comme un nombre. L'habitude toutefois n'est pas de le comprendre dans la suite naturelle des nombres; si on l'y comprenait, on devrait le faire figurer en tête de cette suite[12]. Dans ce qui suit, zéro ne sera pas regardé comme un nombre *naturel.

4. Nombre ordinal. *La suite naturelle des nombres implique la notion de *rang.* Cette notion, considérée comme primitive, conduit à la notion de nombre *ordinal*[13], qui est regardée par plusieurs mathématiciens comme antérieure à la notion de nombre cardinal, laquelle, à ce point de vue, est une notion dérivée. Les nombres, ou *numéros,* sont alors regardés comme une suite de signes différents, d'ailleurs arbitraires. Cette suite comporte un premier signe, le numéro *un.* Chaque numéro est suivi d'un autre numéro, différent de tous ceux qui le précèdent; chaque numéro est précédé d'un autre numéro, sauf le premier numéro. On peut prendre, par exemple, pour cette suite de signes, les symboles 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ..., 99, 100, 101, ... en entendant que les chiffres sont de simples signes d'écriture qui se suivent dans un ordre fixé et sont ensuite assemblés dans un ordre déterminé systématique (conforme, par exemple, aux habitudes de la numération décimale) qui permette de spécifier le symbole qui suit un symbole donné. La suite ainsi formée est la *suite naturelle des nombres,* qui est ainsi définie en se plaçant au point de vue ordinal.

Pour obtenir le nombre cardinal d'une collection, on numérote successivement chaque objet de la collection dans un ordre déterminé,

---

bres concrets est inutile en Arithmétique. *Le dictionnaire de l'Académie rappelle que l'on dit aussi, mais plus rarement, *nombre nombrant* pour le nombre abstrait, et beaucoup plus rarement, *nombre nombré* pour le nombre concret.*

12) *Quoique, d'après la définition du nombre donnée par *Euclide*[11], l'unité (*μονάς*; livre 7, déf. 1) „ce suivant quoi chaque chose est dite une", n'aurait pas fait partie du nombre, on la comprenait généralement dans la suite des nombres naturels. Quelques Pythagoriciens, dit *Iamblique* [Iamblichus ... in Nicomachi Arith. introd. ... éd. *S. Tennulius,* Arnheim 1668, p. 11] la regardaient comme la limite commune (*μεθόριον*) entre les nombres et les fractions; d'après la doctrine courante l'unité est la génératrice du nombre et comme telle en possède toutes les propriétés, mais seulement en puissance. L'opinion que l'unité doit être regardée comme en dehors du nombre fut adoptée par *Alkhovaresmî*[96] (9e siècle) [*B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 1, Rome 1857, p. 2] et, après lui, par les mathématiciens arabes et chrétiens du moyen-âge; elle rencontra encore des partisans au 17e siècle [*J. A. Le Tenneur,* Traité [1], p. 9].*

13) *ou *nombre d'ordre* [Dict. de l'Acad.].*

en attribuant successivement aux différents objets les numéros de la suite naturelle. Le *dernier* numéro employé est le nombre *cardinal* de la collection[14]); rien n'empêche de le désigner par le même signe que le dernier numéro employé[15]).*

Au point de vue du nombre ordinal, il n'y a guère lieu de définir l'égalité: Deux nombres égaux sont le même nombre de la suite naturelle. La notion d'inégalité n'implique d'ailleurs aucune comparaison de grandeur; aussi dira-t-on plutôt *inférieur* ou *antérieur* que *plus petit,* et *supérieur* ou *postérieur* que *plus grand*[16]). A ce point de vue, une collection est *finie* quand elle a un nombre; une collection *infinie* ne saurait avoir aucun nombre.

5. Introduction du nombre d'après Dedekind et Peano. Au lieu de faire reposer, comme dans ce qui précède, la définition du nombre *ordinal* sur l'idée de *rang,* on peut, avec *R. Dedekind*[17]), la faire reposer sur l'idée de *correspondance*[18]). Cette idée regardée comme

---

14) Philos. Aufsätze, *Ed. Zeller* gewidmet, Leipzig 1887, p. 32, 266; *L. Kronecker,* J. reine angew. Math. 101 (1887), p. 339; Werke 3^1, Leipzig 1899, p. 254; *H. von Helmholtz,* Wiss. Abh. 3, Leipzig 1895, p. 371.

15) *E. G. Husserl,* Dans un Appendice à sa „Philosophie der Arithmetik" [1, Halle 1891, p. 190], critique les essais nominalistes de *L. Kronecker* et de *H. von Helmholtz.* Il insiste particulièrement (1e partie, p. 3) sur ce que les nombres cardinaux se rapportent à des *ensembles,* les nombres ordinaux à des *suites,* et sur ce que les suites n'étant que des ensembles ordonnés, le nombre cardinal précède nécessairement le nombre ordinal. Il l'a d'ailleurs effectivement précédé dans le langage parlé. *Cependant *Husserl* n'en conclut pas que l'Arithmétique-cardinale soit la seule Arithmétique possible (préf. p. VIII) ni même puisse toujours suffire à toutes les applications. Bien d'autres Arithmétiques lui semblent indispensables (Communic. verbale 1904) en particulier celle qui repose sur la notion de nombre ordinal. Si, à chacune des notions de nombre cardinal et de nombre ordinal, on fait correspondre un symbolisme, les opérations sont identiques (formellement) dans l'un et dans l'autre; elles ont cependant une signification distincte et ne peuvent se déduire logiquement les unes des autres. Si l'on introduit un symbolisme neutre défini seulement par les lois d'opérations, on obtient une Arithmétique formelle distincte des deux Arithmétiques réelles auxquelles elle s'applique. Quoique cette Arithmétique formelle rende inutile les développements des Arithmétiques réelles auxquelles elle s'applique, on ne saurait cependant en déduire l'interprétation dans ces Arithmétiques réelles des résultats qu'elle fournit. Pour *Husserl* tout développement d'une Arithmétique purement formelle présuppose d'ailleurs les principes purement logiques et en particulier les idées de *quotité* et *d'ordre* qui en font partie (ainsi que les axiomes qui les concernent).*

16) Philos. Aufs. [14]), p. 23; *H. von Helmholtz,* Abh. [14]) 3, p. 362.

17) Was sind [5]) . . ., p. 6.

18) L'idée de correspondance, sur laquelle *K. Weierstrass* insistait beaucoup

primitive, et l'idée de *chaîne* que l'on peut en faire dériver, suffisent à caractériser la suite des nombres naturels[19]).

G. Peano[20]) a formulé, en symboles particuliers, une théorie qui n'est pas sans analogie avec celle de *R. Dedekind.* Il admet comme idées primitives le zéro, l'idée du nombre entier et l'idée du nombre consécutif d'un autre. Il pose ensuite les axiomes suivants: 1) zéro est un nombre; 2) tout nombre est suivi par un nombre; 3) deux nombres suivis par le même nombre sont égaux; 4) zéro ne suit aucun nombre; 5) si une proposition est vraie pour le nombre zéro et si, étant vraie pour un nombre quelconque, elle est aussi vraie pour le suivant, elle est vraie pour tous les nombres. Cette dernière proposition, établie d'ailleurs par *R. Dedekind,* est le principe de *l'induction complète.*

$_*$*C. Burali-Forti* a proposé une définition *nominale*[21]) du nombre et en a déduit les axiomes de *G. Peano.**

6. Invariance du nombre. $_*$Lorsqu'on se place au point de vue du nombre ordinal, la question de l'invariance[22]) du nombre se pose nettement: „Parvient-on au même numéro, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les objets d'une collection?“ *L. Kronecker* et *H. von Helmholtz* ont prétendu le démontrer[23]).

Lorsqu'on se place au point de vue du nombre cardinal, on écarte habituellement la question, en raison de l'équivalence des objets de la collection. $_*$Même à ce point de vue, il est douteux qu'elle puisse être écartée légitimement, dès que l'on procède au dénombrement effectif d'une collection, car pour effectuer ce dénombrement, il est de toute nécessité de *distinguer* les objets de la collection.*

---

dans son enseignement oral, n'est pas moins fondamentale dans la conception du nombre cardinal (n° 1).

19) *R. Dedekind* [6]), p. 11, 20, 54, en fait dériver la notion de nombre cardinal.

20) Arithmetices principia, Turin 1889; Rivista mat. 1 (1891), p. 17: Formulaire math. 3, Turin et Paris 1901; Bibl. congrès intern. philos. Paris 1900, 3, éd. 1901, p. 279. Voir aussi *L. Couturat,* Revue métaph. 8 (1900), p. 23.

21) $_*$Revue math. (Rivista) 6 (1899), p. 141; Bibl. congrès intern. philos. Paris 1900, 3, éd. 1901, p. 294. Une définition nominale d'un symbole consiste à égaler le symbole à définir à une expression formée avec des symboles déjà définis. *C. Burali-Forti* distingue (p. 295) les déf. math. qui ne sont pas nominales en déf. par *postulats* (*Dedekind, Peano*) et déf. par *abstractions* (longueur, température).*

22) *E. Schröder,* Lehrb. [8]) 1, p. 14, a appelé l'attention sur ce postulat.

23) Philos. Aufs. [14]), p. 32, 268; *L. Kronecker* [14]), p. 341; Werke 3^1, p. 255; *H. von Helmholtz* [14]) 3, p. 372; *L. Couturat* [De l'infini math., Paris 1896, 2e partie, livre 1, chap. 1 et 2, et p. 313] critique tout particulièrement la démonstration de *Kronecker* et, dans cette critique, se rencontre avec *G. Cantor* qui y trouve une pétition de principe [Z. Philos. 91 (1887), p. 90].

7. Critique de la notion de nombre. L'Arithmétique, une fois admise la notion de nombre naturel, doit se construire sans aucun postulat, d'une façon purement logique[24]). On verra qu'elle comporte une suite d'extensions[25]) de l'idée de nombre auxquelles on peut assigner comme but *pratique* de rendre le nombre propre à représenter la mesure des grandeurs. Les points de vue des philosophes qui ont prétendu distinguer les éléments psychologiques de l'idée de nombre (soit naturel, soit généralisé) diffèrent d'ailleurs notablement; contentons-nous d'en donner ici un rapide aperçu.

Pour *W. R. Hamilton*, conformément à la doctrine de *I. Kant*[26]), le *temps* considéré comme une forme de l'intuition est *le fondement de l'idée de nombre.* L'Algèbre est, pour lui, la science de „l'ordre dans la progression" ou la science du „pur temps"[27]). C'est aussi la doctrine de *A. Schopenhauer*[28]); *H. von Helmholtz*[29]) exprime la même opinion; de même aussi *W. Brix*[30]).

Au contraire *J. F. Herbart*[31]) dit que le nombre n'a rien à faire avec le temps. *J. J. Baumann*[32]) et *F. A. Lange*[33]) estiment que le nombre se rapporte plutôt à *l'espace* qu'au temps: la notion de nombre

---

24) Les Cours professés par *K. Weierstrass* à l'Université de Berlin ont beaucoup contribué à répandre cette façon de voir.

25) *D. Hilbert* rejette ces extensions successives de l'idée de nombre; il suppose l'existence préalable de symboles liés par des axiomes compatibles, choisis de telle façon que toutes les propriétés des nombres s'en déduisent. [Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 8^1 (1899), p. 180/4]. Des idées analogues concernant les opérations sur les *grandeurs* ont été développées par *R. Bettazi* [Teoria delle grandezze, Pise 1890, p. 67; cf. Bull. sc. math. (2) 15 (1891), p. 53; Periodico mat. (2) 2 (1899/1900), p. 11]; il en déduit une exposition formelle de l'Arithmétique. Voir aussi *O. Hölder,* Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 4.*

26) Kritik der reinen Vernunft, Riga 1781; 7e éd. Leipzig 1828; trad. *J. Barni* 1, Paris 1869, p. 203. „Le nombre n'est donc autre chose que l'unité de la synthèse que j'opère entre les diverses parties d'une intuition homogène en général, en introduisant le temps lui-même dans l'appréhension de l'intuition." Appréhension = première opération de l'esprit, moins complète que la perception.

27) Trans. Irish Acad. 17 (1837), p. 293 [1833/35]; Lectures on quaternions, Dublin 1853, préf. p. (2).

28) Die Welt als Wille und Vorstellung, Leipzig 1819; trad. *A. Burdeau* 2, Paris 1889, p. 170.

29) Philos. Aufs. [14]), p. 20; Abh. [14]) 3, p. 359.

30) Philos. Studien (*Wundt*) 5 (1889), p. 632; 6 (1891), p. 104, 261. Les chap. 3 et 4 ont paru comme Diss., Leipzig 1889.

31) Psychologie als Wiss. 2, Königsberg 1825, p. 160/63.

32) Die Lehren von Raum, Zeit und Math. 2, Berlin 1869, p. 668/71.

33) Logische Studien, Iserlohn 1877, p. 141 et suiv.

est *parallèle* à celle de l'espace[34]); avant le nombre ordinal apparaît le nombre cardinal formé par une synthèse que nous effectuons dans l'espace; chaque élément d'une pluralité d'une part, et l'ensemble de ces éléments d'autre part, provoquent notre attention; les axiomes de l'Algèbre reposent, comme ceux de la Géométrie, sur l'intuition que nous avons de l'espace[35]). *G. Frege* se rapproche de *J. F. Herbart*; pour lui le nombre exprime quelque propriété objective d'un concept; *au fond, sa définition du nombre cardinal qui appartient à un concept déterminé, ne diffère pas essentiellement de celle donnée plus tard par *A. W. Russell* sous une forme plus lumineuse: Deux classes étant dites *similaires* quand on peut établir entre leurs éléments respectifs une correspondance univoque et réciproque, *un nombre cardinal est une classe de classes similaires*[36]).*

**R. Dedekind*[37]) et *L. Kronecker*[38]) considèrent l'idée de nombre comme entièrement indépendante de notre représentation de l'espace ou du temps et estiment que les nombres sont de libres *créations* de l'esprit humain. *C. F. Gauss* déjà déclarait[39]) que le nombre est un pur produit de notre esprit par opposition à l'espace qui a une réalité hors de notre esprit.*

Aristote est regardé souvent, mais à tort, comme ayant, le premier, défini le nombre et comme ayant tiré de la notion du temps cette définition. Au contraire, il définit le temps par le nombre et dit dans sa Physique[40]) que le temps est le nombre du mouvement[41]). *En revanche l'Epinomis platonicienne dit que ce sont les mouvements célestes qui ont appris aux hommes à compter[42]). La définition

---

34) *J. J. Baumann*[32]), p. 671. 35) *F. A. Lange*[33]), p. 142.

36) *G. Frege,* Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, p. 79, 115; Grundgesetze der Arithmetik 1, Iéna 1893, p. 57; Revue métaph. 3 (1895), p. 73; *A. W. Russell,* The principles of mathematics, Cambridge 1903, p. 116, 136; voir aussi *A. N. Whitehead,* Amer. J. math. 24 (1902), p. 367; *L. Couturat,* Revue métaph. 12 (1904), p. 19.

37) Was sind . . .[5]), p. 21; voir aussi la préface de la 1e éd.

38) Philos. Aufs.[14]), p. 266; J. reine angew. Math. 101 (1887), p. 339; Werke 3^1, p. 254.

39) *Lettre à *F. W. Bessel,* 9 Avril 1830; Werke 8, Göttingue 1900, p. 201.*

40) *Φυσικὴ ἀκρόασις*, livre 4, chap. 11; éd. Acad. Berlin 1 (1831), p. 219, col. b; éd. *F. Didot* 2, Paris 1878, p. 301.

41) *Déjà *Thalès,* au dire de *Iamblique*[12]) (p. 10) aurait défini le nombre *un système d'unités,* et cela d'après les Egyptiens. *Iamblique*[12]) (p. 11) donne comme définition d'*Eudoxe* (4e siècle avant notre ère) *ἀριθμός ἐστι πλῆθος ὡρισμένον*, le nombre est une pluralité définie.*

42) **Platon, 'Επινομίς,* éd. *H. Estienne,* Paris 1578, p. 978, col. d; éd. *F. Didot* 2, Paris 1883, p. 506.*

d'*Aristote*[43]), qui ne diffère guère de celle d'*Eudoxe*, est analogue, sinon identique*, à celle donnée plus tard par *Euclide*[44]) „*Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος*" qui a été ensuite si souvent répétée.

Numération.

8. Premiers systèmes de numération. Pour exprimer les nombres, on peut se servir d'objets pareils quelconques (doigts, boules, traits tracés sur le tableau ou le papier). Les peuples qui n'ont pas d'écriture se servent de cailloux ou de coquilles pour compter; parfois aussi ce sont des entailles dans des bambous (anciens Chinois), ou des troncs d'arbre, dont ils font usage. *Les Etrusques et les anciens Romains enfonçaient chaque année un clou dans un lieu consacré[45]).* La correspondance des objets que l'on veut compter à des *signes* conventionnels constitue la *numération.* Elle est dite *primitive* lorsqu'on se borne à répéter le signe que l'on fait correspondre à *un* objet. Les peuples civilisés modernes se servent encore d'une numération-primitive pour les dés, les dominos et les cartes. La répétition par les horloges d'un même son pour les heures, constitue aussi une numé ration primitive.

La numération primitive n'a nul besoin d'être enseignée; elle s'entend d'elle-même; mais elle ne permet pas de discerner facilement[46]) les nombres un peu grands. L'emploi d'une échelle de signes abréviatifs dont le premier remplace un nombre déterminé n d'unités (ou plutôt de signes correspondant chacun à un objet), dont le second remplace n premiers, etc., est le principe essentiel de ce que l'on appelle un *système de numération*[47]) à base n. Le plus répandu a sans doute toujours été le système à base *dix* (numération *décimale*)[48]).

---

43) *ἔστι γὰρ ἀριθμὸς πλῆθος ἑνὶ μετρητόν*, le nombre est une pluralité qui se mesure par l'unité, [*τὰ μετὰ τὰ φυσικά*, livre 9, chap. 6; éd. Acad. Berlin 2 (1831), p. 1057, col. a; éd. *F. Didot* 2, Paris 1878, p. 581]. *Aristote* discute, sans se prononcer en fait, l'opposition des nombres et de l'unité; il admet même que l'on puisse dire que l'*un* est une certaine pluralité, quoique petite, *πλῆθός τι, εἴπερ καὶ ὀλίγον*; et, à cet égard, il assimile complètement *un* et *deux*. Au 3e siècle avant notre ère, *Chrysippe le Stoïcien* [*Iamblique* [12]), p. 12] définira même l'unité *πλῆθος ἕν*, *la pluralité une.**

44) Elementa, livre 7, déf. 2; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig1884, p. 184.

45) *Tite Live,* Hist. de Rome, livre 7, § 3.*

46) *Ann. math. pures appl. 21 (1830/31), p. 341.*

47) *A chacun de ces systèmes correspond un système de *numération parlée.* Le système *vicésimal* (à base 20) paraît avoir été répandu parmi les Celtes; on en trouve des traces en France dans les dialectes de la Bretagne occidentale. C'est sans doute là l'origine des locutions comme quatre-vingts, six-vingts [cf. la

*Dès la plus haute antiquité les Chaldéens[49]) avaient aussi un système à base 60 (numération *sexagésimale*); cette base est divisible par les premiers nombres et a dû être commode pour l'évaluation approchée de certains phénomènes astronomiques. Les Chaldéens écri-

---

farce de Pathelin, écrite sans doute entre 1460 et 1470, publiée à Rouen en 1486, auteur inconnu; éd. critique par *E. Chevaldin,* sous presse], quinze-vingts [hospice fondé sous *Louis IX* et qui porte encore ce nom]. Voir dans le Dictionnaire de *Littré* des exemples de trois-vingts (12e siècle), sept-vingts (11e siècle), huit-vingts (15e siècle), douze-vingts, quatorze-vingts (14e siècle). Dans le plus ancien traité français d'Algorisme que l'on connaisse [ms. bibl. Ste Geneviève, Paris, n° 2200, publié par *Ch. Henry,* Bull. bibl. storia mat. 15 (1882), p. 67; auteur inconnu du 13e siècle] on désigne (fol. 161a) 81 par $\overset{\mathrm{xx}}{\mathrm{IIII}}$ 1, 121 par $\overset{\mathrm{xx}}{\mathrm{VI}}$ et 1, etc. Les Aztèques avaient adopté le système vicésimal pour la numération écrite; ils figuraient au moyen de cercles les nombres de 1 à 19 et avaient des noms et des signes spéciaux pour 20, 400, 8000; des peuples voisins avaient même un nom spécial pour 160000.

Des traces de système *senaire* (à base 6) subsistent encore çà et là dans diverses régions dispersées du vieux continent. La base 12 n'a pas disparu de l'usage courant pour la numération concrète (douzaines, grosses). A titre de curiosité, on peut signaler le système à base 11 en usage chez des naturels de la Nouvelle Zélande avec des noms spéciaux pour 11, 121 et même 1331 [cf. *E. A. Marre,* J. math. pures appl. (1) 13 (1848), p. 233, d'après *A. von Humboldt*; et „De l'Arith. dans l'archipel indien", Rome 1874, d'après *J. Crawfurd*]. L'étude approfondie de la numération parlée appartient à la philologie.*

48) *Il est même employé par certains peuples sauvages, où les nombres de doigts que lèvent simultanément plusieurs individus, indiquent respectivement les unités, les dizaines, les centaines que renferme le nombre à exprimer; d'autres tapent dans leurs mains pour exprimer les dizaines. Le calcul avec les doigts (*calcul digital*) a été employé dès l'antiquité en Orient et en Grèce [cf. *E. Rödiger,* Jahresb. deutsch. morgenl. Ges. 1845, éd. 1846, p. 111; *P. Tannery,* Notices et extr. mss. bibl. nationale 32 I, Paris 1886, p. 18]; on le rencontre chez les Romains [*T. M. Plaute,* Miles gloriosus, acte 2, scène 2; *Pline l'ancien,* Hist. nat. livre 34, § 16; *D. J. Juvénal,* Satire X, 249e vers]. Au moyen de ce calcul, expliqué par *Bède le vénérable* († 735) et professé dans les Ecoles au temps de *Charlemagne,* on parvenait à représenter avec les deux mains tous les nombres de 1 à 10000. Il était aussi très usité chez les Arabes [cf. *E. A. Marre,* Bull. bibl. storia mat. 1 (1868), p. 309]. Il n'a d'ailleurs pas entièrement disparu de nos campagnes et pourrait rendre service aux sourds muets. Les noms de *digiti* pour désigner les unités et d'*articuli* pour désigner les dizaines, se rattachent à cette origine [cf. Geometria quae fertur Boetii, probabl. du 11e siècle[107]); dans l'éd. *G. Friedlein* de „A. M. T. S. Boetii instit. [8]) . . . .", p. 395; *E. Lucas,* Récréations math. 3, Paris 1893, p. 3/23 et *M. Cantor,* Vorles. Gesch. Math. (2e éd.) 1, Leipzig 1894, p. 542, 753, 790].*

49) *Les deux tablettes de Senkeré (près de l'Euphrate), trouvées en 1854 par *W. K. Loftus,* datent au moins de l'an 1600 avant notre ère; on y trouve les nombres carrés jusqu'à 3600 et les cubes jusqu'à 32768; une de ces deux tablettes est reproduite Abh. Akad. Berlin 1877, math. p. 105.*

vaient les nombres par juxtaposition et avaient des symboles (cunéiformes) particuliers pour 1, 10, 100; ils avaient des noms spéciaux pour 60, 3600 et 600; ils employaient parfois le même symbole pour représenter 60 et 3600 que pour représenter l'unité; il semblent n'avoir envisagé que des nombres inférieurs à un million[50]).

Dans leur écriture hiéroglyphique, les Egyptiens représentaient les neuf premiers nombres par un, deux, ..., neuf traits; dans les écritures hiératique et démotique (papyrus), ces assemblages de barres ont été réunis, modifiés, simplifiés et ont ainsi formé des signes spéciaux. Chacune des premières puissances de 10 est représentée dans l'écriture hiéroglyphique par un signe particulier et porte un nom spécial; un nombre quelconque est ensuite représenté par répétition et juxtaposition[51]).

Les anciens Grecs écrivaient les noms de nombre tout au long et cet usage a prévalu jusqu'au 3e siècle avant notre ère; ils employaient aussi[52]) les initiales Π, Δ des mots *πέντε*, *δέκα* pour désigner les nombres 5, 10, et la lettre H pour désigner le nombre 100; ils les juxtaposaient pour former d'autres nombres[53]). Ils imaginèrent plus tard[54]) un système de numération décimale qui diffère sensiblement du nôtre. Ce système consiste à représenter par 27 lettres (les 24 lettres de leur alphabet et 3 anciennes lettres d'origine orientale, dites *episemon*) les 9 premiers nombres, les 9 premières dizaines et les 9 premières centaines[55]); les nombres de 1 à 1000 sont représentés

---

50) *Cf. *J. Oppert* et *R. Lepsius,* Monatsb. Akad. Berlin 1877, p. 741/58.*

51) *Cf. *F. Hultsch,* Abh. Ges. Lpz. (philol.-hist.) 17 (1897), mém. n° 1, p. 17 [1895]. Le manuel du calculateur égyptien, dû au scribe *Ahmès* [British Museum, *papyrus Rhind;* trad. *A. Eisenlohr,* Leipzig 1877 et 1891] a été écrit entre l'an 2000 et l'an 1600 avant notre ère; c'est le plus ancien document, relatif au calcul en Egypte, que nous connaissions.*

52) *Ces nombres ont été dits *hérodiens,* parce que *Herodianus,* grammairien alexandrin, qui vivait vers 200, a décrit ce système de numération. Ils paraissent remonter au moins au 6e siècle avant notre ère et sont les seuls employés dans les inscriptions attiques jusque vers —100. On a dit que le symbole I par lequel on désignait l'unité pourrait être l'initiale du mot *'Ιος* (vieille forme homérique); il *est toutefois au moins douteux que I soit une initiale.**

53) *Ainsi HHΔΔΔΠII représente 237, HΠ représente 105.*

54) *Peut-être à Alexandrie, où on le constate pour la première fois vers —266 sur une monnaie [voir *J. Gow,* A short history of greek mathematics, Cambridge 1884, p. 47]. Mais, d'après les inscriptions, le système a été ébauché dès la fin du 4e siècle avant notre ère, sur les côtes Sud-Ouest de l'Asie Mineure.*

55) *Unités: α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, ϑ; dizaines: ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, o, π, ϙ; centaines: ϱ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ. Les symboles ϛ, ϙ, ϡ s'énonçaient *βαῦ* (forme byzantine, où β a le son de υ), *κόππα*, *σαμπῖ*.*

par simple juxtaposition des lettres désignant les centaines, dizaines et unités, en surmontant le tout d'une barre horizontale[56]). Les lettres $,\alpha$ à $,\vartheta$ avec un signe , sous la lettre, à gauche, représentent *mille fois* la valeur des lettres α à ϑ. Pour 10 000 (myriade) on écrit souvent M ou Mu ($\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma$); parfois aussi un simple $\cdot$ remplace ce symbole[57]). Les multiples de 10 000 forment de nouvelles unités d'ordres successifs[58]). En Astronomie, les Grecs faisaient usage d'un système de numération sexagésimale, emprunté aux Babyloniens[59]).

Dans leur système de numération qu'ils ont emprunté en grande partie aux Etrusques[60]), les Romains ont d'abord employé un procédé analogue à celui des peuples sauvages. Ils figuraient les nombres depuis *un* jusqu'à *neuf* par des traits répétés et employaient des signes spéciaux, qui finalement ont pris la forme X, C, M, pour désigner dix, dix fois dix, dix fois dix fois dix traits. Plus tard, ils ont introduit des signes spéciaux[61]) pour cinq, V, cinquante, L, cinq cents, D, et ils ont indiqué la multiplication d'un nombre par *mille* en traçant une barre horizontale au dessus de ce nombre, et la multiplication par *cent mille* en mettant, en outre, le nombre entre deux barres[62]); mais leur numération est restée *additive.*

---

56) *Ainsi $\overline{\tau\nu\zeta} = 357$; $\overline{\tau\zeta} = 307$; $\tau\nu = 350$. La barre indique ici que les lettres ont un sens numéral; elle ne doit d'ailleurs pas être considérée comme essentielle, et semble n'avoir été usitée que dans les manuscrits de l'époque byzantine.*

57) *Ainsi $\overline{,\beta\tau\nu} = 2350$; $,\bar{\alpha} = 1000$; $\beta M\overline{o\delta}$ ou $\beta \cdot o\delta = 20074$; le mot *myriade* ne figure pas encore dans *Homère.* Quand les nombres ne sont pas grands, les *calculs* s'effectuent assez aisément dans ce système de numération [cf. *P. Tannery,* Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 4 (1882), p. 171]. Souvent le coefficient de la myriade se trouve écrit au dessus du symbole μ^{υ}.*

58) *„*Tétrades*" (*Apollonius*); dans son $\psi\alpha\mu\mu\acute{\iota}\tau\eta\varsigma$ (arénaire), *Archimède* a envisagé des tranches de huit chiffres: „octades"; 10^8 octades forment une *période* [Opera, éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1881, p. 242/91; Œuvres, éd. *F. Peyrard,* Paris 1807, p. 348/67].*

59) *Il ne semble pas avoir été introduit avant *Hypsiclès* [$\text{'}A\nu\alpha\varphi o\rho\iota\kappa\acute{o}\varsigma$, éd. *K. Manitius,* Progr. Dresde 1888, p. XXVI] au commencement du 2e siècle avant notre ère. Un autre système antérieur, divisant le cercle en 180 *coudées* de 24 *doigts* était encore employé par *Hipparque,* en concurrence avec le système sexagésimal [voir *P. Tannery,* Revue archéol. (3) 7 (1886), p. 31].*

60) *Il est fort probable que les Etrusques ont eux-mêmes subi diverses influences étrangères. Leurs anciens chiffres semblent formés suivant le même principe que les caractères hiératiques égyptiens et il n'est pas impossible que l'on parvienne à démontrer l'origine orientale de leur système de numération [cf. *F. Lindemann,* Sitzgsb. Akad. München 26 (1896), p. 625; 29 (1899), p. 71].*

61) *Pour l'origine des signes employés par les Romains, consulter *K. Zangemeister,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1887, p. 1011 et *Th. Mommsen,* Hermès 22 (1887), p. 596.*

62) *1180600 s'écrivait $|\overline{\mathrm{X}}|\overline{\mathrm{CLXXX}}\mathrm{DC}$. Plus tard, pour éviter des altérations,

Les Chinois avaient adopté neuf signes pour les neuf premiers nombres et onze signes pour les onze premières puissances de 10. Leur numération est dite *multiplicative*: le signe d'un des neuf premiers nombres placé *avant* le signe de 10 ou de ses puissances, le multiplie; placé *après* il s'ajoute[63]). Ils n'écrivaient d'ailleurs pas leurs nombres de haut en bas, mais de gauche à droite, comme nous[64]).

Les abaques (ἄβαξ) sont des cadres à colonnes sur lesquelles on faisait mouvoir des *jetons*[65]). L'usage de ces jetons[66]) repose sur le même principe de numération que le système romain. Les abaques ont été en usage chez les Orientaux, les Grecs et les Romains ainsi qu'au moyen-âge dans tous les pays chrétiens; les Grecs les employaient toutefois moins que les Romains, à cause de la facilité plus grande pour les calculs qu'offrait leur système de numération écrite. Dans les anciens abaques n jetons dans la $\varkappa^e$ colonne valent $n \cdot 10^{\varkappa - 1}$ jetons. Pour rendre la lecture plus facile, les Romains séparaient l'abaque en parties supérieure et inférieure et convenaient qu'un jeton placé dans la partie supérieure d'une colonne en valait cinq placés dans la partie inférieure de cette colonne. A la fin du 15e siècle, apparaissent subitement des abaques à *lignes* dans lesquels un jeton placé sur une ligne vaut dix fois le même jeton placé sur la ligne immédiatement en dessous et cinq fois ce jeton placé entre les deux lignes. Ces abaques à *lignes* n'ont disparu que dans la seconde moitié du 18e siècle.

---

on a écrit XXXM pour 30000, puis on a remplacé M par CIↃ [cf. *Th. Mommsen* et *J. Marquardt,* Manuel des antiquités romaines (trad. *G. Humbert*); tome 10 par *J. Marquardt,* trad. par *A. Vigié*, Paris 1888, p. 47, 49].*

63) *Pour écrire 350 par exemple, ils écrivaient d'abord le symbole de 3, puis celui de 100, puis celui de 5, puis celui de 10 [cf. *E. Biot,* J. asiatique (3) 8 (1839), p. 497; *H. G. Zeuthen,* Hist. math. trad. *J. Mascart,* Paris 1902, p. 227].*

64) *D'autres systèmes ont été introduits plus tard en Chine, et le système de position n'y est pas resté inconnu [cf. *K. L. Biernatzki,* J. reine angew. Math. 52 (1856), p. 59; trad. *J. Bertrand,* J. des savants 1869, p. 317, 464; *M. Cantor,* Vorles. [48]) 1, p. 631]. Pour les calculs, on se sert d'ailleurs encore en Chine du *swanpan,* instrument analogue à l'abaque, mais constitué par des tiges parallèles sur lesquelles sont enfilées des boules-unités. Des instruments du même genre sont en usage chez les populations de l'Asie septentrionale et de la Russie occidentale; c'est d'eux que dérive le *boulier,* introduit en France par *J. V. Poncelet* pour l'enseignement enfantin.*

65) *D'abord, sans doute, des *cailloux* plus ou moins polis, puis des disques en os, et enfin des disques en métal d'argent et même d'or. Rappelons que *calcul* vient du latin *calculus* (caillou); les Grecs disaient *ψῆφος,* d'où *ψηφοφορία* (calcul) chez les Byzantins.*

66) *Jeter était synonyme de *calculer sur l'abaque.* Les Allemands nomment les jetons „Rechenpfennige“ ou „Raitpfennige“, les Anglais „counters“.*

C'est vers le milieu du 13^e siècle que la mode apparaît d'agrémenter les jetons d'une devise ou d'un relief[67]); c'est sans doute en France que cette mode a pris naissance; c'est en France qu'elle a persisté le plus longtemps: les services publics en étaient régulièrement pourvus. L'usage des jetons n'a diminué que fort lentement; au siècle de *Louis XIV*, il était encore courant pour vérifier les comptes, en France du moins[68]), et chacun a présent à l'esprit la première scène du Malade imaginaire[69]). L'Académie des inscriptions devait, d'après ses statuts[70]), fixer les devises à inscrire chaque année sur les jetons. En 1777, *G. L. Leclerc*, comte de *Buffon*[71]) vante encore leur usage pour les femmes et ceux qui ne savent ou ne veulent écrire. Ce n'est que vers la fin du 18^e siècle qu'ils cessent en France[72]) de servir au calcul; on ne les utilise plus que pour jouer.

On a de même, pendant bien longtemps, fait usage en Occident des chiffres romains; la Cour des Comptes a conservé l'emploi de ces chiffres jusqu'au 18^e siècle[73]). Aujourd'hui ces chiffres ne s'emploient plus guère que pour marquer des dates sur des inscriptions, les heures sur nos horloges, les numéros d'ordre des tomes d'un ouvrage.*

9. Numération décimale. Principe de position. Notre numération décimale écrite est fondée sur l'emploi de neuf *caractères* ou *chiffres* qui représentent les nombres *un, deux, trois, . . ., neuf,* sur un principe d'une importance capitale, le principe de la valeur de ces chiffres d'après leur place relative (principe de position) et sur l'introduction du *zéro,* signe destiné à tenir la place des chiffres manquants. Elle constitue un progrès décisif en ce qu'elle permet d'écrire n'im-

---

67) *Le plus ancien jeton, ainsi marqué, que l'on possède, est celui de la reine *Blanche,* mère de *Louis IX.* Il est décrit par *J. Rouyer* et *E. Hucher,* Hist. du jeton au moyen-âge, Paris 1858, p. 78. Voir aussi *A. Nagl*, Numism. Z. 19 (1887), p. 309.*

68) *Cf. *F. Le Gendre,* l'Arith. en sa perfection, 1^e éd. Paris 1646; à cette Arith. est adjointe, à partir de l'éd. de 1712, un Traité d'Arith. par les *jettons*; éd. de 1727, p. 472.*

69) *„Une table devant lui, comptant avec des jetons" (Acte I, scène I). Voir aussi *G. W. Leibniz,* Nouv. essais sur l'entendement (écrits de 1701 à 1709), livre 2, chap. 22, § 11, éd. Amsterdam et Leipzig 1765, dans les Œuvres philos. de Leibniz; Philos. Schr. éd. *C. I. Gerhardt* 5, Berlin 1882, p. 240.*

70) *Statuts de Juillet 1701, Art. XV.*

71) *Essai d'Arithmétique morale (écrit vers 1760); Suppl. à l'Hist. nat. 4, Paris 1777, p. 123.*

72) *Dans les temps modernes, l'usage des jetons n'a jamais prévalu en Italie; il y a cependant quelques jetons italiens [*J. Rouyer*[67]), p. 175]*

73) *Cf. *Natalis de Wailly,* Mém. Acad. inscriptions 18^2 (1849), p. 562 [1848].*

porte quel nombre au moyen des neuf chiffres choisis et du zéro[74]). Notre numération décimale parlée suit à peu près notre numération décimale écrite[75]).

*On peut évidemment appliquer le principe de position à n'importe quel système de numération[76]). Pour représenter tous les nombres dans un système à base n, il suffit d'introduire, outre le zéro, $n-1$ chiffres[77]). Le système *binaire* (ou *dyadique*) qui a pour base 2, n'utilise ainsi que le zéro et le chiffre qui représente l'unité[78]). Si

---

74) *Un „*blanc*" ne suffit pas dans le cas où ce sont les *unités* qui manquent au nombre envisagé; il ne suffit pas davantage lorsque plusieurs chiffres consécutifs manquent, car la largeur du „*blanc*" devient alors difficile à évaluer.*

75) *En Suisse romande, en Belgique wallone et (au moins dans le peuple) dans plusieurs provinces du Sud de la France, on a conservé la bonne et ancienne habitude de dire „septante, nonante", parfois même „octante". *Simon Stevin,* l'Arithmétique, Leyde 1585, dit septante, huictante (par ex. p. 6). Dans les Eléments d'Arithmétique de *Ch. E. L. Camus,* Paris 1749 (2e éd. 1774), on rencontre encore (p. 7/8) ces termes, avec la remarque que *hors du calcul* on dit et on écrit soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix. Il sera plus malaisé de remplacer les locutions onze, douze, treize, quatorze, quinze, et seize par des locutions conformes à la numération écrite.*

76) **B. Pascal* a donné une notion claire d'une numération à base quelconque (De numeris multiplicibus..., écrit en 1654, éd. Paris 1665; Œuvres éd. *Hachette* 3, Paris 1880, p. 312); *J. Caramuel* a décrit [Mathesis biceps vetus et nova, Campagna 1670, p. XLV—LXIV] les systèmes de numération à base $\leqq 10$, à base 12 et à base 60. On envisage parfois des systèmes de numération de position, reposant sur un principe tout différent. Ainsi, dans la numération dite *factorielle*, le symbole $\alpha\beta\gamma\delta$ représente le nombre $\alpha \cdot 4! + \beta \cdot 3! + \gamma \cdot 2! + \delta \cdot 1!$ c'est à dire $24\alpha + 6\beta + 2\gamma + \delta$.*

77) **A. L. Cauchy* a remarqué [C. R. Acad. sc. Paris 11 (1840), p. 796; Œuvres (1) 5, Paris 1885, p. 439] que les opérations de l'Arithmétique sont notablement simplifiées si, sans changer la base du système de numération, on réduit de moitié le nombre des chiffres, en donnant à chaque chiffre deux significations l'une soustractive, l'autre additive, suivant que ce chiffre est ou n'est pas affecté d'un indice (*Cauchy* le surmontait d'une barre). Dans le système décimal, les premiers nombres s'écrivent ainsi 0, 1, 2, 3, 4, 5, $1\bar{4}$, $1\bar{3}$, $1\bar{2}$, $1\bar{1}$, 10, 11, ...; *L. Lalanne* [C. R. 11 (1840), p. 903] applique cette même notation au système ternaire; si l'on adopte le signe ⫯ pour désigner l'unité, les premiers nombres s'écrivent alors 0, ⫯, ⫯⫯̄, ⫯0, ⫯⫯, ⫯⫯̄⫯̄, ⫯⫯̄0, ⫯⫯̄⫯, ⫯0⫯̄, ⫯00, ⫯0⫯, ⫯⫯⫯̄, ⫯⫯0, ⫯⫯⫯, ⫯⫯̄⫯̄⫯̄, ...; cf. aussi *E. Collignon,* Ann. Ponts et Chaussées (7) 5 (1893), I p. 790/92.*

78) *Si l'on adopte le signe ⫯ pour désigner l'unité, les premiers nombres seront 0, ⫯, ⫯0, ⫯⫯, ⫯00, ⫯0⫯ ⫯⫯0, ⫯⫯⫯, ⫯000, ... La table de multiplication se réduit à „*une fois un égale un*"; la division s'exécute sans tâtonnements. La lecture des nombres est rapide, si l'on adopte le système de *G. Peano* qui permet de lire huit chiffres à la fois avec une seule syllabe. On peut effectuer rapidement les calculs en représentant les unités des différents ordres par des dames

l'on se place au point de vue du mécanisme des opérations, c'est le plus simple de tous les systèmes de numération[79]). On a signalé[80]) les avantages que présenteraient soit au point de vue théorique, soit pour le calcul, diverses bases[81]), en particulier[82]) les bases 4 et 8 dont la seconde serait très commode pour la notation musicale[83]).

Parmi les Hindous, *Âryabhaṭa* (né en 476) semble avoir été en possession du principe de position de la numération[84]). Du temps de *Brahmagupta* (né en 598) on avait certainement introduit zéro comme nombre et l'on avait cherché à soumettre à des règles déterminées les calculs effectués avec ce nombre[85]). Mais on n'a jusqu'ici rencontré le chiffre 0 dans aucun document hindou antérieur au 8e siècle[86]). Les Hindous ont appelé le zéro „kha“ ou „soûnya“ ce qui signifie „espace (vide)“ ou „vide (n'être rien)“.

---

sur une ligne de damier [cf. *E. Lucas,* Récréations math. 1, Paris 1882, p. 145/60; *E. Collignon,* J. math. élém. (Longch.) (5) 1, 21e année, 1897, p. 101, 126, 148, 171].*

79) **G. W. Leibniz* qui en a signalé l'importance [lettre à *Schulenburg*, 1698; Hist. Acad. sc. Paris 1703, H. p. 58, M. p. 85; *De dyadicis* et autres mss. de la bibl. de Hanovre; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 7, Halle 1863, p. 223, 228, 235, 238, 241], a cru, à tort, que les Chinois en avaient eu connaissance dans des temps très anciens. *T. Fantet de Lagny* a envisagé l'Arithmétique binaire presque en même temps que *Leibniz* [Hist. Acad. sc. Paris 1703, H. p. 61/62]. *G. F. Brander* a publié à Augsbourg en 1767 (2e éd. 1775), une „Arithmetica binaria s. dyadica“.*

80) **T. N. Thiele,* Overs. Selsk. Forhandl. (Bull. Acad. Copenhague) 1889, p. 25/42.*

81) **Buffon* [71]), p. 116, vante les avantages du système duodécimal et propose deux nouveaux symboles pour les nombres *dix* et *onze*. Voir aussi *J. F. Chr. Werneburg,* Teliosadik (s. l.) [Leipzig] 1800, et Lehrb. Arith. Iéna 1819.*

82) **E. Weigel* a publié le plan d'une Arith. tétractique [Aretologistica vel logistica ..., Nuremberg 1687]. Déjà *Aristote* avait observé que le nombre *quatre* limitait la numération usitée chez un peuple de Thrace [*Προβλήματα*, livre 15, chap. 3; éd. Acad. Berlin, 2 (1831), p. 911, col. a; éd. *F. Didot* 4, Paris 1857, p. 194]. *J. D. Collenne* (d'Epinal) est l'auteur d'un livre intitulé: Le système octaval, Paris 1845. Voir aussi *G. Eneström,* Interméd. math. 7 (1900), p. 227 (Question 1717).*

83) *Pour calculer les notes de seconde majeure en seconde majeure, le procédé serait presque semblable à celui de la formation du *triangle de Pascal* [*Ch. Berdellé,* Assoc. fr. avanc. sc. 26 (St. Etienne) 1897², p. 200].*

84) *Il donne un procédé exact pour l'extraction des racines carrées, dans lequel il indique le partage du nombre envisagé en tranches de deux chiffres. On ne connaît pas exactement son système de numération, mais il ne semble pas analogue à notre système actuel. [cf. *L. Rodet,* J. asiatique (7) 13 (1879), p. 393; (7) 16 (1880), p. 440].*

85) **Brahmagupta,* Cuṭṭaca, chap. 18, sect. II, trad. *H. T. Colebroocke,* „Alg. with arith.“ Londres 1817, p. 339/40. Cf. *L. Rodet,* J. asiatique (7) 11 (1878), p. 30.*

86) *En 738, d'après *E. Clive Bayley* [J. asiatic soc. (2) 15, Londres 1883, p. 27].*

Après les conquêtes d'*Alexandre*, l'influence grecque sur les écrits des Hindous est incontestable. Il est certain, d'autre part, que le zéro était employé par les Grecs, dans leur numération sexagésimale, au 2^e siècle avant notre ère, pour marquer l'absence de degrés, minutes ou secondes. Il n'est donc pas improbable que les Hindous aient emprunté le zéro aux Grecs. Ils n'en auraient pas moins réalisé un progrès considérable en l'introduisant dans la numération décimale[87]).

Pour désigner le zéro dans leur numération sexagésimale[88]), les Grecs employaient le symbole actuel[89]), leur „omicron", peut être comme initiale du mot *οὐδὲν* (rien). Comme les Grecs ont emprunté aux Babyloniens leur système de numération sexagésimale, il n'est pas impossible que l'origine de l'emploi du zéro remonte aux Baby-

87) *Les Hindous désignaient par des noms spéciaux les puissances de 10 qu'ils énuméraient; ils n'âvaient pas d'unité numérique du second ordre comme notre *mille*, ou notre *million*, ou la *myriade*[57]) des Grecs[58]). L'unité du second ordre „*mille*" nous vient des Romains. Les peuples germaniques ont plutôt adopté le *million* comme unité du second ordre. Il en est résulté que, tandis que les mots *billions*, *trillions*, . . . signifiaient 10^9, 10^{12}, . . . pour les peuples latins, ils prenaient chez les peuples germains le sens de 10^{12}, 10^{18}, . . . [cf. *G. W. Leibniz*, Philos. Schr.[69]) 5, p. 143/44]. En France, la règle germanique était encore en usage à la fin du 15^e siècle [*N. Chuquet,* Triparty, Lyon 1484; ms. bibl. nationale (fonds français n° 1346) fol. 2^b; Bull. bibl. storia mat. 13 (1880), p. 594] et au 16^e siècle [*J. Peletier,* l'Arithmétique, Poitiers 1551/52, fol. 6^a]; mais, depuis le 17^e siècle, la règle latine y est adoptée. Le mot *milliart* ou *miliart,* puis *milliard*, était employé en France dans le sens de *million de millions* [voir par ex. l'ouvrage cité de *J. Peletier*]; mais déjà *J. Trenchant,* l'Arithmétique, Lyon 1566, p. 14^a, 215^a, l'emploie dans le sens de mille millions qu'il a encore actuellement. On a aussi dit pour 10^{12} *millier* [*H. Meynier,* l'Arith., Paris 1614, p. 14], *milliasse* [*J. E. Gallimard,* La sc. du calcul num. 1, Paris 1751, p. 2], *milliote* [cf. *P. Tannery,* Interméd. math. 8 (1901), p. 234 (Question 1849); voir aussi 9 (1902), p. 75]; *S. Stevin* [Arith.[75]), p. 6] répète autant de fois le mot *mille* qu'il y a de tranches de trois chiffres et n'emploie pas le mot *million*; *A. Girard* dit *bilion* pour 10^{12} et *trilion* pour 10^{24} [Invention nouvelle en l'Algèbre, Amsterdam 1629; réimprimé par *D. Bierens de Haan*, Leyde 1884, sign. A_1 recto].

Les noms d'*unités*, de *dizaines* et de *centaines* (unitates, deceni, centeni) se trouvent déjà dans les trad. latines du 12^e siècle de manuscrits arabes [cf. Algoritmi de numero indorum[96]), ms. Codex Cambridge, car. 102^a, publ. par *B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 1, Rome 1857, p. 7].*

88) *Dans leur numération *décimale,* le zéro n'était pas nécessaire.*

89) *Les Byzantins écrivaient ordinairement $\bar{0}$, la barre indiquant le sens numéral[56]) [cf. *C. Ptolémée*, *Μεγάλη σύνταξις* (Almageste), livre 1, chap. 9; éd. *N. Halma,* Paris 1813, p. 38 et suiv.]; mais elle ne paraît point dans les Tables et *J. L. Heiberg* qui, dans son édition de l'Almageste [Syntaxis mathematica 1, Leipzig 1898; 2, Leipzig 1903] l'adopte pour les nombres significatifs, la rejette au contraire pour le zéro. En tous cas, il fallait éviter la confusion avec l'*omicron* qui signifie 70, comme lettre numérale.*

loniens[90]); les assyriologues n'ont toutefois pu jusqu'ici en trouver aucune trace, mais il semble bien difficile d'admettre que les Babyloniens aient toujours pu s'en passer.

Dès la seconde moitié du 8e siècle, les Arabes d'Orient avaient eu connaissance de la numération de position[91]); ils ne l'adoptèrent que lentement[92]); au 10e siècle son usage était cependant déjà assez répandu parmi les commerçants. Les Arabes appelaient[93]) le zéro „aṣ-ṣifr". Il est possible[94]) que ṣifr doive être rattaché à ṣaphira, traduction arabe du sanscrit soûnya. C'est sans doute ce mot arabe ṣifr qui a donné naissance au bas-latin *zefirum* (dont *Léonard de Pise* a fait usage), d'où la forme italienne *zefiro* qui a, elle-même, donné naissance par contraction au mot *zéro* dont l'introduction remonte au 15e siècle[95]).

---

90) *Sous une autre forme que 0, qui n'a rien d'un caractère cunéiforme.*

91) *Alkhovaresmî* à beaucoup contribué à la répandre par la publication (au début du 9e siècle) de son Traité d'Arithmétique[96]) qui fut d'ailleurs bientôt également répandu chez les Arabes d'Occident. *Dès la seconde moitié du 8e siècle, des écrits hindous étaient d'ailleurs certainement répandus à Bagdad [cf. *J. T. Reinaud,* Mém. Acad. inscriptions 18² (1849), p. 312/14 [1845/46]; *M. Cantor,* Vorles.[46]) 1, p. 657; *H. Suter,* Abh. Gesch. Math. 10 (1900), p. 4, 5].*

92) *Ils écrivirent d'abord tout au long les noms de nombre, puis adaptèrent à leur alphabet le système des Grecs, ainsi que l'avaient fait les Juifs dès longtemps.*

93) *La plus ancienne citation de *ṣifr* dans le sens de 0 (zéro) date de l'an 880 environ [*T. Nöldeke,* Byzant. Z. 2 (1893), p. 300].*

94) *On a cherché, bien à tort, à faire dériver *ṣifr* de ψῆφος par l'entremise de *sipos,* terme par lequel les abacistes désignèrent le jeton non marqué dont ils se servaient, non pour remplacer le zéro (ils n'en avaient pas besoin), mais pour distinguer la colonne sur laquelle portait l'opération.*

95) *Dans les premières trad. latines (12e siècle) de manuscrits arabes, le zéro s'appelle *circulus* [cf. Algoritmi de numero indorum, ms. Codex Cambridge car. 102b, publ. par *B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 1, Rome 1857, p. 3; *Jean de Séville* (*Hispalensis*) Liber algorismi de practica arismetrice, ms. bibl. nation. fol. 85b, col. b, publ. par *B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 2, Rome 1858, p. 28]. Dans le plus ancien traité français d'algorisme[47]) [ms. bibl. Ste Geneviève, fol. 150a, col. 1; Bull. bibl. storia mat. 15 (1882), p. 53] on lit: *„iusca le darraine ki est appellée cifre 0"*. Au 13e siècle, le mot latin *cifra* pour 0 se rencontre d'ailleurs dans l'Algorismus demonstratus de *Jordan Nemorarius* [éd. *J. Schöner,* Nuremberg 1534] et dans l'Algorismus [tractatus de arte numerandi] de *Sacrobosco* (*Jean de Holywood*), écrit à Paris vers 1240 [Commentaire de *Pierre de Dace,* écrit en 1291; éd. *M. Curtze,* Copenhague 1897]. *Sacrobosco* emploie aussi le mot *teca* dont l'origine est douteuse: thêta? ou certain cautherium de forme annulaire dont parle *Pierre de Dace* (éd. *M. Curtze*, p. 26). Pour *N. Chuquet „le zéro est une figure qui porte le nom de chiffre ou nulle"* [Triparty[87]), fol. 2a; Bull. bibl. 13, p. 593]. *Luc Paciuolo* [Summa de Arithmetica, écrite en 1487, impr. Venise 1494, 2e éd. 1523, fol. 19a] dit: *„nulla 0 over zero"*. On rencontre encore le mot latin de *cyphra*

Il semble acquis que la numération de position avec l'emploi du zéro ne pénétra qu'au 12ᵉ siècle dans l'Europe latine par la traduction de traités arabes d'Arithmétique, en particulier par celle[96]) de l'Art de calculer (Algoritmi de numero Indorum) d'*Alkhovaresmî* (première moitié du 9ᵉ siècle).

Mais déjà au 11ᵉ siècle, les neuf chiffres se rencontrent dans les manuscrits[97]). *Gerbert*[98]) et les Abacistes[99]) en faisaient usage antérieurement à la traduction des traités arabes, surtout pour *marquer les jetons* de l'abaque. Le système des Abacistes différait de celui des Algorithmiciens[100]), disciples des Arabes, en ce que le zéro leur faisait défaut; ils appliquaient, comme eux, le principe de position, mais des colonnes, tracées d'avance et portant en tête les titres d'unité, de dizaine, de centaine, ... recevaient les jetons marqués des chiffres 1, 2, ..., 9; ainsi, dans leur système, les colonnes étaient indispensables pour écrire les nombres. Au 12ᵉ siècle[101]), cette méthode était encore la plus usitée, mais, dès le 13ᵉ, son usage diminue et au 14ᵉ il disparaît complètement. On ne sait pas quelle est l'origine de cette méthode; il n'est toutefois pas impossible qu'au 10ᵉ siècle on sût déjà

dans le sens de 0, à la fin du 18ᵉ siècle [*L. Euler,* Opusc. analytica 1, St. Pétersb. 1783, p. 87].* Les Anglais disent aujourd'hui encore „*cypher*" pour 0.

96) *L'original arabe de cette Arithmétique de *Mohammed ben Mousa Alkhovaresmî* ne nous est pas parvenu; *Atelhard de Bath* (vers 1120) l'a presque certainement traduite; mais la version que nous possédons [ms. Codex Cambridge publ. par *B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 1, Rome 1857] est peut-être de *Gérard de Crémone,* un peu postérieur.*

97) *Aux 9ᵉ et 10ᵉ siècles, on enseignait l'Arithmétique, dans les couvents et les écoles cathédrales, en chiffres romains; depuis la seconde moitié du 10ᵉ siècle l'*abaque à colonnes* s'introduit.*

98) *Pape de 999 à 1003, sous le nom de *Sylvestre II.* Malgré les efforts de *N. Bubnov* [Gerberti, Opera mathematica, Berlin 1899] le rôle joué par *Gerbert* dans l'introd. des chiffres sur l'abaque n'a pu être encore entièrement élucidé.*

99) *En particulier dans les couvents lorrains et wallons de Bénédictins. Le système qui se développe alors, consiste à remplacer sur l'*abaque* (*abacus* des Romains), les jetons-unités par des jetons marqués de chiffres, ce qui permet des opérations analogues aux nôtres. Mais le *pseudo-Boèce*[107]) (éd. *G. Friedlein* de A. M. T. S. Boetii instit.[8]) ..., p. 397), indique que les marques pouvaient être en chiffres romains, en lettres, etc. Une preuve décisive de l'emploi des chiffres arabes dès le temps de *Gerbert* manque encore, quoique très probablement il les ait introduits à l'Ecole de Reims.*

100) *Le nom d'*algorithme* vient du nom même d'*Alkhovaresmî*; *J. T. Reinaud* [Mém. Acad. inscr.[91]) 18², p. 303] l'a soupçonné le premier et cette conjecture a été confirmée, en 1857, par la découverte du Codex de Cambridge[96]).*

101) *Parmi les disciples de *Gerbert,* il faut citer ici *Bernelin* de Paris, *Raoul* (*Radulph*) de Laon, mort en 1131 et leur contemporain *Gerland,* prieur de St. Paul à Besançon.*

dans l'Occident latin quelque chose de la méthode arabe et que, sans en comprendre toute la portée, on ait songé à transformer, en abaques à chiffres, les abaques romains auxquels on était habitué.

La numération de position était connue[102]) à Byzance bien avant que le moine grec *Maxime Planude*[103]) y écrivit son Arithmétique[104]); son emploi y était cependant moins fréquent qu'en Occident.

La question de l'origine de la *figure* de nos chiffres est loin d'être élucidée. Ce qui la complique singulièrement, c'est que chez tous les peuples la forme des chiffres a sensiblement varié[105]) et qu'elle n'est à peu près définitive[106]) que depuis l'invention de l'imprimerie. On sait seulement que nos chiffres actuels semblent dériver des *apices*[107]) dont faisaient usage les Abacistes, et que ces apices et les chiffres dits *gobâr* dont se servaient les Arabes occidentaux à la fin du 10^{e} siècle, offrent une grande ressemblance[108]); les chiffres *gobâr* ont certains traits communs avec les chiffres des Arabes d'Orient; ces derniers ont

---

102) $_*$*J. L. Heiberg,* dans son éd. d'*Euclide*[44]), a donné [5, Leipzig 1888], d'après un ms. grec du 12^{e} siècle (Codex Vindobonensis Gr. 103) de nombreux Scholies où l'on rencontre déjà (Scholies du livre X) des chiffres de forme semblable à celle des Arabes d'Orient. Un scholie du moine *Neophytos* nous dit que chaque chiffre doit être surmonté d'un nombre de petits cercles égal à l'exposant de la puissance de 10 qui le multiplie [cf. *P. Tannery,* Revue archéol. (3) 5 (1885), p. 99; voir aussi id. (3) 7 (1886), p. 355]. C'est le système que *F. Wöpcke* (J. asiatique (6) 1 (1863), p. 69/79, 514/29 a attribué aux Arabes d'Occident sous le nom de chiffres *gobâr.**

103) *Maximus,* surnommé *Planude* (*Πλανούδη*).

104) *ψηφοφορία κατ'Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη* [vers 1300]; texte grec éd. par *C. I. Gerhardt,* Halle 1865; trad. allem. par *H. Wäschke,* Halle 1878, p. 3. $_*$Les chiffres de *Planude* sont ceux des Arabes d'Orient; *P. Tannery* a annoncé l'édition d'une *ψηφοφορία κατ'Ἰνδούς* écrite en 1254, et où les chiffres se rapprochent des formes usitées en Italie à cette date.* *Planude* appelle le zéro *τζίφρα* et le représente „d'après les Hindous" par le symbole 0.

105) $_*$La forme des chiffres 1, 6, 8 et 9 n'a pas *beaucoup* varié chez les Arabes ni chez les chrétiens occidentaux; les chiffres des Arabes occidentaux pour 2, 3 et 5 ont des formes offrant avec les nôtres quelque analogie (3 et 5 sont primitivement retournés aussi bien chez les chrétiens que chez les Arabes occidentaux); mais la forme du 4 et celle du 7 se sont beaucoup modifiées. Les chiffres 5, 6, 7, 8 des Arabes d'Orient diffèrent nettement de ceux des Arabes occidentaux (chiffres gobâr). [102])*

106) $_*$Nous écrivons encore 5 et ʕ pour *cinq.**

107) $_*$Ces *apices* se rencontrent dans la Géométrie[48]) [éd. *G. Friedlein*[8]), p. 397] qu'au moyen âge on attribuait à *Boèce* (qui a vécu vers 500); en réalité le plus ancien manuscrit contenant cette Géométrie est celui d'Erlangen (11^{e} siècle) et il est assez probable que l'original est l'oeuvre d'un faussaire postérieur à *Gerbert*[98]) [cf. *P. Tannery,* Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 42].*

108) *F. Wöpcke*[102]); *G. Friedlein,* Die Zahlzeichen . . ., Erlangen 1869.

d'ailleurs emprunté leurs chiffres aux Hindous; mais les Hindous semblent n'avoir fait usage de chiffres qu'à une époque où ils avaient dû certainement avoir été en contact avec la civilisation grecque[109]).

La question de l'origine des *noms* donnés aux chiffres est tout aussi obscure; on sait seulement que les *noms des apices* dérivent d'une source orientale.

Le mot *chiffre* lui-même signifiait primitivement „zéro". Comme le mot allemand équivalent „Ziffer", il dérive évidemment du mot arabe „ṣifr". Ce n'est qu'à partir du 16ᵉ siècle[110]) que le mot chiffre a pris la signification plus étendue actuelle; auparavant nos chiffres étaient appelés „figures" (figurae, Figuren).

Comme chez les Arabes, la numération de position ne se propagea que lentement dans les pays chrétiens. La plus ancienne monnaie[111]) sur laquelle on rencontre nos chiffres, et non des chiffres romains, semble être une petite pièce d'argent datant de 1458. Ce n'est que depuis la fin du 14ᵉ siècle que l'on commence à rencontrer nos chiffres dans les églises, sur les inscriptions de monuments funéraires[112]). La pagination des livres à l'aide de nos chiffres, se rencontre peut-être pour la première fois dans une édition de *Pétrarque*[113]) imprimée à Cologne en 1471. A la fin du 15ᵉ siècle et surtout au 16ᵉ siècle, le nombre de gens sachant écrire augmente sensiblement; ce n'est qu'alors que notre numération de position commence vraiment à s'implanter dans nos pays.*

Opérations directes et inverses.

10. Généralités sur les opérations. La science des relations des nombres entre eux est l'*Arithmétique*[114]). *Calculer*[115]), c'est déduire[116])

---

109) *P. Tannery,* Revue archéol. (3) 20 (1892), p. 64.*

110) *J. Huswirt,* Enchiridion, Cologne 1504 [cf. *Wildermuth,* Progr. Tubingue 1864/65] emploie le mot chiffre dans les deux sens, le sens actuel et celui de 0. En Portugais, le mot *cifra* a aujourd'hui encore les deux sens de chiffre et de 0.*

111) *[Cf. *G. Wertheim,* Bibl. math. (2) 12 (1898), p. 120]. Elle est représentée dans le Repertorium der steierischen Münzkunde de *F. Pichler,* Gratz 1875. Elle date de 1458; c'est la plus vieille pièce de monnaie que nous possédions avec numération de position.*

112) Cf. *A. G. Kästner,* Gesch. der Math. 1, Göttingue 1796, p. 36.

113) *„Liber de remediis utriusque fortunae", Cologne 1471. L'imprimerie *Petzensteiner* (Nuremberg) pagine, dès 1482, comme nous le faisons aujourd'hui, les traités de mathématiques qui sont sortis de ses presses.*

114) *ἀριθμός*, nombre, collection d'objets *serait, d'après *Michel Bréal,* le même mot qu' *ἀρθμός*, et indiquerait ainsi la liaison ordonnée.*

115) *Du latin *calculus,* trad. exacte du grec *ψῆφος* qui veut dire caillou.*

de nombres donnés dans un système de numération à base donnée, des nombres cherchés écrits dans le même système.

Il est commode, en Arithmétique, de désigner un nombre quelconque par une lettre, étant entendu que cette lettre doit désigner un seul et même nombre quand on reste dans un même sujet. Les premières traces d'un calcul arithmétique avec des *lettres* se trouvent chez les Grecs[117]; on en trouve davantage chez les Hindous[118]. Les Arabes n'ont réalisé, à cet égard, que peu de progrès sur leurs devanciers. Chez les Arabes d'Orient l'emploi des symboles date de la publication de l'*Aljebr walmoukâbala* d'*Alkhovaresmî*[119]. Chez les Arabes d'Occident les symboles n'apparaissent que vers la même époque (12ᵉ siècle) où ils se rencontrent chez les Occidentaux chrétiens; au 15ᵉ siècle *Alkalṣâdi*[120] augmente le nombre de ces symboles.

Le calcul proprement dit, au moyen de lettres désignant aussi bien les quantités connues que les quantités inconnues, l'usage du signe[121] d'égalité[122] $=$, des signes[123] d'inégalité $>$, $<$, et des signes

---

116) *En s'*épargnant,* dans la mesure du possible, de compter directement [*E. Mach,* Die Mechanik, 2ᵉ éd. Leipzig 1889, p. 458; trad. *E. Bertrand,* Paris 1904, p. 454].*

117) Les lettres servent d'*abréviation* dans l'Arith. de *Diophante* (vers + 300) [Opera, éd. *P. Tannery,* 1, Leipzig 1893; 2, Leipzig 1895]; *mais il n'y a de symbolisme systématisé que pour une seule quantité, ses puissances jusqu'à la sixième et leurs inverses. Pour raisonner sur plusieurs quantités différentes, et indiquer les opérations, les Grecs représentaient d'ordinaire ces quantités par des lignes (désignées chacune par une ou par deux lettres) et les opérations se notaient comme en Géométrie.*

118) *Âryabhaṭa* (né en 496). Les chap. math. de *Brahmagupta* (né en 598) et de *Bhâskara Ačârya* (né en 1114) ont été trad. en anglais par *H. T. Colebrooke* [Algebra with arithmetic ... [85]), Londres 1817].

119) *C'est peut-être le plus ancien traité arabe d'Algèbre (9ᵉ siècle). Trad latine, [ms. bibl. nationale] due peut-être à *Gérard de Crémone* (12ᵉ siècle) publiée par *G. B. I. T. Libri,* Hist. math. en Italie 1, Paris 1838, p. 253; 2ᵉ éd. Halle 1865. Texte arabe et version anglaise par *F. Rosen,* Londres 1831 [cf. *L. Rodet,* J. asiatique (7) 11 (1878), p. 21]. L'origine de cette Algèbre semble plus grecque qu'hindoue: Les deux mots arabes qui forment le titre de l'ouvrage correspondent d'ailleurs à deux opérations nettement prescrites par *Diophante* pour le traitement des équations (à une inconnue); le *jebr* (restitution) consiste à faire passer d'un membre dans l'autre les termes affectés du signe —; la *moukâbala* (opposition) consiste à réduire d'un membre à l'autre les termes semblables.*

120) *Mort en 1486; *F. Wöpcke* a trad. son traité d'Arith. [Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei 12 (1858/59), p. 230, 399].*

121) *Dans le *papyrus Rhind*[51]), le signe d'égalité est un scarabée, hiéroglyphe qui signifie „devient" (trad. *A. Eisenlohr* 1, par ex. p. 49/53; planche IX; n° 6). *Diophante* représentait l'égalité par les initiales *ἴσ* du mot *ἴσος* (égal) [Opera[117]) 1, p. 102, 112, 126, ...]. Les Arabes faisaient, de même, usage de

d'opération, remontent au 15e siècle et se sont répandus d'abord en Allemagne (Regiomontanus) et en Italie. Le pas décisif est fait par *François Viète*[124]) qui remplace systématiquement l'Algèbre numérique par l'Algèbre des symboles. Ses successeurs se sont bornés à remplacer ses notations assez compliquées par des notations plus simples, plus pratiques et plus élégantes[125]). Depuis *L. Euler,* le symbolisme arithmétique est resté à peu près le même.

*On a déjà parlé de l'égalité de deux nombres naturels et des opérations[116]) de calcul sur ces nombres[126]). Les idées d'égalité et d'opérations s'étendent d'ailleurs à d'autres objets que les nombres naturels. Notons que toute définition de l'égalité[127]) doit satisfaire aux conditions suivantes: 1°) $a = a$; 2°) l'égalité $a = b$ entraîne l'égalité $b = a$; 3°) les égalités $a = c$, $b = c$ entraînent $a = b$. Il est nécessaire de satisfaire à ces conditions[128]) dans les extensions successives de la notion de nombre.

---

l'initiale du *lâm* final du mot signifiant égal [cf. *F. Wöpcke*[120]), p. 420. *F. Viète* emploie le verbe *aequare*; *A. Girard* écrit *esgale.* Depuis *Viète* jusqu'à *Leibniz* et même encore jusqu'au milieu du 18e siècle, on rencontre le signe d'égalité $\propto$, déformation des lettres initiales *ae* de *aequare.**

122) Le signe = se rencontre pour la première fois dans l'ouvrage de *R. Recorde,* „The whetstone of witte", [Londres s. d. [préface 1557], sign. *Ff*1] qui dit le choisir „parce que rien ne peut être plus égal que deux petits traits parallèles". Adopté par *J. Wallis,* il a peu à peu, mais très lentement, remplacé tous les autres. *En France, où *F. Viète* et *R. Descartes* avaient donné un autre sens aux deux traits parallèles horizontaux[145]), on désigne fréquemment, dans la seconde moitié du 17e siècle, l'égalité par deux traits parallèles verticaux.*

123) *Les signes $>$ et $<$ ne se trouvent pas avant *T. Harriot* [Artis analyticae praxis, Londres 1631, p. 10]; les signes $\geqq$, $\leqq$ sont de *P. Bouguer* [Corresp. math. phys. (d'*Euler,*...) publ. par *P. H. Fuss* 1, St. Pétersb. 1843, p. 304].*

124) *In artem analyticam isagoge, Tours 1591; Opera, éd. *F. Schooten,* Leyde 1646, p. 1; trad. *F. Ritter,* Bull. bibl. storia mat. 1 (1868), p. 228. Voir aussi *F. Ritter,* Assoc. fr. avanc. sc. 21 (Pau) 1892², p. 178.*

125) *Pour $\mathrm{A}^3 + \mathrm{BA}^2 + \mathrm{CA} = \mathrm{D}^2\mathrm{F}$, *F. Viète* écrivait $Ac + B$ in $Aq + Cpl$ in A $aeq \cdot Dq$ in F.*

126) Une analyse des *concepts* „égal, plus, moins, plus grand et plus petit" se trouve dans *E. G. Husserl*, Philos. der Arith.[15]), chap. 5 et 6.

127) *Toute définition de l'inégalité doit satisfaire aux conditions suivantes:
1°) L'inégalité $a > b$, entraîne l'inégalité $b < a$; celle-ci entraîne la première.
2°) L'inégalité $a > b$ et l'égalité $b = c$ entraînent l'inégalité $a > c$; l'inégalité $a < b$ et l'égalité $b = c$ entraînent l'inégalité $a < c$.
3°) Les inégalités $a > b$, $b > c$, entraînent l'inégalité $a > c$.*

128) *E. Schröder* [Abriss der Arith. und Alg. 1, Leipzig 1874] a cherché à mettre d'accord le point de vue pédagogique et le point de vue logique, en se préoccupant de l'enseignement à donner aux commençants. Cela a été fait plus explicitement par *H. Schubert* dans ses livres d'enseignement [Sammlung von

Une opération consiste toujours à déduire de plusieurs objets donnés un objet ou un système d'objets. L'opération est dite *univoque* lorsqu'elle n'a qu'un résultat. Toutes les opérations que l'on définira en Arithmétique seront univoques; chacune d'elles ne comportera donc qu'un résultat et doit fournir des résultats égaux quand on remplace les données par des données égales[129]).*

Si le signe $\uparrow$ est regardé comme indiquant une opération quelconque à effectuer sur deux quantités quelconques a, b, dont le résultat soit une quantité déterminée, cette opération est dite *commutative* lorsque l'on a $a \uparrow b = b \uparrow a$; elle est dite *associative* lorsque, c désignant une troisième quantité quelconque, on a $[a \uparrow b] \uparrow c = a \uparrow [b \uparrow c]$, en convenant d'entendre par chaque crochet le résultat de l'opération indiquée dans le crochet. Si ensuite $\downarrow$ est le signe d'une autre opération (quelconque), celle-ci est dite *distributive* par rapport à la première si l'on a $[a \uparrow b] \downarrow c = [a \downarrow c] \uparrow [b \downarrow c]$; la première serait distributive par rapport à la seconde, si l'on avait $[a \downarrow b] \uparrow c = [a \uparrow c] \downarrow [b \uparrow c]$.

On conçoit d'ailleurs que l'on puisse faire une théorie des opérations[130]) satisfaisant aux lois précédentes ou à quelques-unes d'entre

---

arith. und alg. Fragen..., Potsdam 1883, 4e éd. 1896; System der Arith., Potsdam 1885; Arith. u. Alg. (Sammlung *Göschen*), Leipzig 1896, 1898; Elem. Arith. und Alg. (Sammlung *Schubert*), Leipzig 1899].

129) On a beaucoup varié sur celles des opérations qu'il y a lieu de regarder comme fondamentales. *Les Hindous avaient 6 opérations fondamentales: l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances, l'extraction des racines. *Alkhovaresmî* [Algoritmi de numero indorum[95]), ms. Codex Cambr., car. 105a; *B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 1, p. 10] parle de la *dimidiation* et de la *duplication* comme de deux opérations spéciales; on trouve aussi parfois chez les Arabes la division du plus petit par le plus grand, séparée de la division proprement dite [cf. *H. Suter,* Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 17]. D'une façon générale, on peut dire qu'à la suite de *Léonard de Pise,* les arithméticiens-marchands n'ont pas envisagé la dimidiation et la duplication comme des opérations spéciales, tandis qu'à la suite de *Jordan Nemorarius*[95]) [Algorismus, éd. *J. Schöner,* p. 7] et de *Sacrobosco*[95]), les arithméticiens de l'Ecole les ont soigneusement distinguées de la division et de la multiplication. Dans son Algorismus qui a été longtemps le manuel courant dans les universités, *Sacrobosco* envisage sous le nom de *progressio* une 9e opération qui ne consiste d'ailleurs qu'en sommations de suites particulières de nombres. *N. Chuquet* dans son Triparty[87]), et *Luc Paciuolo* dans sa Summa[95]), ne mentionnent même pas la dimidiation et la duplication comme opérations spéciales; *Paciuolo* donne (fol. 19a) sept opérations: numération, addition, soustraction, multiplication, division, progression, extraction de racines. L'origine de la distinction de la dimidiation et de la duplication comme opérations spéciales est sans doute égyptienne et a dû être transmise aux Arabes par voie grecque (cf. *M. Cantor,* Vorles.[48]) 1, p. 46, 674).*

130) On pourra consulter sur la théorie des opérations *H. Grassmann,* Aus-

elles et s'appliquant soit à des nombres entendus d'une façon plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'ici, soit à d'autres objets que les nombres. C'est ce que l'on fait, en particulier, dans l'Arithmétique formelle, le Calcul logique et l'Algèbre des concepts[131]). On peut, par exemple, convenir que $a \uparrow b$ signifie tout ce qui est à la fois a et b, $a \downarrow b$ tout ce qui est a ou b; la loi de distributivité a alors lieu sous les deux formes que l'on vient de citer[132]).

11. Principe de permanence. Supposons qu'on ait défini une *classe* A de nombres ou d'objets et, pour les objets de cette classe A, l'égalité, l'inégalité et certaines opérations univoques. Soit $a \uparrow b$ une de ces opérations qui, effectuée sur deux objets quelconques a, b de la classe A donne toujours pour résultat un objet c de la même classe A; cette opération sera dite *possible* relativement à la classe A.

Si l'on se donne maintenant le résultat c de l'opération et l'un des deux nombres a, b, on peut se proposer de trouver l'autre, d'où *deux* opérations *inverses* de l'opération proposée considérée comme *directe*. Si l'on se donne par exemple c et b, on pourra représenter l'opération qui donne a, par le symbole $c \downarrow b$; en d'autres termes, l'opération $c \downarrow b$ est définie par l'égalité $[c \downarrow b] \uparrow b = c$.

Lors même que l'opération directe est toujours possible, l'opération inverse peut ne l'être que sous certaines conditions. Dans le cas où elle n'est pas possible, on peut conserver la même écriture $c \downarrow b$ qui sert pour en désigner le résultat lorsqu'elle est possible, constituer avec ces écritures et les nombres ou objets de la classe A une nouvelle classe de nombres ou objets B, puis définir à nouveau l'égalité, l'inégalité et des opérations sur les objets de la classe B, de manière que ces définitions se réduisent aux définitions relatives aux éléments de la classe A lorsqu'on n'opère que sur ces éléments et non sur les symboles qui complètent la classe B. Dans le choix de ces définitions on est, en outre, guidé par le souci de conserver autant que possible les lois formelles qui s'appliquent aux éléments de la classe A.

Lorsque les objets de la classe A sont des *nombres*, on convient

---

dehnungslehre Leipzig 1844, Berlin 1862, Leipzig 1878; Werke 1, Leipzig 1894/6; *H. Hankel*, Theorie der complexen Zahlsysteme, Leipzig 1867; **G. J. Houël*, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 1 (1876), p. 1; (2) 5 (1883), p. 149; Théorie élém. des quantités complexes, Paris 1874, p. 293; *O. Stolz* und *J. A. Gmeiner*, Theor. Arith., Leipzig 1900/2, p. 37 et suiv.*

131) Pour ce qui est de l'Algèbre des concepts (Begriffsschrift) voir surtout les ouvrages de *G. Frege*[36]) et de *G. Peano*[20]).

132) C'est ce que remarque *E. Schröder*, „Der Operationskreis des Logikcalcüls", Leipzig 1877.

souvent d'appeler encore *nombres* tous les objets de la classe B, et l'on dit, à tort ou à raison, qu'on a *étendu* l'idée de nombre. On peut d'ailleurs obtenir de la même façon des extensions successives de l'idée de nombre.

C'est à ce *procédé* que l'on a donné le nom de *principe de permanence*[133]).

Opérations de rang un.

12. Addition. *Le nombre cardinal, considéré comme une intuition, implique la notion d'addition.* Deux collections (nombres) étant données, on conçoit que chaque unité restant distincte des autres unités, elles soient réunies en une seule collection, dont les collections primitives sont des parties. La collection ainsi obtenue (qui ne peut être égale en nombre à une de ses parties) est la *somme* des collections primitives; son nombre est la somme des nombres donnés[134]). A ce point de vue, on regarde comme évident que la somme ne dépend pas de l'ordre de ses parties; elle est plus grande que chacune de ses parties et chaque partie est plus petite que la somme.

Une collection finie quelconque peut être constituée en réunissant les objets un à un, ou détruite en supprimant les objets un à un. La suite naturelle des nombres s'obtient en partant du nombre *un*[135]);

---

133) Ce principe a été donné pour la première fois sous sa forme générale par *H. Hankel* [complexe Zahlsyst. [130]), p. 10]; *G. Peacock* avait d'ailleurs reconnu la nécessité d'une mathématique purement formelle et avait, à ce propos, énoncé un principe dont celui de permanence est une généralisation (Report Brit. Assoc. 3, Cambridge 1833, éd. Londres 1834, p. 195; Treatise on Algebra, Cambridge 1830, p. 105; 2e éd. 2, Cambridge 1845, p. 59).

*On nomme habituellement *directes* l'addition, la multiplication, l'élévation aux puissances. La soustraction, la division, l'extraction des racines et la recherche des logarithmes, en sont respectivement les opérations *inverses*. D'après *H. Hankel*, les opérations directes appartiennent au mode de liaison qu'il appelle *thétique* et leurs opérations inverses au mode *lytique*. De la liaison *thétique* $a \bowtie b = c$ résultent les deux liaisons *lytiques* $c \top a$ et $c \perp b$. On trouve dans *O. Stolz* und *J. A. Gmeiner*[130]), une étude logique des conditions sous lesquelles une liaison thétique entre deux objets a, b ayant toujours un sens, mais non la liaison lytique correspondante, il est possible de créer, comme dans la théorie des nombres négatifs (nº **17**) et dans celle des nombres fractionnaires (nº **21**) un nouveau symbole composé de deux éléments, auquel s'applique le principe de permanence.*

134) Entre compter et ajouter, la différence consiste seulement dans la non-réunion, ou réunion, de plusieurs groupes d'unités en un seul.

135) **G. Cantor* [Math. Ann. 46 (1895), p. 489; trad. *F. Marotte,* Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (5) 3 (1899), p. 353] développe ce procédé de formation des nombres cardinaux (finis) qui les rapproche manifestement des nombres ordinaux, de manière à lui donner la précision logique dont il est susceptible.*

le nombre suivant est *un et un*, . . .; chaque nombre s'obtient en ajoutant *un* à celui qui le précède. Chaque nombre est une partie de ceux qui le suivent; chaque nombre est plus grand que ceux qui le précèdent.

Pour indiquer qu'un nombre c est la somme des deux nombres a et b, on écrit $c = a + b$; le signe $+$ qui sépare les deux *termes* a et b de la *somme* c, peut être regardé comme impliquant une idée de *succession*; il s'énonce „plus"[136]).

Du postulat de l'invariance du nombre contenu dans l'idée de *compter*, résulte d'une part qu'il n'y a qu'une somme de deux nombres (*univocité* de l'addition) et que $a + b$ est égal à $b + a$ (*commutativité*[137]) de l'addition)[138]). De la définition de l'inégalité (plus grand et plus

---

136) *L'usage de ce signe, ainsi que [145]) celui du signe —, est assez récent. On rencontre ces deux signes imprimés pour la première fois dans le Compendium arithmeticae mercatorum de *Jean Widman* (d'Eger), Leipzig 1489, fol. 85, 86, 110 „Behēde und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft" [cf. Bull. bibl. storia mat. 9 (1876), p. 188]. On les rencontre aussi dans un ms. de la bibl. de Vienne „Regulae cosae vel algebrae", écrit sûrement avant 1510, dans le Traité de calcul de Grammateus „Ayn new künstlich Buech . . .", Nuremberg 1521/28 et dans la *Coss*[144]) de son élève *Chr. Rudolff*, Strasbourg 1525. L'Arithmetica integra de *M. Stifel*, Nuremberg 1544, a vulgarisé l'usage de ces signes; au 17e siècle ils n'étaient toutefois pas encore universellement adoptés.

On ne sait rien de certain sur l'origine du signe $+$, mais on possède des chartes et des manuscrits où la conjonction „et" est représentée par une forme spéciale de la lettre t, parfois avec un trait plus ou moins court, en haut à gauche, se raccordant avec la barre verticale du t (chartes liégeoises de 1298, 1383, . . .); ce trait manque toutefois souvent (Bibl. Darmstadt, ms. 2640, 13e siècle, fol. 108). Aux 15e et 16e siècles on se servait d'ailleurs plutôt du mot „et" que du mot „plus" [cf. *C. Le Paige*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 16^2 (1891/92), p. 74]. D'autres conjectures ont été émises par *A. de Morgan* [Trans. Cambr. philos. Soc. 11 (1871), p. 203, [1864]] et *Ch. Henry* [Revue archéol. (2) 38 (1879), p. 3].

Léonard de Pise écrit souvent „et", rarement „plus", pour indiquer l'addition [cf. Liber abbaci 1202; dans le texte qui nous est parvenu et qui est de 1228, fol. 191b; Scritti di *L. Pisano* pubb. da *B. Boncompagni* 1, Rome 1857, p. 414]; il écrit „minus" pour indiquer la soustraction. [Sur l'origine des locutions „plus" et „minus" voir *G. Eneström*, Interméd. math. 1 (1894), p. 119 (Question 5) et Bibl. math. (2) 13 (1899), p. 105.] *N. Chuquet* et *Luc Paciuolo* emploient les signes $\bar{p}$ ou $\tilde{p}$ et $\bar{m}$ ou $\tilde{m}$ pour plus (più) et moins (meno, minus), [Triparty[87]), fol. 62b, Bull. bibl. 13, p. 710; Summa[95]), fol. 92, . . .; la conjecture suivant laquelle le signe $+$ serait une abréviation du mot „plus" semble toutefois peu probable [cf. *A. de Morgan*, Arithmetical Books, Londres 1847, p. 19].*

137) L'expression *„commutative"* est due à *F. J. Servois* [Ann. math. pures appl. 5 (1814/15), p. 98].

138) La loi de commutation n'empêche pas, si l'on veut, de distinguer entre le premier et le second terme d'une somme de deux termes; le premier est alors

petit) et de celle de l'addition, il résulte immédiatement qu'une somme est plus grande que chacune de ses parties; (elle est plus grande du nombre d'unités contenues dans la seconde partie). Lorsque a est plus grand que b, on peut envisager a comme une somme de deux nombres dont l'un est b. De même qu'il n'y a qu'une somme de deux nombres a et b, de même il n'y a qu'un nombre b qui, ajouté à un nombre a, ait pour somme un nombre c donné plus grand que a.

L'idée de compter entraîne l'égalité $(a + b) + c = a + (b + c)$, où les parenthèses[139]) indiquent que l'on a préalablement ajouté les nombres qui y sont contenus. La loi qu'exprime cette égalité est la loi d'*association*[140]).

Si à une somme de deux nombres a_1, a_2 on ajoute un troisième nombre a_3; si à la somme ainsi obtenue on ajoute un quatrième nombre a_4, et ainsi de suite un nombre fini quelconque de fois, la dernière somme $s = \{[(a_1 + a_2) + a_3] + \cdots\} + a_n$ que l'on obtient ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a pris les nombres a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$; on le démontre en appliquant les deux lois réunies d'asso-

---

envisagé comme *passif* (destiné à être augmenté), le second comme *actif* (destiné à augmenter). Cette distinction entre le terme actif et le terme passif pourra être employée avec avantage pour toutes les opérations qui portent sur deux nombres *[*K. H. Liersemann,* Lehrb. Arith. und Alg., Leipzig 1871, p. 1]*. On la rencontre dans *E. Schröder,* Lehrb. [5]) 1, p. 121; pour l'addition, il appelle *„Augend"* le nombre passif, *„Increment"* le nombre actif; *H. Schubert* appelle ce dernier *„Auctor"* [Elem. Arith. und Alg., Leipzig 1899, p. 19]. *La langue française ne possède pas de mots particuliers correspondants; l'emploi des termes *passif* et *actif* permet toutefois de distinguer les deux termes de la somme (les *ingrediens* de *A. Girard,* Inv. [87]), sign. A_1).*

139) *L'emploi de nos parenthèses (rondes) pour grouper les termes, semble dû à *A. Girard* [Inv. [87]), sign. E_1 recto, B_3 verso, C_1 recto]; pour indiquer la racine carrée de $2 + \sqrt{3}$, il écrit, en effet, $\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$; *mais là où nous écrivons* $7 - (-2)$, il écrit encore $7 - - 2$ [Inv. [87]), sign. E_1]. Déjà *R. Bombelli* [L'Algebra, Bologne 1572; 2e éd. Bologne 1579, p. 6] avait fait usage de sortes de crochets pour grouper les termes; *F. Viète* indiquait le groupement des termes par une accolade [cf. Zeteticorum libre quinque, Tours 1593, livre 4, Zététique 10, fol. 18a; Opera, éd. *F. Schooten* [124]), p. 70]; mais on trouve des parenthèses rondes dans la trad. des 5 livres des Zététiques de *F. Viète,* par *J. L. de Vaulezard,* Paris 1630, à la p. 218 par ex.

R. Descartes et ses disciples mettaient parfois une barre au dessus des termes que nous mettons entre parenthèses. Bien avant *R. Descartes, N. Chuquet* mettait une barre *en dessous* des termes qu'il voulait isoler des autres, en les réunissant [Triparty [87]), fol. 46a, 46b; Bull. bibl. 13, p. 655]. *G. Peano* a proposé de remplacer les parenthèses par des points.*

140) Cette loi n'a été mise en évidence pour les sommes et les produits qu'au 19e siècle. Le terme *associatif* semble avoir été introduit par *W. R. Hamilton.*

ciation et de commutation. Rien n'empêche donc de nommer s la *somme* de tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$; on désigne cette somme simplement par le symbole $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; chacun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un *terme* de la somme.

*L'addition peut aussi être définie, et ses propriétés établies, en se plaçant au point de vue ordinal; la suite naturelle sert alors de point de départ. Ajouter 1 au nombre a, c'est remplacer a par le *numéro* qui le suit; si l'on sait ce qu'est a, on sait donc ce qu'est $a + 1$. En supposant que la somme $a + b$ obtenue en ajoutant le nombre b au nombre a soit définie, la somme obtenue en ajoutant le nombre $b + 1$ à a sera, par définition, le nombre qui suit $a + b$; en d'autres termes on a, par définition, $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

D'après cela[141], quel que soit le nombre b, la somme $a + b$ se définira de proche en proche. De ces définitions on déduit, par induction, les théorèmes qu'expriment les égalités

$$a + b = b + a, \qquad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Le signe 0 ne figure pas dans la suite naturelle des nombres. Rien n'empêcherait de le faire figurer à la tête de cette suite et d'adopter, pour définir $0 + a$, le procédé général, lequel conduit à regarder a comme le résultat de l'opération $0 + a$. A cette définition on adjoindra ensuite celle qu'exprime l'égalité $a + 0 = a$ qui subsiste même quand a est 0.*

En résumé les propositions de commutation et d'association constituent les propriétés fondamentales de l'addition.

13. *__Progression arithmétique__[142]. On appelle *progression arithmétique* une suite de nombres

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

dont chacun est égal au précédent augmenté d'un *même* nombre au-

141) **H. Grassmann* avait reconnu [Lehrb. der Arith., Berlin 1861, p. 2/10] que les règles de l'addition, (et celles de la multiplication p. 17/28), des nombres naturels résultent de cette double convention. Voir aussi *H. von Helmholtz,* Abh. [14]) 3, p. 363; Philos. Aufs. [14]), p. 24; *F. Klein,* Math. Ann. 37 (1890), p. 572; *H. Poincaré,* Revue métaph. 2 (1894), p. 375; La science et l'hypothèse, Paris s. d. [1903], p. 15.*

142) **Ahmès* déjà envisageait des progressions arith. très simples [*papyrus Rhind* [51]), trad. *A. Eisenlohr* 1, p. 89/92, 159/162; planches XIV, XIX; n° 39, 40, 64]; les Pythagoriciens aussi [cf. *Théon de Smyrne,* Exposition des connaissances math. . . , éd. *J. Dupuis,* Paris 1892, p. 64/69]. *Léonard de Pise* donne la formule de sommation d'une progression arithmétique quelconque [Liber abbaci [136]), fol. 70, éd. *B. Boncompagni* 1, p. 166/68]. Elle était connue des Grecs; *Diophante* en donne une démonstration [De polygonis numeris, γ; Opera [117]) 1, p. 456].*

quel on donne le nom de *raison* de la progression. Si l'on désigne cette *raison* par r, on a donc pour $i = 2, 3, \ldots, n$,

$$a_i = a_{i-1} + r = a_1 + (i-1)r.$$

Si l'on désigne par s_n la somme des n *termes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'une progression arithmétique de raison r, on a

$$s_n = \tfrac{1}{2}\, n\,(a_1 + a_n) = n\,[a_1 + \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,r].$$

Dans le cas particulier où $a_1 = 1$, on dit (à cause de l'interprétation géométrique que l'on en peut donner) que s_n est le n^e *nombre polygonal* de $r + 2$ côtés; on désigne généralement ce nombre par le symbole $\mathrm{P}_n^{(r+2)}$. Le n^e nombre *triangulaire* est $\mathrm{P}_n^{(3)} = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$; le n^e nombre *carré* est $\mathrm{P}_n^{(4)} = n^2$; le n^e nombre *pentagonal* est

$$\mathrm{P}_n^{(5)} = \tfrac{1}{2}\, n\,(3n-1);$$

le n^e nombre *hexagonal* est $\mathrm{P}_n^{(6)} = n\,(2n-1)$; ... en général le n^e nombre polygonal de r côtés est

$$\mathrm{P}_n^{(r)} = n + \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\,(r-2).$$

Dans le cas où n serait négatif ou nul, on peut définir $\mathrm{P}_n^{(r)}$ par cette égalité[143]), pour tout entier $r \geqq 3$.

On appelle *nombres figurés d'ordre* 1, les nombres naturels 1, 2, 3, ...; on appelle *nombres figurés d'ordre* 2, les nombres *triangulaires* 1, 3, 6, ...; la somme des n premiers nombres figurés d'ordre 1 est le n^e nombre figuré d'ordre 2. On dit, de même, de la somme des n premiers nombres figurés d'ordre 2, qu'elle représente le n^e *nombre pyramidal* ou, plus proprement *tétraédral*, ou encore le n^e *nombre figuré d'ordre* 3, et l'on définit ensuite successivement, par le même procédé, les nombres figurés d'un ordre quelconque (entier positif) m, en appelant n^e *nombre figuré d'ordre* m, la somme des n premiers nombres figurés d'ordre $m - 1$.*

14. Soustraction. La soustraction est une opération inverse. Elle a pour but, étant donnés deux nombres a, b, de trouver le nombre inconnu x qui vérifie l'égalité $a = b + x$.

Une pareille égalité qui contient une ou plusieurs lettres, telle qu'ici x, représentant des nombres dont la valeur est inconnue[144]), et

143) *Cf. *A. Berger,* Nova Acta Upsal. (3) 17 (1898), mém. n° 3.*

144) *Les Égyptiens employaient l'hiéroglyphe représentant un „*tas*" pour désigner l'inconnue.* Chez *Diophante*, l'inconnue est représentée par le symbole ϛ' [Opera [117]) 1, p. 4, ...]. *Les Arabes appelaient l'inconnue „*schaï*" (la chose) ou *jidr* (racine). Le second de ces mots a été traduit par *radix,* qui prédomine au 12e siècle, le premier par *res,* qui l'emporte au contraire à partir de *Léonard de Pise.* Le mot arabe signifiant *racine* est la traduction d'un mot

qui n'est vraie que pour certaines valeurs attribuées à ces inconnues est ce qu'on appelle une *équation. Résoudre* une équation à une inconnue, c'est déterminer les valeurs qu'il faut donner à cette inconnue pour *vérifier* l'équation. Au contraire, si l'égalité est vraie pour *toutes* les valeurs attribuées aux lettres qui y figurent et représentent des nombres dont la valeur est inconnue, l'égalité prend le nom d'*identité*.

Le problème de la soustraction n'est possible que si a est supérieur à b; *(si l'on a introduit 0 comme nombre, il faut dire: le problème de la soustraction n'est possible que si a est supérieur ou égal à b, et, dans ce dernier cas, x est égal à 0)* le problème supposé possible n'admet qu'une solution: c'est la différence entre a nombre *passif* et b nombre *actif*; elle se représente par $a - b$; le signe $-$ s'énonce „moins“[145]). Le nombre $a - b$ est défini par la formule

$$b + (a - b) = a.$$

---

hindou de même sens, appliqué à la racine carrée. *Alkhovaresmî*, en traitant des équations quadratiques avait dit *jidr* (racine), par opposition au carré, en arabe *mâl* (*δύναμις*, richesse), traduit au moyen âge par *census*. Quant au mot *res*, les Italiens l'ont traduit par *cosa*, mot dont les Allemands ont fait *cossa* à la fin du 15e siècle, puis *coss* au 16e siècle. *Luc Paciuolo* désigne x^1 par le symbole *co* (Summa [95]), fol. 67b); les cossistes allemands font usage d'un signe formé par contraction de ce signe *co*, ou peut être parfois du mot *radix*. *F. Viète* désignait les inconnues par des voyelles [Isagoge [124]), fol. 7a, éd. *F. Schooten*, p. 8; trad. *F. Ritter*, p. 237]; *A. Girard* et *P. Fermat* suivent encore l'exemple de *F. Viète*. C'est à *R. Descartes* [Géométrie, Leyde 1637, p. 4, 5, 6; Œuvres, éd. *Ch. Adam* et *P. Tannery* 6, Paris 1902, p. 373, 375], que l'on doit l'usage, universellement adopté aujourd'hui, de désigner les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet $z, y, x, \ldots$ L'hypothèse d'après laquelle *R. Descartes* aurait pris pour un x, le symbole des Cossistes allemands est loin d'être vraisemblable; celle d'après laquelle il aurait fait dériver x du signe employé par *P. A. Cataldi* [Trattato dell' Algebra..., Bologne 1610, Trattato del modo brevissimo..., Bologne 1613] ne semble guère plus probable*.

145) *Au lieu de ce signe, *Diophante* [Opera [117]) 1, p. 12], et avant lui *Héron* dans ses *Μετρικά* [Heronis Alexandrini Opera 3, éd. *H. Schöne*, Leipzig 1903, p. 156, annotation critique], a employé un signe ⋔ qu'il désigne comme un *psi* tronqué et renversé, et qui est probablement un *σαμπῖ* [55]) archaïque. Les Byzantins (*Maxime Planude*?) l'ont énoncé sous une forme invariable: *λείψει*, suivie du génitif. Mais dans l'antiquité, il représentait plutôt le participe *λιπών*, avec ses différents cas, suivi de l'accusatif (laissant.....). [Note ms. de *P. Tannery*].

On ne sait rien de certain sur l'origine du signe —; c'est peut être une simple barre servant aux marchands pour séparer l'indication de la tare, appelée longtemps *minus*, de celle du poids total de la marchandise; d'après *L. Rodet* [Actes Soc. philol. Alençon 8 (1879), p. 105] ce signe serait copié sur un signe hiératique égyptien. On a aussi cherché l'origine de notre signe — dans le signe employé par *Héron* et *Diophante* et qui se serait transformé en $\top$ avant

De la définition de la soustraction et de son caractère univoque, on déduit l'égalité $(a+b)-b=a$.

Le symbole $a-b$ n'a, pour le moment, aucun sens quand a est inférieur à b. Les égalités

$$a=b+c,\quad a-b=c,\quad a-c=b,$$

ont exactement le même sens; si l'un des nombres a, b, c est une inconnue, cette inconnue peut ainsi être *isolée*.

15. Combinaison de l'addition avec la soustraction. La définition de la soustraction, jointe aux propriétés de l'addition (associativité, commutativité) permet d'établir les trois formules

$$a+(b-c)=(a+b)-c;\quad a-(b+c)=(a-b)-c;$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c;$$

où l'on suppose toutefois un sens à $b-c$ pour la première, à $a-(b+c)$ pour la seconde, à $b-c$, $a-b$ pour la troisième. Sous le bénéfice de ces suppositions, ces égalités peuvent d'ailleurs être lues, soit de gauche à droite, soit de droite à gauche. En leur adjoignant la formule d'association pour l'addition, on a soit les règles pour ajouter à un nombre, ou pour en retrancher, une somme ou une différence, soit les règles pour ajouter un nombre à une somme ou à une différence, ou pour l'en retrancher. On en conclut que dans une suite d'additions ou de soustractions à effectuer, on peut faire les opérations dans tel ordre que l'on veut, pourvu qu'elles soient possibles dans cet ordre; on déduit enfin les règles relatives à l'inégalité qu'on peut conclure, par soustraction membre à membre, soit d'une égalité et d'une inégalité, soit de deux inégalités.

Dans l'écriture des formules d'Arithmétique, on a pris l'habitude, pour ce qui est des opérations d'addition et de soustraction, d'écrire les nombres et les signes d'opération, dans l'ordre où l'on entend que les opérations soient effectuées, en allant de gauche à droite *sans mettre de parenthèses*: un signe $+$ ou $-$ qui précède des quantités mises entre parenthèses, veut dire que les opérations sur les quantités mises entre parenthèses doivent être effectuées avant l'addition ou la sous-

---

de devenir —. D'autres ont émis l'hypothèse que le signe — aurait son origine dans l'ὀβελός des grammairiens alexandrins. Aucune de ces hypothèses n'est appuyée de preuves plausibles.

Pendant longtemps on a écrit $\div$ au lieu de —; au 17e siècle on rencontre encore le signe $\div$ dans les Pays-Bas. *F. Viète* n'écrivait $a-b$ que pour $a>b$; il désigne par $a=b$ la valeur absolue de la différence de a et de b, c'est à dire $a-b$ si $a>b$ ou $b-a$ si $a<b$ [cf. Isagoge [124]), fol. 5; éd. *F. Schooten*, p. 5; trad. *F. Ritter*, p. 233].*

traction qu'indique ce signe[146]). Ainsi la loi d'association et les trois formules précédentes doivent s'écrire

$$a+(b+c)=a+b+c; \quad a+(b-c)=a+b-c;$$
$$a-(b+c)=a-b-c; \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

16. Zéro. *Lorsqu'on n'a pas introduit *zéro* comme un nombre*, on peut introduire zéro en appliquant le principe de permanence (n° **11**).

Observons d'abord, en nous plaçant dans le cas où la classe A du n° **11** est formée des nombres naturels, que des lois de l'addition et de la soustraction il est aisé de déduire, quand a, b, n désignent des nombres naturels tels que l'on ait $a > b > n$, la formule

$$a-b=(a \pm n)-(b \pm n)$$

où les signes se correspondent. Si l'on veut continuer à écrire cette formule dans le cas où b est égal à a, il faut regarder $(a \pm n)-(a \pm n)$ comme étant égal à $(a-a)$, et, par suite, tous *les symboles* $(a-a)$ *comme étant égaux entre eux, quel que soit* a. *Cette définition satisfait aux conditions imposées à toute définition de l'égalité.* Il est naturel de représenter tous ces symboles égaux $(a-a)$ par un même signe; on choisit 0 pour ce signe[147]), on convient de l'appeler encore *nombre* et on lui donne le nom de *zéro.*

On a ainsi formé une classe B de nombres plus étendue que la classe A des nombres naturels. *Dans cette classe B, zéro est regardé comme plus petit que tous les nombres naturels, qui sont regardés comme plus grands que lui.*

Si, dans le cas où b est égal à c, on veut continuer à écrire la formule

$$a+(b-c)=a+b-c,$$

---

146) *E. Schröder* [Lehrb. [3]) 1, p. 217/21] généralise cette règle. Quelle que soit l'opération envisagée, il propose de laisser les parenthèses de côté dans deux cas: 1° lorsqu'ayant à effectuer deux opérations de *même rang* (n° 29), l'opération indiquée en premier lieu doit être effectuée la première; 2°) lorsqu'ayant à effectuer deux opérations de *rangs distincts* $\mu > \nu$, c'est celle de rang μ qui doit être effectuée la première. *Cette règle semble adoptée par la plupart des auteurs allemands; on verra plus loin (note 166 et n° **26**) que si elle est d'accord avec nos usages pour l'addition et la multiplication, elle ne l'est pas pour les autres opérations.*

147) Le zéro apparaît au 17e siècle comme signe d'une différence entre deux nombres quelconques égaux. **A. Girard* [Inv. [87]), sign. D_1 recto] envisage nettement *zéro* comme un *nombre*; avant lui, on envisageait comme impossible une équation qui n'aurait admis que la racine *zéro*. Dès le septième siècle, les Hindous ont, il est vrai, essayé de multiplier et de *diviser* par *zéro*.*

il faut définir la somme $a + (b - b)$, ou $a + 0$, comme étant égale à $a + b - b$, ou a. Si l'on veut que la loi de commutation continue de s'appliquer, il faut définir la somme $(b - b) + a$ ou $0 + a$ comme étant égale à a. Dans ces formules a est un nombre naturel; en vertu du principe de permanence, on continue à les écrire quand a est zéro. Si l'on veut enfin continuer d'écrire la formule qui définit la soustraction, il faut écrire $a - 0 = a$, a désignant soit un nombre naturel, soit zéro.

17. Nombres négatifs. Le principe de permanence permet aussi d'introduire les nombres négatifs. Désignons, à cet effet, tout d'abord par A la classe formée des seuls nombres $0, 1, 2, 3, \ldots$; n'employons, pour le moment, les lettres $a, b, \ldots$ que pour signifier de tels nombres; supposons établies les propriétés de l'addition et de la soustraction pour ces nombres et reprenons pour les signes $+$, $-$, la signification relative à ces opérations. Le symbole $a - b$ n'a de sens que si a est supérieur ou égal à b. Que a soit supérieur, égal ou inférieur à b, on convient d'appeler *nombre* l'écriture $a - b$ formée en réalité au moyen de deux nombres constitutifs a, b, qui d'ailleurs ne jouent pas le même rôle. *Sur ces nombres de nouvelle espèce, toutes les définitions doivent être reprises.*

*On va d'abord étendre la notion d'égalité. Lorsque les deux symboles $a - b$, $a' - b'$ ont un sens, il est bien aisé de tirer des propositions concernant l'addition et la soustraction que l'égalité $a + b' = a' + b$ est la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux symboles représentent le même nombre. Il est naturel de *définir* dans tous les cas, par cette condition, l'égalité des symboles $a - b$, $a' - b'$, en remarquant que cette définition satisfait aux conditions imposées à toute définition de l'égalité. Il résulte de là que si (a, a' étant respectivement plus petits que b, b') $b - a$ et $b' - a'$ sont égaux au même nombre c, les deux nouveaux nombres $a - b$, $a' - b'$ sont égaux; ils sont égaux à $0 - c$.* Au lieu de $0 - c$ on convient d'écrire $-c$ et c'est sous cette forme abrégée que peuvent être représentés les nouveaux nombres que l'on appelle *nombres négatifs* [148]). De même au lieu de $0 + c$, ou de c, on écrit $+c$. Par

148) *Dans son Isagoge [124]), [fol. 5; éd. *F. Schooten*, p. 5; trad. *F. Ritter*, p. 234] *F. Viète* parle de l'opposition *„affirmata, negata"*; son élève *J. de Beaugrand* parle de racines *positives* et *négatives* dans son 3e factum anonyme contre la Géométrie de *R. Descartes* [Bull. sc. math. (2) 15 (1891), p. 283; *P. Tannery*, La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri, Paris 1893, p. 45]; *T. Harriot* dit *positivus* et *privativus* en 1632 [cf. *J. Wallis*, De algebra tractatus,

opposition aux nombres négatifs, on désigne sous le nom de *nombres positifs* les nombres tels que c ou $+c$. On forme avec tous les nombres positifs et négatifs et le nombre 0, une classe B dont les éléments sont dits *nombres entiers*[149]).

*La somme de deux nombres $a - b$, $a' - b'$, est le nombre $a'' - b''$ dont les nombres constitutifs sont $a'' = a + a'$, $b'' = b + b'$. Cette définition doit, pour être légitime[150]), être immédiatement complétée

Opera 2, Oxford 1693, p. 139], mais *J. Wallis* lui-même préfère dire *affirmatus* et *negativus*. De même *Gilles Personier* dit *Roberval* [Mém. Acad. sc. Paris 1666/99, 6, éd. 1730, p. 94] qui emploie d'ailleurs *positivus* dans notre sens de *réel*. *R. Descartes* n'a jamais employé les termes *positif* et *négatif*; pour nombre *négatif* il dit encore *„nombre faux“* [Géométrie [144]), livre 3; Œuvres 6, p. 445 et suiv.]; quand il parle de nombres faux, il n'énonce que leur valeur absolue [Œuvres [144]) 6, p. 473, Note de *P. Tannery*] et les envisage comme s'ils croissaient avec leur valeur absolue [Œuvres [144]) 6, p. 450].*

149) Si, dans une construction logique de l'Arithmétique, l'introduction des nombres négatifs doit, peut être, précéder celle des nombres fractionnaires *[au sujet de l'ordre dans lequel il convient de traiter les 4 opérations fontamentales, voir *A. Capelli,* Rendic. Accad. Napoli (3) 6 (1900), p. 138]*, il est certain que, historiquement, les nombres négatifs ont été employés beaucoup plus tard que les fractions. Les arithméticiens grecs calculaient seulement avec des différences où le terme passif est plus grand que le terme actif. *Toutefois *Diophante* ne se préoccupe pas d'établir ce caractère, et, d'autre part, il connait la règle des signes tant pour la multiplication que pour le passage d'un terme d'un membre dans un autre [Opera [117]) 1, p. 12/15].* On trouve ensuite chez les Hindous des traces de calcul avec des nombres négatifs; **Brahmagupta* (7e siècle) dit déjà *„dette retranchée de zéro devient un bien, et bien devient une dette . . . ; si on doit retrancher un bien d'une dette, ou une dette d'un bien, on en fait la somme.“* [Cf. *L. Rodet,* J. asiatique (7) 11 (1878), p. 25];* de même *Bhâskara Acârya* (12e siècle) qui distingue aussi la valeur positive et la valeur négative d'une racine carrée [Vîjagaṇita (Algèbre) chap. 1, sect. II, n° 3; éd. *H. T. Colebrooke,* Alg. [118]), p. 135]; un point placé sur un nombre le transforme en son symétrique. Les Arabes n'allèrent guère plus loin. *Au 15e siècle, *N. Chuquet* interprète des nombres négatifs [Triparty [87]), fol. 84b, 151a, 157a, 159b; Bull. bibl. 13 (1880), p. 738; 14 (1881), p. 419, 424, 427], mais il reste assez longtemps sans être imité.* *M. Stifel* nomme les nombres négatifs *„numeri absurdi“* par opposition aux *„numeri veri“*, *mais il les dit *plus petits que zéro* [Arith. [136]), fol. 48a, 248a, 249b]. *S. Stevin* [75]) fait usage de solutions négatives d'équations numériques. *A. Girard,* par ses découvertes sur les éléments de la théorie des équations, leur donne droit de cité au même titre qu'aux nombres naturels; il dit déja [Inv. [87]), sign. F_8 verso] *„la solution par — s'explique en Géométrie en rétrogradant et le — recule là où le + avance“*. Les calculs effectués systématiquement sur les nombres négatifs sont *postérieurs* à *R. Descartes.**

150) *Voir les critiques de *G. Peano* sur ce mode de définition, dans son mémoire „Les définitions mathématiques“ [Bibl. congrès intern. philos. Paris 1900, 3, éd. 1901, p. 286]. Ces critiques se rapportent à la théorie des fractions, mais leur portée est la même ici.*

par la remarque que si, dans une somme, on remplace les termes par des termes égaux, on obtient une somme égale: l'addition reste univoque et, comme on le voit de suite, commutative et associative.*

D'après ces conventions, en désignant par c la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres a, b, tout nombre $a-b$ pourra s'écrire $+c$ ou $-c$, suivant que a est plus grand ou plus petit que b. Dans les deux cas c est la *valeur absolue* de $a-b$. Deux nombres $+c$ et $-c$ sont dits *égaux et de signes contraires*, ou mieux *symétriques*. Le symétrique de 0 est 0; $+0$ et -0 ont le même sens que 0.

Pour bien mettre en évidence l'opposition entre la valeur absolue des nombres entiers et ces nombres entiers eux-mêmes, on dit de ces derniers qu'ils sont *relatifs* (ou encore *qualifiés*).

*Les signes $+$, $-$, ont été d'abord regardés comme des signes d'opération; ils sont maintenant considérés comme *attachés* [151]) à la valeur absolue des nombres envisagés [152]). Ainsi, d'après ce qui précède, $a-b$ peut être, dans tous les cas, regardé comme la somme de a et de $-b$;* il suit de là que si l'on a une expression telle que $a-b+c-d$, on pourra l'envisager comme la somme obtenue en

151) *Dans la langue algébrique, les unités sont des *substantifs,* les signes $+$ et $-$ des *adjectifs* [*A. Q. Buée,* Philos. Trans. London 96 (1806), p. 27 [1805]].*

152) **J. B. J. Delambre* avait déjà signalé l'importance qu'il y a à ne pas confondre ces deux significations des signes $+$ et $-$ [Rapport sur les progrès des sc. math. Paris 1810, p. 44]. *Ch. Méray* et *Ch. Riquier* [Nouv. Ann. math. (3) 9 (1890), p. 50; voir aussi *Ch. Méray,* Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale 1 (1894), p. 11] et *H. Padé* [Premières leçons d'Algèbre élém. Paris 1892, p. 5 et suiv.] qui évitent la confusion possible par l'emploi d'autres signes.

A. Padoa insiste sur les inconvénients de la double signification des signes $+$ et $-$; ses mémoires [Bibl. congrès intern. philos. Paris 1900, 3, éd. 1901, p. 364; C. R. du 2^{e} congrès intern. math. Paris 1900, éd. 1901, p. 250] contiennent une exposition logique de la théorie des opérations sur les nombres entiers positifs et négatifs. Cette exposition, conçue dans le sens des idées de *G. Peano,* repose sur l'introduction de 3 symboles non définis [*entier, successif de, symétrique de*] et sur 7 postulats: 1°) si a est un entier quelconque: le successif de a est un entier; 2°) le symétrique de a est un entier; 3°) le symétrique du symétrique de a est a; 4°) le symétrique du successif du symétrique du successsif de a est a; 5°) il y a un entier x tel que le symétrique de x soit x; 6°) il n'y a pas d'entiers x et y différents entre eux, tels que le symétrique de x soit x, et que le symétrique de y soit y; 7°) si une classe A vérifie les 3 conditions: il y a un entier qui appartient à la classe A; toutes les fois qu'un entier x appartient à la classe A, le successif de x appartient aussi à la classe A; toutes les fois que x est un entier tel que le successif de x appartienne à la classe A, x appartient aussi à la classe A; *alors tout entier appartient à la classe* A. Ces postulats sont compatibles et irréductibles.*

ajoutant à a le nombre négatif $-b$, au résultat le nombre positif c, et au nouveau résultat le nombre négatif $-d$. Une telle expression s'appelle *somme algébrique* et les termes en sont a, $-b$, c, $-d$. Dans une somme algébrique, on peut intervertir l'ordre des termes.

Jusqu'ici les lettres n'ont représenté que des nombres naturels ou zéro. Il convient de pouvoir représenter par une lettre (sans signe) un nombre entier relatif quelconque[153]). Si a représente un tel nombre, on convient de représenter par $+a$ le même nombre que a et cette convention est conforme à ce que l'on a dit plus haut dans le cas où a est un nombre naturel. Au contraire $-a$ représente le nombre symétrique du nombre a. La valeur absolue de a se représente[154]) par $|a|$. *Les signes $+$ et $-$ qui figurent dans les symboles $+a$ et $-a$ sont les *signes apparents* des nombres $+a$ et $-a$; ce sont aussi les *signes vrais* si a est un nombre naturel ou un nombre positif; au contraire, si a est négatif, les nombres $+a$ et $-a$ sont respectivement négatif et positif et leurs signes vrais sont respectivement $-$ et $+$.*

*Pour représenter la somme de plusieurs nombres entiers relatifs donnés dans un ordre déterminé, on écrit les symboles des nombres dont on veut faire la somme, en ayant soin de mettre le signe $+$ devant ceux de ces symboles qui n'auraient pas de signe apparent; toutefois l'habitude est de supprimer le signe apparent du premier symbole quand ce signe est $+$. Ainsi $a-b+c$ veut dire la somme obtenue en ajoutant au nombre a ou $+a$ le nombre $-b$, puis le nombre $+c$ au résultat. Dans le cas où a, b, c désignent des nombres absolus et où les opérations dans l'ordre indiqué sont possibles, ce même symbole désigne aussi, comme on l'a vu, le résultat d'une suite d'opérations à faire sur ces nombres absolus; mais la confusion n'est pas à craindre parce que le résultat est le même, du moment que l'on confond les nombres absolus et les nombres positifs. Ainsi dans l'expression $a+b$, si l'on attache le signe $+$ au symbole b, on a affaire à la somme de $+a$ et de $+b$; si l'on envisage le signe $+$ comme un signe d'addition, on a affaire à la somme de a et de b.

La théorie de l'addition des nombres entiers relatifs permet ainsi de rendre au signe $+$ son sens de signe d'opération. La théorie de

---

153) *Cette convention est d'un usage courant depuis *I. Newton*; *R. Descartes* désigne encore isolément les nombres négatifs; il expose seulement ses formules avec des points au lieu de signes, et il explique tout au long s'il faut mettre $+$ ou $-$ lorsqu'on substitue un nombre à son symétrique [148]).*

154) Les leçons de *K. Weierstrass* ont vulgarisé cette notation [Werke 1, Berlin 1894, p. 67 [1841]].

la soustraction des nombres entiers relatifs va de même permettre de rendre au signe — son sens de signe d'opération. Au moment où nous sommes, $a - b$ veut dire la somme de a et de $-b$.*

Si a et b sont deux nombres entiers relatifs, leur différence est, par définition, un nombre x tel que l'on ait $a = b + x$; en ajoutant $-b$ aux deux membres de cette équation, on reconnaît que x ne peut être que $a - b$, puis on voit que $a - b$ vérifie effectivement l'équation $a = b + x$. La soustraction des nombres entiers relatifs est toujours possible et elle est univoque. Pour retrancher d'un nombre b un nombre a, on ajoute à b le symétrique de a. Le symétrique d'une somme algébrique s'obtient en ajoutant les symétriques de tous les termes de cette somme. Conformément aux conventions adoptées pour la signification de $+a$, $-a$, le symbole formé au moyen de parenthèses qui enclosent un nombre et dont la première est précédée du signe $+$, ou du signe $-$, signifie le nombre placé entre parenthèses, ou son symétrique. Dans une somme algébrique où figurent des termes entre parenthèses, on peut supprimer celles qui sont précédées du signe $+$ et, à condition de changer les signes des nombres qu'elles enclosent, celles qui sont précédées du signe $-$. On a ainsi les règles relatives à l'addition et à la soustraction des sommes algébriques.

Un nombre entier relatif a est dit plus grand que le nombre entier relatif b, si la différence $a - b$ est positive. Cette définition satisfait aux conditions imposées à la définition de l'inégalité, et entraîne les conclusions relatives à l'addition ou à la soustraction des inégalités[155]).

*On peut aussi introduire les nombres entiers relatifs abstraits au moyen de nombres relatifs concrets en cherchant à distinguer des quantités comme le doit et l'avoir, ou des intervalles de temps égaux comptés à partir d'une origine dans deux sens opposés. On place, à cet effet, devant le nombre qui mesure la quantité envisagée, un signe différent, par exemple $+$ ou $-$, suivant que cette quantité est d'une espèce ou de l'autre. Un nombre est dit *positif* ou *négatif* suivant qu'il est précédé du signe $+$ ou du signe $-$; la *valeur absolue* d'un nombre est le nombre naturel obtenu en laissant de côté le signe qui précède ce nombre. Deux nombres sont égaux lorsque leurs valeurs absolues sont égales et qu'ils sont précédés du même signe. A ce

155) *La distinction entre les inégalités entre nombres absolus et les inégalités entre nombres relatifs se trouve d'abord dans *A. L. Cauchy* [Cours d'Analyse de l'Ecole polyt. 1, Analyse algébrique, Paris 1821, p. 438; Œuvres (2) 3, Paris 1897, p. 360].* .

point de vue, la somme de deux nombres relatifs est, par définition, un nombre relatif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues de ces nombres si ces nombres sont de même signe, la différence entre la plus grande et la plus petite de ces valeurs absolues si les signes sont différents, 0 si les nombres a, b sont symétriques. Dans le premier cas, le signe de la somme est le signe commun à a, b; dans le second, il est celui des deux nombres a, b qui a la plus grande valeur absolue. Si l'un des deux nombres a, b est 0, leur somme est égale à l'autre nombre. L'opération ainsi définie est évidemment commutative; on démontre qu'elle est associative comme l'addition des nombres absolus. La convenance des définitions adoptées se justifie immédiatement par l'application aux grandeurs concrètes. Ces définitions se rattachent d'ailleurs très aisément à la suite naturelle: seulement au lieu de considérer cette suite comme commençant au nombre 1, ou $+1$, et se poursuivant indéfiniment par valeurs croissantes, on regardera cette suite comme indéfinie dans les deux sens, $+1$ étant précédé du nombre 0, celui-ci étant précédé du nombre -1, celui-ci du nombre $-2, \ldots$ Les démonstrations relatives à la commutativité ou à l'associativité s'étendent alors sans peine.*

Opérations de rang deux.

18. Multiplication. Supposons d'abord qu'il s'agisse de nombres naturels. Une addition dans laquelle tous les nombres à ajouter sont égaux prend le nom de *multiplication*; l'un quelconque de ces nombres égaux s'appelle *multiplicande*, le nombre de fois qu'il figure dans cette somme s'appelle *multiplicateur* [156]); la somme elle-même, résultat de l'opération, s'appelle *produit* (du multiplicande, nombre passif, par le multiplicateur, nombre actif). Le multiplicateur et le multiplicande sont les deux *facteurs* du produit. Lorsque le multiplicateur est 1, le produit est égal au multiplicande [157]).

---

156) *A. Girard* [Inv. [87]), sign. A_1 verso] appelait *efficient* le multiplicande et *coefficient* le multiplicateur. *F. Viète* avait déjà introduit le mot *coefficient* [De numerosa potestatum ad exegesim resolutione, Paris 1600, p. 7 (cet ouvrage a dû exister dès 1591); Opera, éd. *F. Schooten* [124]), p. 173].*

157) *G. Cantor* [Math. Ann. 46 (1895), p. 485; trad. *F. Marotte,* Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (5) 3 (1899), p. 348] adopte une définition de la multiplication fondée sur la notion de nombre cardinal et indépendante de l'addition. La réunion d'une *unité* [ou *élément*] de a et d'une unité de b constitue un *couple*; le nombre de couples que l'on peut former en prenant une unité de a et une unité de b est le produit de a par b. De cette définition résultent facilement

Si l'on veut classer les opérations, la multiplication peut être regardée comme une opération *du second rang,* tandis que l'addition et l'opération inverse, la soustraction, sont regardées comme des opérations *du premier rang.*

On représente un produit en écrivant d'abord le multiplicande, puis le multiplicateur, et en les séparant par un point $\cdot$, ou par le signe $\times$,[158]) ou encore sans aucun signe[159]); il est nécessaire de mettre un signe quand les deux nombres sont écrits en chiffres. Ainsi les symboles $a \cdot b$, $a \times b$, ab représentent chacun la somme $a + a + \cdots + a$ de b nombres égaux à a; les symboles $23 \cdot 12$, 23×12 représentent chacun la somme de 12 nombres égaux à 23.

Cette définition suppose essentiellement que b soit un nombre naturel, mais elle a un sens quel que soit a, pourvu que l'addition soit définie, et c'est ce sens qui sera adopté pour définir le produit d'un nombre quelconque par le nombre naturel b.

Les propriétés de l'addition entrainent les propriétés de *distribution*[160]) qu'expriment les égalités

---

les propriétés fondamentales de la multiplication. [Voir aussi *A. Capelli,* Rendic. Accad. Napoli (3) 6 (1900), p. 138].*

158) *Le signe $\times$ doit sa disposition actuelle à *G. Oughtred* [Arithmeticae in numeris . . . quasi clavis est, Londres 1631, p. 7]; on le rencontre déjà entre les facteurs d'un produit placés l'un *sur* l'autre dans les Commentaires d'*Oswald Schreshensuchs* [Claudii Ptolemaei . . . annotationes, Bâle 1551]. *C. Le Paige* [Ann. Soc. scient. Bruxelles 16^2 (1891/2), p. 80] conjecture que ce signe a pour origine, comme le signe —, des barres de direction servant à marquer l'opération. D'après *Ch. Henry* [Revue archéol. 38 (1879), p. 4] ce serait le chiffre romain X: dans l'abaque on multipliait par 10.*

159) *L'usage consistant à écrire simplement les deux facteurs du produit, sans les séparer par aucun signe, est l'usage primitif; il correspond au langage parlé lorsqu'il y a une seule lettre avec un coefficient numérique, ce qui a été le cas jusqu'à *F. Viète*; on le trouve dans *Ahmès* [51]) comme chez *Diophante*, chez les Hindous et chez les Arabes.

Dans les mss. du moyen-âge, certaines écoles de copistes prirent l'habitude de mettre un point après tout nombre, et cet usage, passé de bonne heure dans l'imprimerie, a déterminé l'adoption du point comme signe de multiplication; cette adoption est plutôt fâcheuse puisque le point indique en général que la phrase est terminée.

Pour le produit de deux lettres A, B, *F. Viète* écrivait A in B; tout comme pour le produit de deux nombres les Grecs séparaient ces deux nombres par la préposition *ἐπί*. *S. Stevin*[75]) employait le symbole M; *A. Girard* [Inv. [87]), sign. B_1 verso] et *T. Harriot* [Artis anal. [125]), p. 7] ont précédé *R. Descartes* pour la simple juxtaposition.*

160) *Le mot *distributif* a été employé pour la première fois par *F. J. Servois* [Ann. math. pures appl. 5 (1814/5), p. 98].*

ERNESTO CESÀRO
ORD. PROFESSOR AN DER KÖNIGL. UNIVERSITÄT ZU NEAPEL

ELEMENTARES LEHRBUCH DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS UND DER INFINITESIMALRECHNUNG

MIT ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN

NACH EINEM MANUSKRIPT DES VERFASSERS
DEUTSCH HERAUSGEGEBEN VON

DR. GERHARD KOWALEWSKI
A. O. PROFESSOR A. D. UNIV. GREIFSWALD

MIT 97 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904

Vorwort.

Der wichtigste Zweig der mathematischen Wissenschaft ist ohne Zweifel der, welcher die Möglichkeit ausnutzt, die Zahlen beliebig zunehmen oder abnehmen zu lassen und mit Bezug auf die zwischen ihnen stattfindenden Relationen ein System analytischer Verfahrungsweisen aufbaut, die für die Erforschung der geometrischen, sowie der mannigfachsten Naturerscheinungen so nutzbringend sind. Es ist das die sogenannte Infinitesimalrechnung. Sie soll in diesem Buche, welches zunächst für meine Schüler bestimmt war, in elementarer Weise entwickelt werden auf der sicheren Grundlage der algebraischen Analysis, deren Hauptlehren ich hier auseinandersetze. Ich nehme dabei auch Rücksicht auf den (parallellaufenden) Kursus der analytischen Geometrie. Über die Prinzipien, auf die ich bei meinem Unterricht nicht so viel Gewicht lege wie auf die Anwendungen, kann sich der Leser, der es wünscht, in ausgezeichneten Werken, wie denen von Lipschitz, Dini, Hermite, Weber, Stolz, Genocchi, Peano, Tannery, Jordan, d'Arcais, Arzelà usw. eingehender unterrichten. Ich führe ihn hier schnell und sicher zu einer großen Ernte analytischer und geometrischer Tatsachen.

Dem Herrn Verleger B. G. Teubner bin ich sehr dankbar für seine für mich sehr schmeichelhafte Aufforderung, die Übersetzung meines Buches zu gestatten. Zugleich fühle ich die Verpflichtung, meinem verehrten Kollegen an der Universität Greifswald, Professor G. Kowalewski, öffentlich den lebhaftesten Dank auszusprechen für die bewundernswürdige Art, in der er diese Übersetzung ausgeführt hat. Ich verspreche mir, daß seine und meine Bemühungen ihren Lohn in einer guten Aufnahme des Buches bei der mathematischen Jugend Deutschlands finden werden, für die allein das Buch bestimmt ist. Wir bieten es ihr dar als eine Sammlung von Übungsaufgaben im Rahmen einer (wenn auch nicht erschöpfenden) Darstellung der wichtigsten Teile der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung.

Universität Neapel.

E. Cesàro.

Inhaltsübersicht.

$$a(b+c) = (ab) + (ac), \qquad (a+b)c = (ac) + (bc);$$

en se conformant aux habitudes, on peut supprimer les parenthèses dans les seconds membres de ces deux égalités. Ces propriétés s'étendent immédiatement au cas où, soit le multiplicande, soit le multiplicateur, est la somme de trois, quatre, ... nombres. On déduit d'ailleurs aisément de ces mêmes propriétés distributives, que la multiplication est *commutative*, en d'autres termes que l'on a $ab = ba$, et qu'elle est *associative*, c'est à dire que l'on a $a(bc) = (ab)c$.

Le produit de trois nombres a, b, c, rangés dans un ordre déterminé, s'obtient en multipliant le produit des deux premiers par le troisième; il s'écrit $a \cdot b \cdot c$, $a \times b \times c$, ou abc, ce qui est conforme à la règle de *E. Schröder*[146]). Le produit de quatre nombres s'obtient en multipliant le produit des trois premiers par le quatrième, etc. Les nombres que l'on multiplie ainsi sont les *facteurs* du produit. Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs, remplacer tels facteurs que l'on veut par leur produit effectué, ou inversement.

D'après la définition générale, le produit de a par le nombre naturel b est égal à 0 quand a est nul. Pour conserver le caractère commutatif de l'opération, il convient de regarder le produit d'un nombre quelconque par 0 comme étant nul. Dès lors un produit où figure un facteur nul est nul: les propriétés fondamentales de la multiplication subsistent pour de tels produits.

Si a, b désignent des nombres relatifs, leur produit sera un nombre relatif dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues de a, b et dont le signe (vrai) est $+$, ou $-$, suivant que les deux nombres a, b ont tous deux le même signe (vrai) ou des signes différents. Il résulte de là et des règles précédentes que l'on a (*règle des signes*)

$$(+a)(+b) = +(ab); \qquad (+a)(-b) = -(ab);$$
$$(-a)(+b) = -(ab); \qquad (-a)(-b) = +(ab).$$

Dans les expressions $+(ab)$, $-(ab)$, on supprime habituellement les parenthèses et l'on écrit $+ab$ ou ab, et $-ab$.

Ces définitions peuvent être rattachées au principe de permanence[161]), en remarquant d'abord que les nombres positifs devant être confondus avec leurs valeurs absolues, la définition du produit d'un

---

161) *Au reste, la convenance de ces définitions apparaît sur les premières applications des nombres relatifs à la représentation de grandeurs concrètes susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés (relations entre l'espace, le temps et la vitesse dans le mouvement uniforme, etc.).*

nombre quelconque par un nombre positif, résulte de la définition générale. Les définitions relatives au produit par un nombre négatif sont ensuite nécessitées par cela même que l'on veut conserver le caractère commutatif de l'opération. Le caractère associatif subsiste aussi.

La formule de distributivité $a(b + c) = ab + ac$, qu'il suffit de considérer sous cette forme, en raison de la commutativité, s'applique, en vertu des définitions précédentes, que les nombres a, b, c soient absolus, nuls [162]) ou relatifs. Elle implique la formule

$$a(b - c) = ab - ac.$$

Ces formules, en tenant compte de la commutativité, et lues de gauche à droite ou de droite à gauche, contiennent les règles pour multiplier un nombre par une somme ou une différence, une somme ou une différence par un nombre, ou pour mettre un nombre en facteur dans une somme ou une différence de produits où ce nombre figure comme facteur.

Pour multiplier une somme algébrique par une somme algébrique, on multiplie chaque terme de la première somme par chaque terme de la seconde somme et on ajoute les produits partiels. Le signe (+ ou —) de chaque terme du multiplicande doit être regardé comme attaché à ce terme, et pour chaque produit partiel on observe la règle des signes. Lorsqu'on effectue un produit dans lequel un des facteurs est une somme mise entre parenthèses, on dit que l'on *ouvre la parenthèse*; l'opération contraire est la *mise entre parenthèses.*

De ces règles résultent facilement celles qui concernent la conclusion à tirer des inégalités, par multiplication.

On appelle *multiples* d'un nombre a, tous les nombres que l'on obtient en multipliant a par un nombre naturel.

La multiplication (opération directe) n'introduit pas de nouvelle espèce de nombres.

$_*$On appelle *progression géométrique* [163]) toute suite de nombres de la forme

---

162) $_*$Si l'on supprimait ici le mot „nul" il faudrait ajouter à la ligne suivante: „et elle implique la formule $a(-c) = -ac$".*

163) $_*$*Euclide* [Elementa [44]), livre 9, prop. 35; Opera 2, p. 406] apprend à former la somme des termes d'une progression géométrique; mais on pourrait faire remonter l'origine de ces progressions aux Egyptiens [cf. *Ahmès* [51]), trad. *A. Eisenlohr* 1, p. 202/4; planche XX, n° 79]. *N. Chuquet* appelle les progressions géométriques „nombres constituez par ordonnance continue en toutes proporcions multiplex"; il donne [Triparty [87]), fol. 25^b; Bull. bibl. 13, p. 628] une règle qu'on peut traduire par la formule $s(q-1) = lq - a$; déjà *Prosdocimo di*

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1};$$

a est le *premier terme*, q la *raison* de la progression. Si l'on désigne par s_n la somme des termes de la progression, on a

$$(1-q)\,s_n = a\,(1-q^n),$$

et cette formule permet d'évaluer s_n, sauf dans le cas où $q=1$, cas auquel on voit directement que l'on a

$$s_n = na.*$$

19. Division. *Le mot division a deux sens très distincts. Dans le premier, étant donnés deux nombres a (dividende, nombre *passif*) et b (diviseur, nombre *actif*), la division a pour but de mettre a sous la forme $bq+r$, r étant un des nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$, inférieurs à b. On suppose, dans cette définition, que le nombre b est un nombre naturel (zéro exclu); a peut être un nombre naturel ou un nombre relatif. Le problème comporte deux inconnues q, r dont la première s'appelle *quotient*, la seconde *reste*; il admet toujours une solution et une seule. Lorsque le dividende est un nombre naturel, le quotient indique combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, combien de fois il peut être retranché du dividende, d'où son nom (*quoties*). Le reste r indique alors le résultat de cette soustraction. On peut dire encore que bq est le plus grand multiple de b contenu dans a (inférieur ou égal à a). Lorsque r est nul, c'est que a est un multiple de b; on dit aussi que la division *se fait exactement* et que a est (exactement) *divisible* par b, ou encore que b est *un diviseur* (exact) de a. La considération du reste joue un rôle fondamental dans la *Théorie des nombres.*

Deux nombres a, a', qui, pour le même diviseur ou *module* b, donnent le même reste, sont dits *congrus* suivant le module b, ou *modulo* b, et l'on écrit, d'après *C. F. Gauss,*

$$a \equiv a' \pmod{b}.$$

La définition de la *congruence* satisfait aux conditions imposées à toute définition de l'égalité, et en remplaçant, dans une somme, une différence, un produit, les nombres par des nombres congrus suivant un module déterminé, on ne change pas les restes des résultats pris suivant le même module. Cette notion se généralise en remplaçant

---

Beldomandi [Algorismus de integris, (écrit vers 1410), imp. Padoue 1483] avait donné une règle qu'on peut traduire par la formule

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = aq^{n-1} + \frac{aq^{n-1}-a}{q-1}.*$$

le module par un système de modules: deux nombres a, a' sont congrus suivant un *système de modules* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ou *modulis* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, si leur différence est une somme de multiples des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$; on écrit alors

$$a \equiv a' \quad (\text{modd. } b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

On peut aussi se proposer de mettre a sous la forme $bq_1 - r_1$, r_1 étant un des nombres $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Celui des deux nombres r et $-r_1$ dont la valeur absolue est la plus petite, prend le nom de *reste minimé*[164]).

J.L. Lagrange appelait *division en dedans*[165]) celle où le reste minimé est positif, et *division en dehors* celle où ce reste est négatif, parceque dans la division en dedans le produit du quotient par le diviseur tombe en dedans du dividende, tandis que dans la division en dehors il tombe en dehors.*

On peut aussi envisager la division comme opération inverse de la multiplication. On dit alors qu'elle a pour but de trouver un nombre q qui multiplié par b donne a. Le dividende a et le diviseur b peuvent être des nombres naturels ou des nombres relatifs, si ce n'est que le cas $b = 0$ est exclu. Dans ce cas exclu le problème serait impossible à moins que a ne fût nul; dans le cas où l'on aurait $a = 0$, $b = 0$, tout nombre q vérifierait l'égalité $a = bq$, et ce cas doit être exclu si l'on veut que l'opération soit univoque (n° **10**). L'opération, dans le cas général, n'est *possible* (n° **11**) que si a est un multiple de b; on en représente le résultat q, qui conserve le nom de *quotient*, par le symbole $\frac{a}{b}$ et quelquefois $a:b$ ou a/b. Ces symboles[166]), pour le moment, n'ont de sens que si a est un multiple de b; dans ce cas l'opération est univoque et, d'après la définition de la multiplication, le signe (vrai) du quotient est $+$ si les deux nombres

164) *Les mots français maximé, minimé seront employés dans toute l'édition française de l'Encyclopédie, plutôt que les mots latins maximum, minimum.*

165) *J. Ec. polyt., cah. 5, an VI, p. 94; Œuvres 7, Paris 1877, p. 292.*

166) *Le signe : pour indiquer la division est inutile et mieux vaudrait le réserver à dénoter les rapports. L'écriture $a : bc$ prête à ambiguité. Contrairement à la convention de *E. Schröder*[146]), on entendrait plutôt en France par $a:bc$ non pas $(a:b)c$ mais $a:(bc)$.

Le signe : a été employé par *G. W. Leibniz* pour désigner la division [Acta Erud. Lps. 1684, p. 470; Werke [1]), Math. Schr. 5, p. 223]; *J. H. Rahn* avait déjà employé, pour le même objet, le signe ÷ [Teutsche Algebra, Zurich 1659, p. 8]. Au 18e siècle on rencontre le signe ⫍ pour „diviser par" [cf. *J. E. Gallimard*, La sc. du calcul[87]) 1, p. 3; 2, p. 2]*.

a, b ont le même signe (vrai), — dans le cas contraire. Si a est nul, le quotient est nul.

Dans ce qui suit, à moins qu'on n'avertisse du contraire, le mot division est pris dans ce second sens, et il est entendu, une fois pour toutes, que le diviseur ne sera jamais nul.

La définition de la division donne l'égalité $\frac{a}{b}\,b = a$, quand b est différent de zéro; en particulier $\frac{a}{1} = a$. On ne change pas un nombre en le multipliant ou en le divisant par un autre nombre, *pourvu que celui-ci ne soit pas nul.* Les formules

$$ab = c, \quad a = \frac{c}{b}, \quad b = \frac{c}{a},$$

ont exactement le même sens, pourvu que a, b, c ne soient pas nuls. Si l'un des nombres a, b, c est une inconnue, cette inconnue peut ainsi être isolée.

20. Combinaison de la division avec l'addition, la soustraction et la multiplication. La définition de la division conduit immédiatement aux formules suivantes

$$1^\circ)\ \frac{(a+b)}{m} = \left(\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{b}{m}\right); \quad 2^\circ)\ \frac{(a-b)}{m} = \left(\frac{a}{m}\right) - \left(\frac{b}{m}\right); \quad 3^\circ)\ a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{(ab)}{c};$$

$$4^\circ)\ \frac{a}{(bc)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}; \quad 5^\circ)\ \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)c;$$

$$6^\circ)\ \frac{a}{b} = \frac{(am)}{(bm)}; \quad 7^\circ)\ \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)}.$$

On peut, sans craindre aucune ambiguïté, laisser dans les formules 1°, 2°, 3°, 6°, 7°, les parenthèses de côté. *Quoique dans les formules 4°, 5°, la place de la barre renseigne dans une certaine mesure sur l'ordre dans lequel on doit effectuer les opérations, la suppression de la parenthèse n'est pas à conseiller dans ces formules.*

Dans toutes ces formules, on suppose que les symboles de la division ont un sens. Dans les formules 1°, 2°, 7°, le premier membre a un sens si toutes les divisions indiquées dans les seconds membres en ont un; pour les formules 3°, 4°, c'est l'inverse; si l'un des membres de la formule 6° a un sens, il en est de même de l'autre. Quand les lettres désignent des nombres relatifs, les formules 1° et 2° sont contenues l'une dans l'autre. Ces formules 1° et 2°, équivalentes aux formules de distribution pour la multiplication, montrent comment on divise une somme algébrique par un nombre, ou inversement, comment on change en un quotient unique une somme algébrique de quotients, pour lesquels le diviseur est le même. Si les diviseurs étaient différents, la formule 6° permettrait de remplacer les quotients par des quotients égaux comportant le même diviseur. La formule d'association pour la multiplication et les formules 3°, 4°, 5°, lues dans un sens ou un autre, montrent comment on multiplie un nombre par un produit ou un quotient et aussi comment on multiplie, ou on divise, un produit ou un quotient par un nombre. Les facteurs et les diviseurs peuvent être employés dans un ordre quelconque; le résultat final n'est pas changé.

On déduit aisément de ces formules, les règles concernant les conclusions à tirer des inégalités, par division.

21. Nombres fractionnaires. Le principe de permanence permet aussi d'introduire les nombres fractionnaires. Partons de la classe A formée des nombres naturels et de zéro. Pour faciliter le langage nous dirons, dans ce numéro, que zéro est un multiple de tout nombre naturel.

Le symbole $\frac{a}{b}$, où a désigne un nombre de la classe A, et b un nombre naturel, n'a de sens que si a est un multiple de b. Lorsque a n'est pas un multiple de b, on convient d'appeler encore *nombre* ce symbole $\frac{a}{b}$ formé en réalité de deux nombres constitutifs a, b qui, d'ailleurs, ne jouent pas le même rôle. Ce nouveau nombre est dit[167])

167) *On a dit pendant bien longtemps *nombre rompu* pour *fraction*; ainsi *Léonard de Pise* dit *numerus ruptus* [Liber abbaci [136]), fol. 20^b; éd. *B. Boncompagni* 1, p. 47]; *N. Chuquet* dit *nombres routz*; il se sert des termes *numérateur* et *dénominateur* dans le même sens que nous [Triparty [87]), fol. 10^a, 12^b; Bull. bibl. 13, p. 604, 607]; pour *A. Girard* le numérateur s'appelle aussi *note supérieure,* le dénominateur ou (d'après *S. Stevin* [75]) Arith., fol. 7^a) le *nominateur,* s'appelle aussi *note inférieure*, et l'ensemble des deux *notes* avec la ligne de séparation s'appelle *fraction ou rompu* [Inv. [87]), sign. A_3 verso, A_4 recto].*

**Diophante* traite absolument les fractions abstraites comme de *véritables nombres* [cf. Opera [117])]; à cet égard il est isolé dans l'antiquité; ainsi *C. Ptolémée,* pour une expression en degrés et minutes d'arc, dira πηλικότης (quantité). Les géomètres classiques traitent les fractions comme dénominations de rapports (d'un nombre moindre à un nombre plus grand). Si de deux nombres a et b, le plus petit a divise exactement le plus grand $b = ma$, celui-ci est dit multiple de a et a est dit μέρος $\left(\text{partie aliquote, quantième } \frac{1}{m}\right)$ de b. Si $a < b$ et ne divise pas b, a est dit (au pluriel) μέρη (fraction ordinaire, partie aliquante) de b [cf. *Euclide,* Elementa [44]), livre 7, déf. 3/5; Opera 2, p. 184] (Note ms. de *P. Tannery*).*

nombre fractionnaire ou *fraction*; les nombres constitutifs a, b sont dits le premier „le *numérateur*", le second „le *dénominateur*" de la fraction $\frac{a}{b}$. Le trait horizontal[168]) qui sépare le numérateur du dénominateur s'énonce „sur". La classe B du n° **11** est formée des nombres de la classe A et des nombres fractionnaires. Nous dirons de chacun des nombres de cette classe B qu'il est un *nombre rationnel absolu* (sans signe).

On étend d'abord la notion d'égalité aux nombres de la classe B. Il est bien aisé de voir que quand a est multiple de b, et a' de b', l'égalité $ab' = a'b$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux symboles $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ représentent le même nombre. Il est naturel de définir par cette condition l'égalité des nouveaux nombres $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ en remarquant que cette définition satisfait aux conditions imposées à toute définition de l'égalité. On convient, en outre, de confondre avec leur numérateur les fractions dont le dénominateur est égal à 1; dès lors, si dans la fraction $\frac{a}{b}$, le numérateur est un multiple du dénominateur, on devra regarder cette fraction comme égale au quotient (à zéro quand a est nul). Dans ces conditions les formules 1° à 7° du n° **20** subsistent; en particulier on obtient la règle pour la réduction au même dénominateur et la règle pour la simplification des fractions qui consiste à supprimer tous les facteurs communs aux deux termes. La fraction est *irréductible* quand il n'y a plus de diviseur commun (autre que 1). Toute fraction a ses termes équimultiples de la fraction irréductible (unique) qui lui est égale.

Pour comparer deux fractions inégales $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, on les réduit au même dénominateur; celle qui a le plus grand numérateur est dite alors plus grande que l'autre. Cette règle s'applique au cas où l'une des deux fractions est un nombre naturel.

Une fraction *proprement dite*[169]) est une fraction plus petite que 1,

---

168) *G. *de Longchamps* a envisagé [Giorn. mat. (1) 15 (1877), p. 299] des fractions étagées $\cfrac{a_1}{\cfrac{a_2}{\cfrac{\cdots}{a_n}}}$ où les barres ont des longueurs différentes.*

169) On distingue encore parfois entre les *fractions propres* (ou proprement dites) $\frac{a}{b}$ pour lesquelles $a < b$, et les *fractions impropres* pour lesquelles $a > b$. *[Cf. *A. Girard*, Inv. [87]), sign. A_3 verso].*

c'est à dire dans laquelle le numérateur est plus petit que le dénominateur. Un *quantième* est une fraction dont le numérateur est 1.

Conformément à la règle de simplification des fractions et à l'égalité 1° du n° **20**, on définira la somme de deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ comme étant la fraction $\frac{ab' + a'b}{bb'}$, en observant de suite que l'opération ainsi définie est univoque. Les propriétés fondamentales de l'addition sont conservées.

Si l'on a $a > b$, on peut mettre a sous la forme $bq + r$ (où $r < b$) et la fraction $\frac{a}{b}$ est la somme du nombre entier q et de la fraction proprement dite $\frac{r}{b}\cdot$ Ainsi une fraction qui n'est pas égale à un nombre entier, est comprise entre deux entiers consécutifs dont l'un est plus petit, l'autre plus grand que la fraction.

La soustraction, définie comme opération inverse de l'addition, conduit à la règle qu'exprime l'égalité

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'}.$$

La définition générale de la multiplication, quand le multiplicateur est un nombre naturel, s'applique au cas où le multiplicande est une fraction, et montre, en particulier, qu'une fraction quelconque peut être regardée comme égale au produit par son numérateur d'un quantième de même dénominateur qu'elle, et que le produit d'une fraction par son dénominateur est égal à son numérateur. Il en résulte que la notion de nombre fractionnaire rend toujours possible (sauf quand b est nul) la résolution de l'équation $a = bx$, lors même que l'entier a n'est pas un multiple de b; cette solution est $x = \frac{a}{b}\cdot$ On dit pour cette raison, que la fraction représente le quotient exact[170]) de la division de son numérateur par son dénominateur.

Quand le multiplicateur est la fraction $\frac{a'}{b'}$ on adoptera la définition

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'},$$

définition qui est conforme à une conséquence immédiate des formules 3°, 4°, 5° du n° **20** et qui conserve le caractère univoque de l'opération, comme aussi ses propriétés fondamentales. La division sera

170) *Le mot *quotient*, en sous-entendant comme on le fait souvent, l'épithète „exact", prête à confusion, à cause du sens donné au mot quotient dans la première définition de la division. On pourrait lui substituer systématiquement le mot *rapport.**

encore considérée comme opération inverse de la multiplication; elle consistera à trouver une fraction inconnue qui, multipliée par la fraction diviseur, reproduise la fraction dividende. Le problème admet une solution, d'ailleurs unique, sauf dans le cas où la fraction diviseur est 0. Cette solution s'obtient en multipliant la fraction dividende par la fraction inverse[171]) de la fraction diviseur, en sorte que

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a b'}{a' b}.$$

22. Nombres rationnels relatifs. On forme une classe de nombres qui comprend tous les précédents, en affectant les nombres rationnels absolus (à l'exclusion de 0) du signe + ou du signe —, et en confondant ceux qui sont affectés du signe + avec les nombres rationnels absolus. On appelle *nombres rationnels*[172]) tous les nombres ainsi formés, y compris 0; ceux qui sont affectés du signe + sont les nombres rationnels positifs, ceux qui sont affectés du signe — sont les nombres rationnels négatifs. Lorsqu'on veut opposer ces nombres rationnels aux nombres rationnels absolus précédemment envisagés, on les nomme *nombres rationnels relatifs.*

On peut représenter par une lettre unique un nombre rationnel quelconque. La fraction elle-même indépendamment de son signe, est la valeur absolue du nombre relatif ainsi créé. Si α représente un nombre rationnel quelconque, on représentera par $|\alpha|$ sa valeur absolue.

Pour les définitions de l'égalité, de l'inégalité (plus grand et plus petit) et des opérations, définitions où toutefois les nombres entiers absolus sont remplacés par des nombres rationnels absolus, on reprend, mutatis mutandis, ce qui a été dit au n° **17** au sujet des nombres négatifs.

Un symbole de fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres rationnels relatifs (qui peuvent d'ailleurs être entiers) sera regardé comme le nombre rationnel relatif dont la valeur absolue est le nombre rationnel absolu que l'on obtient en appliquant la règle de la division aux valeurs absolues de a et de b, et dont le signe (vrai) est + ou —, suivant que a et b sont, ou non, de même signe. Dans ces conditions toutes les propriétés fondamentales des opérations subsistent et, en particulier, les égalités 1° à 7° du n° **20** en convenant d'y regarder les lettres qui y figurent comme représentant des nombres rationnels

171) Deux fractions dont l'une se déduit de l'autre en intervertissant le numérateur et le dénominateur sont dites *fractions inverses.*

172) *Voir par ex. *S. F. Lacroix,* Eléments d'algèbre, 1e éd. Paris an VII; 5e éd. an XIII, p. 146/7.*

quelconques, absolus ou relatifs, avec cette seule restriction que la division par 0 est toujours exclue.

Il importe de remarquer que les opérations précédemment définies (opérations *du rang un* et *du rang deux*) effectuées sur des nombres rationnels, *ne conduisent jamais qu'à des nombres rationnels.* Les opérations inverses *du rang trois,* dont il sera question un peu plus loin, nécessiteraient une extension nouvelle de l'idée de nombre.

23. Origine concrète de la notion de fraction. *Historiquement[173]) les fractions se sont présentées quand on a voulu mesurer des gran-

173) On calculait déjà avec des fractions dans l'antiquité. Le plus ancien manuel mathématique connu [*Ahmès* [61])] contient déjà un mode particulier de calcul avec des fractions. Toute fraction y est représentée par une somme de *quantièmes* différents. *Pour désigner ces quantièmes, les Egyptiens écrivaient notre dénominateur surmonté de l'hiéroglyphe signifiant „partie" ou d'un • dans l'écriture hiératique; ils avaient des symboles spéciaux pour $\frac{1}{2}$ et pour $\frac{2}{3}$. Les procédés dont se servaient les Egyptiens pour décomposer un quotient en quantièmes, sont exposés par *V. V. Bobynin* [Abh. Gesch. Math. 9 (1899), p. 3].*

Pour les quantièmes, les Grecs écrivaient simplement le dénominateur avec un (ou deux) accents; *ainsi γ' signifiait $\frac{1}{3}$; pour $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ ils avaient, comme les Egyptiens, des symboles particuliers. Pour désigner les autres fractions (envisagées déjà du temps de *Platon* et que l'on trouve dans *Aristarque de Samos* et dans *Archimède*, mais surtout dans *Héron* et *Diophante*), ils écrivaient le dénominateur *au dessus* du numérateur, en interligne, plus tard, chez les Byzantins, en exposant; $\overline{\vartheta}\iota\alpha'$ signifiait alors $\frac{9}{11}$. On distinguait aussi, surtout à Byzance, le numérateur du dénominateur par des formes différentes d'accent, en répétant parfois le dénominateur [*F. Hultsch*, Metrologicorum scriptorum reliquiae 1, Leipzig 1864, p. 173/5] écrit alors *après* le numérateur.*

*Dans ses Métriques authentiques, *Héron*, vers + 100 [Opera [145]), 3] emploie le plus souvent les fractions ordinaires, mais parfois il emploie deux quantièmes simples successifs. Les suites égyptiennes de quantièmes reparaissent vers le 7e siècle, avec l'indication de procédés pour les former, dans le *Papyrus mathématique d'Akhmîm* [publié par *J. Baillet* dans les Mém. publ. par les membres de la mission archéologique française au Caire 9, Paris 1892]; puis on les retrouve à Byzance dans les écrits pseudo-héroniens [Heronis Alexandrini Geometricorum . . . reliquiae, éd. *F. Hultsch,* Berlin 1864] et elles sont couramment pratiquées jusqu'à la fin de l'empire byzantin [voir *P. Tannery,* Notice sur les deux lettres arith. de Nicolas Rhabdas, Notices et extr. mss. bibl. nationale 32 I, Paris 1886; cf. Bull. sc. math. (2) 8 (1884), p. 274].*

Les Romains avaient cherché à représenter les fractions comme multiples de $\frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \cdots$ jusqu'à $\frac{1}{288}$ et plus tard même $\frac{1}{1728}$, conformément à leur mode de division de l'*As*, poids d'une livre [cf. *Th. Mommsen* et *J. Marquart* [62]) trad. 10, p. 7, 88]. A propos des opérations en chiffres romains au moyen-âge (10e siècle) voir *B. E. Ch. Guérard,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 483/4.

deurs continues, des longueurs par exemple, qui ne pouvaient pas être regardées comme formées par la réunion d'un certain nombre d'unités. L'unité (de grandeur) est alors divisée en un certain nombre de parties égales et si l'une de ces parties est contenue un nombre exact de fois dans la grandeur considérée, on est parvenu à la *mesure* de cette grandeur qui s'exprime au moyen de deux nombres naturels, dont l'un, le *dénominateur*, exprime en combien de parties égales l'unité est divisée, l'autre, le *numérateur*, combien de ces parties contient la grandeur à mesurer. Cette mesure s'appelle aussi *rapport* de la grandeur à mesurer à la grandeur prise pour unité.

On écrit[174]) le numérateur au dessus du dénominateur en le séparant par une barre. Le symbole $\frac{a}{b}$ ainsi formé au moyen de deux nombres entiers, abstraction faite de son origine, est considéré alors comme un nombre (fraction, nombre fractionnaire). Si l'unité de grandeur était contenue exactement a fois dans la grandeur à mesurer, on serait conduit ainsi au symbole $\frac{a}{1}$ que l'on écrit simplement a.

Il est entendu que sur cette nouvelle sorte de nombres, toutes les définitions doivent être reprises[175]). Dans le choix des définitions, on peut, à ce point de vue, se laisser guider par l'origine concrète des fractions, en sorte que des fractions égales mesurent des grandeurs égales, que l'addition de celles-ci corresponde à l'addition des grandeurs, et la multiplication au *changement d'unité de grandeur*. La soustraction et la division restent les opérations inverses de l'addition et de la multiplication. Les propriétés fondamentales des opérations se trouvent ainsi être conservées.*

24. Opérateurs de Méray et de Peano. $_*$On peut aussi, avec *Ch. Méray*[176]) et *G. Peano*[177]), considérer les fractions $\frac{a}{b}$ comme des

174) Les Hindous qui connaissaient les quantièmes et les opérations qui en dérivent, plaçaient, comme nous, le numérateur au dessus du dénominateur, mais sans les séparer par une barre ou n'importe quel signe. La barre de la fraction a été employée par les Arabes; *Léonard de Pise,* dont le Liber abbaci a été la source pour les manuels de calcul des siècles suivants, écrit les fractions comme nous le faisons [Liber abbaci [186]) fol. 11ᵃ; éd. *B. Boncompagni* 1, p. 24]. La barre des fractions est universèllement répandue au 16ᵉ siècle.

175) $_*$*Ch. Riquier*, Ann. Ec. Norm. (3) 12 (1895), p. 198; *J. Tannery,* Leçons d'Arith. Paris 1894, p. 143.*

176) $_*$*Ch. Méray* et *Ch. Riquier,* Nouv. Ann. math. (3) 8 (1889), p. 421; *Ch. Méray,* Leçons nouv. [152]) 1, p. 2; *Ch. Riquier,* Revue métaph. 1 (1893), p. 346.*

177) $_*$Arith. [20]), p. 13; Formulaire 3, p. 55; Congrès philos. 3, p. 286 [1901].*

opérateurs[178]) représentant l'opération composée „multiplier par a" et „diviser par b". Deux opérateurs $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont *égaux* quand *appliqués à un même nombre qui rende les opérations possibles, ils donnent des résultats égaux*[179]).*

25. Fractions systématiques. Par l'extension du principe de position de notre numération écrite, on parvient à la notation des *fractions décimales*[180]), dont on écrit seulement le numérateur et dont le dénominateur est *dix, cent, mille,* ... La place de la virgule indique lequel de ces nombres est le dénominateur.

*Le même principe qui sert de base à l'emploi des fractions décimales peut être étendu à des numérations à base quelconque a. On appelle *fraction systématique, à base a,* toute expression de la forme

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{aa} + \frac{\alpha_3}{aaa} + \cdots + \frac{\alpha_n}{aa\ldots a},$$

où α_0 est un nombre entier, où chacun des numérateurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est l'un des chiffres $1, 2, \ldots, a-1$, ou 0, et où le dénominateur de chacune des fractions est le produit d'autant de facteurs égaux à a que l'indique l'indice du numérateur.

Les fractions décimales sont les fractions systématiques à base 10. Les fractions sexagésimales[181]) sont les fractions systématiques à base 60.*

---

178) *Cette même idée d'opérateurs peut aussi bien servir à définir les nombres *négatifs*.*

179) **G. Peano* fait observer que déjà *Ahmès* donne comme raison de l'égalité des deux expressions $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{15}$ et $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$, qu'en opérant sur 15, elles donnent les deux nombres égaux $15 - 10 - 1$ et $3 + 1$ [Papyrus Rhind [51]), trad *A. Eisenlohr* 1 (1877), p. 57/8; planche X, n° 21].*

180) *Le premier exemple d une division *purement* décimale se trouve dans les Tables trigonométriques de *Regiomontanus* dressées en 1467 [Opus tabularum ... éd. douteuse Nuremberg 1475; éd. certaine Augsbourg 1490]; en prenant 10^5 pour rayon du cercle trigonométrique, il évitait d'ailleurs tout signe pour indiquer la partie décimale. Des divisions décimales mélangées à des divisions sexagésimales avaient déjà apparu dans les écrits des premiers algébristes occidentaux chrétiens [pour *Jean de Séville*, voir Liber algorismi [95]), fol. 100^a, col. b; *B. Boncompagni*, Trattati d'arit. 2, Rome 1858, p. 87].

Le véritable inventeur du système décimal a été *Simon Stevin.* Dans sa *Disme,* brochure de 10 pages seulement, écrite d'abord en flamand puis en français [p. 139/148 de la Practique d'Arith. faisant suite à l'Arith. [75]), Leyde 1585], il a, en effet, insisté le premier sur la facilité de calcul résultant de l'emploi *systématique* du système décimal. Sa notation n'a cependant pas prévalu; il écrivait par ex.

941 ⓪3①0②4③ pour 941,304

Opérations de rangs plus élevés que deux.

26. Puissances. Lorsque les facteurs d'un produit sont tous égaux, la multiplication s'appelle *élévation à une puissance*[182]. Elever

---

peu après, en 1592, *J. Bürgi* écrivait $14\underset{0}{1}4$ pour 141,4 et 001414 pour 0,01414 [cf. *R. Wolf,* Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 33 (1888), p. 226]. *F. Viète* parle des avantages qu'offrent les fractions décimales [Universalium inspectionum p. 7; Appendice au Canon mathematicus, 1e éd. Paris 1579]; il s'approche davantage de notre notation car après avoir employé (p. 15) pour la partie décimale des caractères plus petits que ceux qui servent à représenter la partie entière, il sépare par un signe spécial, *un trait vertical* (p. 64, 65) la partie décimale de la partie entière; de ce trait vertical à la *virgule* actuelle, il n'y a qu'un changement de bien peu d'importance. La virgule elle-même apparaît pour la première fois pour séparer seulement la partie décimale de la partie entière (au lieu de séparer les nombres en général en tranches de trois chiffres) dans un ouvrage de *J. Néper* (*Napier*), Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo, Edinbourg 1617, p. 21.*

181) Les fractions des Babyloniens appartiennent toutes au système sexagésimal. *Dans son *Ἀναφορικός*[59], *Hypsiclès* divise la circonférence en 360 parties égales [éd. *K. Manitius,* p. XXVI]; *Hipparque* emploie couramment les fractions sexagésimales;* de même *C. Ptolémée* qui, dans son Almageste[89], envisage la valeur approchée $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60 \times 60}$ de π; *pour représenter cette valeur approchée *J. L. Heiberg* [Syntaxis math. 1, Leipzig 1898, p. 216] écrit $\overline{\gamma}\,\overline{\eta}\,\overline{\lambda}$ (sans barre dans les Tables) ce qui est une pure *numération de position*, tandis que *N. Halma* [Composition math. de Ptolémée 1, Paris 1813, p. 421] écrit $\overline{\gamma}\,\eta'\,\lambda''$; cette notation de *N. Halma* paraît plutôt byzantine.*

Notre division en 60 parties égales de l'heure et du degré, ainsi que les expressions *minute* (pars minuta prima) et *seconde* (pars minuta secunda) ont pour origine les anciennes fractions sexagésimales; *les Grecs disaient ἑξηκοστά pour *soixantièmes* et λεπτά pour *minutes.**

*Pendant tout le moyen âge les fractions sexagésimales ont été en usage chez les Hindous, les Arabes et dans les pays chrétiens (minutae physicae). On les rencontre encore au premier plan au 16e siècle, même parfois au 17e siècle [cf. *V. Wing,* Astronomia britannica, Londres 1652; 1669, livre 1]. Le fait de *supprimer les dénominateurs* 60, 60×60, $60 \times 60 \times 60$, en ajoutant aux numérateurs correspondants des accents $'$, $''$, $'''$ est très courant, mais comme il ne correspond pas à l'introduction de 59 chiffres significatifs il n'offre aucunement les avantages que la convention correspondante apporte dans le système décimal.*

182) *Diophante* nomme la seconde puissance de l'inconnue *δύναμις* [Opera[117]) 1, p. 4, 6, ...]; *déjà *Hippocrate de Chios* (vers — 440) avait employé le même mot dans le même sens [Eudemi Rhodii ...., éd. *L. Spengel,* Berlin 1870, p. 128].* La traduction latine „potentia" du mot grec *δύναμις*, *en italien *potenza,* [*R. Bombelli*, Algebra[139]) p. 37]* a conduit au mot *puissance.* *Réservé d'abord au carré de l'inconnue [*R. Bombelli*, Algebra[139]) p. 64, 204, dit encore potenza di potenza pour la 4e puissance], il s'étend au cube, puis à toutes les puissances [déjà *S. Stevin* dans son Arith.[75]), p. 40, parle de *potence cubique* et de *potence*

le nombre (passif) a à la puissance p (nombre actif), c'est former un produit de p facteurs dont chacun est égal à a. Le nombre a (le facteur du produit), qui peut être un nombre rationnel (absolu ou relatif) quelconque, s'appelle *base*; le nombre p qui exprime combien de fois le nombre a entre comme facteur et qui, ainsi, doit être un nombre naturel, s'appelle *exposant.*[183]) Le résultat que l'on écrit a^p s'appelle *puissance.*[184])

---

de quarte quantité] et non seulement à des puissances de l'inconnue mais aussi à des puissances de quantités données; *F. Viète* dit „potestas“ [Isagoge [124]), fol. 5; éd. *F. Schooten*, p. 4; trad. *F. Ritter*, p. 232]; *A. Girard* [Inv. [87]), sign. B_1 recto] emploie le mot même de *puissance* dans le sens actuel.*

183) Cette dénomination se rencontre pour la première fois [cf. note 196] dans *M. Stifel*, Arith. [136]), fol. 235[b], 245[b].

184) *Diophante* [Opera [117]) 1, p. 4] use déjà d'abréviations pour représenter les puissances de l'inconnue de 1 à 6. Les Hindous et les Arabes suivent l'exemple de *Diophante*; de même aussi les Occidentaux chrétiens: les premières puissances de l'inconnue ont chacune un nom particulier et sont désignées par l'initiale ou une abréviation de ce nom; *Luc Paciuolo* a des abréviations pour les 29 premières puissances de l'inconnue [Summa [95]), fol. 67[b]]; les Cossistes allemands cherchent à perfectionner cette notation.

Dans une lettre du byzantin *M. Psellus*, au 11[e] siècle [*Diophante*, Opera [117]) 2, p. 38], les puissances successives sont désignées comme nombre premier (inconnu), second (carré) etc. Cette nomenclature semble empruntée par l'intermédiaire du *commentaire d'Hypatia* à *Anatolius*, contemporain de *Diophante.* Mais elle resta inconnue en Occident, où *N. Chuquet* réalisa, le premier, le même progrès, décisif cette fois [Triparty [87]), fol. 84[a], Bull. bibl. 13, p. 737]; il appelle l'inconnue et ses puissances successives „nombres premiers, seconds, tiers, quartz, ...“ et ajoute (fol. 84[b]): les nouvelles dénominations ne s'arrêtent pas comme les anciennes „veu qu'elles sont innumérables.“ La notation de *N. Chuquet* est bien voisine de la nôtre; la *base* toutefois reste sous-entendue; ainsi *N. Chuquet* écrit 5^1, 5^2, 5^3, ... là où nous écrivons $5x$, $5x^2$, $5x^3$, ... Les notations de *R. Bombelli* $\overset{1}{\smile}$, $\overset{2}{\smile}$, $\overset{3}{\smile}$, ... [Algebra [139]), p. 57] et de *S. Stevin* ①, ②, ③, ... [Arith. [75]), p. 9] ne sont que des variantes de celles de *N. Chuquet*; *A. Girard* étend ces notations aux puissances de quantités données et écrit 18 (1) pour notre $18x^1$, (1) 18 pour notre 18^1, ... [Inv. [87]), sign. B_1 recto]; *P. Hérigone* [Cursus mathematicus, Paris 1634] inscrit l'exposant après la base, sur la même ligne, le coefficient numérique étant toujours écrit avant la base; ce mode, exclusivement applicable au cas où la base est une *lettre*, n'est d'ailleurs employé par *P. Hérigone* qu'en se conformant au principe de *F. Viète* pour qui une lettre désigne une grandeur géométrique d'*une, deux* ou *trois* dimensions; enfin *R. Descartes* introduit la notation actuelle [Géom. [144]) livre 1; Œuvres 6, p. 371] en se bornant toutefois à des puissances *déterminées* aa ou a^2, a^3, a^4, ... „et ainsi à l'infini“, sans jamais écrire a^n, où n désigne un nombre naturel *quelconque*; c'est *I. Newton* qui a fait cette dernière abstraction [187]). *C. F. Gauss* écrivait encore aa là où nous écrivons a^2, estimant qu'une notation abrégée ne doit être employée que quand elle prend moins de place. L'idée de représenter les puissances des inconnues (au moins des inconnues auxiliaires), en *répétant* les lettres qui représen-

On pose $a^1 = a$. *Contrairement à la règle de *E. Schröder*[146]), on entend en France par a^{b^c} non pas $(a^b)^c$ mais $a^{(b^c)}$.*

De cette définition de l'élévation à une puissance et des lois de la multiplication, résultent les lois suivantes de l'élévation à une puissance:

Formules de distribution pour une même base:

$$1^\circ)\quad a^p a^q = a^{p+q}; \qquad 2^\circ)\quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},\quad \text{si } p > q;$$

$$3^\circ)\quad \frac{a^p}{a^q} = 1,\ \text{si } p = q; \qquad 4^\circ)\quad \frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{q-p}},\quad \text{si } p < q.$$

Formules de distribution pour des bases différentes:

$$5^\circ)\quad a^q b^q = (ab)^q; \qquad 6^\circ)\quad \frac{a^q}{b^q} = \left(\frac{a}{b}\right)^q.$$

Formule d'association:

$$7^\circ)\quad (a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p.$$

On a d'ailleurs, pour tout nombre naturel p,

$$0^p = 0;\quad 1^p = 1;\quad (-1)^{2p} = 1;\quad (-1)^{2p-1} = -1.$$

Si $a > b > 0$, on a aussi

$$a^p > b^p;$$

si $p > q$, on a

$$a^p > a^q \quad \text{ou} \quad a^p < a^q,$$

suivant que l'on a $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

A cause des applications géométriques, on a conservé aux puissances avec les exposants 2 et 3, les noms de *carré* et de *cube*. Parfois on dit aussi *bicarré* pour 4^e^ puissance.

Si la base est une somme, une différence, un produit, un quotient, ou une puissance, on doit l'enfermer entre parenthèses. Au contraire, la façon de placer l'exposant rend les parenthèses inutiles lorsque lui-même est une somme, etc.

Les symboles a^0 et a^{-n}, quand n est un nombre positif, n'ont jusqu'à présent aucun sens. D'après le principe de permanence, il convient d'attribuer[185]) à a^0 la valeur a^{p-p}, indépendante de p, c'est

---

tent ces inconnues, semble due à *M. Stifel* [éd. de Königsberg (1553/54) de la Coss [136]) de *Chr. Rudolff*, fol. 61^b^, 62^a^; cf. *G. Eneström*, Bibl. math. (2) 13 (1899), p. 55]; *T. Harriot* [Artis anal. [128]), p. 4] écrit aussi aa, aaa, $aaaa$, pour a^2, a^3, a^4.

Enfin des exposants en chiffres romains apparaissent un moment avant les exposants en chiffres arabes de *R. Descartes* dans *l'Algèbre nouvelle de Viète d'une méthode nouvelle claire et facile*, éditée par *J. Hume*, Paris 1636, p. 235, 401, ...*

185) *Déjà *N. Chuquet* [Triparty [87]), fol. 84^a^; Bull. bibl. 13, p. 737], après avoir introduit sa notation des exposants, ajoute qu'un simple nombre a pour dénomination *zéro*. *S. Stevin* [75]), p. 28, écrit (0) pour x^0 ou 1.*

à dire 1, à cause de la formule 3°, et, en raison des formules 2°, 4°, de prendre $\frac{1}{a^n}$ comme définition[186] de a^{-n}. Ces *définitions* admises, les formules 1° à 7° subsistent, quels que soient les nombres entiers (positifs, nuls ou négatifs) et sous les restrictions qu'on leur a imposées.

L'extension du concept de puissance au cas où l'exposant est un nombre fractionnaire[187], présuppose la notion de l'extraction des racines qui est une des opérations inverses de l'élévation aux puissances.

Celle-ci n'est pas une opération commutative: en général b^n n'est pas égal à n^b; les deux opérations inverses doivent donc être distinctes. L'opération par laquelle on cherche la base (le nombre passif) b telle que l'on ait $b^n = a$, en regardant a et n comme données, s'appelle *extraction de racine.*[188] L'opération par laquelle on cherche l'ex-

---

186) $_*$*N. Chuquet* écrit par ex. [Triparty [87], fol 84^b; Bull. bibl. 13, p. 738] $5^{1\hat{m}}$, là où nous écrivons $5x^{-1}$ ou $\frac{5}{x}$ et il soumet au calcul [Triparty [87] fol 85^a; Bull. bibl. 13, p. 740] les puissances nulles ou négatives. *J. Wallis* met en évidence l'analogie des puissances négatives et des puissances positives [Arith. infin. 1655, prop. 101/6; Opera 1, Oxford 1695, p. 407/10]; il compare par ex. les suites $\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \ldots$ et $1, 4, 9, \ldots$ et dit de la première que son *indice* est -3, tandis que celui de la seconde est 2. *I. Newton* enfin introduit la *notation* des exposants négatifs [Methodus fluxionum, écrit en latin entre 1664 et 1671, imprimé en anglais, Londres 1736; trad. par *Buffon*, Paris 1740, p. 4; Opuscula, éd. *J. Castillon* 1, Lausanne et Genève 1744, Opusc. II p. 34].*

187) $_*$*Nicole Oresme* envisage déjà des exposants fractionnaires et en développe le calcul formel [Algorithmus proportionum, écrit vers 1360; éd. *M. Curtze*, Z. Math. Phys. 13, Suppl., Lpz. 1868, p. 70/73]; il égale, par ex., 8 à $4^{1+\frac{1}{2}}$ qu'il écrit $\boxed{1^p \frac{1}{2}}\,4$. *S. Stevin* dit [Arith. [75], p. 18] „toutefois le $\frac{1}{2}$ en circle serait le caractère de racine de (1) etc., et ainsi des aultres"; il écrit $(\frac{1}{2})\,4\,(1)$ pour $\sqrt{4x}$; *A. Girard* écrit $(\frac{3}{2})49$ pour 343 [Inv. [87], sign. B_1 recto] tandis que $49(\frac{3}{2})$ représenterait $49\sqrt{x^3}$; *J. Wallis* [186], sans employer de notation pour les exposants fractionnaires, les définit cependant complètement; *I. Newton* introduit enfin notre notation moderne.

La notation $a \wedge m$, pour a^m, proposée par *G. Peano* [Formulaire [20] 3, p. 60] quel que soit m, peut être avantageuse quand m a une forme compliquée; $\wedge$ est le signe radical $\surd$ renversé.*

188) $_*$D'après *L. Rodet* [J. asiatique (7) 13 (1879), p. 419], les Hindous employaient pour désigner la racine carrée d'un nombre non carré, une abréviation du mot „Karaṇî" qui signifie „faire"; ce mot traduit exactement la locution grecque ὁ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$. Ils employaient d'ailleurs dans le sens arithmétique de racine, le mot „mûla" qui veut aussi dire *racine de plante*; les Arabes ont traduit littéralement et ont désigné la racine carrée par l'initiale du mot arabe correspondant „jidr"; ils plaçaient d'ailleurs cette initiale *au dessus* du nombre en l'en séparant par un trait horizontal. *Jean de Séville* a traduit „jidr" par „radix" [Liber algorismi [95], fol 106^a, col. b; *B. Boncompagni,* Trattati d'arit. 2, Rome

posant n (le nombre actif), tel que l'on ait encore $b^n = a$, s'appelle *recherche du logarithme de a, dans la base b.*

27. Racines. La racine n^e de a, qu'on écrit[189]) $\sqrt[n]{a}$, est ainsi le nombre qui, élevé à la puissance n, donne a; en d'autres termes, on a la formule

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Dans le symbole $\sqrt[n]{a}$ le signe $\sqrt{\ }$ s'appelle *radical*, a est le *nombre* ou la *quantité sous le radical*, n est *l'indice*. Au lieu de $\sqrt[2]{a}$ on écrit $\sqrt{a}$.

L'habitude est de n'employer cette notation que quand n est un nombre naturel.[190])

1858, p. 112]. Déjà chez les Arabes, et de même chez les Occidentaux latins, *jidr (radix)* prend d'ailleurs souvent une signification plus étendue et se confond avec *šaï (res)* pour désigner l'inconnue, non seulement des équations binomes, mais de toute équation. (Cf. note 144).* (Note ms. de *P. Tannery*).

189) *Les premiers Cossistes allemands [Codex de Dresde C. 80] mettaient des points devant le nombre dont on a à extraire la racine, un point • pour la racine carrée, deux points • • pour la racine quatrième, trois points • • • pour la racine cubique, quatre points • • • • pour la racine neuvième. Dans la Coss [144]) d'*A. Riese* [ms. terminé en 1524; cf. *B. Berlet*, Progr. Annaberg 1860, et Adam Riese, sein Leben..., Francfort $^s/_M$ 1892] le point s'est déjà transforme en ; pour $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, *Chr. Rudolff* emploie, dans sa Coss [136]) de 1525, les symboles , , , tout en faisant usage du mot *point (Punkt)* pour désigner ces signes; au lieu de ces symboles, *M. Stifel* [Arith. [136]), fol. 109] introduit des indices sous l'unique radical $\surd$, mais ces indices sont les signes cossiques servant à désigner les puissances correspondantes et non les nombres 2, 3, 4, ...; *S. Stevin* enfin [Arith. [75]), p. 24, 26] écrit $\surd③$ pour $\sqrt[3]{\ }$ et $\surd④$ pour $\sqrt[4]{\ }$; on trouve encore dans *R. Descartes* [Géom. [144]), livre 1; Œuvres 6, p. 371] le symbole $\surd C.\overline{+A}$ pour désigner $\sqrt[3]{A}$. L'origine de la transformation du signe $\surd$ en $\sqrt{\ }$ est sans doute la barre dont *R. Descartes* et ses disciples surmontaient les expressions que nous enfermons dans des parenthèses [Voir par ex: Géom. [144]) livre 3, p. 461].*

190) *Les notations de *N. Chuquet* avaient déjà un caractère universel. Il écrivait [Triparty [87]), fol. 45^b, 46^a; Bull. bibl. 13, p. 655] ℞^2A, ℞^3A, ... ℞^6A pour $\sqrt{A}$, $\sqrt[3]{A}$, ... $\sqrt[6]{A}$ quel que soit le nombre naturel envisagé A; il avait même étendu cette notation au cas où $n = 1$, en sorte que ℞^1A est égal à A. Il nomme d'ailleurs ces racines, non pas carrée, cubique, carrée de carrée ..., mais *seconde*, *tierce*, *quarte*, ... [Triparty [87]), fol. 46^a; Bull. bibl. 13, p. 655]. *A. Girard* [Inv. [87]), sign. B_1 recto] propose d'écrire $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, ... mais il se conforme encore le plus souvent aux anciennes notations; pour $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ par ex. il écrit encore $(\frac{1}{2})8$, $(\frac{1}{3})9$ et il emploie parfois le signe cossiste $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ pour $\sqrt[3]{\ }$ et le signe cossiste $\surd\surd$ pour $\sqrt[4]{\ }$ [Inv. [87]), sign. B_2 verso, B_3 recto]. C'est depuis la publication du Traité d'Algèbre de *M. Rolle*, Paris 1690, que notre notation moderne est systématiquement employée.*

$_*$L'expression $\sqrt[n]{a}$ n'a de sens, pour le moment, que si a est la puissance n^e d'un nombre rationnel; en particulier, elle n'en a pas quand a est un nombre négatif et que n est un nombre pair. Lorsque a est un nombre positif, d'après la définition précédente l'expression $\sqrt[n]{a}$ serait susceptible de deux (déterminations) significations, car a est alors la puissance n^e de deux nombres symétriques. Pour que l'opération soit *univoque* (n° **10**), il convient d'adopter pour $\sqrt[n]{a}$ une seule valeur, la valeur positive par exemple, (*valeur arithmétique,* ou *absolue,* du radical) l'autre valeur étant représentée par $-\sqrt[n]{a}$.*

Les définitions de l'opération et les propriétés de l'élévation aux puissances fournissent les formules de *distribution*[191])

$$1^\circ)\quad \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,;\qquad 2^\circ)\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,;$$

d'association

$$3^\circ)\quad (\sqrt[p]{a})^q=\sqrt[p]{a^q}\,;\qquad 4^\circ)\quad \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}=\sqrt[pq]{a}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}\,;$$

et la formule

$$5^\circ)\quad \sqrt[p]{a^q}=\sqrt[np]{a^{nq}}\,.$$

Dans ces formules n, p, q désignent en général des nombres naturels; rien n'empêche toutefois de regarder q comme étant un entier quelconque dans les formules 3° et 5°.

$_*$On suppose que les expressions qui figurent dans les diverses formules ont un sens, ce qui a certainement lieu si le premier membre a un sens. Pour la formule 4°, si l'un des membres a un sens, il en est de même des deux autres.*

Le principe de permanence conduit à adopter l'expression $\sqrt[q]{a^p}$ pour définition de $a^{\frac{p}{q}}$, p et q étant des nombres naturels, et à regarder $a^{-\frac{p}{q}}$ comme ayant le même sens que $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$. Dès lors les sept formules fondamentales relatives à l'élévation aux puissances subsistent toutes, pourvu que les nombres p, q soient *rationnels,* à supposer, bien entendu, que les opérations indiquées aient un sens.

---

191) $_*$Les premières traces *d'opérations* effectuées sur des radicaux se rencontrent chez les Grecs [*Euclide*, Elementa [44]), livre 10; Opera 3, Lpz. 1886]; mais les transformations de quantités dans l'expression desquelles figurent plusieurs radicaux est plus développée chez les Hindous [voir en particulier *Bhâskara* [149]), Vîjagaṇita, chap. 1, sect. 5; éd. *H. T. Colebrooke*, Alg. [118]), p. 145/55] et chez les Arabes [voir par ex. *Alkarkhî*, Fakhrî (vers l'an 1000); extraits publ. par *F. Wöpcke*, Paris 1853, p. 56/59] avant de faire l'objet des recherches des Occidentaux chrétiens.*

28. Logarithmes. Le logarithme[192]) de a, dans la base[193]) b, que l'on écrit[194]) $\log_b a$, est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre b pour obtenir le nombre a; en d'autres termes, il est défini par la formule

$$b^{\log_b a} = a. ^{195)}$$

$_*$Cette définition n'a de sens, pour le moment, que s'il existe un nombre naturel p, tel que b soit la puissance q^e d'un nombre rationnel $\sqrt[q]{b}$, et, en outre, un nombre entier p (positif, nul ou négatif) tel que $(\sqrt[q]{b})^p$ soit égal à a; $\log_b a$ est alors le nombre rationnel $\frac{p}{q}$.*

---

192) $_*$Le germe de la notion de logarithme se trouve déjà dans le Triparty; *N. Chuquet* y envisage simultanément la progression arithmétique $1, 2, \ldots, n$ et la progression géométrique $a, a^2, \ldots, a^n$, où a désigne un nombre naturel donné, et il remarque qu'en faisant *correspondre* les termes de même rang de ces deux progressions, la somme de deux nombres de la progression arithmétique annonce le produit des deux nombres correspondants de la progression géométrique [Triparty [87]), fol. 26^a, 26^b; Bull. bibl. 13, p. 629, 630]. *M. Stifel* étend la correspondance en envisageant la progression arithmétique $-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ et la progression géométrique correspondante $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$ à base 2 [Arith. [136]), fol. $35^a, 35^b, 249^b$]; de plus *M. Stifel* semble nettement entrevoir la fécondité de la notion nouvelle. Elle ne se développe cependant qu'au 17^e siècle, lorsque *J. Néper* (*Napier*), et, peu après lui, *J. Bürgi*, eurent l'idée de construire des Tables permettant de passer immédiatement, avec une approximation suffisante, d'un nombre quelconque de la progression arithmétique (et aussi de nombres intercalaires), au nombre correspondant de la progression géométrique envisagée.

Déjà les deux progressions envisagées par *J. Néper* [Mirifici logarithmorum canonis *descriptio*, Edinbourg 1614] sont supposées engendrées par *fluxion* (mouvement continu). Mais ni *J. Néper*, ni *J. Bürgi* [*Jobst Byrgs* arith. und geom. Progresstabuln, Prague 1620] n'ont, à proprement parler, de *base* fixée *a priori*; si l'on envisage les nombres n et b qui joueraient le rôle de base chez *J. Néper* et chez *J. Bürgi*, en trouve

$$n = 10^7 e^{-0{,}0000001}; \quad \log_b 27184593 = 10^5.*$$

193) $_*$C'est dans l'Appendice, écrit vers 1616, joint à l'ouvrage de *J. Néper* Mirifici logarithmorum canonis *constructio*, Lyon 1620 (réimpr. Paris 1895), qu'apparaît pour la première fois explicitement une *base*, la base 10. On y pose $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$ pour fixer la correspondance entre les deux progressions. L'idée en semble due aussi bien à *H. Briggs* qu'à *J. Néper* [cf. *M. Cantor*, Vorles. [48]) 2, Lpz. 1900, p. 738].*

194) $_*$*A. L. Crelle* avait proposé [Sammlung math. Aufsätze 1, Berlin 1821, p. 207] d'écrire la base *au dessus* du logarithme, *à gauche.* Cette notation se rencontre parfois dans les publications allemandes.*

195) $_*$La *notion précise* du logarithme d'un nombre ne date que de l'instant où l'on a reconnu l'identité du logarithme de a dans un système à base b, et de l'exposant auquel il faut élever b pour obtenir a. C'est alors seulement que les opérations *du rang trois* prirent vraiment place en Arithmétique.*

En se reportant aux lois de l'élévation aux puissances, cette définition entraîne les formules:

$$1^{\circ})\quad \log_b(pq) = \log_b p + \log_b q; \qquad 2^{\circ})\quad \log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q;$$

$$3^{\circ})\quad \log_b(p^m) = m\log_b p; \qquad 4^{\circ})\quad \log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)},$$

où l'on suppose que les opérations indiquées aient un sens. Ainsi les formules 1°, 2° supposent que $\log_b p$, $\log_b q$ aient un sens; la formule 3° suppose que $\log_b p$ et p^m aient un sens.

*Il est souvent commode de distinguer la partie entière d'un *logarithme* [196]) de sa partie décimale; on désigne alors la partie entière sous le nom de *caractéristique* [197]) et la partie décimale sous le nom de *mantisse.* [198])

On appelle parfois *antilogarithme* [199]) de c, dans la base b, le nombre a dont le logarithme, dans la base b, est égal à c. On a donc

$$\operatorname{antilog}_b c = b^c; \qquad \operatorname{antilog}_b[\log_b a] = \log_b[\operatorname{antilog}_b a] = a.$$

Les logarithmes dont la base est le nombre transcendant e qui sera introduit plus loin (I 3, **21**) sont dits *logarithmes naturels* [200]); les logarithmes à base 10 sont dits *logarithmes décimaux* [201]).*

---

196) Le *mot* logarithme a été introduit par *J. Néper* [Mirifici ... descriptio [192]), p. 5]; il a son origine dans l'expression λόγον ἀϱιϑμός (numerus rationis, nombre d'un rapport) et s'explique par la considération de deux rapports (rationes) dont on obtient l'un en élevant l'autre à une certaine puissance. C'est ainsi qu'on nommait le rapport de 8 à 27 *raison triplée* de 2 à 3. *Cette façon de parler se trouve déjà dans *Euclide* qui appelle [Elementa [44]), livre 5, déf. 9, 10; Opera 2, p. 4] le rapport a^2 „διπλασίων λόγος" et a^3 „τϱιπλασίων λόγος" du rapport a;* c'est à elle que se rapporte aussi l'expression „*numerus rationem exponens*" pour désigner le logarithme, et cette dernière expression est, peut être, l'origine du mot *exposant.* [183])

197) **H. Briggs* [Arithmetica logarithmica, Londres 1624, p. 4, 21], déjà avant *N. Mercator* [Logarithmotechnica, Londres 1668, p. 4], fait usage de ce mot pour désigner la partie entière du logarithme décimal.*

198) **L. Euler* fait usage de ce mot pour désigner la partie décimale du logarithme décimal [Introd. in analysin infin. 1, Lausanne 1748, p. 83]; dans sa trad. *J. B. Labey* [1, Paris an IV, p. 83] traduit *mantissa* par „partie décimale". Le mot *mantissa* (bas latin) avait été employé par le grammairien *Festus* dans le sens de complément de moindre valeur [cf. *P. Tannery*, Interméd. math. 6 (1899), p. 181; *A. Desprats* id. p. 182; 7 (1900), p. 61 (Question 1336)]. *L. Euler* l'avait emprunté à *J. Wallis* qui l'applique en général à la partie décimale d'un nombre.*

199) *Ce mot „antilogarithme" était pris au 18e siècle dans le sens de log cos. que lui avait donné *J. Néper* [cf. Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 273].*

200) *On les appelle aussi assez improprement „népériens" (voir Note 192). Cependant, peu après *J. Néper*, *J. Speidel* a construit des Tables où le nombre *s*

29. Remarques finales[202]. $_*$On pourrait être tenté d'appliquer encore ici le principe de permanence. En partant de la classe A formée au moyen des nombres rationnels absolus et en regardant n comme un nombre naturel, on serait amené à former une classe nouvelle B constituée avec les nombres de la classe A et les symboles $\sqrt[n]{a}$ où a ne serait pas une puissance n^e exacte, ou encore avec des symboles du type $\log_b a$ n'ayant jusqu'ici aucun sens. Mais la somme de deux nombres de la classe B n'appartiendrait pas nécessairement à cette classe, et ce seul fait montre qu'une extension de la notion de nombre doit être cherchée dans une autre voie.*

On pourrait aussi être tenté d'introduire des opérations de rang quelconque. De même que l'on fait sortir la multiplication de l'addition, l'élévation à une puissance de la multiplication, on pourrait déduire de cette dernière opération, regardée comme l'opération directe du *troisième rang,* une opération du *quatrième rang*[203]), puis de celle-ci une opération du *cinquième rang* et ainsi de suite.

Si la définition d'une opération du quatrième rang est légitime au point de vue logique, elle est sans importance parce que l'opération du troisième rang n'est plus commutative.

Pour parvenir à une opération directe du quatrième rang, on n'a qu'à prendre a^a comme exposant de a, la puissance ainsi formée $a^{(a^a)}$ ou a^{a^a} comme nouvel exposant de a et ainsi de suite[204]). On écrira le résultat $(a;\, b)$ en supposant que a soit écrit b fois et c'est dans la formation de ce résultat $(a;\, b)$ que consiste l'opération directe *du rang quatre.*

---

qui jouerait le rôle de la base, si l'on avait jugé utile de le faire intervenir, serait lié au nombre e par la relation

$$\log_s x = 10^6 \log_e x$$

quel que soit x [cf. Bull. bibl. hist. biogr. math. 1 (1855), p. 48; *F. Cajori*, Abh. Gesch. Math. 9 (1899), p. 33].*

201) $_*$On les appelle aussi très souvent *logarithmes vulgaires.**

202) $_*$*A. de Fortia* [Traité d'Arithmétique, Avignon 1781] semble être le premier qui ait essayé de créer de nouvelles opérations.*

203) Parmi les mémoires qui se rapportent à des opérations *du rang quatre* ou d'un rang plus élevé, on peut signaler celui de *G. Eisenstein* [J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 36], celui de *F. Wöpcke* [id. 42 (1851), p. 83], celui de *H. Gerlach* [Z. Math.-Naturw. Unterricht 13 (1882), p. 423], celui de *E. Schulze* [Archiv Math. Phys. (2) 3 (1886), p. 302]. Les Traités ou Manuels de *H. Hankel, H. Grassmann, H. Scheffler, E. Schröder, O. Schlömilch, H. Schubert,* signalent l'opération directe *du rang quatre*, sans d'ailleurs entrer dans l'étude directe de cette opération.

204) $_*$*L. Euler*, Acta Acad. Petrop. 1 (1777) I, éd. 1780, math. p. 38; *E. M. Lémeray*, Proc. Edinb. math. Soc. 16 (1897/8), p. 13 et (courte notice) Assoc. fr. avanc. sc. 26 (S^t Etienne) 1897 ¹, p. 178.*

Si l'on convient de représenter par $(a; b)^{(a; c)}$ l'expression $(a; b+c)$, on aura, entre autres, la relation

$$(a; b)^{(a; c)} = (a; c+1)^{(a; b-1)}.$$

*Rien n'empêcherait de continuer indéfiniment dans la même voie[204]. Dans un ordre d'idées analogues, *G. Mannoury*[205]) a constitué, sous le nom d'addition de rangs 1, 2, 3, ... une autre suite d'opérations; son addition du rang un, est l'addition ordinaire et son addition du rang deux est la multiplication ordinaire, mais son addition du rang trois qu'il appelle *hypermultiplication* est distincte de l'élévation aux puissances.*

205) *Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1900), p. 235.*

I 2. ANALYSE COMBINATOIRE ET THEORIE DES DÉTERMINANTS.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **E. NETTO** (GIESSEN)
PAR **H. VOGT** (NANCY).

Analyse combinatoire.

1. Aperçu historique. L'*Analyse combinatoire* est la branche des mathématiques qui s'occupe de la formation, du dénombrement et des propriétés des différents groupes que l'on peut constituer, d'après des lois déterminées, au moyen d'un nombre fini d'éléments.

Les origines de l'Analyse combinatoire remontent jusqu'au 17e siècle et se trouvent dans les travaux de *B. Pascal*[1]), de *G. W. Leibniz*[2]), de *J. Wallis*[3]), de *B. Frenicle*[4]), mais plus particulièrement dans ceux de *Jacques Bernoulli*[5]) et de *A. de Moivre*[6]). C'est à la fin du 18e siècle et au commencement du 19e que cette branche de la science prit le plus d'importance, avec *C. F. Hindenburg*[7]), *H. A. Rothe*[8]), *Chr. Kramp*[9]), *J. D. Gergonne*[10]), *A. von Ettinghausen*[11]), et de nombreuses monographies datent de cette époque; les mémoires vraiment importants sont cependant assez rares. *L. Poinsot* voyait dans la théorie des combinaisons une branche de la théorie de l'ordre qu'il affectionnait beaucoup.

1) Traité du triangle arithmétique écrit en 1654; Op. posth. Paris 1665; Œuvres, éd. *Hachette* 3, Paris 1880, p. 243.

2) Diss. de arte combin., Leipzig 1666; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 13 et suiv.

3) Treatise of Algebra, Londres 1685; 2e éd.: De algebra tractatus, Opera 2, Oxford 1693, p. 1.

4) *B. Frenicle de Bessy,* Abrégé des combinaisons, Paris 1693; Mém. Acad. sc. Paris 1669/99, 5, éd. 1729, p. 87 et suiv.

5) Ars conjectandi, pars II, Bâle 1713, p. 72; trad. *L. G. F. Vastel,* Caen an X.

6) Doctrine of Chances, Londres 1718; meilleure éd. 1756.

7) Novi systematis permutationum ..., Leipzig 1781.

8) Dans *Hindenburg,* Sammlung combinat. analyt. Abh. 2, Leipzig 1800, p. 263.

9) Arithmétique universelle ou l'Algèbre, Cologne 1808.

10) Ann. math. pures appl. 2 (1811/12), p. 197.

11) Die combinatorische Analysis, Vienne 1826.

*Depuis cette brillante période, l'Analyse combinatoire fut un peu délaissée[12]), sauf peut-être en ces dernières années où *D. André, T. Muir, P. A. Mac Mahon*, entre autres, firent d'intéressantes recherches. Ce sont plutôt les applications de cette science aux autres parties des mathématiques qui offrent actuellement de l'intérêt.* Nous citerons parmi les applications à l'Analyse, les formules concernant les calculs effectués sur les séries, leurs produits, puissances, inverses, logarithmes; la théorie des différentielles d'ordre supérieur des fonctions compliquées, etc. Dans ce but avait été imaginé tout un système de notations[13]) qui est tombé dans l'oubli. La théorie des groupes finis et celle des déterminants se rattachent à l'Analyse combinatoire.

2. Opérations fondamentales. Lorsqu'on forme des groupes au moyen d'éléments donnés, la grandeur de ces éléments n'entre pas en ligne de compte; il suffit de savoir quels sont ceux que l'on considère comme distincts, et ceux que l'on considère comme égaux ou équivalents. Parmi toutes les manières de grouper ces éléments, on considère comme fondamentales les trois formations que l'on appelle *permutations, combinaisons*, et *arrangements.*

Les *permutations* de n éléments, distincts ou non, sont les groupes que l'on peut former en disposant ces éléments à n places déterminées.

Les *arrangements simples* de n éléments distincts pris p à p, sont les groupes que l'on peut former en disposant p de ces éléments à p places déterminées.

Les *arrangements complets*[14]) de n éléments distincts pris p à p, sont les groupes que l'on peut former en disposant à p places déterminées, p éléments, distincts ou non, égaux à un ou à plusieurs des éléments donnés.

Les *combinaisons simples* de n éléments distincts pris p à p, sont les groupes que l'on peut former en prenant p des n éléments donnés et les disposant d'une manière quelconque. Les *combinaisons complètes* de n éléments distincts, pris p à p, sont les groupes que l'on peut former au moyen de p éléments, distincts ou non, égaux à un ou plusieurs des éléments donnés et disposés d'une manière quelconque.

*Dans une combinaison, la disposition des éléments n'entre pas en ligne de compte; si l'on a une combinaison, et si l'on dispose

12) Voir cependant *J. F. C. Hessel*, Archiv Math. Phys. (1) 5 (1844), p. 295 et *L. Öttinger*, id. (1) 15 (1850), p. 241.

13) Voir p. ex. *L. J. Fischer* und *K. Chr. F. Krause*, Lehrbuch der Combinationslehre und der Arithmetik, Dresde 1812.

14) Certains auteurs remplacent les expressions *arrangement complet* et *combinaison complète*, par *arrangement avec répétition* et *combinaison avec répétition.*

comme dans une permutation les éléments dont elle se compose, on obtient un arrangement. En particulier, les arrangements simples de n éléments n à n ne sont autre chose que les permutations de ces éléments.

Les mots de *permutation*[15]) et d'*arrangement* n'ont pas toujours eu une signification aussi précise qu'aujourd'hui; l'un et l'autre ont été pris indifféremment, dans les ouvrages écrits en français au début du 19e siècle, pour désigner tout groupe d'éléments rangés dans un ordre déterminé. *G. W. Leibniz*[2]) désignait les permutations sous le nom de variations et toutes les combinaisons simples possibles sous le nom général de complexions, en distinguant les groupes d'objets pris 2 à 2, 3 à 3, etc., sous le nom de combinaisons, conternations, etc. On emploie encore à l'étranger le mot de *variation* pour désigner un arrangement.

Les *éléments distincts* que l'on considère sont ordinairement désignés par les lettres de l'alphabet $a, b, c, \ldots$ ou bien encore par une même lettre affectée d'indices successifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ou enfin par ces indices eux-mêmes.*

3. Permutations rectilignes et permutations circulaires. Il existe deux espèces de permutations, les permutations ordinaires et les permutations circulaires. Pour les premières, les n places que doivent occuper les n *éléments ont un ordre de succession parfaitement déterminé*, et sont, par exemple, numérotées de 1 à n; on peut sans inconvénient supposer qu'elles sont disposées sur une droite horizontale par ordre de numéros croissants, en allant de gauche à droite; une telle permutation est alors caractérisée par l'ordre de succession de ses éléments. C'est pour cette raison que les permutations ordinaires sont aussi appelées *permutations rectilignes.*

Si les n éléments sont distincts, le nombre P_n de leurs permutations rectilignes est[16])

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!;$$

si les n éléments ne sont pas tous distincts et se répartissent en en-

15) *Un *anagramme* est une permutation des lettres d'un mot, formant un nouveau mot, comme arme, rame, mare, amer.*

16) *Le produit des n premiers nombres est désigné par *A. M. Legendre* [Exercices de Calcul intégral 1, Paris 1811, p. 277] par $\Gamma(n+1)$; *C. F. Gauss* emploie la notation $\Pi(n)$ [Commentat. Soc. Gott. recent. 2 (1811/13) math., mém. n° 1, p. 26; Werke 3, Gött. 1876, p. 146]. C'est *Chr. Kramp* qui a introduit[9]) la notation $n!$ [voir aussi Ann. math. pures appl. 3 (1812/13), p. 3]. Plusieurs auteurs (en Angleterre, Suède, ...) emploient la notation $\underline{|n}$.*

sembles renfermant respectivement $p, q, \ldots$ éléments égaux entre eux, le nombre de leurs permutations rectilignes est

$$\frac{P_n}{P_p P_q \ldots} = \frac{n!}{p!\, q! \ldots}.$$

*Pour les *permutations circulaires,* on suppose que les n places occupées par les éléments sont disposées à la suite l'une de l'autre sur une circonférence parcourue par un mobile dans un sens déterminé, par exemple aux sommets successifs d'un polygone régulier convexe de n sommets, mais on ne spécifie pas quelle est la première de ces n places; deux permutations sont dès lors identiques si, après avoir disposé leurs éléments aux sommets de deux polygones réguliers égaux, on peut amener ces polygones à coïncider, de façon qu'en deux sommets coïncidants soient placés des éléments égaux.

Lorsqu'on a une permutation circulaire de n éléments disposés comme on vient de le dire, et qu'on choisit l'un des sommets du polygone comme *premier* sommet, la suite des éléments placés aux sommets successifs à partir de celui-là constitue une permutation ordinaire. Cela peut avoir lieu de plusieurs façons; en choisissant le premier sommet de toutes les manières possibles, on voit que le nombre des permutations *circulaires* de n éléments est inférieur à celui des permutations *ordinaires* des mêmes éléments. Si les n éléments sont tous distincts, chaque permutation circulaire donne naissance à n permutations rectilignes, toutes différentes, et le nombre des permutations circulaires est égal à $(n-1)!$; si les n éléments ne sont pas tous distincts, il peut arriver qu'une permutation circulaire soit constituée par m groupes successifs identiques renfermant chacun $\frac{n}{m}$ éléments; elle donne alors naissance seulement à $\frac{n}{m}$ permutations ordinaires différentes. Soient $p, q, \ldots$ les nombres respectifs des éléments égaux entre eux; D le plus grand commun diviseur de $p, q, \ldots$; d un des diviseurs de D; $a, b, \ldots$ les facteurs premiers distincts de d. La somme

$$\sum_{d/\mathrm{D}} \frac{d}{n}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\frac{\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{p}{d}\right)!\left(\frac{q}{d}\right)!\cdots},$$

étendue à tous les diviseurs d de D, représente le nombre de permutations circulaires de n éléments[17]). Lorsque $p, q, \ldots$ sont premiers entre eux, ce nombre est égal à $(n-1)!$*

17) **J. B. Durrande,* Ann. math. pures appl. 7 (1816/17), p. 334; *C. Moreau,* Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 309; *E. Jablonski,* J. math. pures appl. (4) 8 (1892), p. 331; *G. Landsberg,* Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 152.*

La considération des permutations circulaires permet d'établir une classification logique des permutations rectilignes[18]) et de les ranger en une suite linéaire, de façon qu'on puisse former celle qui occupe un rang donné dans cette suite. Une étude analytique des permutations a été faite par *T. B. Sprague*[19]).

4. Arrangements et combinaisons. Le nombre des *arrangements simples* de n éléments p à p est[20])

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1);$$

celui des *arrangements complets* est

$$\alpha_n^p = n^p.$$

Le nombre des combinaisons simples de n éléments p à p est

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p} = \frac{P_n}{P_p P_{n-p}};$$

on le représente[21]) par $\binom{n}{p}$.

Le nombre des combinaisons complètes de n éléments p à p est[22])

$$\Gamma_n^p = \frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdots p} = C_{n+p-1}^p.$$

On peut généraliser la notion de combinaison ou d'arrangement, en considérant np éléments a_{ik} affectés de deux indices, i variant de 1 à p et k de 1 à n; on forme ainsi des groupes de p éléments dont les indices i sont tous distincts et l'on dit que la combinaison ou l'arrangement sont *simples* ou *complets*, suivant que les indices k sont distincts, ou non.

**Thibault*[23]) envisage les arrangements simples ou complets formés au moyen d'éléments dont p_1 sont pris dans une première suite de n_1

18) *J. Bourget,* Nouv. Ann. math. (2) 10 (1871), p. 254; (3) 2 (1883), p. 443; C. R. Acad. sc. Paris 95 (1882), p. 508; *C. A. Laisant,* Bull. Soc. math. France 16 (1887/88), p. 176; *E. Netto,* Archiv Math. Phys. (3) 5 (1903), p. 185.

19) Proc. Edinb. math. Soc. 9 (1890/1), p. 59; Trans. R. Soc. Edinb. 37 (1895), p. 399 [1893].

20) *A. T. Vandermonde* emploie la notation $[n]^p$ [Hist. Acad. sc. Paris 1772 I, M. p. 490].

21) *L. Euler* a employé la notation $\left[\frac{n}{p}\right]$, Acta Acad. Petrop. 5 (1781) I, éd. 1784, math. p. 89, et la notation $\left(\frac{n}{p}\right)$, Nova Acta Acad. Petrop. 15 (1799—1802), éd. 1806, math. p. 33 [1778]; la notation $\binom{n}{p}$ a été introduite par *J. L. Raabe* [J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 350].

22) *B. Frenicle*[4]); *Jacques Bernoulli*[5]), p. 116; *H. F. Scherk,* J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 97; *W. A. Förstemann,* id. 13 (1835), p. 237.

23) *Nouv. Ann. math. (1) 4 (1845), p. 627.*

éléments, p_2 dans une deuxième suite de n_2 éléments, etc. Si les arrangements ainsi formés sont simples, leur nombre est

$$\frac{P_{p_1+p_2+\cdots}}{P_{p_1}P_{p_2}\cdots} A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2}\cdots;$$

si les arrangements sont complets relativement aux éléments de la i^e, de la k^e... suites, leur nombre s'obtient en remplaçant, dans l'expression précédente, $A_{n_i}^{p_i}$, $A_{n_k}^{p_k}$, ... par $\alpha_{n_i}^{p_i}$, $\alpha_{n_k}^{p_k}$, ...*

5. Inversions. Considérons n éléments distincts représentés par une même lettre affectée des indices $1, 2, \ldots, n$, et formons des permutations ou des arrangements simples de ces éléments, en les disposant chaque fois par exemple à la suite l'un de l'autre, sur une ligne horizontale. On dit que, dans un arrangement, deux éléments, consécutifs ou non, forment une *inversion*[24]), si l'indice du premier est supérieur à celui du deuxième. Lorsque les indices des éléments successifs vont en croissant, l'arrangement est dit *bien ordonné*; dans le cas contraire, les éléments pris deux à deux de toutes les manières possibles présentent un certain nombre d'inversions. Le nombre total de ces inversions est un nombre qui caractérise l'arrangement; suivant qu'il est pair ou impair, on dit que l'arrangement est de *première* ou de *deuxième classe*[25]); par l'échange de deux éléments d'un arrangement, c'est-à-dire par une *transposition*, on forme un nouvel arrangement d'une classe différente de celle du premier.

L'étude des inversions, qui présente des applications à la théorie des déterminants et à celle des équations du premier degré, a fait l'objet de nombreux travaux; *M. A. Stern*[26]), *O. Terquem*[27]), *Olinde Rodrigues*[28]) calculent le nombre d'inversions pour les différentes permutations; *L. Ottinger*[29]) fait le même calcul pour les arrangements

24) *G. Cramer* désignait une inversion sous le nom de *dérangement* [Introd. à l'Analyse des lignes courbes alg., Genève 1750, append. p. 658]; **P. S. Laplace* sous le nom de *variation* [Hist. Acad. sc. Paris 1772 II, M. p. 294; Œuvres 8, Paris 1891, p. 396]. C'est *J. D. Gergonne* qui introduisit le nom d'inversion [Ann. math. pures appl. 4 (1813/14), p. 149].*

25) *E. Bézout,* Hist. Acad. sc. Paris 1764, M. p. 292; *A. L. Cauchy,* J. Ec. polyt., cah. 17 (1815), p. 41; *C. G. J. Jacobi* emploie les expressions de classe positive et de classe négative [J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 286; Werke 3, Berlin 1884, p. 358]; *A. Hurwitz* [Math. Ann. 39 (1891), p. 7] et *E. Netto* [id. 56 (1902), p. 482] ont étudié la manière dont une permutation se compose au moyen d'un nombre donné de transpositions.

26) J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 100.

27) J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 559.

28) id. (1) 4 (1839), p. 236.

29) J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 322.

simples ou complets, et l'applique aux équations du premier degré; *P. Gordan*[30]) donne une règle générale pour effectuer ce calcul en le ramenant à d'autres relatifs à un moindre nombre d'éléments; *W. H. Metzler*[31]) étend la notion d'inversion à la théorie des combinaisons; **T. Muir*[32]), après avoir fait l'historique de la question, donne le nombre des permutations de n éléments distincts qui présentent δ inversions; ce nombre est le coefficient de x^δ dans le développement de

$$(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1});$$

c'est aussi le nombre des combinaisons δ à δ de $\frac{1}{2}n(n-1)$ éléments dont un est égal à a, deux sont égaux à b, trois à c, etc. ce que *T. Muir* exprime par l'égalité

$$V_{n\delta} = C_{1+2+\cdots+n-1,\,\delta}.$$

Si l'on considère deux permutations *inverses l'une de l'autre*, c'est-à-dire telles que les éléments de l'une soient identiques à ceux de l'autre pris en sens inverse, le nombre total des inversions pour ces deux permutations est $\frac{1}{2}n(n-1)$; il en résulte[33]) que le nombre total des inversions pour les $n!$ permutations est égal à $\frac{1}{4}n!\,n(n-1)$.*

6. Séquences. La notion de *séquence*, introduite dans l'étude des permutations d'éléments distincts par *I. J. Bienaymé*[34]), a fait l'objet de nombreux travaux de *Désiré André*. Plusieurs éléments consécutifs d'une permutation, distingués entre eux par une suite d'indices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ constituent une *séquence* lorsque l'indice de chacun d'eux est constamment plus grand (ou constamment plus petit) que l'indice de l'élément précédent. Chaque permutation de n éléments renferme un certain nombre s de séquences, et ce nombre s est important pour caractériser la permutation. *D. André* a donné le moyen de calculer de proche en proche le nombre des permutations de n éléments qui ont s séquences[35]). Il a partagé les permutations en deux espèces, suivant qu'elles ont un nombre s pair ou impair de séquences; il a montré que, dans ces deux espèces, le nombre des permutations est le même, et que, à partir de certaines valeurs du

30) Vorles. über Invariantentheorie publ. par *G. Kerschensteiner* 1, Leipzig 1885, p. 2.

31) Amer. J. math. 22 (1900), p. 55 [1898].

32) *Proc. R. Soc. Edinb. 22 (1897/99), p. 441; un calcul de récurrence avait été indiqué par *J. Bourget*, Nouv. Ann. math. (2) 10 (1871), p. 254.*

33) **Ch. Henry*, Nouv. Ann. math. (2) 20 (1881), p. 5.*

34) C. R. Acad. sc. Paris 81 (1875), p. 418.

35) C. R. Acad. sc. Paris 97 (1883), p. 1356; Ann. Ec. Norm. (3) 1 (1884), p. 121; Bull. Soc. philom. Paris (8) 3 (1890/1), p. 153; Bull. Soc. math. France 21 (1893), p. 131; J. officiel de la République française 25 (1893), p. 1748

nombre n des éléments, la somme des nombres des séquences est la même, ainsi que la somme des carrés de ces nombres, la somme de leurs cubes, etc.[36]). *Il a aussi étudié, en les nommant *couples actifs*, les couples de deux éléments d'une permutation qui, par leur échange, font passer cette permutation d'une espèce à l'autre[37]).*

*Parmi les permutations de n éléments, celles qui ont $n-1$ séquences et celles qui en ont $n-2$ ont été étudiées en détail par *D. André*, sous les noms respectifs de *permutations alternées* et de *permutations quasi-alternées*[38]); le nombre des premières est lié étroitement aux développements de séc x et de tg x. Soit A_n la moitié du nombre, toujours pair, des permutations alternées, et B_n la moitié du nombre, toujours pair, des permutations quasi-alternées; on a

$$A_{n+1} = 2A_n + B_n,$$

avec les valeurs conventionnelles $A_0 = A_1 = 1$; $B_0 = B_1 = -1$; $B_2 = 0$; A_n est le coefficient de $\frac{1}{n!}x^n$ dans le développement de $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; B_n est le coefficient de $\frac{1}{n!}x^n$ dans le développement de $\frac{1-2\cos x}{1-\sin x}$; les rapports $\frac{A_n}{A_{n+1}}, \frac{B_n}{B_{n+1}}, \frac{A_n}{B_n}, \frac{\pi}{2n}$, sont, pour n infini, des infiniment petits, et le quotient de deux quelconques d'entre eux a pour limite l'unité; A_n est asymptotique à $n!\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}$.

D. André a aussi partagé en quatre groupes les permutations des n premiers nombres naturels, la parité du nombre des inversions ou celle du nombre des séquences variant d'un groupe à l'autre; pour $n \geqq 6$, les quatre groupes renferment le même nombre de permutations[39]). *D. André* a enfin étendu la notion de séquence aux permutations circulaires[40]).*

7. Permutations réciproques. *H. A. Rothe*[8]) dit que deux permutations sont *en affinité* si, (pour chaque indice β), a_α désignant l'élément placé à la β^e place dans l'une, a_β désigne l'élément placé à

36) C. R. Acad. sc. Paris 118 (1894), p. 575, 726, 1026; rapport de *G. Darboux*, id. p. 1026; Mém. prés. Acad. sc. Paris (2) 32 (1902), mém. n° 1, p. 1 et suiv.

37) *Bull. Soc. math. France 31 (1903), p. 105; C. R. Acad. sc. Paris 136 (1903), p. 295.*

38) *C. R. Acad. sc. Paris 88 (1879), p. 965; 97 (1883), p. 983; 119 (1894), p. 947; J. math. pures appl. (3) 7 (1881), p. 167; (5) 1 (1895), p. 315; Bull. Soc. philom. Paris (8) 8 (1895/6), p. 5.*

39) *C. R. Acad. sc. Paris 115 (1892), p. 872; Bull. Soc. philom. Paris (8) 5 (1892/3), p. 33.*

40) *C. R. Acad. sc. Paris 120 (1895), p. 714; Bull. Soc. math. France 23 (1895), p. 122/84.*

la α^e place dans l'autre. *C. G. J. Jacobi*[41]) les appelle *réciproques*. Deux permutations réciproques ont le même nombre d'inversions[42]); le nombre s_n des permutations de n éléments qui sont réciproques d'elles-mêmes satisfait à la relation de récurrence

$$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ \ldots,\ s_n = s_{n-1} + (n-1)\, s_{n-2}.$$

T. Muir[43]) a étudié ces permutations, qu'il appelle *conjuguées*, et a déterminé celles qui sont conjuguées d'elles-mêmes; *P. A. Mac Mahon*[44]) a généralisé la notion de réciprocité; *D. André* a étudié, dans ses travaux, les permutations symétriques des nombres $1, 2, \ldots, n$, où un élément a de la première a le même rang que l'élément $n + 1 - a$ dans la seconde.

8. Permutations soumises à des conditions restrictives. On peut imposer différentes conditions restrictives aux places occupées par les éléments d'une permutation; ordinairement on limite le nombre des places que peuvent occuper certains éléments donnés, ou inversement on limite la nature des éléments qui peuvent occuper certaines places, en disant, par exemple, que les places de numéros pairs seront occupées par des éléments d'indices pairs.

En ce qui concerne les permutations de n éléments distincts, *L. Euler* introduit une fonction $f(n)$ qui indique le nombre des permutations pour lesquelles aucun élément n'a conservé sa place primitive; cette fonction satisfait aux relations de récurrence

$$f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ \ldots,\ f(n) = nf(n-1) + (-1)^n,$$

et a pour valeur

$$f(n) = n! \sum_{r=2}^{r=n} \frac{1}{r!}(-1)^r.$$

La fonction plus générale $F(n, m)$, indiquant le nombre des permutations de n éléments pour lesquelles m d'entre eux ne changent pas de place, a pour valeur

$$F(n, m) = \frac{n!}{m!} \sum_{r=2}^{r=n-m} \frac{1}{r!}(-1)^r = \binom{n}{m} f(n-m);$$

elle se réduit à $f(n)$ pour $m = 0$. Les deux fonctions précédentes ont été l'objet d'un grand nombre de travaux[45]); à leur étude se rattache

41) J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 287; Werke 3, Berlin 1884, p. 359.

42) *E. Netto*, Lehrb. der Combinatorik, Leipzig 1901, p. 118.

43) Proc. R. Soc. Edinb. 17 (1889/90), p. 7; 22 (1897/9), p. 463.

44) Messenger math. (2) 24 (1894/5), p. 69.

45) *L. Euler*, Mém. Acad. Pétersb. 3 (1809/10), éd. 1811, math. p. 57 [1779];

celle des permutations pour lesquelles chaque place ne peut être occupée que par des éléments donnés; ces questions sont intimement liées à la recherche du nombre de termes d'un déterminant satisfaisant à des conditions données.

Les permutations dont les éléments ne sont pas tous distincts peuvent être soumises à certaines restrictions, par exemple à la condition que des éléments égaux ne soient jamais consécutifs[46]).

Etant donnés n éléments distincts, on peut se proposer de choisir n permutations de ces éléments et de les disposer l'une au-dessous de l'autre, en un tableau carré, de façon que chaque colonne contienne des éléments tous différents[47]), (carrés latins, permutations carrées). *A. Cayley*[48]) a mis en évidence l'importance des carrés latins. A la question des permutations carrées se rattache le *problème des* 8 *reines* du jeu d'échecs[49]), ainsi que le *problème des* 36 *officiers*, proposé par *L. Euler* dans les Mémoires de la Société de Flessingue[47]) sous la forme suivante: Disposer 36 officiers de 6 grades différents et de 6 régiments différents, dans les cases d'un échiquier de 36 cases, de façon que dans chaque ligne et dans chaque colonne se trouvent 6 officiers de grades et de régiments différents. *Ce problème, que l'on peut proposer en général pour n^2 officiers, est toujours possible pour $n = 2^k(2p + 1)$ lorsque k n'a pas la valeur 1; il n'est pas toujours possible pour les autres valeurs de n et est impossible dans le cas de $n = 6$ proposé par *L. Euler*[50]).*

L. Öttinger, Die Lehre von den Combin., Fribourg en Brisgau 1837, p. 103; *E. Coupy,* Nouv. Ann. math. (1) 3 (1844), p. 404; *C. W. Baur,* Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 197; *M. Cantor,* id. p. 410; *J. J. Weyrauch,* J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 273; *H. R. Baltzer,* Ber. Ges. Lpz. 25 (1873), math. p. 534; *D. André,* Ann. Ec. Norm. (2) 7 (1878), p. 385; *A. Cayley,* Proc. R. Soc. Edinb. 9 (1875 8), p. 338, 388; Papers 10, Cambr. 1896, p. 245, 249; *S. Kantor,* Z. Math. Phys. 28 (1883), p. 379; *P. Seelhoff,* Archiv Math. Phys. (2) 1 (1884), p. 97; *C. A. Laisant,* C. R. Acad. sc. Paris 112 (1891), p. 1047; Bull. Soc. math. France 19 (1890/1), p. 105; *G. Musso,* Rivista mat. 4 (1894), p. 109; *E. Maillet,* Assoc. fr. avanc. sc. 23 (Caen) 1894², p. 244

46) *M. Cantor,* Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 103; *C. W. Baur,* id. p. 267; *A. Vachette,* Nouv. Ann. math. (2) 14 (1875), p. 299; (2) 15 (1876), p. 114; *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 11 (1880/2), p. 187.

47) *L. Euler,* Verh. Genootschap Vlissingen 9 (1782), p. 85 [1779]; Commentat. Arith. 2, S^t Pétersb. 1849, p. 302; *L. J. Fischer,* Lehrb.[13]) 1, p. 65.

48) London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 7 (1854), p. 40; Papers 2, Cambr. 1889, p. 123 [1853]; Messenger math. (2) 19 (1889/90), p. 135; Papers 13, Cambr. 1897, p. 55; *M. Frolov,* J. math. spéc. (3) 4 (1890), p. 8, 25; *P. A. Mac Mahon,* Philos. Trans. London 194 A (1900), p. 361 (solution du problème des carrés latins).

49) Voir l'article sur les jeux mathématiques.

50) *Interméd. math. 2 (1895), p. 79; 3 (1896), p. 90; 5 (1898), p. 83; 6 (1899),

Etant donnée une permutation de n éléments distincts, on dit que l'on en déduit une deuxième permutation par le *battement de Monge*, si l'élément de rang i, dans la deuxième permutation, est égal à l'élément de la première dont le rang est le nombre

$$n+2-2i, \quad \text{si } i < \frac{n+2}{2},$$

ou bien le nombre

$$2i-n-1, \quad \text{si } i > \frac{n+1}{2}.$$

On peut se proposer de chercher les éléments qui conservent leur place après un ou plusieurs battements successifs[51]).

9. Combinaisons ou arrangements soumis à des conditions restrictives. On peut classer les combinaisons simples ou complètes de n éléments p à p, en différentes catégories suivant que l'ensemble des indices de ces éléments satisfait à telle ou telle condition. *Supposons que l'on range par ordre de grandeur croissante les indices des éléments d'une combinaison simple; ces indices se partagent en un ou plusieurs groupes de nombres consécutifs; s'ils ne forment qu'un seul groupe, la combinaison est dite *totalement continue*; dans le cas contraire, elle est dite *partiellement* ou *totalement discontinue*, suivant qu'il existe des groupes contenant plusieurs nombres, ou que tous les groupes n'en renferment qu'un seul. Il est possible de déterminer le nombre des combinaisons dont les indices se répartissent, comme on vient de le dire, en un nombre donné de groupes[52]).*

Parmi les combinaisons pouvant renfermer plusieurs fois un même élément, on peut distinguer celles qui contiennent certains éléments un nombre donné de fois fixé à l'avance, ou un nombre de fois ne dépassant pas un nombre déterminé[53]). Le nombre des combinaisons

---

p. 251; 7 (1900), p. 14, 311; (Questions 261, 453); *G. Tarry*, Assoc. fr. avanc. sc. 29 (Paris) 1900[1], p. 122; 1900[2], p. 170; Mém. Soc. sc. Liége (3) 2 (1900), mém. n° 7, p. 3; Mathesis (2) 10 (1900), suppl. p. 23; *J. Petersen*, Annuaire des mathém. Paris 1902, p. 413.*

51) *G. Monge*, Mém. présentés Acad. sc. Paris (1) 7 (1773), éd. 1776, p. 390; *J. Bourget*, J. math. pures appl. (3) 8 (1882), p. 413; *A. Bienaymé*, Nouv. Ann. math. (4) 2, 1902, p. 443.

52) **J. D. Gergonne, D. Encontre, Legrand, Rochat*, Ann. math. pures appl. 3 (1812/3), p. 69, 213; *H. A. Delannoy*, Interméd. math. 7 (1900), p. 167; 8 (1901), p. 23; (Questions 1479, 1869); *M. Stuyvaert*, Mathesis (2) 10 (1900, p. 224; *T. Muir*, Proc. R. Soc. Edinb. 24 (1901/3), p. 102.*

53) *B. Frénicle*[4]); *Jacques Bernoulli*[5]), p. 118; *H. F. Scherk*, Math. Abh., Berlin 1825, p. 67; *A. Cournot*, Bull. sc. math. astr. phys. chim. 11 (1829), p. 93; *Ch. Ramus*, J. reine angew. Math. 11 (1834), p. 353; *O. Terquem*, J. math. pures appl. (1) 4

n à n de m éléments $a_1, a_2, \ldots, a_m$, dans lesquelles pour $i = 1, 2, \ldots, m$ chaque élément a_i entre un nombre de fois égal ou inférieur à α_i, est égal au coefficient de x^n dans le développement du produit

$$\prod\left(\frac{1 - x^{\alpha_i + 1}}{1 - x}\right).$$

*Le cas le plus simple est celui où tous les nombres α_i sont égaux à un même nombre p; les combinaisons ainsi considérées sont appelées par *D. André*[54]) combinaisons *régulières d'ordre p* de m éléments n à n. Le nombre de ces combinaisons, qu'il désigne par $(m, n)_p$, a pour valeur

$$(m, n)_p = \sum (-1)^\lambda C_m^\lambda \Gamma_m^{n - \lambda(p+1)},$$

λ variant de 0 au quotient entier de n par $p + 1$; on peut le calculer au moyen d'un triangle arithmétique particulier d'après la formule

$$(m, n)_p = \sum_{k=0}^{k=p} (m - 1,\ n - k)_p.$$

D. André[54]) appelle combinaisons *générales* de m éléments distincts $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\alpha, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\beta, \ldots$ les groupes que l'on peut former en prenant n de ces éléments de toutes les manières possibles de telle façon que, $a, b, c, \ldots$ désignant des nombres donnés, distincts ou non, les lettres A puissent entrer chacune dans le même groupe jusqu'à a fois, les lettres B jusqu'à b fois, etc. Il indique le moyen de calculer le nombre de ces combinaisons.*

Les conditions restrictives auxquelles peuvent être soumis les arrangements simples ou complets de n éléments, concernent soit la place occupée par les éléments comme dans les permutations, soit la nature des éléments ou le nombre de fois que chacun peut entrer comme dans les combinaisons. *D. André* étudie les arrangements complets de n éléments p à p, contenant tous les éléments ou satisfaisant à d'autres conditions restrictives[55]).*

10. Combinaisons dont les éléments ont une somme donnée. Décomposition d'un nombre en une somme de plusieurs autres. Lorsque les n éléments dont on forme des arrangements ou des combinaisons sont des nombres entiers, il y a lieu de chercher le nombre de ces arrangements ou combinaisons dont les éléments ont une somme donnée m. Le cas le plus important est celui où les n éléments sont

(1839), p. 177; *Ad. Weiss*, J. reine angew. Math. 34 (1847), p. 255; 38 (1849), p. 107; *L. Öttinger* [12]).

54) *Ann. Ec. Norm. (2) 5 (1876), p. 155.*

55) *C. R. Acad. sc. Paris 87 (1878), p. 838; Bull. Soc. math. France 5 (1876/7), p. 150; 7 (1878/9), p. 43.*

les n premiers nombres naturels; un cas voisin de celui-là est celui où les n éléments sont n nombres naturels consécutifs.

Le nombre des arrangements complets, p à p, des nombres k, $k+1$, $k+2, \ldots$, de somme m, est égal à $C_{m+p-1-kp}^{p-1}$; le nombre total des arrangements complets, p à p, des nombres $1, 2, \ldots, n$, de somme m, lorsqu'on donne à p toutes les valeurs possibles, est égal au coefficient de z^m dans le développement de la fraction

$$\frac{z + z^2 + \cdots + z^n}{1 - z - z^2 - \cdots - z^n}$$

suivant les puissances croissantes de z.[56]) *A ces questions se rattache le problème traité par *C. W. Baur*[57]): On a n dés à m faces numérotées de 1 à m; de combien de manières peut-on amener une somme a? Ce problème a été repris par *D. André* comme application des combinaisons régulières[54]).*

Le calcul du nombre des arrangements simples ou complets de n éléments entiers positifs, de somme m, se ramène à celui du nombre des combinaisons analogues des mêmes éléments. Il existe des formules directes ou récurrentes pour déterminer le nombre des arrangements et des combinaisons des premiers nombres entiers positifs pris p à p, de façon à obtenir une somme m;[58]) *L. Euler* a démontré que le nombre des combinaisons simples des nombres $1, 2, 3, \ldots$, de somme m, est égal au nombre des combinaisons complètes des nombres impairs, $1, 3, 5, \ldots$, de somme m.[59])

Il se peut qu'un nombre entier soit, de plusieurs manières, la somme de plusieurs autres nombres entiers soumis à des conditions données. La détermination du nombre de décompositions possibles d'un nombre, en termes additifs de nature donnée, a d'abord été faite par *L. Euler*[59]); ce nombre s'exprime par le coefficient d'un terme particulier dans le développement d'une certaine fonction rationnelle. Dans le développement du produit

$$Z = (1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z) \ldots$$

---

56) *A. Cayley,* Messenger math. (2) 5 (1876), p. 188; Papers 10, Cambr. 1896, p. 16; *J. Hermes,* Math. Ann. 45 (1894), p. 371; 47 (1896), p. 281.

57) *Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 195; voir encore *L. Öttinger,* J. reine angew. Math. 67 (1867), p. 334.*

58) *H. F. Scherk,* J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 96; *M. A. Stern,* id. 21 (1840), p. 91, 177; 95 (1883), p. 102; *K. Reich,* Archiv Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 225; *A. Holtze,* id. p. 310; *M. Kuschniriuk,* Progr. Mährisch-Trübau 1895; *E. Netto,* Combin.[42]), p. 137.

59) *L. Euler,* Introd. in analysin infin. 1, Lausanne 1748, chap. 16; trad. *J. B. Labey,* 1, Paris, an IV, p. 234.

suivant les puissances de x et de z, le coefficient de $x^n z^m$ exprime le nombre des décompositions possibles de n en une somme de m termes différents pris dans la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; si ces derniers nombres sont ceux de la suite 1, 2, 3, ... des nombres naturels, le coefficient considéré est celui de x^n dans le développement de l'expression

$$x^{\frac{1}{2}m(m+1)}[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)]^{-1};$$

si dans z on fait $z=1$, le coefficient de x^n exprime le nombre des décompositions possibles de n en une somme d'un nombre indéterminé de termes différents pris dans la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *Dans le développement de l'expression

$$z' = [(1-x^\alpha z)(1-x^\beta z)\cdots(1-x^\lambda z)]^{-1}$$

suivant les puissances croissantes de x et de z, le coefficient de $x^n z^m$ exprime le nombre des décompositions possibles du nombre n en une somme de m nombres, différents ou non, pris dans la suite $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$; si ces derniers nombres sont ceux de la suite naturelle $1, 2, 3, \ldots,$ le coefficient considéré est celui de x^n dans le développement de

$$x^m[(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)]^{-1};$$

si dans z′ on fait $z=1$, le coefficient de x^n exprime le nombre des décompositions possibles de n en une somme d'un nombre indéterminé de termes égaux ou différents pris dans la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ [59]). Ces questions se rattachent naturellement à la formule[60])

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = \sum(-1)^r x^{\frac{1}{2}(3r^2 \pm r)}.*$$

Les applications de l'Analyse à la partition des nombres et aux combinaisons de somme donnée ont fait l'objet de nombreux travaux. *A. Cayley* et *J. J. Sylvester*, en particulier, ont indiqué des moyens rapides et construit des Tables pour calculer les *coefficients d'Euler* et d'autres plus généraux[61]); *J. J. Sylvester* a transformé la question et s'est servi de

60) *_L. Euler,_* Comm. Acad. Petrop. 13 (1741/3), éd. 1751, p. 64; en partic. p. 93; Novi Comm. Acad. Petrop. 3 (1750 1), éd. 1753, p. 159 [1750]; 5 (1754/5), éd. 1760, p. 78 [1754]; Commentat. Arith. 1, St Pétersb. 1849, p. 93, 235; *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 37 (1848), p. 67; Werke 2, Berlin 1882, p. 226; *L. Goldschmidt,* Z. Math. Phys. 38 (1893), p. 121.*

61) *H. Warburton,* Trans. Cambr. philos. Soc. 8 (1849), p. 471/2 [1847]; *J. Herschel,* Philos. Trans. London 140 (1850), p. 399; *C. Wasmund,* Archiv Math. Phys. (1) 21 (1853), p. 228; (1) 34 (1860), p. 440; *N. M. Ferrers,* cité par *J. J. Sylvester,* London, Edinb. Dublin philos. mag. (4) 5 (1853), p. 201 (en note); *A. Cayley,* Philos. Trans. London 146 (1856), p. 127 [1855]; 148 (1858), p. 47 [1857]; Papers 2, Cambr. 1889, p. 235, 506; *F. Faà di Bruno,* Ann. sc. mat. fis. 7 (1856), p. 313; *F. Brioschi,* id. 8 (1857), p. 5; *J. J. Sylvester,* id. 8 (1857), p. 12; Quart. J. pure appl. math. 1 (1857), p. 81, 141; London, Edinb. Dublin philos. mag. (4) 16 (1858),

représentations géométriques désignées sous le nom de *graphs*[62]). *P. A. Mac Mahon* a fait l'historique de ces recherches et les a considérablement augmentées[63]), soit en considérant des groupes de deux nombres, soit en cherchant la *partition parfaite* d'un nombre n, c'est-à-dire sa décomposition en éléments au moyen desquels peuvent se composer tous les nombres inférieurs à n. Ces questions intéressent également la théorie des nombres, celle des invariants, l'Analyse indéterminée et le Calcul des probabilités.

11. Applications aux produits de facteurs. Au lieu d'envisager les arrangements ou les combinaisons d'éléments entiers, au point de vue de la *somme* de ces éléments, on peut les étudier au point de vue du *produit* des éléments qui y entrent; il y a du reste correspondance univoque entre les combinaisons simples ou complètes de nombres pris p à p et les produits de p facteurs égaux à ces nombres; c'est pour cette raison que les propriétés des combinaisons ont été énoncées par la plupart des auteurs jusqu'au milieu du 19e siècle comme des propriétés de produits de facteurs.

Tout nombre entier n peut être considéré, en général de plusieurs manières, comme un produit de facteurs dont le nombre et la nature peuvent être soumis à des conditions restrictives[64]). Lorsque le nombre n est un produit de q facteurs premiers tous différents, et qu'on veut le mettre sous forme d'un produit de k facteurs, $k \leqq q$, le nombre des décompositions possibles est le coefficient de x^{q-k} dans le développement de

$$[(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)]^{-1}$$

et il a pour valeur

---

p. 369; Amer. J. math. 5 (1882), p. 119, 251; C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 743, 1110, 1276; Proc. London math. Soc. 28 (1896/7), p. 33; *J. W. L. Glaisher,* C. R. Acad. sc. Paris 80 (1875), p. 255; *Th. von Oppolzer,* Math. Ann. 13 (1878), p. 405; *F. Faà di Bruno,* C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 1189; J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 317; *E. A. A. David,* C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 1344; 91 (1880), p. 621; *F. Franklin,* id. 92 (1881), p. 448; *J. J. Sylvester,* John Hopkins Univ. Circul. 2 (1882/3), p. 70; *K. Th. Vahlen,* J. reine angew. Math. 112 (1893), p. 1; *Daublebsky von Sterneck,* Sitzgsb. Akad. Wien 105 IIa 1896, p. 875; 106 IIa 1897, p. 115.

62) Amer. J. math. 5 (1882), p. 251.

63) *P. A. Mac-Mahon,* Quart. J. pure appl. math. 21 (1886), p. 367; Messenger math. (2) 20 (1890/1), p. 103; Proc. London math. Soc. 28 (1896/7), p. 10; index bibliogr. id. p. 32; Philos. Trans. London 184 A (1893), p. 835; 185 A (1894), p. 111; 187 A (1896), p. 619; 192 A (1899), p. 351.

64) *A. von Ettinghausen* [11]), p. 295/6; *A. Cournot* [53]); *A. F. Möbius,* J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 105; Werke 4, Leipzig 1887, p. 591; *Ch. Ramus,* J. reine angew. Math. 11 (1834), p. 353; *E. Netto,* Combin. [42]), p. 168/88.

$$\mathfrak{x}_q^{(k)} = \frac{1}{k!}\left[k^q - \binom{k}{1}(k-1)^q + \binom{k}{2}(k-2)^q - \cdots \pm \binom{k}{1}\right];$$ [65]

ce nombre est aussi la somme des produits constitués par les combinaisons complètes des nombres $1, 2, \ldots, k$ pris $q-k$ à $q-k$. Lorsque le nombre n est formé de facteurs premiers non tous distincts, le problème est plus compliqué.

A. F. Möbius[64]) a étudié les arrangements complets dont le produit des éléments pris en nombre indéterminé est égal à un nombre donné. *Chr. Kramp*[9]) et *A. von Ettinghausen*[11]) ont étudié la somme des produits constitués par les combinaisons, simples ou complètes, d'éléments donnés entiers[66]). La somme des produits simples $\mu-\lambda$ à $\mu-\lambda$ des nombres $1, 2, 3, \ldots, \mu-1$ est égale à

$$\sum \frac{\mu!}{a!\,b!\,c!\cdots 1^a 2^b 3^c \cdots}, \qquad \begin{pmatrix} a+b+c+\cdots=\lambda \\ a+2b+3c+\cdots=\mu \end{pmatrix};$$

c'est le coefficient de $x^{\mu-\lambda}$ dans le développement de

$$(1+x)(1+2x)\cdots[1+(\mu-1)x];$$

de même la somme des produits formés par les combinaisons complètes des nombres $1, 2, \ldots, \lambda$, pris $\mu-\lambda$ à $\mu-\lambda$ est égale à

$$\sum \frac{\mu!}{a!\,b!\,c!\cdots(1!)^a(2!)^b(3!)^c\cdots}, \qquad \begin{pmatrix} a+b+c+\cdots=\lambda \\ a+2b+3c+\cdots=\mu \end{pmatrix};$$

c'est le coefficient de $x^{\mu-\lambda}$ dans le développement de

$$[(1-x)(1-2x)\cdots(1-\lambda x)]^{-1}.$$

H. F. Scherk[67]) a considéré les combinaisons simples des nombres $1, 2, \ldots, n$, pris p à p, puis, ayant rangé, dans chaque combinaison, les éléments de cette combinaison par ordre de grandeur croissante, il a augmenté le premier élément de 0, le second de 1, le troisième de $2, \ldots$; il a fait le produit des p nombres ainsi obtenus et a considéré la somme des C_n^p produits formés. Il a considéré, de même, les combinaisons complètes des mêmes nombres, en retranchant cette fois, des éléments successifs de chacune d'elles, les nombres $0, 1, 2, \ldots$

12. Autres applications. *La théorie des combinaisons présente de nombreuses applications non seulement à la théorie des nombres

---

65) *S. F. Lacroix,* Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral 3 (1e éd. Paris an VIII), 2e éd. Paris 1819, p. 26; *L. D. H. Picquet,* J. math. spéc. (3) 2 (1888), p. 150, 172, 196.

66) Voir encore *M. A. Stern,* J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 375; *O. Terquem,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 556; *K. Weihrauch,* Z. Math. Phys. 20 (1875), p. 116; *E. Netto,* Combin. [42]), p. 185.

67) *H. F. Scherk,* J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 96; 11 (1834), p. 226.

et au Calcul des probabilités, mais encore à la Géométrie; sans les mentionner toutes, nous citerons les suivantes:

La recherche du nombre de manières dont on peut effectuer une somme de n termes, ou un produit de n facteurs, en réunissant de proche en proche certains de ces termes en sommes ou en produits partiels, d'après une loi donnée, de toutes les manières possibles [68]).

La recherche du nombre P_n de manières dont on peut décomposer un polygone de n côtés en triangles par des diagonales. Ce dernier problème, proposé par *L. Euler*, a été résolu d'abord par *J. A. de Segner* [69]); le nombre cherché satisfait à la relation de récurrence $nP_{n+1}=(4n-6)P_n$, et est égal à

$$\frac{1}{n-1}\,C_{2n-4}^{n-2}.$$

La question, reprise par *G. Lame, Olinde Rodrigues, J. P. M. Binet* [70]), a été généralisée par *E. Prouhet* [71]); le nombre de manières de décomposer un polygone convexe de n côtés en $d+1$ parties au moyen de d diagonales qui ne se coupent pas, est égal à [72])

$$\frac{1}{d+1}\,C_{n-3}^{d}\,\Gamma_{n}^{d}.^{*}$$

Entre les nombres de permutations, d'arrangements et de combinaisons de n objets, existent un grand nombre de relations qui ont été autrefois réunies par *C. F. Hindenburg* [73]); à ces relations se rattachent du reste celles qui existent entre les coefficients du binome dont nous parlerons plus loin.

13. Ternes ou Triades. Une branche de l'Analyse combinatoire dont l'importance se manifeste surtout dans l'étude des groupes de substitutions, est la théorie des *ternes* ou *triades* dont l'origine se trouve [74]) dans les problèmes suivants proposés indépendamment l'un de l'autre par *J. Steiner* et *T. P. Kirkman*.

68) $_*$*J. D. Gergonne,* Ann. math. pures appl. 11 (1820/1), p. 165; *E. Catalan,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 515; (1) 6 (1841), p. 74; *Olinde Rodrigues* id. (1) 3 (1838), p. 549; *E. Schröder,* Z. Math. Phys. 15 (1870), p. 361.*

69) $_*$Novi Comm. Acad. Petrop. 7 (1758/9), éd. 1761, p. 203; la formule citée se trouve dans le *Résumé,* en tête du volume p. 13.*

70) $_*$J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 505, 547; (1) 4 (1839), p. 79.*

71) $_*$Nouv. Ann. math. (2) 5 (1866), p. 384.*

72) $_*$*E. Lucas,* Théorie des nombres 1, Paris 1891, p. 93.*

73) Infinitomii Dignitatum, Göttingue 1779; Novi Syst. [7]); Samml. combinat. [8]) 1, Leipzig 1796; 2, Leipzig 1800. Voir aussi *J. A. Grunert,* Archiv Math. Phys. (1) 1 (1841), p. 67; *J. G. Hagen,* Synopsis der höheren Math. 1, Berlin 1891, Abschnitt III; *E. Netto,* Combin. [42]), p. 246/58.

74) L'historique est indiqué par *E. Netto*, Combin. [42]), p. 202 et suiv.

Le problème de *J. Steiner*[75]) est le suivant: 1°) Pour quelles valeurs de N peut-on constituer, au moyen de N éléments, des groupes de *trois* (ternes ou triades) contenant une et une seule fois chaque groupe de deux éléments (ambe ou duade)? Lorsque le problème est possible, combien peut-on constituer de groupements distincts en triades avec N éléments donnés, ces groupements ne se déduisant pas l'un de l'autre par une simple permutation des éléments? 2°) Peut-on, au moyen de N éléments donnant lieu à un groupement en triades, constituer des groupes de *quatre* (quaternes ou tétrades), de façon que trois éléments d'une des triades formées ne soient jamais dans une tétrade, et que trois éléments n'entrant pas dans une même triade soient toujours une fois et une seule dans une tétrade? 3°) Peut-on, de même, avec les N *éléments précédents donnant* lieu à un groupement en tétrades, constituer des groupes de *cinq* (pentades), satisfaisant à des conditions analogues? etc.

La partie du problème relative aux triades est résolue; les autres parties sont plus difficiles à résoudre et ont fait l'objet de peu de travaux[76]). Il faut d'abord que N soit de la forme $6n+1$ ou $6n+3$; cette condition est suffisante pour l'existence des *triades*, dont le nombre est $\frac{1}{6}\,\text{N}(\text{N}-1)$ et pour celle des *tétrades* dont le nombre est $\frac{1}{24}\,\text{N}(\text{N}-1)(\text{N}-3)$; mais N doit être soumis à d'autres restrictions pour l'existence des groupes suivants: *pentades*, etc. Par exemple, pour $\text{N}=7$, il y a 7 *triades*, caractérisées par les indices

$$123,\ 145,\ 167,\ 246,\ 257,\ 347,\ 356$$

et 7 *tétrades*, caractérisées par les indices

$$1247,\ 1256,\ 1346,\ 1357,\ 2345,\ 2367,\ 4567;$$

mais il n'existe *aucune pentade* satisfaisant aux conditions voulues.

La démonstration de l'existence d'un système de triades de $\text{N}=6n+1$ ou $6n+3$ éléments et la construction effective d'un tel système ont été effectuées pour la première fois par *M. Reiss*[77]) en déduisant du cas de N éléments ceux de $2\text{N}+1$ et $2\text{N}-5$ éléments. Une démonstration et un mode de formation indépendants des précédents et donnant un nombre plus étendu de solutions sont dus à *E. Hastings Moore*[78]). Lorsque N est un nombre premier de la forme

75) J. reine angew. Math. 45 (1853), p. 181; Werke 2, Berlin 1882, p. 437.

76) *W. Lea,* Math. Quest. Educ. Times 9 (1868), p. 35; *W. Lea* et *T. P. Kirkman,* id. 11 (1869), p. 97; *W. Lea,* id. 22 (1874), p. 74; *G. Brunel* a résolu le problème complet pour $\text{N}=7,\ 9,\ 15$ [Procès-verbaux Soc. sciences Bordeaux 1896/7, p. 37].

77) J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 326 [1856].

78) Math. Ann. 43 (1893), p. 271.

$6n+1$, un mode de formation simple et direct d'un système de triades de N éléments a été donné par *E. Netto*; les $\frac{1}{6}N(N-1) = n(6n+1)$ triades de ce système se partagent en n groupes renfermant chacun N triades; celles d'un même groupe se déduisent de l'une d'entre elles en augmentant d'un même nombre les indices des 3 éléments qui la composent, et elles forment un système cyclique. Ce mode de formation et de répartition des triades en systèmes cycliques a été étendu par *E. Netto* au cas où le nombre N a la forme $6n+3$ et est le triple d'un nombre premier de la forme $6n+5$, puis par *L. Heffter* au cas où le nombre $6n+3$ est le triple d'un nombre premier quelconque, ainsi qu'à d'autres cas spéciaux et à tous les nombres inférieurs à 100.[79]) Ces questions qui se rattachent à la théorie des groupes de substitutions, ont été approfondies, au point de vue de cette théorie, par *M. Noether*, *E. Netto* et *E. H. Moore*[80]).

Le problème des triades a, pour $N > 9$, plusieurs solutions distinctes, non réductibles l'une à l'autre par un changement d'indices; par exemple pour $N = 13$, il possède deux solutions; pour $N = 15$, plus de deux[81]).

*Lorsque N n'a pas la forme $6n+1$ ou $6n+3$, on peut chercher quel est le plus grand nombre Q de triades que l'on peut former, si une même duade ne doit jamais figurer deux fois dans l'ensemble. *T. P. Kirkman*[82]) avait donné, sans démonstration, des résultats en partie inexacts, qui ont été rectifiés par *G. Brunel*[83]); on a

$$3Q = \tfrac{1}{2}N(N-1) - V,$$

avec

$$\begin{aligned} V &= 0 \text{ pour } N = 6n+1 \text{ et } 6n+3, \\ V &= 4 \text{ pour } N = 6n-1, \\ V &= \tfrac{1}{2}N \text{ pour } N = 6n \text{ et } 6n+2, \\ V &= \tfrac{1}{2}N + 1 \text{ pour } N = 6n-2.* \end{aligned}$$

79) *E. Netto,* Math. Ann. 42 (1893), p. 143; Combin. [42]), chap. 10; *L. Heffter,* Math. Ann. 49 (1897), p. 101.

80) *M. Noether,* Math. Ann. 15 (1879), p. 89; *E. Netto,* Substitutionentheorie, Leipzig 1882, p. 220; *E. H. Moore,* Math. Ann. 43 (1893), p. 271; 50 (1898), p. 225; Bull. Amer. math. Soc. 4 (1897/8), p. 11.

81) *Jan de Vries,* Rend. Circ. mat. Palermo 8 I (1894), p. 222; *E. H. Moore,* id. 9 I (1895), p. 86; **G. Brunel,* Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (4) 5, extraits des procès-verbaux, p. XLVII, [1894]; Ass. fr. avanc. sc. 24 (Bordeaux) 1895^1, p. 180; 1895^2, p. 145; *K. Zulauf,* Diss. Giessen, éd. Darmstadt, 1897; *G. Brunel,* mém. posth: J. math. pures appl. (5) 7 (1901), p. 305; Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (6) 2 (1903), p. 1.*

82) *Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 191.*

83) **G. Brunel,* Procès-verbaux Soc. sciences Bordeaux (1895/6), p. 40.*

Les problèmes d'Analyse combinatoire relatifs aux triades comportent la recherche des différentes manières de grouper en tableaux toutes les triades possibles de N éléments suivant certaines lois. *A. Cayley* et *R. R. Anstice* [84]) ont examiné des cas particuliers.

Le problème de *T. P. Kirkman* [85]) ou des 15 demoiselles est le suivant: Quinze demoiselles vont chaque jour en promenade trois par trois; les disposer de façon que, dans le cours d'une semaine, chacune d'elles soit une fois, et une seule, avec chacune des autres. Ce problème peut être énoncé dans le cas général de la façon suivante: étant donnés $\text{N} = 6n + 3$ éléments, que l'on peut grouper en triades, le nombre total des triades étant $(2n + 1)(3n + 1)$, ranger ces triades en $3n + 1$ ensembles de $2n + 1$ triades de façon que, dans chaque ensemble, les $6n + 3$ éléments entrent une fois et une seule; le cas de $n = 1$ constitue un problème de *F. Walecki,* cité par *E. Lucas* [86]).

G. Brunel [87]) a généralisé les questions précédentes. Si l'on figure les N éléments par des points, les duades sont représentées par les lignes joignant les points deux à deux; la détermination d'un système de triades revient à la construction d'un ensemble de triangles tel que chaque ligne apparaisse dans un triangle et un seul. Ceci posé, *G. Brunel* se demande si l'on peut épuiser toutes les duades, sans omission ni répétition, en traçant un système de polygones fermés à 4, ou à 5, ..., ou à ν côtés. Les groupes correspondant aux divers polygones, sont appelés *quadricycles, pentacycles, ...,* et en général *ν-cycles.*

Pour $\nu = 4$, il faut, pour que le problème soit possible, que $\text{N} = 8k + 1$; il y a alors dans chaque système possible $k(8k + 1)$ quadricycles, que l'on peut former par une généralisation du procédé de *E. Netto.* En général, on peut distribuer en un système de n-cycles les $n(2n + 1)$ duades formées avec $(2n + 1)$ éléments, de façon que chaque duade figure une fois et une seule dans chaque système.

---

84) *A. Cayley,* London Edinb. Dublin philos. mag. 37 (1850), p. 50; (4) 25 (1863), p. 59; (4) 30 (1865), p. 370; Papers 1, Cambr. 1889, p. 481; 5, Cambr. 1892, p. 95, 493; *R. R. Anstice,* Cambr. Dublin math. J. 7 (1852), p. 279; 8 (1853), p. 149.

85) Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 191; 5 (1850), p. 260; 8 (1853), p. 38; London Edinb. Dublin philos. mag. 37 (1850), p. 169; *T. Clausen,* Archiv Math. Phys. (1) 21 (1853), p. 93; *A. H. Frost,* Quart. J. pure appl. math. 11 (1871), p. 26.

86) Récréations math. 2, Paris 1883, p. 183; *W. Ahrens,* Math. Unterh. und Spiele, Leipzig 1901, p. 257, 274.

87) Proc.-verb. Bordeaux [76]), 1894/5, p. 56; 1895/6, p. 6, 58; 1898/9, p. 59, 71.

A ces différentes questions se rattachent d'ailleurs les problèmes considérés par *D. André* dans son *Organisation des assauts complets*[88]).

D'autres généralisations sont équivalentes au problème suivant: la configuration régulière la plus simple de l'espace à $N-1$ dimensions peut-elle être formée, sans omission ni répétition d'arêtes, par un ensemble de configurations régulières de l'espace à $P-1$ dimensions, P étant inférieur ou égal à N? Pour $P=3$, on a le problème des triades. Pour $P=4, 5, \ldots$, si les configurations sont les plus simples, on a des problèmes analogues avec des tétrades, pentades, ...; des conditions nécessaires sont alors, que $\frac{N-1}{P-1}$ et $\frac{N(N-1)}{P(P-1)}$ soient entiers, mais ces conditions ne sont pas toujours suffisantes. Si les configurations sont plus compliquées, on a des problèmes qui sont la généralisation de ceux des cycles.*

14. Développement de la puissance d'un polynome. La formule du binome, dans le cas d'un exposant entier et positif, est

$$(x+a)^m = \sum_{p=0}^{p=m} C_m^p a^p x^{m-p},$$

C_m^p étant le nombre des combinaisons simples de m éléments p à p.

Le calcul des coefficients successifs a été indiqué pour la première fois par *M. Stifel*[89]) qui a donné la loi numérique de récurrence exprimée aujourd'hui par la formule

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1};$$

B. Pascal[90]) a construit, d'après cette relation, le *triangle arithmétique*

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
.	.	.	.	.	.

où chaque nombre est égal à celui qui est au-dessus de lui, augmenté de celui qui précède ce dernier dans la même ligne; la $(n+1)^e$ ligne de ce triangle donne les coefficients du développement de $(x+a)^n$.

88) *Bull. Soc. philom. Paris (9) 2, 1899/1900, p. 45/73.*

89) *M. Stifel,* Arithmetica integra, Nuremberg 1544, fol. 44^b; cf. *P. Tannery,* Interméd. math. 3 (1896), p. 98 (Question 615).

90) Traité du triangle arith. [1])

$_*$L'écriture actuelle de la valeur des coefficients C_m^p, en fonction de m et de p, repose sur la formule de récurrence

$$C_m^p = \frac{m-p+1}{p} C_m^{p-1};$$

celle-ci se trouve énoncée par *B. Pascal* de deux manières différentes, dont l'une lui appartient, tandis que l'autre est de *P. Fermat*[91]. De cette formule, *B. Pascal* et ses contemporains auraient pu déduire, s'ils l'avaient voulu, l'expression de C_m^p sous forme de fraction, mais ce n'était pas dans les habitudes de leur temps. *I. Newton*[92] a écrit le premier la formule du binome sous la forme actuelle; dans le cas de m entier positif, sa formule n'était pas nouvelle et n'était que la transcription de résultats connus; c'est l'extension au cas de m quelconque qui caractérise la découverte de *I. Newton.** *Jacques Bernoulli*[93] insiste sur les propriétés du triangle arithmétique au point de vue de la théorie des combinaisons. Entre les coefficients du binome existent du reste une grande quantité de relations dont la plupart peuvent être énoncées sous forme combinatoire; elles se rapportent aux sommes de ces coefficients, aux sommes de leurs carrés, etc.; elles sont dues à *J. L. Lagrange*[94], *L. Euler*[95], *Vallès*[96], *A. L. Cauchy*[97], *F. Arndt*[98], *H. A. Rothe*, *Chr. Kramp*, etc. leur énumération serait longue; elles sont d'ailleurs indiquées et classées par *J. G. Hagen*[99] et par *E. Netto*[100].

La formule donnant le développement d'une puissance positive et entière d'un polynome

---

91) $_*$*B. Pascal,* Traité des ordres numériques; (Op. posth.) Paris 1665, prop. XI [1654]; Œuvres, éd. *Hachette* 3, Paris 1880, p. 271; *P. Fermat*, Note dans une lettre à *M. Mersenne* écrite en 1636; Œuvres, éd. *Ch. Henry* et *P. Tannery* 2, Paris 1894, p. 70.*

92) $_*$Lettres à Oldenbourg, datées 13 Juin et 24 Oct. 1676; Opuscula éd. *J. Castillon* 1, Lausanne et Genève 1744, p. 318, 324; Comm. epist. *J. Collins* et aliorum, Londres 1712, éd. *E. Biot,* Paris 1856, p. 103, 122.*

93) Ars conjectandi [5], p. 87.

94) Misc. Taurinensia 5, 1770/3, math. p. 167; Œuvres 2, Paris 1868, p. 175.

95) Acta Acad. Petrop. 5 (1781) I, éd. 1784, math. p. 74.

96) Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 263.

97) Exercices math. 1, Paris 1826, p. 49; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 68.

98) Archiv Math. Phys. (1) 3 (1843), p. 256; J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 241.

99) Synopsis [75] 1, p. 62.

100) Combin. [42], p. 246. Voir aussi *G. Eisenstein,* Abh. Gesch. Math. 7 (1895), p. 193 [1849]; *M. Cantor,* Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 65; *D. André,* Nouv. Ann. math. (2) 10 (1871), p. 74, 221; (2) 12 (1873), p. 84; *L. D. H. Picquet,* J. math. spéc. (3) 2 (1888), p. 150, 172, 196; *O. Schlömilch,* Z. Math. Phys. 33 (1888), p. 190; *G. Vivanti,* id. p. 358; *P. Mansion,* Mathesis (2) 10 (1900), p. 159.

$$(a+b+c+\cdots)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots \qquad (\alpha+\beta+\gamma+\cdots = m)$$

peut être rattachée à une remarque due à *G. W. Leibniz* dans une lettre[101]) à *Jean Bernoulli.* Le nombre des termes du développement est égal à Γ_m^p, si p est le nombre des éléments $a, b, c, \ldots$ [102]) On déduit de là le nombre des termes d'un polynome complet du degré m à n variables; il est égal à $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ [103]).

En particulier, les coefficients du développement de $(a+b+c)^m$ peuvent être calculés au moyen d'un *tétraèdre arithmétique*[104]).

15. Généralisations. Les coefficients du binome rentrent dans les *nombres figurés* dont l'étude a été faite surtout au point de vue arithmétique[105]) et s'est considérablement étendue.

Les diagonales allant, dans le *triangle arithmétique de Pascal*[90]), de gauche en haut à droite en bas, constituent les suites

$$\begin{array}{l} 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ \ 1,\ \ldots \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ \binom{m}{1},\ \ldots \\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \ldots\ldots,\ \binom{m+1}{2},\ \ldots \\ 1,\ 4,\ 10,\ 20,\ \ldots\ldots,\ \binom{m+2}{3},\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

qui fournissent les nombres figurés proprement dits. Le m^e terme de la $(k+1)^e$ de ces suites,

$$F_m^{(k)} = \binom{m+k-1}{k}$$

est le m^e *nombre figuré* d'ordre k [106]). Ce nom provient de l'interprétation géométrique donnée à $F_m^{(2)}$ comme nombre *triangulaire* et à $F_m^{(3)}$ comme nombre *tétraédral.* On a d'ailleurs

---

101) datée 6/16 Mai 1695; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 3, Halle 1855, p. 175; Voir aussi *Jacques Bernoulli,* (op. posth.), Opera 2, Genève 1744, p. 993; *A. de Moivre,* Philos. Trans. London 19 (1695/7), p. 619.

102) *Ch. J. Brianchon,* J. Ec. polyt., cah. 25 (1837), p. 158; *E. Catalan,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 111; *L. Öttinger* [12]).

103) *J. D. Gergonne,* Ann. math. pures appl. 4 (1813/4), p. 115; 13 (1822/3), p. 282; *A. M. Ampère,* id. 15 (1824/5), p. 369. Cf. *J. A. Serret,* Alg. sup. 5e éd. Paris 1885, p. 144/5.

104) *C. A. Laisant,* Bull. Soc. math. France 19 (1890/1), p. 18.

105) *P. Fermat,* Observations sur Diophante; Œuvres, éd. *Ch. Henry* et *P. Tannery* 1, Paris 1891, p. 341.

106) On peut aussi introduire les nombres figurés comme sommes de factorielles; voir *E. Lucas,* Théorie des nombres [72]) 1, p. 56.

$$F_m^{(k+1)} = F_1^{(k)} + F_2^{(k)} + \cdots + F_m^{(k)} = F_{m-1}^{(k+1)} + F_m^{(k)},$$

et

$$F_m^{(k)} = C_{m+k-1}^k \text{ [107]}.$$

A ces nombres figurés viennent s'en adjoindre d'autres parmi lesquels nous citerons les *nombres polygonaux* à p côtés (cf. I 1, **13**) qui sont de la forme

$$\mathrm{P}_m^{(p)} = \binom{m}{1} + (p-2)\binom{m}{2}, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

et les *nombres pyramidaux* à p faces qui sont de la forme

$$\Pi_m^{(p)} = \binom{m+1}{2} + (p-2)\binom{m+1}{3}, \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

et que l'on peut aussi interpréter géométriquement.

$_*$*M. d'Ocagne*[108]) a donné une généralisation du triangle arithmétique dans laquelle figurent des nombres $K_m^{(p)}$ définis par les relations de récurrence suivantes qui sont la généralisation de celles de *M. Stifel*

$$K_m^{(1)} = K_m^{(m)} = 1; \; K_m^{(p)} = pK_{m-1}^{(p)} + K_{m-1}^{(p-1)};$$

ces nombres se rattachent d'ailleurs à la solution d'une question de probabilité[109]). Les *nombres de Bernoulli* s'expriment au moyen des nombres $K_m^{(p)}$ d'une manière simple; on peut du reste les évaluer au moyen des nombres C_m^p des combinaisons simples[110]).*

$_*$Les coefficients du développement de $(1+x)^m$ sont les nombres C_m^p; ceux du développement de $(1 + x + x^2 + \cdots + x^p)^m$ sont les nombres $(m, n)_p$ des *combinaisons régulières* (n° **9**) d'ordre p; ils forment, pour chaque valeur de p, un triangle analogue à celui de *B. Pascal* et se présentent dans diverses questions; il en est de même des coefficients du développement plus général[111])

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \cdots + x_1{}^p)(1 + x_2 + x_2^2 + \cdots x_2{}^p)(1 + x_3 + \cdots).^*$$

107) Les sommes $u_1, u_2, u_3, \ldots$ des éléments des diagonales dirigées de gauche en bas à droite en haut, dans le *triangle de Pascal,* forment une suite

$$u_1 = 1,\; u_2 = 1,\; u_3 = 1 + 1,\; u_4 = 1 + 2,\; u_5 = 1 + 3 + 1,\; u_6 = 1 + 4 + 3,$$
$$u_7 = 1 + 5 + 6 + 1, \ldots$$

à laquelle on a donné le nom de *suite de Fibonacci* (*Léonard de Pise*); on les trouve jusqu'à u_{14} dans son Liber abbaci [1202; dans le texte qui nous est parvenu (1228), fol. 124ᵃ; Scritti di *L. Pisano* pubb. da *B. Boncompagni* 1, Rome 1857, p. 284]. C'est le premier exemple d'une suite récurrente: on a

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + 1.$$

108) $_*$Amer. J. math. 9 (1887), p. 353; 13 (1891), p. 145.*

109) $_*$*L. D. H. Picquet,* Interméd. math. 1 (1894), p. 125 (Question 124).*

110) $_*$*M. d'Ocagne,* Bull. Soc. math. France 17 (1888/9), p. 107; C. R. Acad. sc. Paris 106 (1888), p. 731; *E. Lucas,* Ann. mat. pura appl. (2) 8 (1877), p. 60; Interméd. math. 4 (1897), p. 259 (Question 1091).*

111) *A. de Moivre,* Miscellanea analytica, Londres 1730, p. 196; *L. Euler,*

N. H. Abel a développé $(x+\alpha)^n$ sous la forme

$$x^n + C_n^1\alpha(x+\beta)^{n-1}$$
$$+ C_n^2\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + C_n^3\alpha(\alpha-3\beta)^2(x+3\beta)^{n-3}+\cdots$$

qui renferme une quantité arbitraire β; une généralisation de cette formule est le développement de la même quantité sous la forme

$$(x+\alpha)^n = x^n + c_1(x+t_1)^{n-1} + c_2(x+t_1+t_2)^{n-2}+\cdots$$

où $t_1, t_2, \ldots$ sont des quantités arbitraires[112]).

$_*$*A. Hurwitz*[113]) indique les généralisations suivantes relatives à la puissance n^e d'un polynome:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+na)^n$$
$$= a_2a_3\cdots a_k\sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}(a_1+r_1a)^{r_1}(a_2+r_2a)^{r_2-1}\cdots(a_k+r_ka)^{r_k-1},$$

et

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(a_1+a_2+\cdots+a_k+na)^{n-1}$$
$$= a_1a_2\cdots a_k\sum\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}(a_1+r_1a)^{r_1-1}\cdots(a_k+r_ka)^{r_k-1}.$$

A. L. Cauchy[114]) a donné la formule

$$(1+x)(1+tx)\cdots(1+t^{n-1}x)$$
$$=1+\frac{1-t^n}{1-t}x+\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)}tx^2+\cdots+t^{\frac{1}{2}n(n-1)}x^n.{}^*$$

De toutes les expressions analogues à celle du binome, c'est le produit

$$\mathrm{P} = a(a+b)(a+2b)\cdots[a+(n-1)b]$$

qui a le plus attiré l'attention des analystes. Lorsque b est égal à 1, ce produit, considéré comme fonction de a, est appelé *factorielle,* ou *produit continuel*; les coefficients de son développement satisfont à des relations simples de récurrence. Dans le cas général, P considéré comme fonction de b et de n s'appelle *faculté*; lorsque n est entier,

Acta Acad. Petrop. 5 (1781) II, éd. 1785, math. p. 76; *C. W. Baur,* Z. Math. Phys. 2 (1857), p. 195; *D. André* [54]); *F. J. Studnička,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1879, p. 375.

112) *N. H. Abel,* J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 159; Œuvres, éd. *L. Sylow* et *S. Lie* 1, Christiania 1881, p. 102; *A. von Burg,* J. reine angew. Math. 1 (1826), p. 367; *A. Cayley* [London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 6 (1853), p. 185; Papers 2, Cambr. 1889, p. 102], généralisation élégante, sans démonstration; *E. Lucas,* Théorie des nombres [72]) 1, p. 197; *E. Netto,* Combin. [42]), p. 54.

113) $_*$Z. Math. Phys. 35 (1890), p. 56.*

114) $_*$C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 178; 17 (1843), p. 527; Œuvres (1) 5, Paris 1885, p. 40, 81; *G. Eisenstein,* J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 44; *E. Catalan,* Bull. Soc. math. France 19 (1890 1), p. 145; 20 (1892), p. 40.*

les coefficients de son développement s'expriment au moyen de sommes de produits combinatoires; sa généralisation dans le cas où n n'est plus entier constitue une fonction dont l'étude sort du domaine actuel[115].

Déterminants.

16. Aperçu historique. Lorsqu'on élimine n inconnues entre $n+1$ équations linéaires par rapport à ces inconnues, on est conduit à égaler à zéro une certaine fonction rationnelle entière des coefficients de ces équations; *G. W. Leibniz* a, le premier, étudié cette fonction et a énoncé la loi suivant laquelle ses termes successifs se déduisent de l'un d'eux[116]. De même, lorsqu'on résout n équations linéaires par rapport à n inconnues, les valeurs des inconnues sont des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions rationnelles entières des coefficients; *G. Cramer*[117] a donné une règle pour composer ces fonctions. Les expressions ainsi formées furent étudiées par *E. Bézout*[118], par *P. S. Laplace*[119] qui leur donna le nom de *résultantes*, et par *A. T. Vandermonde*[120]. *J. L. Lagrange*, dans plusieurs de ses mémoires[121], considéra certaines expressions qui sont des déterminants du troisième ordre et forma leurs carrés ainsi que leurs réciproques. *C. F. Gauss*[122] considéra les discriminants des formes quadratïques

115) *B. Pascal*[1]; *L. Euler*, Institutiones calculi differ., S^t Pétersb. 1755, p. 832; *A. T. Vandermonde*[20] emploie le nom de *puissance du second ordre* et, dans le cas de $b = -1$, la notation $[a]^n$; *Chr. Kramp*, Analyse des réfractions astr. et terrestres, Strasbourg et Leipzig 1799, chap. 3; Ann. math. pures appl. 3 (1812/3), p. 1: *Kramp* emploie la notation $a^{n/b}$; a est la base, b la différence et n l'exposant; *A. M. Ampère*, Ann. math. pures appl. 15 (1824/5), p. 369; *F. Arndt*, J. reine angew. Math. 31 (1846), p. 241; *K. Weierstrass*, id. 51 (1856), p. 1 [1854]; Abh. aus der Funct., Berlin 1886, p. 185; Werke 1, Berlin 1894, p. 153: *Weierstrass* discute les travaux de ses devanciers *Chr. Kramp*, *T. Clausen*, *F. W. Bessel*, *M. Ohm*, *A. L. Crelle*, *L. Öttinger* et en fait l'historique; *E. Lucas*, Mathesis (1) 3 (1883), p. 25.

116) Ms. bibl. Hanovre, daté 1678; lettre à *G. F. A. de l'Hospital*, datée 28 IV 1693; Acta Erud. Lps. 1700, p. 206; Werke, éd. *C. I. Gerhardt*, Math. Schr. 7, Halle 1863, p. 5; 2, Berlin 1850, p. 239; 5, Halle 1858, p. 348. Voir aussi *C. I. Gerhardt*, Sitzgsb. Akad. Berlin 1891, p. 407; *G. Peano*, Formulaire math. 3, Turin et Paris 1901, p. 164.

117) Introd.[24], p. 656 et suiv.

118) Hist. Acad. sc. Paris 1764, M. p. 288.

119) id.[24] 1772 II, M. p. 296; Œuvres 8, p. 397.

120) id. 1772 II, M. p. 518 [1771].

121) Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773), éd. 1775, p. 85, 121, 149; Œuvres 3, Paris 1869, p. 579, 619, 661.

122) Disquisitiones Arithmeticae, Leipzig 1801, n° 154 (trad. *A. Ch. M. Poullet-Delisle*, Paris 1807); Werke 1, Gött. 1870, p. 121.

et les désigna sous le nom de *déterminants*: c'est là l'origine du mot actuellement employé.

Une étude raisonnée des *résultantes* en général a été faite par *J. P. M. Binet*[123]) et simultanément, mais d'une façon beaucoup plus complète, par *A. L. Cauchy*[124]) qui employa le mot de *déterminant*[125]) pour les désigner et trouva la plupart de leurs propriétés fondamentales en partant de la notion de *fonction alternée.* La théorie des déterminants a été exposée d'une façon didactique par les auteurs que l'on vient de citer et par *C. G. J. Jacobi* dans un mémoire qui est fondamental[126]). La bibliographie la plus complète est celle de *T. Muir*[127]).

17. Définition et notations. Etant donnés n^2 éléments a_{ik} représentés par une même lettre affectée de deux indices variables de 1 à n, on forme les $n!$ produits tels que

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\lambda},$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ constituent une permutation des n premiers nombres; on fait précéder chaque produit du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que la permutation $\alpha \dots \lambda$ est de première ou de deuxième classe (n° 5) [*règle de Cramer*]. La somme algébrique des résultats est appelée le *déterminant* des n^2 éléments; les produits dont elle est constituée, accompagnés du signe correspondant, sont les *termes* du déterminant; le terme $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ est appelé *terme principal.* Le nombre n est appelé *degré* ou *ordre* du déterminant. Quelquefois on écrit a_i^k à la place de a_{ik}.

Il existe d'autres définitions d'un déterminant. *A. L. Cauchy*[128])

---

123) J. Ec. polyt., cah. 16 (1813), p. 280 [1812]; Œuvres (2) 1 (1905), sous presse.

124) id., cah. 17 (1815), p. 29 [1812].

125) *id. p. 51 2*. Il semble cependant que *A. L. Cauchy,* n'a pas toujours fait usage de cette locution [cf. par ex. Exercices d'Analyse et de phys. math. 2, Paris 1841, p. 160, où il ne l'emploie pas]; elle n'est devenue usuelle que depuis que *C. G. J. Jacobi*[126]) l'a, à son tour, adoptée.

126) J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 285; Werke 3, Berlin 1884, p. 355.

127) Quart. J. pure appl. math. 18 (1882), p. 110; 21 (1886), p. 299; London, Edinb. Dublin philos. mag. (5) 18 (1884), p. 416; Proc. R. Soc. Edinb. 13 (1884/6), p. 547; 14 (1886/7), p. 452; 15 (1887/8), p. 481; 16 (1888/9), p. 207, 389, 748. Ces articles ont paru en volume: The theory of determinants in the historical orders of its development 1, Londres 1890. Voir encore Proc. R. Soc. Edinb. 22 (1897/9), p. 441; 23 (1899/1901), p. 93, 181.

128) J. Ec. polyt. cah. 17 (1815), p. 51 [1812]; Cours d'Analyse de l'Ecole polyt. 1, Analyse algébrique, Paris 1821, p. 521; Exercices d'Analyse et de phys. math. 4, Paris 1847, p. 356; Œuvres (2) 1, Paris 1905, sous presse; (2) 3, Paris 1897, p. 426; (2) 14 en préparation. Voir encore *J. A. Serret*, Alg. sup. 5e éd., 1, Paris 1885, p. 527.

considère le produit $\prod (a_i - a_k)$, où i prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ supérieures à i; tout terme du développement de ce produit est de la forme $\pm a_0{}^{\alpha} a_1{}^{\beta} \ldots a_{n-1}^{\lambda}$, où les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ forment une permutation des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Il suffit d'écrire les exposants comme seconds indices, pour que le développement considéré représente le déterminant des éléments a_{ik}. *A. L. Cauchy* considère aussi un déterminant comme un produit symbolique de facteurs composés linéairement au moyen de paramètres ou *clefs algébriques* ou *anastrophiques*[129]). *Cette idée se trouve déjà dans la manière dont *H. Grassmann*[130]) définit les déterminants comme produits symboliques de la forme

$$\prod (a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + \cdots + a_{in} e_n)$$

avec les conditions

$$e_{\lambda}{}^2 = 0, \quad e_k e_{\lambda} = - e_{\lambda} e_k, \quad (k \gtrless \lambda).$$

E. Schering[131]) donne d'un déterminant une idée géométrique et analytique. *L. Kronecker,* dans ses cours professés à l'Université de Berlin, reprenait l'idée de *G. Cramer* et définissait un déterminant comme une fonction invariante relativement à la composition des formes linéaires; d'après *L. Kronecker,* un déterminant est une fonction de n^2 variables qui est caractérisée par les trois propriétés que voici: si l'on dispose les n^2 variables en un carré formé de n lignes et de n colonnes, le déterminant est fonction linéaire et homogène des éléments $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ de chacune des n lignes; cette fonction change seulement de signe lorsqu'on transpose deux quelconques

---

129) C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 70, 129; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 439; (1) 12, Paris 1900, p. 12. Voir aussi *B. de Saint Venant,* C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853) p. 582.

130) Archiv Math. Phys. (1) 6 (1845), p. 337; Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 20, 27, 37; Werke 1², Leipzig 1896, p. 28, 34, 43; C. R. Acad. sc. Paris 38 (1854), p. 743. Voir aussi *F. Caspary,* J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 123 [1880]; 95 (1883), p. 36 [1881]; *E. Carvallo,* Nouv. Ann. math. (3) 10 (1891), p. 219, 341; *E. Müller,* J. reine angew. Math. 115 (1895), p. 236 [1894]; Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 28; *R. F. Scott,* A treatise on the theory of determinants, Cambridge 1880, p. 12; *V. von Schlegel,* Z. Math. Phys. 41, hist.-lit. Abt. (1896), p. 1, 41.

131) Abh. Ges. Gött. 22 (1877) math.; mém. nº 1, p. 7/8; C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 1387. Si l'on développe $\prod\limits_{i=1}^{i=n} \left[\sum\limits_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k\right]^{-1}$ suivant les puissances décroissantes de $x_1, x_2, \ldots x_n$, le coefficient de $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{-1}$ est la valeur réciproque du déterminant $|a_{ik}|$. Cf. *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 334; Werke 3, Berlin 1884, p. 68; *T. Muir,* Trans. R. Soc. Edinb. 40 (1903), p. 615.

des lignes $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ et $a_{1\lambda}, a_{2\lambda}, \ldots, a_{n\lambda}$ de ce carré; elle se réduit à $+1$ pour $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ et $a_{ik} = 0$ $(i \lessgtr k)$ [132]. *Ch. Méray* [133]) établit une théorie des déterminants en partant de la résolution des équations linéaires*.

Les notations les plus usitées pour les déterminants sont: celle de *A. L. Cauchy* [134])

$$S(\pm a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}),$$

celle de *A. Cayley* [135])

$$\alpha\ , \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \ \cdots,$$

celle de *C. G. J. Jacobi* [136]) qui écrit: *déterminant du système*

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix}$$

et la notation

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

qui participe des deux précédentes. Dans les trois dernières notations les éléments sont disposés en carré dans n lignes et n colonnes de façon que l'une des deux diagonales renferme le terme principal $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$: cette diagonale est dite *principale*. Citons aussi la notation de *H. J. S. Smith* [137]),

$$|a_{ik}|,$$

celle de *G. Salmon* [138])

$$(a_1, b_2, c_3, \ldots, l_n),$$

---

132) Vorles. über die Theorie der Determinanten, publ. par *K. Hensel*, Leipzig 1903, p. 295, 307.

133) *J. math. pures appl. (3) 10 (1884), p. 181/281.*

134) J. Ec. polyt., cah. 17 (1815), p. 46, 52 [1812]; Œuvres (2) 1, Paris 1905.

135) *A. Cayley*, Cambr. math. J. 2 (1839/41), p. 267; Papers 1, Cambr. 1889, p. 1.

136) *C. G. J. Jacobi* (Nachlass), Werke 3, Berlin 1884, p. 588/9.

137) Report Brit. Assoc. 32, Cambridge 1862, éd. Londres 1863, p. 504; Papers 1, Oxford 1894, p. 229.

138) Lessons introd. to the modern higher Algebra, Dublin 1859, 4e éd. Dublin 1885; trad. *Bazin*, Paris 1868; trad. *O. Chemin*, Paris 1890, p. 1, 3, ...

et celle de *L. Kronecker* [139])

$$|a_{h1}, \; a_{h2}, \; \ldots, \; a_{hn}|, \qquad (h = 1, \; 2, \; \ldots, \; n).$$

J. J. Sylvester [140]) introduit la notation *ombrale* (umbral) dans laquelle tout élément est un ensemble de deux symboles l'un *algébrique*, l'autre *ombral* servant à indiquer son rang [141]).*

A. Cayley [142]) établit, en vue de la théorie des formes linéaires et des substitutions, une distinction entre l'ensemble des éléments disposés en carrés, et la valeur du déterminant; il désigne l'ensemble sous le nom de *matrice*, et étend cette notion au cas de mn éléments a_{ik} disposés en un rectangle suivant m lignes et n colonnes; dans le cas où m est différent de n, on place les éléments entre deux doubles traits verticaux.

18. Nombre des termes. Le nombre des termes d'un déterminant général de degré n est n^2. Lorsque certains éléments sont nuls, ce nombre est réduit, et sa détermination se rattache à l'étude des permutations des n premiers nombres dont certains éléments donnés conservent leur place primitive (nº 8); il en est de même de la recherche du nombre des termes qui contiennent des éléments de la diagonale principale en nombre donné ou en nombre ne dépassant pas une limite donnée [143]).

19. Propriétés élémentaires des déterminants. Des définitions précédentes résultent immédiatement les propriétés suivantes que connaissaient déjà *G. Cramer* [117]), *A. T. Vandermonde* [120]) et *J. L. Lagrange* [121]). Un déterminant ne change pas si l'on change les lignes en colonnes; il change de signe si l'on permute deux lignes ou deux colonnes; il

---

139) *L. Kronecker* s'est aussi servi de la notation de *H. J. S. Smith* [Monatsb. Akad. Berlin 1866, p. 600; J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 276 [1866]; Werke 1, Leipzig 1895, p. 149].

140) *London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 1 (1851), p. 296.*

141) *Pour d'autres notations voir *E. J. Nanson*, id. (5) 44 (1897), p. 396; *A Cayley*, id. (4) 21 (1861), p. 180; Papers 5, Cambr. 1892, p. 45; *W. Schrader*, Beiträge zur Theorie der Determinanten, Halle 1887.*

142) Cambr. math. J. 4 (1843/45), p. 119; Trans. Cambr. philos. Soc. 8 (1849), p. 75 [1843]; J. reine angew. Math. 50 (1855), p. 282; Papers 1, Cambr. 1889, p. 55, 63; 2, Cambr. 1889, p. 185.

143) *J. J. Weyrauch*, J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 273; *C. J. Monro*, Messenger math. (2) 2 (1873), p. 38; *H. R. Baltzer*, Ber. Ges. Lpz. 25 (1873), math. p. 534; *T. Muir*, Proc. R. Soc. Edinb. 9 (1875/8), p. 382; 11 (1880/2), p. 187; *N. von Szüts*, Math. Ann. 33 (1889), p. 477; *G. de Longchamps*, J. math. spéc. (3) 5 (1891), p. 9, 29, 54, 85; *C. A. Laisant*, C. R. Acad. sc. Paris 112 (1891), p. 1047; *A. Holtze*, Archiv Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 284; *E. Netto*, Combin. [42]), p. 71, 80.

est donc nul s'il a deux lignes ou deux colonnes identiques; il est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une ligne ou d'une colonne. Si l'on multiplie les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un facteur, le déterminant est multiplié par ce facteur[144]). Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne se décomposent chacun en une somme σ de deux éléments, le déterminant est égal à la somme des deux déterminants que l'on obtient en effaçant, soit le premier, soit le second des deux termes de σ; réciproquement la somme de deux déterminants du degré n, ayant $n-1$ lignes (ou colonnes) identiques, se met sous la forme d'un seul déterminant du même degré. On peut, sans changer la valeur d'un déterminant, ajouter aux éléments d'une ligne ou d'une colonne les éléments correspondants des lignes ou colonnes parallèles, multipliés par des facteurs constants. *L'application de cette remarque permet de remplacer les colonnes successives d'un déterminant par les différences successives des éléments situés dans chacune des lignes; si l'on pose

$$\Delta a_{i,k-1} = a_{ik} - a_{i,k-1}, \qquad \Delta^2 a_{i,k-1} = \Delta a_{ik} - \Delta a_{i,k-1}, \ \ldots$$

on peut aussi écrire

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \,| = |\, a_{i1}, \Delta a_{i1}, \Delta^2 a_{i1}, \ldots, \Delta^{n-1} a_{i1} \,|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

il résulte de là qu'un déterminant est nul si les éléments de h colonnes forment une suite arithmétique d'ordre inférieur à $h-1$[145]).

On peut exprimer un déterminant $|\, a_{ik} \,|$ de n^2 éléments au moyeu d'un autre de $(n-1)^2$ éléments du second degré

$$|\, a_{ik} \,| = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \,|\, a_{11} a_{h2} - a_{12} a_{h1}, \quad a_{11} a_{h3} - a_{13} a_{h1}, \ \ldots \,|;$$
$$(h = 2, 3, \ldots, n; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

En généralisant ce procédé, on peut remplacer un déterminant de degré n par un quotient; le dénominateur est le déterminant de degré $h-1$,

$$a_{11}, \quad a_{22}, \ \ldots, \ a_{h-1,h-1} \,|$$

élevé à la puissance $n-h$; le numérateur est un déterminant renfermant $n-h+1$ lignes et colonnes; chacun de ses éléments est un déterminant de degré h obtenu en bordant (n° 26) le précédent par les éléments d'une ligne et d'une colonne de rang égal ou supérieur à h[146]).

Inversement, on peut remplacer un déterminant de degré n par

144) Généralisation par *E. Fürstenau,* J. reine angew. Math. 89 (1880), p. 86.
145) **F. J. Studnička,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1896, mém. n° 6, p. 1/5.*
146) *id. 1879, p. 489.*

un autre déterminant de degré plus élevé en bordant le premier déterminant par des éléments convenablement choisis.*

20. Développement d'un déterminant. Mineurs. Lorsqu'on met en évidence, dans l'expression d'un déterminant D, les éléments d'une ligne ou d'une colonne et que l'on écrit par exemple

$$\mathrm{D} = |a_{ik}| = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} A_{ik},$$

on dit qu'on *développe* D suivant les éléments de la i^e ligne; le coefficient A_{ik} est égal au produit de $(-1)^{i+k}$ par le déterminant de degré $n-1$ que l'on tire de D en supprimant la ligne et la colonne qui se croisent sur a_{ik}; ce dernier déterminant est appelé *sous-déterminant* ou *déterminant partiel* ou *mineur du premier ordre*; le terme „*mineur*" désigne souvent aussi le coefficient A_{ik} lui-même. *Comme les appellations employées par les auteurs sont différentes, il y aurait lieu d'adopter une règle fixe; on conviendra ici d'adopter la suivante:

Le déterminant tiré de D par suppression de la i^e ligne et de la k^e colonne est appelé *sous-déterminant* (du premier ordre) *de* D *relatif à l'élément* a_{ik}; le produit de ce sous-déterminant par $(-1)^{i+k}$ est appelé *mineur* (du premier ordre) *de* D *relatif à l'élément* a_{ik}; c'est la dérivée de D par rapport à a_{ik}. Les mineurs satisfont aux relations de la forme

$$\sum a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \mathrm{D},$$

δ_{ij} ayant la valeur 1 si $i = j$ et la valeur 0 si $i \gtrless j$ [147]).

Si l'on considère le mineur du premier ordre A_{ik} ralatif à a_{ik}, on peut le développer lui-même, d'après la même règle, suivant les éléments d'une de ses lignes ou de ses colonnes; les coefficients de ce développement seront des mineurs du premier ordre de A_{ik}; ils sont, au signe près, des déterminants tirés de D en supprimant deux lignes et deux colonnes; par exemple, le coefficient B_{jh} de a_{jh} dans le développement de A_{ik} est égal au produit par $(-1)^{i+k+j+h}$ du déterminant tiré de D en supprimant la i^e et la j^e lignes ainsi que la k^e et la h^e colonnes; ce dermier déterminant est appelé *sous-déterminant du second ordre* de D et B_{jh} est appelé *mineur du second ordre de* D *relatif aux deux éléments* a_{ik}, a_{jh}; B_{jh} est aussi la dérivée par-

147) C'est *L. Kronecker* qui a introduit le symbole δ_{ik} [Monatsb. Akad. Berlin 1866, p. 601; J. reine angew. Math. 68 (1868), p. 276; Werke 1, Leipzig 1895, p. 150]; il désigne par A_{ki} ce que nous appelons ici A_{ik} et par a'_{ki} le quotient de A_{ki} par D; les systèmes a_{ik}, a'_{ki} sont appelés *réciproques* [Sitzgsb. Akad. Berlin 1882, p. 821; Werke 2, Leipzig 1897, p. 391].

tielle $\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik} \partial a_{jh}}$. On définirait de même les *sous-déterminants* et les *mineurs* de D d'un *ordre quelconque*; un mineur de D, d'ordre p, *relatif à certains éléments de* D est aussi, comme l'indique *C. G. J. Jacobi* [148]), la dérivée partielle, d'ordre p, de D prise par rapport à ces éléments.

Plusieurs auteurs emploient le mot *ordre* pour désigner le nombre des lignes et des colonnes d'un déterminant. Pour éviter toute confusion nous conviendrons d'appeler *degré* ce nombre de lignes et de colonnes; de cette façon un mineur du premier ordre d'un déterminant de degré n est, au signe près, un sous-déterminant de degré $n-1$, un mineur du second ordre est, au signe près, un sous-déterminant de degré $n-2$, et ainsi de suite.*

Les *sous-déterminants principaux* ou *mineurs principaux* sont ceux qui sont relatifs à des éléments de la diagonale principale. En ajoutant x aux éléments diagonaux d'un déterminant et en développant suivant les puissances de x le déterminant ainsi formé, le coefficient de x^k dans ce développement est la somme des mineurs principaux de degré $n-k$. [149]) On trouvera plus loin (n° **30**) l'application de ce procédé à l'équation séculaire.

Un déterminant ayant pour sous-déterminant un déterminant donné est un *superdéterminant* de celui-ci [150]).

On appelle *sous-déterminant complémentaire* d'un sous-déterminant donné, celui que l'on obtient par suppression des lignes et des colonnes qui se croisent sur les éléments du premier; la somme des degrés d'un sous-déterminant et de son complémentaire est égale au degré du déterminant total. Pour la clarté des énoncés relatifs à un sous-déterminant et à son complémentaire, on affecte ce dernier du signe que possède, dans le déterminant total, le terme renfermant l'ensemble des éléments placés dans les diagonales principales du sous-déterminant donné et de son complémentaire; de la sorte, le premier est un véritable sous-déterminant tandis que le deuxième est le *mineur* du déterminant total relatif aux éléments de la diagonale principale du premier, c'est-à-dire la dérivée partielle du déterminant total par rapport à ces éléments.

Un mode important de développement a été donné par *P. S. La-*

---

148) J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 301; Werke 3, Berlin 1884, p. 373.

149) Des généralisations ont été indiquées par *A. Capelli,* Rendic. Accad. Napoli (2) 3 (1889), p. 58; Nouv. Ann. math. (3) 14 (1895), p. 62; *T. Cazzaniga,* Reale Ist. Lombardo, *Rendic.* (2) 29 (1896), p. 541.

150) *G. Frobenius,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 35; *K. Hensel,* J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 25 [1894].

place[151]). Etant donné un déterminant D de degré n, considérons m lignes particulières de ce déterminant et tous les sous-déterminants de degré m, en nombre C_n^m, formés au moyen des éléments de ces m lignes; multiplions chacun d'eux par le sous-déterminant complémentaire, affecté de son signe comme nous venons de le dire, et formons la somme des produits: cette somme est égale à la valeur du déterminant D.

C. G. J. Jacobi[152]) a tiré de ce développement une suite de propriétés des déterminants dont certains éléments sont nuls.

Une généralisation du développement précédent, indiquée par *A. T. Vandermonde*[120]), *P. S. Laplace*[119]), *C. G. J. Jacobi*[152]), consiste à séparer les lignes du déterminant D en plusieurs groupes renfermant respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_p$ lignes; D est égal à une somme algébrique de produits, chacun d'eux renfermant p sous-déterminants affectés d'un signe convenable. *Si l'on a développé un déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, si l'on opère de même sur les mineurs, et que l'on continue toujours de même, on obtient finalement l'expression développée du déterminant en fonction de ses éléments; cette expression n'est fournie par une règle simple que dans le cas de $n = 3$ (*Règle de Sarrus*)[153]).*

21. Produit de deux déterminants. Produit de deux matrices. Le produit de deux déterminants de degré m et n peut être écrit sous la forme d'un déterminant de degré $m + n$ dont deux sous-déterminants complémentaires sont les deux déterminants donnés. Des $(m+n)^2 - m^2 - n^2 = 2mn$ éléments du nouveau déterminant n'entrant pas dans ces deux sous-déterminants, mn sont égaux à zéro: ils font partie des mêmes lignes que les éléments de l'un des deux sous-déterminants et des mêmes colonnes que les éléments de l'autre; les mn autres éléments du nouveau déterminant sont arbitraires. Le développement suivant la *règle de Laplace* du déterminant de degré $m + n$ ainsi constitué est, en effet, égal au produit des deux premiers.

Dans le cas de $m = n$ le produit de deux déterminants de degrés n,

$$\mathrm{D} = |a_{ik}|, \qquad \mathrm{D}' = |b_{ik}|,$$

a été mis par *J. P. M. Binet* et *A. L. Cauchy*[154]) sous forme d'un déterminant de même degré

151) Hist. Acad. sc. Paris 1772 II, M. p. 300; Œuvres 8, Paris 1891, p. 401.

152) J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 290; Werke 3, Berlin 1884, p. 362.

153) *Une généralisation a été donnée par *A. Bonolis,* Giorn. mat. (1) 21 (1883), p. 336; *G. Teixeira,* Jornal sciencias math. astr. (Coïmbre) 11 (1892), p. 88, 173.*

154) J. Ec. polyt., cah. 16 (1813), p. 280; cah. 17 (1815), p. 29 [1812].

$$\mathrm{D}'' = |c_{ik}|, \quad \text{où} \quad c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{ih} b_{hk};$$

le changement des lignes en colonnes dans D ou D′ permet d'écrire D″ de quatre manières différentes[155]).

J. P. M. Binet et *A. L. Cauchy*[154]) ont indiqué la généralisation suivante du produit de deux déterminants. Etant donné deux *matrices* rectangulaires de mn éléments

$$|a_{ik}|, \quad |b_{ki}|, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

le nombre des lignes de l'une étant égal au nombre des colonnes de l'autre et réciproquement, on calcule m^2 nouveaux éléments c_{ik} par la formule

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{ih} b_{hk}; \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m);$$

le déterminant $|c_{ik}|$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$, est appelé *produit des deux matrices*; si $m > n$, il est nul; si $m \leqq n$, ce déterminant de degré m est égal à la somme des produits des déterminants homologues de degré m tirés des deux matrices, et l'on a

$$|c_{ik}| = \sum |a_{ih}| \cdot |b_{hk}|,$$

les indices h étant, dans chacun des déterminants du second membre, m des nombres $1, 2, \ldots, n$, et la somme étant étendue à toutes les combinaisons m à m de ces nombres. On peut remarquer que si un déterminant D″ est égal au produit de deux déterminants D et D′ de même degré, tout mineur de D″ est égal au produit de deux matrices rectangulaires; il s'exprime, par suite, au moyen de produits de mineurs des déterminants D et D′.[156])

Lorsque dans le produit de deux déterminants de même degré, on intervertit l'ordre des facteurs, on obtient deux déterminants dont les éléments sont respectivement

---

155) *J. L. Lagrange*[121]) montre que le carré d'un déterminant du 3ᵉ degré se met sous forme d'un déterminant du même degré; *C. F. Gauss* [Disq.[122]) nᵒˢ 159, 170; Werke 1, p. 126, 304] montre que le produit de deux déterminants du 2ᵉ ou du 3ᵉ degré est un déterminant du même degré. Voir aussi *A. V. Jamet,* Nouv. Corresp. math. 3 (1877), p. 247; *M. Falk,* Report Brit. Assoc. 48, Dublin 1878, éd. Londres 1879, p. 473. — *J. König* [Math. Ann. 14 (1879), p. 507] déduit le cas de deux déterminants du même degré de celui de deux déterminants quelconques. Voir encore *C. Le Paige*, Bull. Soc. math. France 9 (1880/1), p. 67; *A. de Presle,* id. 14 (1885/6), p. 157.

156) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 243; *L. Kronecker,* id. 107 (1891), p. 254; *E. Netto,* id. 108 (1891), p. 144.

$$c_{ik} = \sum_{(h)} a_{ih} b_{hk}, \qquad c'_{ik} = \sum_{(h)} b_{ih} a_{hk};$$

on trouve que les sommes de leurs mineurs principaux du même degré sont respectivement égales [157]).

Etant donné, dans un cas particulier, deux matrices rectangulaires dont les colonnes de l'une sont en même nombre que les lignes de l'autre

$$\|a_{ih}\|, \quad \|b_{hk}\|, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \mu; & \\ k = 1, 2, \ldots, \nu; & \mu + \nu = n \\ h = 1, 2, \ldots, n; & \end{pmatrix},$$

on peut constituer, au moyen de leurs éléments, $\mu\nu$ éléments

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{ih} b_{hk};$$

on dit que les deux matrices envisagées sont *correspondantes* [158]) si tous ces éléments c_{ik} sont nuls; supposons qu'il en soit ainsi: à un déterminant

$$|a_{ih}|, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, & 2, & \ldots, & \mu \\ h = \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_\mu \end{pmatrix},$$

tiré de la première, on peut alors faire correspondre un déterminant

$$|b_{hj}|, \qquad \begin{pmatrix} h = \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_\nu \\ j = 1, & 2, & \ldots, & \nu \end{pmatrix},$$

tiré de la seconde par la condition que les nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$$

constituent une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$; le rapport des déterminants correspondants ainsi formés est constant.

A la règle de formation du produit de deux déterminants ou de deux matrices, se rattachent d'importantes formules d'Analyse et de la Théorie des nombres [159]) qui seront développées dans les articles relatifs à ces branches de mathématiques; les applications à la géométrie analytique sont aussi très nombreuses, et se rapportent à l'évaluation des surfaces, des volumes, et aux relations qui existent entre les distances mutuelles des points d'une figure [160]).

---

157) *C. Weltzien,* Math. Ann. 42 (1893), p. 598.

158) *P. Gordan,* Invar. [30]) 1, p. 95, 110.

159) *Ch. Hermite,* J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 297; *H. R. Baltzer,* Ber. Ges. Lpz. 25 (1873), math. p. 530; *K. Weihrauch,* Z. Math. Phys. 21 (1876), p. 134; *G. Frobenius,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 31.

160) *L. Kronecker,* J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 152; Werke 1, Leipzig 1895, p. 237; Vorl. über Integrale, publ. par *E. Netto,* Leipzig 1894, en partic., p. 238 (volume du prismatoïde dans l'espace à *n* dimensions); et *surtout* Determ. [132]) p. 180, 215, 231; *S. Gundelfinger,* Z. Math. Phys. 18 (1873), p. 312. On peut aussi consulter *G. Dostor,* Eléments de la théorie des déterminants,

22. Composition des systèmes. Etant donné deux systèmes ou matrices $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$, de n lignes et n colonnes, le système c_{ik} dont les éléments sont obtenus d'après la règle de multiplication qui a été indiquée (n° **21**), est dit *composé* au moyen des deux premiers. La composition et la décomposition des systèmes ont de nombreuses applications à la théorie des formes linéaires et à celle des substitutions, et nous renvoyons aux articles spéciaux à ces théories; nous mentionnerons seulement ce fait que l'on appelle *système-unité* une matrice dont la diagonale principale est formée d'éléments égaux à l'unité, et dont tous les autres éléments sont nuls; deux systèmes sont dits *réciproques* si le résultat de leur composition est le système-unité [161]). Les conditions sous lesquelles on peut décomposer un système donné, c'est-à-dire le mettre sous forme d'un produit de *systèmes élémentaires* ont été étudiées par *L. Kronecker* [162]).

Il existe d'autres manières de déduire de deux systèmes d'éléments un troisième système. Etant donnés deux systèmes

$$a_{ik}, \quad b_{gh}, \qquad \binom{i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m}{g,\, h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n},$$

si l'on forme le système des m^2n^2 éléments

$$c_{pq} = a_{ik} b_{gh}, \quad \text{où} \quad p = (i-1)n + g, \quad q = (k-1)n + h,$$

le déterminant $|c_{pq}|$ a pour valeur le produit $|a_{ik}|^n \cdot |b_{gh}|^m$. *L. Kronecker*, dans ses cours professés à l'Université de Berlin, a démontré ce théorème et signalé l'importance de ce mode de composition qui se rattache à la composition des formes bilinéaires [163]). Effectuer la composition bialternée de deux formes bilinéaires

$$\mathrm{A} = \sum a_{ik} x_i u_k, \quad \mathrm{B} = \sum b_{gh} y_g v_h, \qquad \binom{i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m}{g,\, h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n},$$

c'est, en effet, constituer au moyen de ces deux formes, la forme

---

1e éd. Paris 1877, 2e éd. Paris 1883, p. 161; *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*, Géométrie (1e éd.) 2, Paris 1865; (7e éd.) 2, Paris 1900, p. 567.

161) *L. Kronecker*, Sitzgsb. Akad. Berlin 1882, p. 821; 1889, p. 349, 479, 603; Werke 2, Leipzig 1897, p. 391; 3[1], Leipzig 1899, p. 295/368; Determ. [132]) p. 360.

162) Sitzgsb. Akad. Berlin 1890, p. 1081; Werke 3[1], Leipzig 1899, p. 463; Determ. [132]), p. 46, 145.

163) *G. Zehfuss*, Z. Math. Phys. 3 (1858), p. 298; *G. Frobenius*, J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 1; 114 (1895), p. 187; Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 241, 407; *K. Hensel*, Acta math. 14 (1890/1), p. 317 [1889]; *G. Rados*. Math.-Naturw. Ber. Ungarn 8 (1891), p. 60 [1886]; *B. Igel*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 55; *G. von Escherich*, id. p. 68; *C. Stéphanos*, C. R. Acad. sc. Paris 128 (1899), p. 593; J. math. pures appl. (5) 6 (1900), p. 73.

7*

$$\mathrm{C} = \sum a_{ik} b_{gh} \mathrm{X}_{ig} \mathrm{U}_{kh},$$

qui ne diffère que par la notation des variables de la forme $\sum c_{pq} z_p w_q$ où c_{pq} est de la forme indiquée précédemment. Une généralisation de ce mode de composition, signalée par *A. Scholtz* et *J. Hunyady*[164]), consiste à prendre n formes linéaires à n variables

$$f_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et toutes les formes possibles de degré m données par la relation

$$f_{i_1 i_2 \cdots i_n} = f_1^{i_1} f_2^{i_2} \ldots f_n^{i_n}, \qquad (i_1 + i_2 + \cdots i_n = m);$$

elles sont en nombre $\nu = \mathrm{C}_{n+m-1}^{m}$ et sont des fonctions linéaires des produits $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ avec ν coefficients; le déterminant des coefficients de ces ν formes est égal à la puissance ν^{e} du déterminant $|a_{ik}|$; *A. Hurwitz*[164]) l'appelle „déterminant de la transformation de puissance ν“. Pour $n = 2$, $m = 2$, par exemple, on a le déterminant de la transformation de puissance 3,

$$\begin{vmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^3.$$

De nombreuses applications de ce théorème et d'autres analogues ont été faites à la théorie des coniques, en particulier à l'étude du *théorème de Pascal*[165]).*

23. Déterminants composés formés au moyen des mineurs d'un déterminant. On appelle *déterminant composé* un déterminant dont les éléments sont définis comme étant des déterminants tous de même degré; nous allons d'abord supposer que ces éléments sont des mineurs d'un même déterminant $\mathrm{D} = |a_{ik}|$ de degré n.

Les mineurs du premier ordre $A_{ik} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_{ik}}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ forment le *système adjoint*[166]) du système a_{ik}[167]). *A. L. Cauchy* a

---

164) **A. Scholtz,* Müegyetemi lapok 2 (1877), p. 65; Archiv Math. Phys. (1) 62 (1878), p. 319; *J. Hunyady,* Értekezések math. Tud. kör. 7 (1879/80), mém. n^os 5, 18; 8 (1881), mém. n° 12; J. reine angew. Math. 89 (1880), p. 47, 79; 92 (1882), p. 304; *A. Hurwitz,* Math. Ann. 45 (1894), p. 390; *W. Anissimov,* id. 51 (1899), p. 388.*

165) **J. Hunyady,* Értekezések[164]) 8 (1881), mém. n° 12; *F. Mertens,* J. reine angew. Math. 84 (1878), p. 355 [1877]; *M. Pasch,* id. 89 (1880), p. 247 [1879]; *F. Caspary,* id. 92 (1882), p. 123 [1880].*

166) *A. L. Cauchy,* J. Ec. polyt., cah. 17 (1815), p. 29 [1812].

167) d'après *C. F. Gauss,* Disq.[122]) n° 268; Werke 1, p. 303.

montré que le déterminant composé $\Delta = |A_{ik}|$ a pour valeur D^{n-1}; Δ est le *déterminant adjoint* du déterminant D. On dit aussi quelquefois que Δ est le *déterminant réciproque* de D; cette façon de parler peut prêter à confusion; elle s'appliquerait plutôt au déterminant du système réciproque d'un système donné (n° 22).

C. G. J. Jacobi[168]) a obtenu un résultat plus général que celui de *A. L. Cauchy*: considérons un sous-déterminant δ, de degré p, du déterminant Δ, et son complémentaire δ'; appelons sous-déterminant de D *homologue* de δ', celui dont les éléments a_{ik} ont les mêmes indices que ceux de δ'; désignons-le par d' et supposons-le affecté du même signe que δ'; *C. G. J. Jacobi* a démontré que le sous-déterminant δ de Δ a pour valeur le produit de D^{p-1} par le sous-déterminant d' de D. On a, par exemple,

$$A_{ik} = D^{p-1}\, a_{gh}\,, \qquad \begin{pmatrix} i,\, k = 1, & 2, & \ldots, p \\ g,\, h = p+1, & p+2, & \ldots, n \end{pmatrix};$$

en particulier, on a

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ik}}\frac{\partial D}{\partial a_{gh}} - \frac{\partial D}{\partial a_{gk}}\frac{\partial D}{\partial a_{ih}} = D\,\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ik}\,\partial a_{gh}}.$$

Lorsque D est nul, tous les mineurs du second ordre de Δ sont nuls et le système adjoint A_{ik} est tel que les éléments de deux lignes ou de deux colonnes du déterminant de ce système sont proportionnels. **T. Muir*[169]) a montré que la différence entre deux termes quelconques de Δ est divisible par D.*

Les sous-déterminants de degré m du déterminant D sont en nombre μ^2, μ étant égal à C_n^m; rangeons d'une manière arbitraire les combinaisons m à m des lignes du déterminant, et affectons ces combinaisons d'un indice i variable de 1 à μ; affectons de même d'un indice k variable de 1 à μ les combinaisons m à m des colonnes, rangées également d'une manière arbitraire; désignons alors par p_{ik} le sous-déterminant de D de degré m dont les éléments sont tirés des lignes formant la combinaison de rang i et des colonnes formant la combinaison de rang k; désignons de plus par p'_{ik} le sous-déterminant de D complémentaire de p_{ik}, affecté de son signe comme nous l'avons dit. Au moyen des sous-déterminants p_{ik} nous formerons un déterminant Δ de degré μ, et au moyen des sous-déterminants complémentaires p'_{ik} nous formerons un déterminant Δ' du même degré.

Une première série de propriétés consiste dans les égalités

$$\Delta\Delta' = D^{\mu}, \quad \Delta = D^{\lambda}, \quad \Delta' = D^{\mu-\lambda}, \quad \text{où} \quad \mu = C_n^m, \quad \lambda = C_{n-1}^{m-1};$$

168) J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 285; Werke 3, Berlin 1884, p. 357.
169) *T. Muir*, Proc. R. Soc. Edinb. 20 (1892/5), p. 323 [1894].

elle a été énoncée par *W. Spottiswoode*[170]); elle se trouve contenue dans un résultat plus général énoncé auparavant par *J. J. Sylvester*[171]) en utilisant la notation *ombrale;* elle a été retrouvée d'une manière indépendante par *E. Franke*[172]) et par *E. d'Ovidio*[173]); *E. Franke* complète le résultat précédent par cette propriété: un sous-déterminant de degré ω du déterminant Δ' est égal au produit de $\text{D}^{\omega-\lambda}$ par le sous-déterminant de Δ homologue du complémentaire du sous-déterminant considéré. *L. Kronecker*[161]) remarque que les relations de *C. G. J. Jacobi* et de *E. Franke* sont des applications de ce théorème: deux systèmes de sous-déterminants homologues de systèmes réciproques sont eux-mêmes réciproques. *E. d'Ovidio*[173]) énonce en outre cette propriété: le déterminant dont les éléments sont les produits $p_{ik}p'_{ik}$ est divisible par D.*

Une autre série de propositions se rapporte à des sous-déterminants de D, de degré m, constitués au moyen des éléments renfermés dans p lignes et p colonnes fixes, et dans $m-p$ autres lignes et colonnes variables; nous les appellerons p''_{ik} et nous désignerons par d le sous-déterminant de D de degré p dont les éléments sont renfermés dans les p lignes et colonnes fixes. *J. J. Sylvester*[171]) a énoncé sans démonstration le théorème suivant: le déterminant des p''_{ik} est un sous-déterminant de Δ de degré C_{n-p}^{m-p}; il est égal au produit de D élevé à la puissance C_{n-p-1}^{n-m} par d élevé à la puissance C_{n-p-1}^{n-m-1}.

Ce théorème a été donné après *J. J. Sylvester* par *E. d'Ovidio*[173]) et par *L. D. H. Picquet*[174]); dans le cas particulier de $m=p+1$ par *G. Frobenius* et par *E. Netto*[174]); il a fait l'objet de nombreux travaux et contient les théorèmes de *E. Franke* comme cas particulier[174]).

170) J. reine angew. Math. 51 (1856), p. 209, 328.

171) London, Edinb. Dublin philos. mag. (4) 1 (1851), p. 297, 304/5, 415; (4) 2 (1851), p. 142; J. reine angew. Math. 88 (1880), p. 49.

172) J. reine angew. Math. 61 (1863), p. 350; *C. W. Borchardt* [id., p. 353; Werke, Berlin 1888, p. 479] remarque le lien qui rattache le résultat de *E. Franke* à celui de *J. J. Sylvester.*

173) *Atti Accad. Torino 11 (1875/6), p. 949; 12 (1876/7), p. 331; 26 (1890/1), p. 131, aperçu historique.*

174) *L. D. H. Picquet,* C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 310; J. Éc. polyt., cah. 45 (1878), p. 201; *R. F. Scott,* Proc. London math. Soc. 14 (1882/3), p. 91; *E. Barbier,* C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 1845; 97 (1883), p. 82; *C. A. van Velzer,* Amer. J. math. 6 (1884), p. 164; *G. Frobenius,* J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 53; Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 79; *E. Netto,* Acta math. 17 (1893), p. 201; J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 345; *E. J. Nanson,* London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 44 (1897), p. 398; J. reine angew. Math. 122 (1900), p. 179; *B. Igel,* Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 47; *E. Müller,* Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 28; *H. Vogt,* Nouv. Ann. math. (4) 1 (1901), p. 211.

24. Relations entre les mineurs d'un déterminant ou d'une matrice. Généralisations. *J. J. Sylvester*[175]) s'était proposé de former des sous-déterminants p_{ik} de degré m d'un déterminant D de degré n, en décomposant les lignes de D en groupes de n_1, n_2, ... lignes, et en prenant de toutes les manières possibles m_1 lignes parmi les n_1 premières, m_2 lignes parmi les n_2 suivantes, etc., la somme $m_1 + m_2 + \cdots$ étant égale à m. *J. J. Sylvester* avait d'abord énoncé que le déterminant composé des p_{ik} est une puissance de D, mais il reconnut ensuite que la proposition n'est vraie que dans des cas particuliers.

Des recherches de *E. Netto*[176]) se rapportent à une généralisation du développement donné par *P. S. Laplace*: tout théorème relatif à un *développement de Laplace* pour un déterminant de degré n donne lieu à un autre théorème pour un déterminant de degré $n + m$ en multipliant ce dernier par une puissance d'un sous-déterminant particulier; ces recherches, reprises par *E. Müller*[177]) avec les notations de *H. Grassmann*, avaient déjà été entreprises par *M. Reiss*[178]) et servent à démontrer les théorèmes de *J. J. Sylvester*. *E. Pascal*[179]) a donné un théorème voisin de celui de *E. Netto*. *T. Muir*[180]) a, du reste, montré comment on peut passer de l'un à l'autre.

W. H. Metzler[181]) et *G. Rados*[182]) généralisent les théorèmes de *E. Franke:* si, dans le déterminant D, on remplace les éléments a_{ii} de la diagonale par $a_{ii} - \varrho$, on forme une équation caractéristique de degré n en ϱ; si, dans le déterminant $\Delta = |p_{ik}|$, de degré μ dont on a parlé au n° **23**, on fait la même opération, on a une autre équation caractéristique de degré μ; les racines de celle-ci s'expriment au moyen de produits de racines de la première.

*Entre les mineurs d'un déterminant symétrique existent des relations importantes dont nous parlerons plus loin (n° **27**); *T. Muir*[183])

---

175) J. reine angew. Math. 88 (1880), p. 49; remarques de *C. W. Borchardt*, id. 89 (1880), p. 82; Werke, Berlin 1888, p. 494.

176) J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 345.

177) Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 28.

178) Beiträge zur Theorie der Determinanten, Leipzig 1867, p. 13.

179) Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 5 I (1896), p. 188.

180) Trans. R. Soc. Edinb. 30 (1883), p. 1, 5 [1881]; voir aussi *G. Chrystal* id., p. 13.

181) Amer. J. math. 16 (1894), p. 131 [1893]; 20 (1898), p. 253 [1897].

182) Mathematikai és Természettudományi Értesitö 10 (1891), p. 34/42; Math. Ann. 48 (1897), p. 417.

183) *Proc. R. Soc. Edinb. 23 (1899/1901), p. 142; *W. H. Metzler*, Trans. Amer. math. Soc. 2 (1900), p. 395.*

les a généralisées pour des déterminants quelconques et pour leurs sous-déterminants de degré pair $2n$ et il les a mises sous la forme

$$\sum_{(\mu)}(-1)^{n-\mu}\left|\begin{matrix}1, 2, 3, \ldots, n-1, \mu\\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \ldots, \omega\end{matrix}\right.$$
$$=\sum_{(\mu)}\sum_{(\nu)}(-1)^{3n-\mu-\nu}\begin{matrix}1, 2, 3, \ldots, n-1\\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \psi\end{matrix}\;(a_{\mu\nu}-a_{\nu\mu});$$

μ prend les valeurs $n, n+1, \ldots, 2n$; $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ sont les nombres de 1 à $2n$ distincts de $1, 2, \ldots, n-1, \mu$ et rangés par ordre de grandeur croissante; ν est un des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ et la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \psi$ est constituée par ces nombres sauf ν.

Les théorèmes de *J. J. Sylvester*, *E. Netto* etc. constituent des relations entre des mineurs d'un déterminant. *C. Flye Sainte-Marie* [184]) a donné des relations générales entre les mineurs.* Mentionnons encore qu'entre un déterminant de degré n et tous les mineurs principaux des différents degrés existent $2^n - n^2 + n - 2$ relations particulières [185]).

*Une matrice rectangulaire d'éléments a_{ik}

$$a_{ik}|, \qquad (i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n;\ m<n)$$

donne lieu à C_n^m déterminants de degré m; il existe entre ces déterminants $C_n^m - 1 - m(n-m)$ relations indépendantes [186]). Les plus simples sont celles qui relient entre eux les déterminants ayant $m-2$ colonnes communes; elles ont la forme suivante

$$\begin{aligned}&(1, 2, \ldots, i-1, r, i+1, \ldots, j-1, s, j+1, \ldots, m)(1, 2, \ldots, m)\\ &=(1, 2, \ldots, i-1, r, i+1, \ldots, m)(1, 2, \ldots, j-1, s, j+1, \ldots, m)\\ &-(1, 2, \ldots, i-1, s, i+1, \ldots, m)(1, 2, \ldots, j-1, r, j+1, \ldots, m),\end{aligned}$$

où les nombres indiquent le rang des colonnes, r et s étant supérieurs à m. On peut déduire de là une autre relation plus symétrique; si l'on considère la matrice formée par les colonnes de rangs $1, 2, \ldots, m, r, s$ et que l'on désigne, en général, par Δ_{ij} le déterminant obtenu en

---

184) *Interméd. math. 7 (1900), p. 416 (Question 1727).*

185) *P. A. Mac Mahon,* Philos. Trans. London 185 A (1894), p. 146 [1893]; *T. Muir,* London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 38 (1894), p. 537; Proc. R. Soc. Edinb. 20 (1892/5), p. 300 [1892]; *A. Cayley,* id., p. 306 [1894]; *T. Muir,* id., p. 371 [1895]; 21 (1895/7), p. 220, 328 [1896]; *A. Cayley,* Papers 13, Cambridge 1897, p. 545.

186) **K. Th. Vahlen,* J. reine angew. Math. 112 (1893), p. 306. — Ces relations ont été indiquées dans un cas particulier par *G. Brunel* [Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (3) 2 (1886), p. 129 [1884]; id. (4) 2 (1891), extrait des procès-verbaux, p. VIII [1890]]; elles se rapportent aux coordonnées d'une droite dans l'espace à *n* dimensions et aux coordonnées de l'hyperboloïde.*

supprimant dans cette matrice les colonnes de rangs i et j, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Delta_{ij} & \Delta_{ir} & \Delta_{is} \\ \Delta_{hj} & \Delta_{hr} & \Delta_{hs} \\ \Delta_{kj} & \Delta_{kr} & \Delta_{ks} \end{vmatrix}$$

est égal à zéro [187]). Cette relation peut être envisagée à un autre point de vue, comme reliant des mineurs de degré m d'un déterminant de degré $m+2$.

Les déterminants tirés d'une matrice, et ayant $m-p$ colonnes communes, sont reliés par des équations de degré p par rapport à ces déterminants. Ces équations sont contenues dans la formule générale

$$(i_1, i_2, \ldots, i_m)(1, 2, \ldots, m)^{m-1} = \begin{vmatrix} (i_1, 2, \ldots, m), & (1, i_1, 3, \ldots, m), & \ldots \\ (i_2, 2, \ldots, m), & (1, i_2, 3, \ldots, m), & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (i_m, 2, \ldots, m), & (1, i_m, 3, \ldots, m), & \ldots \end{vmatrix};$$

mais elles se déduisent toutes de relations fondamentales du second degré par rapport aux déterminants; si l'on choisit $m-1$ colonnes fixes, de rangs $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$, et $m+1$ colonnes, distinctes ou non des premières, de rangs $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$, on a

$$\sum \pm (i_1, i_2, \ldots, i_m)(i_{m+1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}) = 0,$$

la somme étant étendue à toutes le permutations circulaires des nombres $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$, les signes étant partout les mêmes si m est pair, ou étant alternativement $+$ et $-$ si m est impair [188]).

A cette question se rattachent les relations qui existent entre les déterminants que l'on peut former au moyen de n^2 éléments disposés de toutes les manières possibles. Le nombre de ces déterminants est $(n^2)!$; ils se déduisent tous de l'un d'eux en effectuant une ou plusieurs fois l'opération qui consiste à permuter deux éléments d'une ligne ou d'une colonne, mais ils ne sont pas tous distincts; les relations qui existent entre ces déterminants ont été étudiées par *G. Bagnera* [189]) et par *E. Pascal* [190]). Considérons un des déterminants de n^2 éléments, et laissons fixes les $n-2$ premières colonnes; désignons par $\alpha, \alpha', \alpha''$

187) *E. Netto,* Acta math. 17 (1893), p. 199. Pour la généralisation de la formule, voir *E. Pascal,* Ann. mat. pura appl. (2) 24 (1896), p. 241.

188) *Bazin,* J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 145; *E. Pascal,* Atti R. Accad. Lincei, *Memorie,* mat. (4) 5 (1888), p. 375. Dans des cas particuliers, *J. Hunyady,* Értekezések [164]) 9 (1882), mém. n° 10; J. reine angew. Math. 94 (1883), p. 171.*

189) *Giorn. mat. (1) 25 (1887), p. 228.*

190) *Reale Ist. Lombardo, *Rendic.* (2) 29 (1896), p. 436.*

trois permutations quelconques des éléments de la $(n-1)^e$ colonne, par β, β', β'' trois permutations de ceux de la n^e, et par $\Delta_{\alpha\beta}$ le déterminant correspondant aux permutations α et β des deux dernières colonnes; entre les neuf déterminants ainsi formés existe la relation de *E. Netto* dont nous avons parlé plus haut,

$$\begin{vmatrix} \Delta_{\alpha\beta} & \Delta_{\alpha\beta'} & \Delta_{\alpha\beta''} \\ \Delta_{\alpha'\beta} & \Delta_{\alpha'\beta'} & \Delta_{\alpha'\beta''} \\ \Delta_{\alpha''\beta} & \Delta_{\alpha''\beta'} & \Delta_{\alpha''\beta''} \end{vmatrix} = 0 .$$

Il existe des relations analogues lorsqu'on permute des éléments de plus de deux colonnes.*

25. Déterminants composés formés au moyen des mineurs de plusieurs déterminants. *J. J. Sylvester* [175]) a mentionné, relativement aux déterminants composés, la propriété suivante qui est la généralisation, dans le cas de deux déterminants, du mode de développement de *P. S. Laplace.* Soient

$$A = a_{ik} , \quad B = b_{ik} , \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

deux déterminants de degré n; choisissons, dans le premier, m lignes et formons tous les sous-déterminants p_{ik} en nombre $\mu = C_n^m$, tirés de ces m lignes; désignons par p'_{ik} les sous-déterminants complémentaires correspondants. Désignons de même par q_{ik} et q'_{ik} les sous-déterminants homologues tirés de B. Les produits

$$t_{gh} = \sum_{(j)} p_{gj} q'_{hj} , \quad u_{gh} = \sum_{(i)} q_{gj} p'_{hj} ,$$

sont égaux à des déterminants de degré n constitués par m lignes d'un des déterminants et $n-m$ lignes de l'autre; la somme

$$\sum t_{gl} u_{lh}$$

est égale au produit AB si $g = h$ et est nulle si $g \gtrless h$; les déterminants $|t_{gh}|$ et $|u_{gh}|$ sont respectivement égaux à $A^{\mu-\lambda} B^{\lambda}$ et $A^{\lambda} B^{\mu-\lambda}$, μ étant égal à C_n^m et λ à C_{n-1}^{m-1}. *Cette propriété peut être étendue [191]) au cas où l'on considère $p+1$ déterminants $D_1, D_2, \ldots, D_{p+1}$ de degrés n; on partage les lignes du dernier en $p+1$ groupes renfermant respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_{p+1}$ lignes; à chacun des p premiers groupes on adjoint respectivement $n-r_1, \ldots, n-r_p$ lignes prises dans $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et au $(p+1)^e$ groupe on adjoint les $r_1 + r_2 + \cdots + r_p$ lignes restantes dans ces p déterminants; on forme ainsi $p+1$ nouveaux déterminants dont on fait le produit; la somme des produits ainsi obtenus de toutes les manières possibles est égale au produit des $p+1$ déterminants donnés.*

191) *E. Müller,* Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 28.*

Dans ses importants mémoires, *L. D. H. Picquet*[192]) a démontré la proposition de *J. J. Sylvester* dans le cas de deux déterminants; il a de plus démontré d'autres propriétés relatives aux mineurs complémentaires des déterminants $|t_{gh}|$ et $|u_{gh}|$; un mineur du premier, de degré r, est égal au mineur complémentaire de son homologue dans l'autre, multiplié par $A^{r-\lambda} B^{r+\lambda-\mu}$ où $\lambda = C_{n-1}^{m-1}$ et $\mu = C_n^m$.

L. Kronecker[193]) a donné des théorèmes relatifs aux éléments et aux mineurs du premier ordre de trois déterminants; d'autres généralisations, se rapportant à la composition des formes bilinéaires, ont été données par *C. Stéphanos*[194]); d'autres, relatives à un déterminant composé au moyen des lignes de deux déterminants, par *G. Zehfuss*[195]).

26. Rang d'un déterminant ou d'une matrice. Déterminants bordés. On appelle, d'après *G. Frobenius*[196]), *rang* d'un déterminant ou d'une matrice, le degré maximé de ses sous-déterminants non nuls; la notion de rang est importante dans la théorie des formes linéaires et des formes quadratiques. *L. Kronecker*[197]) a montré que les éléments d'un déterminant de degré n et de rang r peuvent être obtenus par composition de deux systèmes

$$b_{ik}, \quad c_{ki}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Dans une matrice carrée ou rectangulaire, un sous-déterminant de degré égal au rang, et non nul, s'appelle *déterminant principal* de la matrice; pour que tous les sous-déterminants de degré supérieur au rang soient nuls, il faut et il suffit que ceux que l'on obtient en bordant le déterminant principal d'une ligne et d'une colonne de toutes les manières possibles soient nuls[198]). *Le rang d'une matrice ne change pas lorsqu'on permute entre elles les lignes ou les colonnes,

192) C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 1118; J. Ec. polyt., cah. 45 (1878), p. 201.

193) J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 152 [1869]; Werke 1, Leipzig 1895, p. 237.

194) C. R. Acad. sc. Paris 128 (1899), p. 593; Giorn. mat. (2) 5 (1898), p. 376; J. math. pures appl. (5) 6 (1900), p. 73.

195) Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 436.

196) J. reine angew. Math. 86 (1879), p. 1; *J. J. Sylvester* [Amer. J. math. 6 (1884), p. 274] dit d'un déterminant $|a_{ik}|$, $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ de rang r, qu'il a un *degré $n-r$ de nullité*.

197) J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 152 [1869]; Sitzgsb. Akad. Berlin 1884, p. 1071; Werke 1, Leipzig 1895, p. 237; 3^1, Leipzig 1899, p. 33.

198) *A. Cayley,* Cambr. math. J. 4 (1843/5), p. 119; Papers 1, Cambr. 1889, p. 55; *Benoît,* Nouv. Ann. math. (3) 5 (1886), p. 30; *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 18 (1890/1), p. 73; *W. Ahrens,* Z. Math. Phys. 40 (1895), p. 177; 42 (1897), p. 65.

qu'on multiplie les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un facteur, et qu'on leur ajoute ceux d'une autre ligne ou d'une autre colonne. Si le rang r est inférieur au nombre m des lignes (m étant égal ou inférieur au nombre n des colonnes), il existe une même relation linéaire entre les éléments de chaque colonne; les mineurs de degré r formés au moyen des éléments de r colonnes sont proportionnels à ceux qui sont composés d'une manière analogue au moyen de r colonnes quelconques [199]).

Ces propriétés se rattachent du reste à la théorie des formes et des équations linéaires; *H. Andoyer* exprime la condition pour que le rang soit égal à r, en annulant un système particulier d'invariants et de covariants [200]).*

L'étude des *déterminants bordés* présente de nombreuses applications à la théorie des formes et à la géométrie analytique. On s'occupera plus loin du cas important où ces déterminants sont symétriques. Généralement, on considère un déterminant D, symétrique, de degré n, à éléments constants, et *on le borde* par p lignes d'éléments variables x_{ij} et p colonnes d'éléments variables y_{lk}, i et k variant de 1 à p, j et l de 1 à n, et les p^2 éléments formant le mineur complémentaire de D étant tous nuls. Le produit par D^{p-1} du déterminant de degré $n+p$ ainsi formé, peut être transformé en un déterminant de degré p dont les éléments sont des formes renfermant linéairement les différentes séries de variables x et y [201]). *Un cas important est celui où l'on borde un déterminant D symétrique avec les demi-dérivées de formes bilinéaires; lorsque D est nul, son rang intervient dans la valeur du déterminant bordé; en particulier, si $p = 1$, et que l'on borde un déterminant nul D avec une ligne d'éléments x_i et une colonne d'éléments y_k, le déterminant obtenu est décomposable en un produit de deux formes linéaires, l'une renfermant les variables x, l'autre les variables y [202]).*

27. Déterminants symétriques. On dit qu'un déterminant est *symétrique*, ou, d'une façon plus précise, *unisymétrique* et quelquefois

199) *A. Capelli* e *G. Garbieri,* Corso di analisi algebrica 1, Padoue 1886, p. 398.*

200) *G. Frobenius,* J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 290; *H. Andoyer,* Leçons sur la théorie des formes 1, Paris 1900, p. 49.*

201) *C. Le Paige,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1880, p. 125; Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 128; *M. Arnaldi,* Giorn. mat. (2) 3 (1896), p. 209.

202) *K. Weierstrass,* Monatsb. Akad. Berlin 1858, p. 211; Werke 1, Berlin 1894, p. 237; *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 319; *G. Frobenius,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 241, 407.

axisymétrique, si les éléments symétriquement placés par rapport à la diagonale principale sont égaux, c'est-à-dire si l'on a constamment

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

*Le nombre $\psi(n)$ des termes distincts du développement d'un déterminant symétrique satisfait à la relation de récurrence [203])

$$\psi(n) = n\psi(n-1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\psi(n-3),$$

avec

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(1) = 1, \quad \psi(2) = 2.^*$$

Les sous-déterminants du premier ordre d'un déterminant symétrique forment un système symétrique; toute puissance d'un déterminant symétrique, toute puissance paire d'un déterminant quelconque peut être mise sous la forme d'un déterminant symétrique [204]); le produit d'un déterminant symétrique par le carré d'un déterminant quelconque de même degré peut se mettre sous forme d'un déterminant symétrique [205]).

Entre les sous-déterminants de même degré d'un déterminant symétrique existent des relations linéaires déjà entrevues par *H. Grassmann* [206]) et mises en lumière par *L. Kronecker* [207]). *C. Runge* a montré [208]) que les relations de *L. Kronecker* sont les seules qui existent; ce sont les relations

$$|a_{gh}| = \sum_{(r)} |a_{ik}|, \qquad \begin{aligned} &g = 1, 2, \ldots, m, \\ &h = m+1, m+2, \ldots, 2m, \\ &r = m+1, m+2, \ldots, 2m, \\ &i = 1, 2, \ldots, m-1, r, \\ &k = m+1, m+2, \ldots, r-1, m, r+1, \ldots, 2m, \end{aligned}$$

où $2m$ a une valeur quelconque égale ou inférieure à n. Elles ont été généralisées par *T. Muir* et *W. H. Metzler* [183]) qui ont, en outre, considéré le cas de déterminants quelconques (n° 24).

L. Kronecker a composé les systèmes a_{ik} symétriques, au moyen d'autres plus simples (n° 22); il en a déduit la manière dont un

203) **J. J. Weyrauch*, J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 273; *A. Cayley,* Monthly Notice astron. Soc. 34 (1873/74), p. 303, 335; Papers 9, Cambridge 1896, p. 185; *G. Salmon,* Alg. [188]), p. 45; trad. *O. Chemin,* p. 66.*

204) *H. Seeliger,* Z. Math. Phys. 20 (1875), p. 467.

205) *L. O. Hesse,* J. reine angew. Math. 49 (1855), p. 246 [1853]; Werke, Munich 1897, p. 322. Généralisation par *T. Muir,* Amer. J. math. 4 (1881), p. 273. Historique par *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 24 (1901/3), p. 555.

206) *H. Grassmann,* Ausdehn. [130]) 1862, p. 131; Werke 1^2, p. 136.

207) *L. Kronecker,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1882, p. 821; Werke 2, Leipzig 1897, p. 391; voir encore *T. Muir,* London Edinb. Dublin philos. mag. (6) 3 (1902), p. 416.

208) J. reine angew. Math. 93 (1882), p. 319.

domaine représenté par un déterminant symétrique est divisé en domaines partiels par les mineurs principaux de ce déterminant [209]).

Le *rang* d'un déterminant symétrique joue un grand rôle dans la théorie des formes quadratiques et dans celle de l'équation en s, ou équation séculaire dont on parlera plus loin (n° **30**). Si r est le rang d'un déterminant symétrique, il existe au moins un mineur principal de degré r non nul; lorsque les coefficients sont réels, tous les mineurs principaux de degré r non nuls ont le même signe. On déduit de là les conditions pour que le rang soit égal à r [210]).

Lorsqu'un déterminant symétrique de degré n est nul, celui que l'on obtient en le bordant symétriquement par $u_1, u_2, \ldots u_n$, 0, est carré parfait. Cette propriété, déjà vue par *A. L. Cauchy* [211]), intervient dans l'étude des formes adjointes et a été généralisée par *K. Weierstrass* et *G. Darboux* [212]).

28. **Déterminants centrosymétriques, orthosymétriques. Circulantes. Généralisation.** Tout déterminant de degré n, *centrosymétrique*, c'est à dire symétrique par rapport à son centre, est tel que l'on a constamment

$$a_{ik} = a_{n+1-i,\, n+1-k};$$

un tel déterminant est égal [213]) au produit de deux déterminants de degrés $\frac{n}{2}$ si n est pair, de degrés $\frac{n-1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ si n est impair. *Entre les sous-déterminants d'un déterminant centrosymétrique existent des relations analogues à celles de *L. Kronecker* ou de *H. Grassmann* [214]).*

On dit qu'un déterminant symétrique est *orthosymétrique* si les éléments de chaque rangée parallèle à la *seconde diagonale*, c'est-à-

209) *L. Kronecker,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1889, p. 349, 479, 603; Werke, 3^1, Leipzig 1899, p. 295/368; voir aussi *J. N. Hazzidakis,* J. reine angew. Math. 91 (1881), p. 238.

210) *S. Gundelfinger,* J. reine angew. Math. 91 (1881), p. 221; *L. O. Hesse,* Vorles. über analyt. Geom. des Raumes, 3e éd. Leipzig 1876, p. 460; **F. Walecki,* Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 401; *Benoît,* id. (3) 5 (1886), p. 30*; *G. Frobenius,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 245.

211) *A. L. Cauchy,* J. Ec. polyt., cah. 17 (1815), p. 29 [1812]; Œuvres (2) 1, Paris 1905, sous presse.

212) *K. Weierstrass,* Monatsb. Akad. Berlin 1868, p. 316; Werke 2, Berlin 1895, p. 25; *G. Darboux,* J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 347; voir aussi *L. O. Hesse,* Analyt. Geom. [210]), p. 449.

213) *G. Zehfuss,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 436.

214) **T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 15 (1887/8), p. 96.*

dire à la diagonale perpendiculaire à la diagonale principale, sont égaux entre eux; on écrit alors a_{i+k-2} à la place de a_{ik}.

*H. Hankel[215]) a exprimé un tel déterminant au moyen des différences successives de ses éléments; si l'on pose

$$\Delta_h^1 = a_h - a_{h-1}, \quad \Delta_h^2 = \Delta_h^1 - \Delta_{h-1}^1, \quad \Delta_h^3 = \Delta_h^2 - \Delta_{h-1}^2, \ \ldots$$

on a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1^1 & \Delta_2^2 & \ldots \Delta_{n-1}^{n-1} \\ \Delta_1^1 & \Delta_2^2 & \Delta_3^3 & \ldots \Delta_n^n \\ \Delta_2^2 & \Delta_3^3 & \Delta_4^4 & \ldots \Delta_{n+1}^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1}^{n-1} & \Delta_n^n & \Delta_{n+1}^{n+1} & \ldots \Delta_{2n-2}^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Si les différences d'ordre n sont nulles, le déterminant est égal à $\pm(\Delta_{n-1}^{n-1})^n$; si celles d'ordre $< n$ sont nulles, le déterminant est nul.

La valeur des déterminants orthosymétriques et le nombre qui exprime leur rang jouent un rôle important dans la théorie des invariants des formes binaires et dans la réduction de ces formes à la forme canonique particulière constituée par une somme de puissances[216]).*

Un cas particulier est celui où les éléments d'un déterminant orthosymétrique sont tels que l'on ait

$$a_{n+i} = a_i \;^{217});$$

en effectuant un changement de lignes, on remplace un tel déterminant par un autre jouissant de la propriété d'être symétrique par rapport à la seconde diagonale, et on lui donne la forme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 \ldots a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_n & a_1 \end{vmatrix};$$

un déterminant qui a cette forme porte le nom de *circulante,* de

215) *Diss. Leipzig 1861, éd. Göttingue 1861.*

216) *C. G. J. Jacobi,* Werke 3, Berlin 1884, p. 297; J. reine angew. Math. 15 (1836), p. 101; *W. Spottiswoode*, id. 51 (1856), p. 328 [1853]; *A. Cayley,* id. 54 (1857), p. 48 [1856]; Papers 4, Cambridge 1891, p. 43; *L. Kronecker,* Monatsb. Akad. Berlin 1881, p. 560; J. reine angew. Math. 99 (1886), p. 346; Werke 2, Leipzig 1897, p. 146; 3[1], Leipzig 1899, p. 170.

217) *T. Muir* dit. d'un tel déterminant qu'il est *persymétrique* [Quart. J.

déterminant cyclique, quelquefois de déterminant *négativement orthosymétrique*, ou *doublement orthosymétrique.* La propriété fondamentale d'une circulante est d'être décomposable en un produit de n facteurs complexes de la forme

$$a_1 + \omega^{\alpha} a_2 + \omega^{2\alpha} a_3 + \cdots + \omega^{(n-1)\alpha} a_n, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

ω étant une racine primitive n^e de l'unité. Cette propriété a été énoncée par *W. Spottiswoode*[218]), généralisée par *M. Nöther*[219]) et étendue par *E. Schulze*[220]) au cas d'un déterminant cyclique dont les éléments sont les nombres complexes formés au moyen de n unités au sens de *K. Weierstrass* et de *R. Dedekind* (I 5).

$_*$*T. Muir*[221]) a montré qu'une circulante de degré n est décomposable en facteurs rationnels et entiers par rapport aux éléments, chaque facteur correspondant à un facteur entier à coefficients entiers de la décomposition de $x^n - 1$.

Aux déterminants cycliques se rattachent les déterminants *cycliques gauches* qui sont aussi symétriques par rapport à la seconde diagonale, mais ont la forme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 \ldots & -a_n & a_1 \end{vmatrix}.$$

Un déterminant cyclique ou cyclique gauche, de degré rm, peut se mettre sous la forme d'un déterminant de même nature de degré m, chaque élément de ce dernier étant une somme de m^{r-1} mineurs de degré r du déterminant primitif[222]).*

---

pure appl. math. 18 (1882), p. 261]; *G. Frobenius*[210]), p. 253, dit qu'il est le déterminant d'un système *récurrent.*

218) J. reine angew. Math. 51 (1856), p. 375. Voir encore *L. Cremona,* Ann. sc. mat. fis. 7 (1856), p. 99; Nouv. Ann. math. (1) 19 (1860), p. 151; *C. Souillart* id. p. 320; *G. Zehfuss,* Z. Math. Phys. 7 (1862), p. 439; *M. A. Stern,* J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 374; *A. Minozzi,* Giorn. mat. (1) 16 (1878), p. 148; *J. W. L. Glaisher,* Quart. J. pure appl. math. 15 (1878), p. 347; 16 (1879), p. 31; *K. Weihrauch,* Z. Math. Phys. 26 (1881), p. 64, 133.

219) Math. Ann. 16 (1880), p. 551 [1879].

220) Z. Math. Phys. 42 (1897), p. 313; 44 (1899), p. 167.

221) $_*$Proc. R. Soc. Edinb. 21 (1895/7), p. 369 [1896].*

222) $_*$*J. W. L. Glaisher,* Quart. J. pure appl. math. 16 (1879), p. 31; *T. Muir,* id. 18 (1882), p. 166; *G. Torelli,* Rendic. Accad. Napoli (1) 21 (1882), p. 83.*

Le produit de deux déterminants cycliques de même degré peut être mis sous forme d'un déterminant cyclique du même degré que les premiers [223]). *R. F. Scott* [224]) a montré qu'un déterminant cyclique de degré $2m$ est le produit d'un déterminant cyclique et d'un déterminant cyclique gauche de degrés m. *G. Torelli* [222]) a généralisé et considéré le cas d'un déterminant de degré rm.

*Une classe particulière de déterminants symétriques analogues aux circulantes est constituée par les déterminants de degré 2^μ jouissant de la propriété suivante: la matrice de degré 2^μ formée par les éléments, se partage en quatre matrices deux à deux égales et symétriques par rapport au centre, en sorte qu'elle se présente sous la forme

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$$

où chacun des symboles A, B représente une matrice qui jouit de la même propriété, et ainsi de suite [225]). Un déterminant de degré 2^μ de la classe considérée est égal au produit de 2^μ facteurs linéaires par rapport aux éléments; par exemple, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ \beta = a_1 + a_2 - a_3 - a_4, \\ \gamma = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \\ \delta = a_1 - a_2 - a_3 + a_4; \end{cases}$$

cette propriété est analogue à celle des circulantes. Les mineurs du premier ordre relatifs à deux éléments égaux sont égaux, et le déterminant adjoint (n° **23**) est analogue au déterminant primitif; les mineurs complémentaires de degré $2^{\mu-1}$ sont égaux au signe près. La définition et les propriétés des déterminants qui précèdent se généralisent au cas de déterminants dont le degré est un produit de facteurs quelconques $n_1, n_2, \ldots, n_\mu$ égaux, ou non, à 2.

Les déterminants de la classe considérée rentrent, comme les circulantes, dans la catégorie des déterminants que l'on peut former en prenant n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, leur appliquant les substitutions d'un groupe dont l'ordre est égal au degré, et constituant les lignes par les n permutations résultant de ces substitutions.

223) *C. Souillart*, Nouv. Ann. math. (1) 19 (1860), p. 320.*

224) Quart. J. pure appl. math. 17 (1881), p. 129.

225) *A. Puchta*, Denkschr. Akad. Wien, math. 38 II (1878), p. 215 [1877]; 44 II (1882), p. 277 [1881]; *M. Nöther*, Math. Ann. 16 (1880), p. 322, 551 [1879]; *T. Muir* [221]).*

Dans certaines questions de Physique interviennent des déterminants de degré $2n$ dont les éléments satisfont aux conditions

$$a_{2i,\,2j-1} = a_{2i-1,\,2j}, \qquad a_{2i,\,2j} = -a_{2i-1,\,2j-1};$$

de tels déterminants peuvent être mis sous la forme d'une somme de deux carrés [226]).*

29. Déterminants gauches. Pfaffiens. Un déterminant est dit *gauche* si l'on a

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad (i \neq k).$$

Un déterminant gauche pour lequel on a, pour chaque indice i,

$$a_{ii} = 0$$

est dit *symétrique gauche* [227]).

Un déterminant symétrique gauche de degré impair est nul; son déterminant adjoint (nº **23**) est symétrique. Un déterminant symétrique gauche de degré n pair est le carré parfait d'une fonction entière de ses éléments; son adjoint est aussi symétrique gauche. La fonction entière des éléments qui constitue la racine carrée d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair se compose de $1.\,3.\,5 \ldots (n-1)$ termes; chacun de ces termes est le produit de $\frac{n}{2}$ éléments dont les indices sont tous distincts; elle renferme en particulier le terme $a_{12} a_{34} \ldots a_{n-1,\,n}$ et l'on convient de faire précéder ce terme du signe $+$; le signe de tous les autres termes est alors déterminé.

La racine carrée d'un déterminant symétrique gauche est désignée sous le nom de *pfaffien*; *A. Cayley* [228]) la représente par la notation

$$(1, 2, \ldots, n);$$

---

226) **W. Voigt,* Ann. Phys. und Chemie (2) 16 (1882), p. 314; *P. Drude,* Nachr. Ges. Gött. 1887, p. 118; *H. R. Baltzer,* id. p. 389; *L. Gegenbauer,* Sitzgsb. Akad. Wien 96 IIª (1887), p. 5, 489.*

227) Les déterminants symétriques gauches se sont présentés à *C. G. J. Jacobi* dans le probleme de Pfaff [J. reine angew. Math. 2 (1827), p. 354; 29 (1845), p. 236; Werke 4, Berlin 1886, p. 26, 420]; *C. G. J. Jacobi* remarque que des déterminants du même type s'étaient déjà présentés à *J. L. Lagrange* et à *S. D. Poisson.* Voir aussi *A. Cayley* [J. reine angew. Math. 32 (1846), p. 119; 38 (1849), p. 93/6 [1847]; Papers 1, Cambridge 1889, p. 332, 410/3] auquel sont dus les noms de *déterminant gauche* et de *déterminant symétrique gauche; H. Grassmann,* Ausdehn. [130]) 1862, p. 347; Werke 1², p. 341, et la remarque de la p. 471; *W. Veltmann,* Z. Math Phys. 16 (1871), p. 516; *F. Mertens,* J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 207. *Pour l'historique, consulter *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 23 (1899/1901), p. 181.*

228) *A. Cayley,* J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 93 [1847]; 50 (1855), p. 299 [1854]; Cambr. Dublin math. J. 7 (1852), p. 40; Papers 1, Cambridge 1889, p. 410; 2, Cambr. 1889, p. 16, 202; *W. Scheibner* [Ber. Ges. Lpz. 11 (1859), math. p. 151] dit *semi-déterminant* (Halbdeterminante) au lieu de *pfaffien.*

*elle se calcule de proche en proche par la formule de récurrence

$$(1, 2, \cdots, n) = (1, 2)(3, 4, \cdots, n) + (1, 3)(4, 5, \cdots, n, 2) + \cdots + (1, n)(2, 3, \cdots, n-1),$$

où les symboles (1, 2), (1, 3), ... désignent a_{12}, a_{13}, ... Ainsi l'on a

$$(1, 2, 3, 4) = (1, 2)(3, 4) + (1, 3)(4, 2) + (1, 4)(2, 3) = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}.$$

T. Muir[227]) écrit un pfaffien sous la forme d'un demi-déterminant; pour $n = 4$ par exemple, il l'écrit

$$\left.\begin{matrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{matrix}\right| = af - be + cd.$$

Un mineur, non principal, de degré $n-1$, d'un déterminant symétrique gauche de degré n pair, est égal au produit du pfaffien $(1, 2, \ldots, n)$ par un autre pfaffien relatif à $n-2$. éléments.* Le carré d'un déterminant quelconque D de degré pair, peut être mis sous la forme d'un déterminant symétrique gauche: le déterminant D peut alors être mis sous la forme d'un pfaffien[229]). Tout déterminant symétrique gauche, bordé symétriquement ou non, est le produit de deux pfaffiens[230]). *T. Muir* a appliqué ce théorème au développement d'un déterminant gauche non symétrique; il a aussi donné le nombre des termes non semblables d'un tel déterminant[231]); ce nombre est

$$1 + C_n^2 + \frac{3(1+3)}{2} C_n^4 + \frac{3 \cdot 5 (1 + 3 \cdot 5)}{2} C_n^6 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 (1 + 3 \cdot 5 \cdot 7)}{2} C_n^8 + \cdots$$

Le rang d'un déterminant symétrique gauche est toujours pair; si tous les mineurs principaux de degré $2r$ sont nuls, tous ceux de degré $2r-1$ le sont aussi. Un déterminant symétrique gauche à éléments réels possède en commun avec les déterminants symétriques la propriété suivante: si le déterminant est nul ainsi que la somme de ses mineurs diagonaux du premier ordre, tous les mineurs du premier ordre sont nuls. Cette propriété se généralise à des mineurs d'ordre supérieur[232]).*

---

229) *F. Brioschi,* J. reine angew. Math. 52 (1856), p. 133 [1855]; *T. Muir,* London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 12 (1881), p. 391.

230) *A. Cayley,* J. reine angew. Math. 55 (1858), p. 277 [1857]; Papers 4, Cambridge 1891, p. 72.

231) *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 21 (1895/7), p. 342 [1896]. Voir déjà *A. Cunningham,* Quart. J. science (2) 4 (1874), p. 212.*

232) *G. Frobenius,* J. reine angew. Math. 82 (1877), p. 242 [1876]. Voir aussi *H. Grassmann,* Ausdehn.[130]) 1862, p. 351; Werke 1², p. 345, et la remarque

Si l'on considère un déterminant gauche quelconque, et si on le développe comme une fonction entière des éléments de sa diagonale principale, les coefficients du développement sont des sommes de déterminants symétriques gauches. *A. Cayley*[230]) considère le cas où les éléments de la diagonale principale sont égaux à l'unité.

$_*$*J. J. Sylvester*[233]) considère les déterminants doublement gauches, c'est-à-dire gauches par rapport aux deux diagonales; pour qu'un tel déterminant ne soit pas nul, il faut que son degré soit de la forme $4n$; sa racine carrée est une fonction entière dont le nombre des termes est égal à $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (4n-2)\psi(n)$, la fonction $\psi(n)$ étant définie par les conditions de récurrence

$$\psi(n) = (4n-3)\psi(n-1) - 2n\psi(n-2)$$

avec

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(1) = 1.$$

G. Brunel[234]) a appliqué les déterminants symétriques gauches et les pfaffiens au problème d'*Analysis situs* qui concerne les réseaux et les lignes passant par leurs sommets, ainsi qu'à la marche du cavalier sur l'échiquier.*

30. Equation séculaire. Généralisation. Etant donné un déterminant $|a_{ik}|$, retranchons x des éléments de la diagonale principale et égalons à zéro le résultat; nous formerons ainsi une équation que l'on rencontre souvent dans les applications,

$$f(x) = \left| a_{ik} - \delta_{ik} x \right| = 0, \qquad \text{où } \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k; \end{cases}$$

le degré de cette équation est égal à celui du déterminant.

Le cas le plus important est celui où le déterminant est symétrique; l'équation $f(x) = 0$ s'appelle dans ce cas *équation séculaire;* elle a été rencontrée par *P. S. Laplace* dans une question d'Astronomie: la détermination des inégalités séculaires des mouvements des planètes; elle a de nombreuses applications en Géométrie analytique, où elle est connue sous le nom d'équation en S, parce qu'on y écrit généralement S au lieu de x. L'équation séculaire a toutes ses racines réelles. Elle a fait l'objet de nombreux travaux[235]).

---

de la p. 490; *E. von Weber,* Vorles. über das *Pfaff*'sche Problem, Leipzig 1900, p. 30; *C. Russjan (Roussiane),* Rozprawy Akad. Umiejętności 1903, sous presse; Bull. intern. Acad. sc. Cracovie 1903, p. 1.*

233) $_*$C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 24, 497.*

234) $_*$Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (4) 5 (1895), p. 165.*

235) *P. S. Laplace,* Hist. Acad. sc. Paris 1772 II, M. p. 363; Méc. céleste 1, Paris an VII, p. 299; Œuvres 8, Paris 1891, p. 464; *J. L. Lagrange,* Nouv. Mém. Acad. Berlin 4 (1773) éd. 1775, p. 108; Œuvres 3, Paris 1869, p. 603; *A. L. Cauchy,*

Un généralisation de *Ch. Hermite*[236]) se rapporte au cas où les éléments a_{ik} et a_{ki} sont imaginaires conjugués.

T. Muir[237]) a considéré le cas où les éléments a_{ik} sont réels et quelconques: les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes réelles si, pour i et k variables de 2 à n, on a constamment

$$a_{1i}a_{ik}a_{k1} = a_{i1}a_{ki}a_{1k}, \quad a_{1i}a_{i1} > 0;$$

elles sont toutes imaginaires (pour n impair il existe en plus une racine nulle) si l'on a constamment, pour i et k variables de 2 à n,

$$a_{1i}a_{ik}a_{k1} = -a_{i1}a_{ki}a_{1k}, \quad a_{1i}a_{i1} < 0, \quad a_{ii} = 0.$$

Le cas où les éléments a_{ik} forment un système orthogonal est important, nous le considérerons dans le numéro suivant.

*La généralisation de l'équation séculaire se présente lorsqu'on considère deux déterminants $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ de même degré, et le déterminant $|\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}|$ dont les éléments sont les mêmes fonctions linéaires et homogènes des éléments correspondants des deux premiers. *F. Siacci*[238]) a étudié le déterminant ainsi composé; il a montré qu'il peut être transformé en un produit de trois facteurs dont deux sont les deux premiers déterminants et dont le troisième a la forme $|\mu A_{ik} + \lambda B_{ik}|$; il peut être aussi transformé en un autre déterminant ne contenant λ ou μ que dans les éléments de la diagonale principale.

A un autre point de vue, l'équation séculaire relative à un déterminant quelconque, écrite sous la forme $|a_{ik} - \lambda\delta_{ik}| = 0$, avec λ comme inconnue, s'est présentée à *J. J. Sylvester*[239]) dans la théorie des puissances et des racines de substitutions linéaires. Etant donnée

---

Exercices math. 4, Paris 1829, p. 140; Œuvres (2) 9, Paris 1891, p. 174; *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 16; 30 (1846), p. 46 [1844]; Werke 3, Berlin 1884, p. 209, 461; *E. E. Kummer*, J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 268; *C. W. Borchardt*, id. 30 (1846), p. 38 [1845]; J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 50; Werke, Berlin 1888, p. 5; *J. J. Sylvester*, London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 4 (1852), p. 138; *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 60 (1862), p. 305; Werke, Munich 1897, p. 497; *O. Henrici*, J. reine angew. Math. 64 (1865), p. 187; *G. Bauer*, id. 71 (1870), p. 46 [1868]; *J. J. Sylvester*, id. 88 (1880), p. 6 [1878]; *F. Walecki*[210]); *L. O. Hesse*, Analyt. Geom.[210]), p. 247; *T. Muir*, Amer. J. math. 19 (1897), p. 312; *W. H. Metzler*, id. 21 (1899), p. 367 [1898]. Historique par *T. Muir*, Proc. R. Soc. Edinb. 24 (1901/3), p. 244, 555.

236) C. R. Acad. sc. Paris 41 (1855), p. 181; J. reine angew. Math. 52 (1856), p. 39 [1854].

237) Amer. J. math. 19 (1897), p. 312.

238) *Atti Accad. Torino 7 (1871/2), p. 772; Ann. mat. pura appl. (2) 5 (1871/3), p. 296. Voir aussi *O. Niccoletti*, Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 11 II (1902), p. 124.*

239) *C. R. Acad. sc. Paris 94 (1882), p. 55, 396.*

une matrice carrée $\|a_{ik}\|$, on peut considérer ses éléments comme coefficients d'une substitution linéaire; la matrice dont les éléments sont les coefficients de la puissance i^e de cette substitution, a pour déterminant la puissance i^e du déterminant de la première. Inversement, on peut se proposer de trouver les éléments d'une substitution dont la puissance i^e soit une substitution donnée: ces éléments constituent une matrice qui est dite la racine i^e de la matrice de cette substitution. Plus généralement, on peut trouver une matrice qui soit la μ^e puissance d'une matrice donnée, μ étant un nombre fractionnaire quelconque. *J. J. Sylvester* démontre que les racines de l'équation

$$f(\lambda) = |a_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0,$$

qu'il appelle *racines lambdaïques* relatives à la matrice cherchée, sont les puissances μ^{es} des racines lambdaïques de la matrice donnée.

Le cas le plus intéressant est celui où la matrice donnée a ses éléments diagonaux égaux à l'unité, et tous les autres nuls; elle est dite *matrice unitaire.* Lorsqu'on cherche la racine i^e de cette matrice et que i est supérieur au degré n de la matrice, on obtient une solution en formant une matrice dont les racines lambdaïques sont n racines i^{es} distinctes de l'unité; mais cette solution n'est pas la seule et il en existe d'autres quels que soient i et n; il y a autant de genres de racines i^{es} qu'il y a de partitions indéfinies du nombre n.

Soient $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ des nombres entiers tels que $\sum \nu_h = n$, $(h = 1, 2, \ldots, k)$; soient $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ des racines i^{es} de l'unité en nombre k et soit M la matrice cherchée $\|a_{ij}\|$. On considérera les déterminants mineurs de $|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}|$ de degrés respectifs $n - \nu_1 + 1, \ldots,$ $n - \nu_k + 1$, et on choisira M de manière que ϱ_1 soit racine de chaque mineur du premier de ces systèmes, que ϱ_2 soit racine de chaque mineur du $2^e, \ldots,$ que ϱ_k soit racine de chaque mineur du k^e; il restera $2\sum \nu_i \nu_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k; i \neq j)$ constantes arbitraires dans la détermination de M.

Un autre cas intéressant est celui où tous les éléments d'une matrice sont nuls; une telle matrice est dite *matrice zéroïdale.*

A la formation des puissances entières où fractionnaires des matrices, se rattache la formation de leurs produits ou de leurs quotients, ainsi que la résolution d'équations fonctionnelles, telles que $MX = XM'$, où M, M' sont des matrices données et X une matrice inconnue. Ces questions sont plutôt du domaine de la théorie des substitutions [240]).*

240) **J. J. Sylvester,* C. R. Acad. sc. Paris 99 (1884), p. 67, 115, 117, 409, 432, 473, 502, 527, 555, 621; *Ed. Weyr,* id. 100 (1885), p. 787, 966; *G. Brunel,*

La recherche des matrices à coefficients entiers dont le déterminant a une valeur donnée se rattache à la théorie des congruences linéaires et à l'Analyse indéterminée du premier degré [241]).

31. Déterminants de systèmes orthogonaux. Maximé d'un déterminant. Un système *orthogonal* est celui qui, par sa composition avec lui-même, fournit le système-unité (n° 22). Le carré du déterminant d'un système orthogonal a ses éléments diagonaux égaux à l'unité, et ses autres éléments nuls. Le déterminant lui-même est égal à ± 1 et chacun de ses mineurs ne diffère de son complémentaire que par un facteur égal à la valeur du déterminant.

L'étude des déterminants orthogonaux est intimement liée à celle des substitutions orthogonales dont il sera question dans un autre article. *Mentionnons cependant la manière générale dont *A. Cayley* a formé les éléments d'un système orthogonal de déterminant égal à $+1$ au moyen de ceux d'un déterminant gauche. On considère un déterminant $B = |b_{ik}|$ dont les éléments diagonaux sont égaux à l'unité et dont les autres sont tels que l'on ait $b_{ik} = -b_{ki}$; si B_{ik} est le mineur de B relatif à b_{ik}, on pose

$$a_{ii} = 2\frac{B_{ii}}{B} - 1, \qquad a_{ik} = \frac{2B_{ik}}{B},$$

et le système (a_{ik}) est un système orthogonal de déterminant $+1$ [242]). Dans l'étude des substitutions orthogonales, la recherche des éléments identiques à leurs transformés dépend de la résolution de l'équation

$$f(\varrho) = |a_{ik} - \varrho\,\delta_{ik}| = 0,$$

analogue à l'équation séculaire. Cette équation est réciproque [243]). Si le déterminant $|a_{ik}|$ est égal à $+1$, l'équation $f(\varrho) = 0$, pour n pair, n'a aucune racine réelle; pour n impair, elle a une seule racine réelle égale à -1. Si le déterminant $|a_{ik}|$ est égal à -1, pour n pair l'équation $f(\varrho) = 0$ a deux racines réelles égales à ± 1, et pour n impair elle a une seule racine réelle égale à $+1$.

---

id. 106 (1888), p. 467; *W. H. Metzler,* Amer. J. math. 14 (1892), p. 326; 15 (1893), p. 274; *H. Taber,* id. 16 (1894), p. 123; *L. Autonne,* Nouv. Ann. math. (4) 3 (1903), p. 57.*

241) *Ch. Méray,* Ann. Ec. Norm. (2) 12 (1883), p. 89; *T. J. Stieltjes,* Ann. Fac. sc. Toulouse 4 (1890), mém. n° 18, p. 49.

242) **A. Cayley,* J. reine angew. Math. 32 (1846), p. 119; Papers 1, Cambridge 1889, p. 332; *L. Kronecker,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1890, p. 525, 601, 691, 873, 1063, 1081; Werke 3¹, Leipzig 1899, p. 371/473; dans ces communications de *L. Kronecker,* il est, en outre, question de systèmes orthogonaux et symétriques.*

243) **F. Brioschi,* J. math. pures appl. (1) 19 (1854), p. 253; *F. Faà di Bruno,* id. p. 304.*

Les substitutions orthogonales ne sont qu'un cas particulier des substitutions qui transforment en elles-mêmes une forme quadratique et elles ont donné lieu à de nombreux travaux dont nous ne mentionnons que ceux qui se rattachent à la théorie des déterminants. *Ch. Hermite*[244]) a étendu le théorème de *F. Brioschi* au cas de la transformation d'une forme quadratique quelconque à 3 variables; *A. Voss*[245]), dans un important article, a examiné le cas plus général des substitutions linéaires homogènes transformant un nombre quelconque n de variables x_i en un même nombre de variables y_i et satisfaisant identiquement à la condition

$$\sum y_i^2 = m \sum x_i^2, \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots\ n).$$

Si (a_{ik}) est le système des coefficients d'une telle substitution et D le déterminant $|a_{ik}|$ de ce système, D est égal à $\pm\sqrt{m^n}$. Il y a d'ailleurs lieu de distinguer le cas où $D = +\sqrt{m^n}$ (*substitutions propres*) de celui où $D = -\sqrt{m^n}$ (*substitutions impropres*). Le théorème de *F. Brioschi* s'étend à ce cas général, la propriété des racines d'être réciproques étant remplacée par cette autre propriété que les racines ont deux à deux un produit égal à m. Le déterminant symétrique gauche dont les éléments sont égaux à $a_{ik} - a_{ki}$ est nul identiquement pour n impair; pour n pair, il s'annule également ainsi que ses mineurs du premier ordre lorsque la substitution est impropre. Les propriétés des mineurs du déterminant $a_{ik} \pm \delta_{ik}\sqrt{m}|$ permettent de retrouver les formules de *A. Cayley* et de voir que ce sont les plus générales pour les substitutions propres.

Etant donnés deux déterminants de systèmes orthogonaux

$$D = \ a_{ik}\ , \qquad D' = |\,b_{ik}\ ,$$

dont les valeurs ε et ε' sont égales à $+1$ ou à -1, on peut former, au moyen de leurs éléments, un nouveau déterminant

$$D'' = |\,\lambda_k a_{ik} + \mu_k b_{ik}\,|.$$

F. Siacci[238]) a démontré, relativement à ce déterminant D″, le théorème suivant: Quels que soient les valeurs des coefficients λ_k et μ_k, si l'on change λ_k en μ_k pour toutes les valeurs de k, la valeur nouvelle de D″ est égale à l'ancienne multipliée par $\varepsilon\varepsilon'$. En faisant tous les nombres λ_k égaux à $+1$ ou tous ces nombres λ_k égaux à -1 et opérant de même sur les nombres μ_k, on en déduit que si D et D′ ont des valeurs symétriques (I 3, 5), le déterminant $a_{ik} + b_{ik}|$ est nul; si D

244) **Ch. Hermite,* Cambr. Dublin math. J. 9 (1854), p. 63; J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 312, 318 [1853]; 78 (1874), p. 325; voir aussi *J. Rosanes,* id. 80 (1875), p. 52 [1874]; *G. Frobenius,* id. 84 (1878), p. 1.*

245) *Math. Ann. 13 (1878), p. 320 [1877]*

et D' ont la même valeur et sont de degré impair, le déterminant $|a_{ik}-b_{ik}|$ est également nul.

Si D et D' ont la valeur $+1$ et si le déterminant $|a_{ik}+b_{ik}|$ est nul, tous ses mineurs de degré $n-1$ sont aussi nuls[246]).

Dans le cas particulier où le système $|b_{ik}|$ se réduit au système-unité, le déterminant $|a_{ik}+b_{ik}|$ se réduit au déterminant R obtenu en ajoutant 1 aux éléments a_{ii} de D; soit R_{ii} le mineur de R complémentaire de $a_{ii}+1$, et soit $\varepsilon = \pm 1$ la valeur de D; *F. Siacci*[238]) et *E. Netto*[247]) ont montré que l'on a

$$R = (1+\varepsilon)R_{ii},$$

de sorte que si $\varepsilon = +1$, on a $R_{ii} = \frac{1}{2}R$, tandis que si $\varepsilon = -1$, on a $R = 0$. *E. Netto*[247]) a, de plus, obtenu le résultat général suivant: Si $\mathrm{D} = +1$, les premiers des sous-déterminants de R qui ne sont pas tous nuls sont de degré $n-2m$; si $\mathrm{D} = -1$, ils sont de degré $n-2m-1$; m est dans les deux cas un nombre naturel ou nul. *A. Voss*[245]) a énoncé des propriétés analogues pour les mineurs dans le cas général.*

A l'étude des systèmes orthogonaux se rattache le problème de la recherche de la valeur maximée (I 1, note 164) que peut avoir la valeur absolue d'un déterminant dont les éléments sont, en valeur absolue, égaux ou inférieurs à un nombre donné. On peut supposer que ce dernier nombre est égal à $+1$, et résoudre le problème lorsque les éléments du déterminant sont réels ou imaginaires. Si l'on désigne par a'_{ik} le nombre conjugué de a_{ik} et si l'on pose

$$s_{ik} = a_{i1}a'_{k1} + a_{i2}a'_{k2} + \cdots + a_{in}a'_{kn},$$

on démontre que la valeur absolue maximée du déterminant $|s_{ik}|$ est égale à $n^{\frac{1}{2}n}$; pour que cette valeur maximée soit atteinte, il est nécessaire et suffisant que les quantités s_{ik} soient nulles pour $i \neq k$, et que les valeurs absolues des éléments a_{ik} soient égales à l'unité. Lorsque ces conditions sont remplies, *J. J. Sylvester*[248]) dit que le système a_{ik} est *orthogonal inverse.*

J. Hadamard[249]) s'est occupé de cette question et a complété les

---

246) **T. J. Stieltjes,* Acta math. 6 (1885), p. 319; *E. Netto,* id. 9 (1886/7), p. 295; 19 (1895), p. 105.*

247) Acta math. 19 (1895), p. 105.

248) London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 34 (1867), p. 461.

249) C. R. Acad. sc. Paris 116 (1893), p. 1500; Bull. sc. math. (2) 17 (1893), p. 240. Voir aussi *U. Scarpis,* Reale Ist. Lombardo, *Rendic.* (2) 31 (1898), p. 1441.

résultats de *J. J. Sylvester,* en indiquant un procédé plus général de formation de déterminants maximés ayant des éléments de valeur absolue égale à 1. $_*$Lorsque n est une puissance de 2, on peut former en particulier des déterminants dont les éléments sont réels, maximés et égaux à $+1$ ou à -1; on peut aussi en former pour d'autres valeurs de n, mais il est nécessaire cependant que n soit multiple de 4; *J. Hadamard* cite en particulier un déterminant de degré 12 et un autre de degré 20; il y aurait lieu de rechercher s'il en existe d'autres et de trouver pour chaque valeur de n le maximé d'un déterminant dont les éléments sont $+1$ ou -1.*

32. Déterminants spéciaux: wronskiens, jacobiens, hessiens. Nous ne pouvons mentionner toutes les applications de la théorie des déterminants; nous indiquerons seulement quelques déterminants spéciaux, en renvoyant pour leur étude complète aux théories auxquelles ils se rapportent.

Un *déterminant de Wronski* [250]), de degré n, est formé de la façon suivante: dans la première ligne sont n fonctions d'une variable x, dans la seconde ligne sont les dérivées premières de ces fonctions, dans la troisième ligne sont les dérivées secondes, etc ..., dans la n^e ligne sont les dérivées d'ordre $n-1$. $_*$C'est surtout dans la théorie des équations différentielles linéaires que se présentent les déterminants wronskiens; leur propriété fondamentale est que l'on forme leur dérivée en y remplaçant les dérivées d'ordre $n-1$ par celles d'ordre n; si le wronskien de n fonctions est nul, ces fonctions sont liées par une équation linéaire homogène à coefficients constants [251]). *F. J. Studnička* [252]) a considéré un déterminant wronskien particulier, dans lequel les éléments de la première ligne sont eux-mêmes constitués par une fonction et ses $n-1$ premières dérivées.*

---

250) Ces déterminants ont été dénommés ainsi par *E. Pascal,* I Determinanti, Milan 1897, p. 62; trad. all. par *H. Leitzmann,* Leipzig 1900, p. 48.

251) $_*$*C. J. Malmstèn,* J. reine angew. Math. 39 (1850), p. 91; *L. O. Hesse,* id. 54 (1857), p. 249; Werke, Munich 1897, p. 439; *E. B. Christoffel,* J. reine angew. Math. 55 (1858), p. 281; *G. Frobenius,* id. 76 (1873), p. 236; 77 (1874), p. 245 [1873]; *M. Pasch,* id. 80 (1875), p. 177 [1874]; *J. Tannery,* Ann. Ec. Norm. (2) 4 (1875), p. 121; *C. Jordan,* Cours d'Analyse de l'Ec. polyt. 3, Paris 1887, p. 150; 2e éd. 3, Paris 1896, p. 152; *G. Peano,* Mathesis (1) 9 (1889), p. 75, 111; Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (5) 6 I (1897), p. 413; *L. Heffter,* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig 1894, p. 233; *L. Schlesinger,* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen 1, Leipzig 1895, p. 36; *A. Demoulin,* Mathesis (2) 7 (1897), p. 62; *M. Bôcher,* Trans. Amer. math. Soc. 2 (1901), p. 139.*

252) $_*$Monatsh. Math. Phys. 10 (1899), p. 338.*

Le *déterminant fonctionnel* ou *jacobien*[253]) de n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est le déterminant

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

formé par les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions, prises par rapport aux variables successives[254]).

*Le déterminant fonctionnel jouit, au point de vue des transformations de variables, de propriétés analogues à celles de la dérivée d'une fonction et il s'exprime par le quotient de deux déterminants de degré n,

$$\frac{d_i f_k \,|}{d_i x_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

dans ce quotient le dénominateur est formé par n systèmes de différentielles indépendantes et le numérateur par les différentielles totales correspondantes des n fonctions[255]). La condition nécessaire et suffisante pour que les n fonctions soient liées par une relation identique est que le déterminant fonctionnel soit nul.

De nombreuses applications du déterminant fonctionnel au calcul intégral et à la géométrie analytique, seront mentionnées dans des articles spéciaux de l'Encyclopédie.

Au déterminant fonctionnel de n fonctions de n variables se rattache le déterminant suivant, relatif à $n + 1$ fonctions de n variables

$$\mathrm{K}(y_0, y_1, \ldots y_n) = \left| y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \frac{\partial y_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right|, \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

---

253) Le nom de jacobien a été donné à ces déterminants par *J. J. Sylvester* [Philos. Trans. London 143 (1853), p. 476].

254) *T. Muir* [Proc. R. Soc. Edinb. 24 (1901/3), p. 151] fait l'historique des jacobiens. On trouve déjà des jacobiens mentionnés par *A. L. Cauchy* [Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 1 (1827), mém. n° 1, p. 12 [1815]; Œuvres (1) 1, Paris 1882, p. 5]. *C. G. J. Jacobi* les considère aussi dans ses mémoires [J. reine angew. Math. 5 (1830), p. 344; 6 (1830), p. 257; 10 (1833), p. 101; 12 (1834), p. 38; Werke 3, Berlin 1884, p. 69, 161, 233; 6, Berlin 1891, p. 26]; mais c'est surtout dans son mémoire J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 319; Werke 3, p. 395, qu'est établie la théorie. Voir aussi *J. J. Sylvester,* Philos. Trans. London 143 (1853), p. 467; *W. F. Donkin* id. 144 (1854), p. 72; *A. Cayley,* J. reine angew. Math. 52 (1856), p. 276 [1855]; Papers 4, Cambridge 1891, p. 30; *A. Clebsch,* J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 355; 70 (1869), p. 175; *C. Neumann,* Math. Ann. 1 (1869), p. 208; *L. Kronecker,* J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 155 [1869]; Werke 1, Leipzig 1895, p. 240; *J. Rosanes,* J. reine angew. Math. 75 (1873), p. 166.

255) *J. Bertrand,* C. R. Acad. sc. Paris, 32 (1851), p. 134; J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 212.

déjà considéré par *C. G. J. Jacobi*[256]) et étudié par *F. Casorati*[257]). La condition nécessaire et suffisante pour que $y_0, y_1, \ldots, y_n$ soient reliés par une équation homogène, est que K soit nul.

Le déterminant K est égal au produit de y_0^{n+1} par le déterminant fonctionnel des quotients $\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}$. *G. Torelli*[258]) considère un cas plus général: il forme le déterminant fonctionnel de n produits $y_1 z_1, y_2 z_2, \ldots, y_n z_n$ au moyen d'un déterminant de degré n dont les éléments sont les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ et leurs dérivées premières.

Un déterminant particulier, que l'on appelle quelquefois *déterminant fonctionnel*, s'introduit dans la théorie des formes binaires. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ désignent n formes binaires homogènes des deux variables x et y, c'est le déterminant

$$\left| \frac{\partial^n f_i}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \right|.$$

Ce *déterminant fonctionnel* se rattache immédiatement au déterminant wronskien de ces formes considérées comme fonctions de la seule variable x, en appliquant aux éléments de ce dernier déterminant la relation de *L. Euler* sur les fonctions homogènes; il joue un rôle particulier dans la réduction des formes binaires à une forme canonique et dans la théorie des covariants[259]).

Si n est impair, le *déterminant fonctionnel* s'exprime linéairement au moyen des formes binaires données; si n est pair il s'exprime par une fonction quadratique de ces formes avec des coefficients invariants ou covariants.

Un autre déterminant considéré par *A. Voss*[260]) est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot\cdot & 0 & \varphi_{10} & \cdot\cdot & \varphi_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 1 & \varphi_{n0} & \cdot\cdot & \varphi_{nr} \\ \psi_{10} & \cdot\cdot & \psi_{n0} & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{1r} & \cdot\cdot & \psi_{nr} & 0 & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix},$$

256) J. reine angew. Math. 10 (1833) p. 101; 12 (1834) p. 40; Werke 3, Berlin 1884, p. 161, 235/6.

257) *Reale Ist. Lombardo, *Memorie* (3) 4 (1877), p. 181 [1874].*

258) *Rendic. Circ. mat. Palermo 7 I (1893), p. 75.*

259) **C. Le Paige,* C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 688.*

260) *Math. Ann. 13 (1878), p. 161 [1877].*

où les φ_{ik} et ψ_{ik} désignent les dérivées d'ordre k des fonctions φ_{i0} et ψ_{i0} d'une même variable. Ce déterminant est un invariant pour les substitutions linéaires effectuées sur cette variable.*

Le déterminant *hessien* [261]) d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est formé par les dérivées partielles secondes de cette fonction; c'est le déterminant

$$\mathrm{H} = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Il présente de nombreuses applications à la géométrie analytique et à la théorie des formes homogènes. *Lorsque, par une transformation linéaire, on peut transformer une forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ homogène à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en une autre à $n-1$ variables, le hessien H de la forme f est nul. La réciproque qu'avait énoncée *L. O. Hesse*, n'est exacte [262]) que si n est égal ou inférieur à 4.*

*Mentionnons encore un théorème énoncé par *P. Painlevé* [263]): Soit T une fonction homogène d'ordre α quelconque des $n+1$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et τ la fonction obtenue en faisant $x = 1$ dans T; soit H le hessien de T et δ le déterminant de degré n dont l'élément général est

$$a_{ik} = \alpha\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_k} - (\alpha - 1)\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\, \frac{\partial \tau}{\partial x_k};$$

si l'on fait $x = 1$ dans H et que l'on appelle H_1 le résultat obtenu, on a identiquement

$$(\alpha - 1)\delta = \alpha^{n-1}\mathrm{H}_1\tau^{n-1}.*$$

33. Alternants. Permanents. Continuants. On appelle *déterminant de Vandermonde* ou *de Cauchy*, le déterminant

$$|\, 1, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{n-1} \,|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce déterminant est égal au produit des différences deux à deux des éléments a_i ou, d'une façon plus précise, au produit

$$\Pi(a_i - a_k), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i > k).$$

C'est une fonction alternée des quantités a_i, en ce sens que les valeurs qu'elle acquiert lorsqu'on permute ces quantités d'une manière quel-

---

261) *L. O. Hesse*, J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 83; 42 (1851), p. 117; 56 (1859), p. 263; Werke, Munich 1897, p. 106, 289, 481; *J. J. Sylvester*, Cambr. Dublin math. J. 6 (1851), p. 186.

262) *M. Pasch*, J. reine angew. Math. 80 (1875), p. 169 [1874]; *P. Gordan*, Sitzgsb. phys. medic. Soc. Erlangen 8 (1875/6), p. 89 [Décembre 1875]; *M. Nöther*, id. p. 51 [Janvier 1876]; *P. Gordan* et *M. Nöther*, Math. Ann. 10 (1876), p. 547.

263) *Bull. Soc. math. France 22 (1894), p. 116.*

conque, sont seulement au nombre de deux, et que ces deux valeurs sont symétriques.

Le carré du déterminant précédent se met sous la forme d'un déterminant orthosymétrique (n° 28)

$$D = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots, & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1}, & s_n, & \ldots, & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$s_p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p.$$

C'est le discriminant de l'équation qui a pour racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [264]. *La condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière équation ait des racines multiples, est que son discriminant soit nul; d'une manière plus précise, pour qu'une équation de degré n ait seulement $n - p$ racines distinctes, il faut et il suffit que son discriminant, mis sous la forme du déterminant D, et les $p - 1$ déterminants qu'on en déduit en supprimant successivement $1, 2, \ldots, p - 1$ lignes et colonnes à partir des dernières, soient tous nuls, ce qui fait p conditions [265].* Tandis que *A. T. Vandermonde* n'a considéré qu'un cas particulier du déterminant précédent, *A. L. Cauchy* [266] a étudié les fonctions plus générales qu'il appelle *fonctions alternées* ou *alternants*; ces fonctions s'étaient déjà présentées à *G. C. F. M. Riche de Prony* [267]: elles jouissent de la propriété de prendre des valeurs symétriques quand on permute deux des éléments qui y entrent [268].

*Les déterminants de la forme $|a_k^{r_i}|$, où les exposants r_i sont

264) Le nom de *discriminant* a été donné par *J. J. Sylvester* [London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 2 (1851), p. 406].

265) **L. Baur*, Math. Ann. 50 (1898), p. 241; *H. Weber,* Lehrb. der Algebra, 2e éd. 1, Brunswick 1898; trad. *J. Griess,* Algèbre supérieure, Paris 1898, p. 179.*

266) J. Ec. polyt., cah. 17 (1815), p. 29, 52 [1812]; Exercices d'Analyse et de phys. math. 2, Paris 1841, p. 151; Oeuvres (2) 1, Paris 1905, p. 91; (2) 12, en préparation.

267) J. Ec. polyt. cah. 2, an IV, p. 264.

268) Voir aussi *F. Schweins,* Theorie der Differenzen und Differentiale, Heidelberg 1825, p. 317; *J. J. Sylvester,* London Edinb. philos. mag. 16 (1840), p. 37; *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 22 (1841), p. 360; Werke 3, Berlin 1884, p. 441; *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 10 (1878/80), p. 102; *F. J. Studnička,* Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1896, mém. n° 22; 1897, mém. nos 1, 16.

La théorie est développée dans les Traités classiques de *S. Günther,* Lehrb. der Determinanten, Erlangen 1875, 2e éd. 1877, p. 66; *R. F. Scott,* Determ. [130], p. 115; *H. R. Baltzer,* Theorie und Anw. der Determinanten, Lpz. 1857; 5e éd. Lpz. 1881; trad. *G. J. Hoüel,* Paris 1861, p. 92. Pour l'historique, consulter *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinburgh 23 (1899/1901), p. 93.

des nombres naturels quelconques distincts, sont des alternants; ils sont divisibles par le produit des différences des éléments, c'est-à-dire par le *déterminant de Vandermonde* de ces éléments [269]); ils s'expriment au moyen de certaines fonctions appelées *fonctions homogènes complètes,* qui ont été étudiées par *J. Hoëne Wronski* [270]) sous le nom de *fonctions alephs.* On les obtient en écrivant tous les termes qui entrent dans le développement d'une puissance de la somme des éléments a_i, et faisant tous les coefficients de ces termes égaux à l'unité [271]). *T. Muir* a exprimé au moyen de ces déterminants le produit d'un *déterminant de Vandermonde* par une fonction symétrique des éléments qui y entrent [272]).

J. Ph. E. de Fauque de Jonquières [273]) étudie sous le nom de *déterminants potentiels* les déterminants $|a_k^{\lambda_i}|$ lorsque les éléments et les exposants sont des nombres naturels.

Une généralisation du *déterminant de Vandermonde* s'obtient en écrivant dans la première ligne les n éléments

$$1,\ a_1,\ a_1^2,\ \ldots,\ a_1^{n-1};$$

dans les $\alpha_1 - 1$ lignes suivantes les dérivées d'ordres successifs 1, 2, $\ldots, \alpha_1 - 1$ de ces éléments, prises par rapport à a_1; dans la ligne suivante les n éléments

$$1,\ a_2,\ a_2^2,\ \ldots,\ a_2^{n-1};$$

dans les $\alpha_2 - 1$ lignes suivantes les dérivées d'ordres successifs $1, 2, \ldots, \alpha_2 - 1$ de ces éléments, prises par rapport à a_2, et ainsi de suite, la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ étant égale à n. A un facteur numérique près, ce déterminant [274]) est égal à $\Pi(a_i - a_k)^{\alpha_i \alpha_k}$.

A la théorie des alternants se rattache celle des *permanents.* Un permanent est la fonction que l'on obtient en développant un déterminant et affectant tous ses termes du signe $+$. *T. Muir* [275]) a étudié

---

269) *A. H. Anglin,* Bull. Soc. math. France 15 (1886/7), p. 120.

270) *Introd. à la philos. des math. et technie de l'algorithmie, Paris 1811, p. 65.*

271) **L. Crocchi,* Giorn. mat. (1) 17 (1879), p. 218.*

272) **T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 22 (1897/9), p. 539; *E. D. Roe,* Amer. J. math. 25 (1903), p. 97 [1901]; Trans. Amer. math. Soc. 5 (1904), p. 193; *Taylor,* Amer. math. Monthly 10 (1903), p. 119.*

273) *C. R. Acad. sc. Paris, 120 (1895), p. 408, 580.*

274) **M. A. Stern,* J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 285 [1865]; *Ch. Méray,* Ann. Ec. Norm. (1) 4 (1867), p. 176 [1865]; Revue math. spéc. 5 (1898/1900), p. 217; *E. Franke,* J. reine angew. Math. 83 (1877), p. 65.*

275) *Proc. R. Soc. Edinb. 11 (1880/2), p. 409; 22 (1897/9), p. 134.*

les relations qui existent entre les déterminants, les alternants et les permanents; il désigne un permanent par la notation

$$\overset{+}{|}a_1 b_2 c_3 \ldots \overset{+}{|},$$

la notation $|a_1 b_2 c_3 \ldots|$ étant réservée aux déterminants; il démontre que l'on a

$$|a_1 b_2 c_3 \ldots| = \sum a_1 \cdot |b_2 c_3 \ldots| - \sum \overset{+}{|}a_1 b_2\overset{+}{|} \cdot |c_3 d_4 \ldots| \\ - \sum \overset{+}{|}a_1 b_2 c_3\overset{+}{|} \cdot |d_4 \ldots + \cdots$$

Un *alternant de Vandermonde* contenant $2n$ éléments peut s'exprimer par une somme de $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$ quantités; chacune d'elles est un terme du pfaffien

$$\left.\begin{array}{rrr} b-a, & c-a, & d-a, \ldots \\ & c-b, & d-b, \ldots \\ & & d-c, \ldots \\ & & \ldots \end{array}\right|$$

multiplié par un permanent ne renfermant que les puissances paires des éléments.*

Nous renvoyons à la théorie des équations et de l'élimination pour l'étude des *résultants* que l'on met sous forme de déterminants. Beaucoup d'invariants et de covariants se mettent aussi sous cette forme, particulièrement sous forme de déterminants orthosymétriques. Nous renvoyons aussi à la théorie des équations linéaires, pour l'étude des applications des déterminants à la résolution de ces équations.

Nous mentionnerons cependant des déterminants remarquables qui se présentent dans la résolution d'équations linéaires particulières. Par exemple les sommes des puissances semblables des racines d'une équation peuvent s'exprimer au moyen de déterminants composés avec les coefficients de cette équation [276]). Les coefficients des séries récurrentes qui constituent le développement d'une fonction rationnelle suivant les puissances de la variable, s'expriment aussi sous forme de déterminants [277]).

Les déterminants les plus intéressants obtenus de cette façon sont les *continuants*; ils se présentent dans le calcul des réduites successives d'une fraction continue; ils sont de la forme

---

276) *S. Günther,* Determ. [268]), p. 110; *E. Pascal,* Determ. [250]), trad. *H. Leitzmann,* p. 145.

277) *M. Dietrich,* J. reine angew. Math. 69 (1868), p. 190; *E. Netto,* Vorles. über Algebra 1, Leipzig 1896, p. 84; *T. Muir,* Proc. R. Soc. Edinb. 24 (1901/3), p. 387.

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, \ldots & 0, & 0 \\ -1, & a_2, & 1, \ldots & 0, & 0 \\ 0, & -1, & a_3, \ldots & 0, & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, \ldots -1, & a_n \end{vmatrix}.$$

*Les continuants satisfont à la formule de récurrence

$$C_n = a_n C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Comme généralisation on peut supposer que les éléments 1 et -1 sont remplacés par d'autres quantités[278]. Si les a sont égaux à une même variable x, certains continuants sont décomposables en un produit de facteurs rationnels du second degré[279]. Mentionnons encore qu'un polynome entier en x de degré n peut se mettre sous la forme d'un déterminant de degré $n+1$[280]. En particulier, les *polynomes* X_n *de Legendre* se mettent, à un facteur près, sous la forme[281]

$$P_n = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, \ldots, & a_n \\ a_1, & a_2, & a_3, \ldots, & a_{n+1} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1}, & a_n, & a_{n+1}, \ldots, & a_{2n-1} \\ 1, & x, & x^2, \ldots, & x^n \end{vmatrix},$$

où a_r est $\frac{1}{r+1}$ si r est pair, et est *nul* si r est impair.*

34. Déterminants arithmétiques. *Il existe un grand nombre de déterminants spéciaux ayant comme éléments des nombres particuliers, et dont la valeur est remarquable: on les trouvera cités en grande partie dans l'ouvrage de *E. Pascal*[282]. Les uns[283] ont leurs

278) *J. J. Sylvester*, London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 5 (1853), p. 453; (4) 6 (1853), p. 297; *W. Spottiswoode*, J. reine angew. Math. 51 (1856), p. 374 [1853]; *L. Painvin*, J. math. pures appl. (2) 3 (1858), p. 41; *S. Günther*, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen, Erlangen 1872 3; Archiv Math. Phys. (1) 55 (1873), p. 400; Math. Ann. 7 (1874), p. 267; Determ. [268]), p. 123, où se trouve un aperçu historique; *T. Muir*, London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 3 (1877), p. 137, 360; Amer. J. math. 1 (1878), p. 344; *E. Cesáro*, Mathesis (2) 2 (1892), p. 5; *V. Mollame*, Rivista mat. 3 (1893), p. 47 [1892].*

279) *E. B. Elliott*, Proc. London math. Soc. 33 (1900 1), p. 229; *T. Muir*, Proc. R. Soc. Edinb. 24 (1901/3), p. 105.*

280) *W. Veltmann*, Z. Math. Phys. 16 (1871), p. 525; *S. Günther*, id. 21 (1876), p. 187; *C. A. Laisant*, Bull. Soc. math. France 17 (1888/9), p. 104; *G. von Escherich*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 19.*

281) *E. Rouché*, C. R. Acad. sc. Paris 47 (1858), p. 919.*

282) *Determ. [250]), trad. *H. Leitzmann*, p. 132.*

283) *E. Catalan*, Bull. Acad. Bruxelles 13 I (1846), p. 534; *G. Fouret*, Bull. Soc. math. France 14 (1885/6), p. 146; 15 (1886/7), p. 146; *F. J. Studnička*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1880, p. 50.*

éléments égaux à $+1$, -1 ou 0; d'autres sont des déterminants cycliques dont la première ligne est formée de termes en progression arithmétique [284]) ou de racines de l'unité [285]); d'autres ont comme éléments les différences successives de n quantités [286]); d'autres les coefficients binomiaux [287]). On peut exprimer au moyen de déterminants dont les éléments sont les coefficients binomiaux les *nombres de Bernoulli* et *d'Euler* ainsi que les nombres A_n introduits par *D. André* dans la théorie des permutations alternées [288]) (n° **6**). D'autres déterminants sont formés au moyen de factorielles [289]).

Le déterminant de *H. J. S. Smith* [290]) et de *P. Mansion* [291]) est le déterminant

$$|(i,\ k)|,$$

où i et k prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et où (i, k) désigne le plus grand commun diviseur des nombres i et k. Ce déterminant a pour valeur le produit $\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)$, où $\varphi(k)$ désigne le nombre des nombres premiers avec k et inférieurs à lui. Plus généralement, le déterminant dont l'élément général est une fonction $F(i, k)$ du plus grand commun diviseur de i et de k, est égal au produit $f(1)f(2)\ldots f(n)$, les fonctions f et F étant telles que l'on ait

$$F(m) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant les diviseurs du nombre m [292]).*

---

284) *L. Cremona*, Nouv. Ann. math. (1) 19, 1860, p. 151; *H. Lemonnier*, Bull. Soc. math. France 7 (1878/9), p. 175.*

285) *M. A. Stern*, J. reine angew. Math. 73 (1871), p. 374; *E. Schulze*, Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 173.*

286) *R. Raimondi*, Giorn. mat. (1) 26 (1888), p. 185.*

287) *V. von Zeipel*, Acta Univ. Ludensis 2 III (1865), p. 17; *F. J. Studnička*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1879, p. 292, 295; 1897, mém. n^{os} 1, 16; *F. Caldarera*, Giorn. mat. (1) 9 (1871), p. 223; *A. Bonolis*, id. (1) 15 (1877), p. 113; *M. A. Stern*, J. reine angew. Math. 66 (1866), p. 287; *E. Schulze*, Z. Math. Phys. 44 (1899), p. 174.*

288) *H. Nägelsbach*, Z. Math. Phys. 19 (1874), p. 219; *E. Lucas*, Ann. mat. pura appl. (2) 8 (1877), p. 56; Bull. Soc. math. France 11 (1882/3), p. 69; *R. Haussner*, Nachr. Ges. Gött. 1893, p. 782/93; Z. Math. Phys. 39 (1894), p. 183; *E. Estanave*, Bull. Soc. math. France 31 (1903), p. 203.*

289) *E. d'Ovidio*, Giorn. mat. (1) 1 (1863), p. 135; *J. W. L. Glaisher*, Messenger math. (2) 6 (1877), p. 49; (2) 7 (1877/8), p. 160; (2) 8 (1878/9), p. 158.*

290) Proc. London math. Soc. 7 (1875/6), p. 208; Papers 2, Oxford 1894, p. 161.*

291) Bull. Acad. Belgique (2) 46 (1878), p. 892; Ann. Soc. scient. Bruxelles 2^2 (1877/8), p. 211.*

292) *E. Catalan*, Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 103; *C. Le Paige*, id. p. 176; *E. Cesáro*, Giorn. mat. (1) 23 (1885), p. 182; Ann. Ec. Norm. (3) 2 (1885), p. 425; Nouv. Ann. math. (3) 5 (1886), p. 44; Mathesis (1) 5 (1885), p. 248;

35. Déterminants cubiques. Déterminants à plusieurs dimensions. La généralisation de la notion de déterminant au cas où l'on considère n^ν éléments $a_{ijk\ldots}$ affectés de ν indices variables de 1 à n, a été considérée pour la première fois par *A. de Gasparis* dans un opuscule qu'il fit paraître sous le pseudonyme de *Jean Blaise Grandpas* [293]). L'étude de ces déterminants, en particulier des déterminants cubiques formés au moyen de n^3 éléments, a été faite en outre par *E. Padova, G. Garbieri, L. Gegenbauer* etc. [294]). La méthode de *H. Grassmann* s'étend immédiatement du cas des déterminants ordinaires à celui des nouveaux déterminants.

Etant donnés n^3 éléments a_{ijk} dont les trois indices varient de 1 à n, nous les disposerons suivant un cube en considérant un trièdre de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ et plaçant l'élément a_{ijk} au point de l'espace de coordonnées $x = i$, $y = j$, $z = k$; les n^3 éléments sont ainsi répartis en n tranches de n^2 éléments parallèles à l'une des faces du cube; la *diagonale principale* renferme les éléments a_{111}, a_{222}, $\ldots$, a_{nnn}. Prenons n éléments a_{ijk} de façon que les indices de même rang constituent une permutation des n premiers nombres, et effectuons le produit de ces éléments; on peut former $(n!)^2$ pareils produits; la somme de ces produits affectés de signes convenables, sera la valeur du déterminant cubique; on dit que ce déterminant est de *degré n*.

Mais on peut choisir le signe de chaque produit de plusieurs manières. On peut d'abord supposer les éléments rangés par ordre de grandeur croissante des premiers indices $a_{1j_1k_1}$, $a_{2j_2k_2}$, $\ldots$, $a_{nj_nk_n}$; on affecte alors le produit du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que le nombre des inversions des seconds indices et celui des inversions des troisièmes, sont, ou non, de même parité. On peut opérer d'une manière analogue en rangeant cette fois par ordre de grandeur les

Atti R. Accad. Lincei, *Rendic.* (4) 1 (1884/5), éd. 1885, p. 709; *L. Kronecker,* Vorl. über Zahlentheorie publ. par *K. Hensel* 1, Leipzig 1901, p. 242.*

293) *A. de Gasparis* [*J. B. Grandpas*], Sur les déterminants dont les éléments ont plusieurs indices, (s. l.) 1861.

294) *G. R. Dahlander,* Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 20 (1863), p. 295; *A. Armenante,* Giorn. mat. (1) 6 (1868), p. 175 [1866]; *E. Padova,* id. p. 182 [1868]; *G. Zehfuss,* Progr. Gewerbeschule Francfort s/M 1868, p. 21/8; *A. de Gasparis,* Rendic. Accad. Napoli (1) 7 (1868), p. 118; *G. Garbieri,* Giorn. mat. (1) 15 (1877), p. 89; *H. W. L. Tanner,* Proc. London math. Soc. 10 (1878/9), p. 167; *R. F. Scott,* id. 11 (1879/80), p. 17; *W. Zajączkowski,* Pamiętnik Akad. Umiejętności *(Cracovie)* 6 (1881) mém. n° 3; *G. von Escherich,* Denkschr. Akad. Wien, math. 43 II (1882), p. 1 [1880]; *L. Gegenbauer,* id. p. 17; 46 II (1883), p. 291; 49 II (1885), p. 225; 50 I (1885), p. 145; 55 I (1889), p. 39; Sitzgsb. Akad Wien 101 IIa (1892), p. 425; *L. Schendel,* Z. Math. Phys. 32 (1887), p. 185; *N. von Szüts,* id. 40 (1895), p. 113.

seconds ou encore les troisièmes indices; les valeurs ainsi obtenues pour le déterminant sont en général distinctes. Nous appellerons *première valeur* du déterminant celle que l'on obtient en choisissant la première façon de procéder. Si l'on permute alors entre elles deux tranches parallèles à la face Oyz du trièdre et de premiers indices $x = i_1$ et $x = i_2$, la première valeur du déterminant ne change pas; au contraire, si l'on permute entre elles deux tranches parallèles à la face Ozx et de seconds indices $y = j_1$ et $y = j_2$, ou bien deux tranches parallèles à la face Oxy et de troisièmes indices $z = k_1$ et $z = k_2$, cette première valeur se transforme en sa valeur symétrique.

Un déterminant cubique est la somme algébrique de $n!$ déterminants ordinaires. Si l'on fixe, en effet, une permutation $j_1 j_2 \dots j_n$ des seconds indices, les termes correspondants constituent, au signe près, un déterminant ordinaire de degré n.

On peut aussi développer un déterminant cubique D suivant les éléments d'une tranche; convenons d'appeler mineur de D relatif à a_{ijk} le produit de $(-1)^{j+k}$ par le déterminant cubique de degré $n-1$ qui reste lorsqu'on a supprimé dans D les éléments d'indices $x = i$, $y = j$, $z = k$ situés sur les parallèles aux axes se croisant sur l'élément a_{ijk}; la première valeur de D est égale à la somme algébrique des produits des éléments d'une tranche parallèle à l'un quelconque des plans de coordonnées par les mineurs correspondants.

A. Armenante[294]) a montré que le produit d'un déterminant cubique A par un déterminant ordinaire B de même degré n est égal à un déterminant cubique C de degré n; on obtient les éléments de C en effectuant, dans chaque tranche de A parallèle au plan Oyz et d'indice $x = i$, le produit ligne par ligne du déterminant de cette tranche par B, d'après la règle ordinaire de multiplication des déterminants.

E. Padova[294]) a montré que le produit de deux déterminants ordinaires peut se mettre sous la forme d'un déterminant cubique; inversement un déterminant cubique peut être considéré comme le résultat de la multiplication symbolique de deux déterminants.*

Les propriétés des déterminants cubiques se généralisent, pour la plupart, au cas de n^ν éléments à ν indices, mais il y a cependant une distinction marquée entre les déterminants pour lesquels ν est pair et ceux pour lesquels ν est impair.

I 3. NOMBRES IRRATIONNELS ET NOTION DE LIMITE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **A. PRINGSHEIM** (MUNICH), PAR **J. MOLK** (NANCY).

Nombres irrationnels.

1. Grandeurs incommensurables. Les mathématiciens de l'*Ecole de Pythagore* n'ont, il est vrai, jamais *dénommé* d'autres nombres que les nombres naturels; mais ils furent les premiers à observer que les rapports[1]) entre certaines grandeurs, [et tout d'abord entre la diagonale et le côté d'un carré[2])], sont *incommensurables*[3]), c'est-à-dire que ces

1) *On dit que des grandeurs ont *rapport* entre elles, lorsqu'elles peuvent se surpasser réciproquement si on les multiplie par des nombres naturels [*Euclide,* Elementa, livre 5, déf. 4; Opera éd. *J. L. Heiberg* 2, Leipzig 1884, p. 2]. Il n'est peut-être pas inutile d'observer qu'*Euclide* ne suppose nullement que deux grandeurs homogènes ont *nécessairement* rapport entre elles; en particulier [Elementa, livre 3, prop. 16; Opera éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1883, p. 208] il traite de l'angle de contingence comme d'une quantité homogène à l'angle rectiligne, quoique plus petite que tout angle aigu.*

2) Les anciens attribuaient la découverte des incommensurables à *Pythagore* lui-même (vers — 500). D'après *P. Tannery* on a droit de penser que cette opinion est fondée [La Géométrie grecque, Paris 1887, p. 87, 88, 103]. *M. Cantor* estime que c'est sans doute *Pythagore* lui-même qui a montré que le rapport de la diagonale d'un carré à son côté ne peut être énoncé par le rapport de deux nombres [Vorles. Gesch. Math. (2e éd.) 1, Leipzig 1894, p. 142, 169, 170] et est donc inexprimable (ἄῤῥητος) si le côté du carré est exprimable. *De nouvelles recherches de *P. Tannery* [Communication orale, Congrès Soc. sav., Nancy 1900; Bibl. math. (3) 3 (1902), p. 164, 173] lui font admettre que la question musicale de la division de l'octave ou du ton en deux parties égales a, elle aussi, suscité la reconnaissance de l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$, géométriquement figurée comme diagonale du carré. *Aristote* mentionne souvent l'incommensurabilité de la diagonale du carré, et dit même une fois explicitement [*Ἀναλυτικὰ πρότερα*, livre 1, éd. Acad. Berlin 1 (1831), (chap. 23) p. 41, col. *a*; éd. *F. Didot* 1, Paris 1878, (chap. 22), p. 68] que cette irrationalité a pour cause que le pair ne peut être égal à l'impair. Le sens de cette phrase est éclairci

grandeurs n'ont pas entre elles rapport de *nombre* (naturel) à *nombre* (naturel)[4]. Loin de conclure cependant de ce fait, qu'il y a lieu d'étendre la notion de nombre naturel afin de lui donner le même caractère de généralité qu'à la notion de grandeur, ils attribuèrent à une impuissance de l'Arithmétique ce qui n'était qu'une dérogation aux résultats acquis jusqu'alors, et furent ainsi amenés à séparer nettement l'étude des nombres naturels de celle des grandeurs.

Afin de donner à l'étude des grandeurs un caractère d'universalité que ne pouvait avoir l'Arithmétique telle qu'ils la concevaient, ils cherchèrent, en faisant intervenir l'intuition spatiale, à la fonder directement sur des axiomes, sur des postulats et des définitions convenablement choisis.

Leurs efforts furent couronnés de succès: ils aboutirent à l'admirable *Théorie des proportions*[5]) entre grandeurs (commensurables ou incommensurables), qui constitue le 5e livre des Eléments d'*Euclide*[6]). Comme rien n'empêche de rattacher directement à cette théorie des proportions[7]), une doctrine des nombres irrationnels établie en toute

---

par *Euclide* [Elementa, livre 10, Appendice nº 27; Opera, éd. *J. L. Heiberg* 3, Leipzig 1886, p. 408].*

3) *ἀσύμμετρα [*Euclide,* Elementa livre 10, prop. 7, 8; Opera[2]) 3, p. 22].*

4) *D'après *Platon*, son maître, *Théodore de Cyrène*, établit l'incommensurabilité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, et son ami *Théétète* envisagea, le premier, l'incommensurabilité en général des racines (carrées) des nombres naturels (non carrés parfaits) [Θεαίτητος; Platonis opera, éd. *H. Estienne*, Paris 1578, p. 147, col. d; éd. *F. Didot* 1, Paris 1891, p. 113]*.

5) *Nous appellerons *en proportion* les grandeurs ayant le même rapport [*Euclide*, Elementa, livre 5, déf. 6; Opera[1]) 2, p. 2], c'est à dire (déf. 5) que les deux rapports $a:b$ et $c:d$ sont dits égaux lorsque, pour des multiplicateurs entiers quelconques m et n, on a toujours, si $ma > nb$, $mc > md$; si $ma = nb$, $mc = nd$; si $ma < nb$, $mc < nd$. Si, au contraire (déf. 7), on a, en même temps $ma > nb$ et $mc \leq nd$, le rapport $a:b$ est dit *plus grand* que le rapport $c:d$.*

6) *Le contenu du livre 5 appartient à *Eudoxe de Cnide* (4e siècle avant notre ère) disciple d'*Archytas*. *Euclide* vivait vers —300 [voir *P. Tannery*, Bull. sc. math. (2) 10 (1886), p. 183; Géom. grecque[2]), p. 95]*.

7) Déjà *Hippocrate de Chios* (vers —440) [Procli Diadochi . . . Euclidis comm. éd. *G. Friedlein*, Leipzig 1873, p. 213] et *Archytas de Tarente* (vers —390) [Comm. d'*Eutocius* (6e siècle) sur: De sphaera et cylindra d'*Archimède* d'après *Eudème* (4e siécle avant notre ère); Archimedis Opera, éd. *J. L. Heiberg* 3, Leipzig 1881, p. 98] appliquent la méthode des proportions à l'étude des *racines cubiques* $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, envisagées comme la 1e et la 2e proportionnelles, intercalées entre a et b. *Dinostrate* [*Pappus*, Συναγωγή μαθηματική (écrit vers 295) livre 4, § 26; éd. *F. Hultsch* 1, Berlin 1875, p. 256] et *Archimède* [Κύκλου μέτρησις (De la mesure du cercle), Opera, éd. *J. L. Heiberg* 1, Leipzig 1880, p. 257] l'appliquent à l'étude de la longueur

rigueur[8]), il n'est que juste de faire remonter aux mathématiciens de l'*Ecole de Pythagore* l'origine de cette doctrine, quoique, en fait, ni eux, ni les grands théoriciens classiques[9]) qui leur ont succédé, aient jamais songé qu'une telle abstraction fut désirable ou même possible.

Les géomètres grecs n'ont étudié que quelques types de quantités incommensurables[10]) obtenues au moyen de certaines constructions géométriques déterminées qui en assuraient l'existence; cette étude est exposée dans le 10e livre[11]) des Eléments d'*Euclide*[12]). **Apollonius*[13])

---

de la circonférence et, par suite, en quelque sorte à l'étude du nombre transcendant π.

8) Dans son grand ouvrage: *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e éd. en 5 vol., Paris 1865/73: 3e éd. 1 (1885), 2 (1896), *J. M. C. Duhamel* a cherché à le faire. Toute la première partie de ses recherches est exposée avec une clarté et une netteté remarquables [2, p. 72/75; voir aussi p. 22/3, 41/2, 63/72]; on n'en regrette que davantage l'introduction d'un concept obscur de limite géométrique dans la démonstration du théorème (p. 76) d'après lequel tout nombre irrationnel peut être envisagé comme la limite d'un nombre rationnel plus grand ou plus petit que lui. Comme la théorie des opérations qu'on est en droit d'effectuer sur les nombres irrationnels (p. 76/7) repose sur ce théorème, toute la marche suivie par *J. M. C. Duhamel* s'en trouve faussée. *O. Stolz* a repris ce point de vue et, après avoir exposé d'une façon comforme à nos habitudes modernes le 5e livre des Elements d'*Euclide* [Allg. Arith. 1, Leipzig 1885, p. 85; *O. Stolz* und *J. A. Gmeiner*, Theor. Arith., Leipzig 1900/2, p. 120] il donne des indications qui suffiraient pour en dégager en toute rigueur une théorie des nombres positifs quelconques. [Voir aussi *P. Tannery*, Revue philos. 7 (1879), p. 113; 46 (1898), p. 473, et *O. Stolz*, Grössen und Zahlen, Leipzig 1891, p. 16 (en note).]

9) *De *Pythagore* au second siècle avant notre ère.*

10) Comme grandeurs incommensurables particulières, *Euclide* étudie seulement celles qui, en fait, correspondent aux solutions d'une équation quadratique ou d'une équation bicarrée ou tricarrée à coefficients rationnels et peuvent, par suite, se construire avec la règle et le compas [voir *P. Tannery*, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 4 (1882), p. 401/6.

11) **Théétète* [4]) avait sans doute déjà démontré plusieurs des propositions du 10e livre [voir *I. H. Knoche*, Progr. Herford 1865, p. 10, 24 et *P. Tannery*, Géom. grecque [2]), p. 100].*

12) *Euclide* emploie les mots opposés *rationnels* (ῥητός) (proprement *énonçable, exprimable*), et *irrationnel* (ἄλογος) dans un sens différent du nôtre [Elementa, livre 10, déf. 3; Opera[2]) 3, p. 2]. Lorsque le côté d'un carré dont l'aire est commensurable, est incommensurable en longueur, on dit dans les Eléments, que ce côté est cependant commensurable *en puissance*, et on le considère comme *rationnel*. Ainsi, au sens d'*Euclide*, si a, b sont commensurables et b non-carré, $\sqrt{b}$ incommensurable est rationnel, mais $a+\sqrt{b}$ est irrationnel. **M. Chasles* [J. math. pures appl. (1) 19 (1854), p. 417] n'envisage pas comme impossible que la théorie musicale, tout arithmétique, ait été la cause de cette extension de la définition de la rationalité donnée par *Euclide*. *Platon* oppose encore simplement ῥητόν et ἄρρητον [Ἱππίας μείζων; éd. *H. Estienne*, Paris 1578,

a été plus loin qu'*Euclide*. Ses recherches n'ont pas été sans exercer plus tard quelque influence sur la généralisation de la notion de nombre, mais, à cet égard, d'autres recherches, conçues d'abord dans un esprit tout différent, ont joué un rôle bien plus important.*

2. Logistique. *Les Grecs de la période classique distinguaient nettement l'*Arithmétique*, ayant pour objet l'étude des nombres naturels, de la *Logistique* où l'on se proposait d'établir des *règles de calcul* pouvant être utiles en Géométrie, en Astronomie ou en Mécanique.

En Logistique, on cherchait à *éviter* les nombres irrationnels, en envisageant deux rapports entre nombres naturels (représentant ce que nous nommerions aujourd'hui des valeurs par excès et par défaut du nombre irrationnel) différant assez peu l'un de l'autre pour que leur emploi simultané permette de satisfaire aux besoins de la pratique. Ces recherches se raffinèrent peu à peu; elles prirent même, surtout avec *Archimède*[14]), un caractère théorique précis, et le problème consista alors[15]) à donner une *méthode* permettant de déterminer tant de termes que l'on veut, de deux *suites* de rapports entre nombres naturels, tels que les termes de l'une d'elles soient des valeurs approchées par excès, les termes de l'autre des valeurs approchées par défaut, et que ces termes se rapprochent indéfiniment. La possibilité de déterminer des termes de ces deux suites était d'ailleurs déjà connue de *Platon*[16]) pour la première irrationnelle constatée, $\sqrt{2}$.

---

p. 303, col. *b*, *c*; éd. *F. Didot* 1, Paris 1891, p. 755]; le passage ἢ οὐδὲν ... que *Platon* met dans la bouche de *Socrate*, s'applique à ce que si a et b désignent des nombres commensurables et si b est non-carré parfait, $a+\sqrt{b}$ et $a-\sqrt{b}$ sont incommensurables, tandis que leur somme ne l'est pas.*

13) *Il désignait par ἄλογοι ἄτακτοι des expressions irrationnelles plus générales que celles d'*Euclide*. D'après *F. Wöpcke* [Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 14 (1856), mém. n° 4, p. 658], ces irrationnelles seraient des racines à indices >2; cette conjecture manque toutefois d'une base certaine [*M. Cantor*, Vorles.[2]) 1, p. 333]. Les termes employés par le scholiaste d'*Euclide* [Opera, éd. *J. L. Heiberg* 5, Leipzig 1888, p. 414] semblent plutôt indiquer qu'*Apollonius* avait décrit certaines des formes, en nombre illimité, qui s'engendrent par la seule addition de plusieurs radicaux simples, et qui peuvent, par suite, être représentées par des constructions au moyen de la règle et du compas.*

14) *Opera [7]) 1, p. 257/71. Cf. *P. Tannery*, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 4 (1882), p. 314; *M. Cantor*, Vorles.[2]) 1, p. 285.*

15) *Avant *Archimède* l'exemple rigoureux d'une détermination analogue avait été donné par *Aristarque de Samos* [voir *P. Tannery* [14]) (2) 5 (1883), p. 237].

16) **Platon* [Πολιτεία (République) livre 8; Opera, éd. *H. Estienne*, Paris 1578, p. 546, col. *c*; éd. *F. Didot* 2, Paris 1883, p. 144, 5]. La suite complète des nombres naturels *latéraux* (πλευραί) et *diagonaux* (διάμετροι), solutions de l'équation $2x^2-y^2=\pm 1$, a été donnée (vers $+130$) par *Théon de Smyrne* [Exposition des

Ce fut là le germe d'où devait sortir la généralisation de la notion de nombre (rationnel). Quant aux développements ultérieurs de ce germe chez les Anciens, il est clair que c'est surtout l'usage des *Tables de cordes* en Astronomie, à partir d'*Hipparque*, qui familiarisa les calculateurs avec l'emploi de nombres représentant des longueurs incommensurables, ou regardés comme susceptibles de le faire, quoique pratiquement limités. Déjà *Diophante* (3e siècle), a abandonné la nomenclature d'*Euclide*, d'après laquelle il n'y a de nombre que le nombre naturel, et s'il se propose uniquement de chercher des solutions rationnelles, il ne recule pas devant l'expression de nombre *non-rationnel* [17]).

Les Grecs de la période de décadence[18]) calculaient déjà bien certainement avec des racines carrées, comme si ces racines représentaient des nombres, et sans se préoccuper de l'origine géométrique de ces nombres[19]). Les Hindous, qui envisageaient tout ce qui existe comme dépendant du nombre, ne s'arrêtèrent aucunement à justifier cette façon de procéder, et cherchèrent plutôt à la généraliser; *Bhaskarâ Acârya* (le savant) connaît déjà quelques transformations élégantes de

connaissances math. . . . éd. *J. Dupuis*, Paris 1892, p. 72; voir aussi p. 341]. En faisant usage de notre terminologie moderne, le texte de *Théon* revient à observer que si l'on a $2a^2 - b^2 = \pm 1$ on a aussi $2(a+b)^2 - (2a+b)^2 = \mp 1$, et à conclure que les solutions a_n, b_n de l'équation envisagée se déduisent les unes des autres au moyen de la suite

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1;\ a_{n+1} = a_n + b_n,\quad b_{n+1} = 2a_n + b_n,\qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

quelque petit que soit fixé ε, on peut lui faire correspondre un indice n à partir duquel les rapports $\frac{b_n^2}{a_n^2}$ diffèrent de 2 de moins que ε; ces rapports sont d'ailleurs alternativement plus petits et plus grands que 2. Les premiers termes des rapports $\frac{b_n}{a_n}$ sont $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$ *

17) *ἀριθμὸς οὐ ῥητός [Opera, éd. *P. Tannery* 1, Leipzig 1893, p. 204, 208, 210, 212]*

18) *Cette période s'étend du siècle qui précède notre ère jusqu'au 6e siècle de notre ère inclus [*P. Tannery* [14]) (2) 3 (1880), p. 366]. En 529, *Justinien* ferme l'école d'Athènes et les derniers savants héllènes se retirent en Perse. Des exemples nombreux de calculs du genre indiqué, dans lesquels l'approximation est théoriquement indiquée comme indéfinie, mais est pratiquement assez grossière, peuvent être tirés des *Μετρικά*, I fol. 76 à 80 de *Héron d'Alexandrie* [Heronis Alexandrini Opera 3, éd. *H. Schöne*, Leipzig 1903, p. 50, 54, 56, 60, etc.]. *Héron* vivait vers l'an 100.*

19) *Au temps de *Diophante*, la distinction entre l'*Arithmétique* (science des nombres) et la *Logistique* est perdue [*P. Tannery* [14]) (2) 3 (1880), p. 371]. Déjà *Héron* [18]) [*Μετρικά* I, fol. 71a; Opera [18]) 3, p. 22] multiplie entre elles des aires et extrait la racine du produit.*

symboles formés avec des radicaux superposés[20]). Les Arabes ne font que compléter les procédés qu'ils tiennent, soit des Grecs, soit des Hindous; c'est par eux surtout qu'à partir du 12ᵉ siècle, ces procédés sont parvenus jusqu'à nous. Pour juger du peu d'importance des modifications de pure forme que la doctrine des incommensurables a subies depuis *Euclide* jusqu'au 13ᵉ siècle, il suffit de comparer au livre 10 des Eléments d'*Euclide*, la section 14 du célèbre Traité d'Algèbre[21]) de *Léonard de Pise*, composé en 1202.*

3. Nombres sourds. Michel Stifel. Dans les écrits que nous ont laissés les mathématiciens de la fin du moyen âge, on désigne sous le nom de *nombres sourds*[22]) les expressions formées au moyen de radicaux (cf. I 1, 27) mais cette dénomination n'implique en rien une *généralisation* de la notion de nombre rationnel. Les mathématiciens de cette période semblent avoir été fort éloignés de toute tentative de ce genre; leurs procédés de démonstration étaient restés entièrement euclidiens. *Ils étaient parvenus à démontrer que les règles concernant la transformation des nombres sourds pouvaient s'établir, en faisant correspondre à ces nombres sourds certaines grandeurs géométriques, en effectuant sur ces grandeurs des constructions déterminées, et en appliquant les théorèmes connus de la Géométrie d'*Euclide*. Cette façon

20) *Vîjagaṇita (Algèbre) chap. 1, sect. V; éd. *H. T. Colebrooke* [Algebra with Arithmetic, Londres 1817, p. 149; *M. Cantor*, Vorles.[2]) 1, p. 586.*

21) *Liber abbaci (1202 ; dans le texte qui nous est parvenu et qui est de 1228, fol. 158ᵃ à 167ᵇ; Scritti di *L. Pisano* pubb. da *B. Boncompagni* 1, Rome 1857, p. 352/87. Au reste, la nomenclature de ce Traité, p. ex. *riti* pour ῥητή (rationnelle) semble prouver que la section 14 a été directement tirée du grec d'Euclide, probablement expliqué oralement à *Léonard de Pise* par un Byzantin.*

22) *Numeri surdi.* *Le mot *surdus* a été introduit comme traduction de l'arabe *a sam*, par lequel les Arabes ont désigné d'abord tout nombre rationnel s'exprimant difficilement dans leur langue, puis les quantités irrationnelles formées au moyen de radicaux [G. W. Freytagii Arabico-latinum ... 2, Halle 1833, p. 518; 4, Halle 1837, p. 639].* La traduction *surdus* apparait dès la fin du 12ᵉ siècle, dans la traduction latine faite par *Gérard de Crémone* du Commentaire arabe sur les Eléments d'*Euclide* (livre 10) dû à *Anaritius* (*El Nairîzî*) [Anaritii in decem libros . . ., éd. *M. Curtze*, Leipzig 1899, p. 253]. Jusqu'au 18ᵉ siècle on disait généralement en France et en Allemagne, nombre sourd, pour nombre irrationnel. On dit encore aujourd'hui *surds* en Angleterre. *L'expression *sursolide* dans *R. Descartes* [Géométrie, Leyde 1637, livre 1; Œuvres, éd. *Ch. Adam* et *P. Tannery* 6, Paris 1902, p. 373] pour désigner la puissance cinquième, n'est qu'une infidèle transcription du terme *surde-solidum* (solide d'une façon non-énonçable) venu de l'Arabe et correspondant à l' ἄλογος (πρῶτος, δεύτερος etc.) d'*Anatolius*, contemporain de *Diophante* [Opera [17]) 2, Leipzig 1895, p. 38], désignation des puissances 5ᵉ, 7ᵉ, etc. (Note ms. de *P. Tannery*.)*

de procéder devait éloigner de leur esprit toute idée de spéculer sur les nombres sourds eux-mêmes, comme ils le faisaient en Arithmétique sur les nombres naturels.*

*Au 14e siècle, *Nicole Oresme* envisage le premier des puissances fractionnaires de nombres rationnels[23]), mais l'extension du calcul des radicaux qui en résulte, semble n'avoir exercé aucune influence sur le développement de la doctrine des nombres sourds. Au 13e siècle, *Nicolas Chuquet* remplace les expressions de racine carrée, racine cubique, ... par celles de racine seconde, tierce, ... ce qui indique manifestement une tendance à arithmétiser la notion de racine[24]).*

C'est toutefois *Michel Stifel* qui, au 16e siècle, pressentit, peut-être le premier, quelque analogie entre le caractère des nombres sourds et celui des nombres rationnels. Dans son Arithmétique générale[25]), il distribue, en effet, les nombres en classes: *classe* (ordo) des nombres rationnels compris entre deux nombres naturels consécutifs, *classe* (ordo) de racines quelconques de nombres naturels, comprises entre deux nombres naturels consécutifs, ... et il observe qu'un même nombre ne peut appartenir à deux classes différentes[26]). Avec ses contemporains, il a cependant toujours cru que les nombres sourds n'étaient pas de véritables nombres[27]) et, tout en remplaçant volontiers dans les démonstrations les lignes par des nombres, il est au fond

23) *Cf. I 1, note 187 [Algor. proport., p. 69] *N. Oresme* emploie le mot *irrationalis* dont *Gérard de Crémona* avait déjà fait usage [Anaritii [22]), p. 214] dans le sens euclidien de *ἄλογον*. *J. Kepler* a observé [Harmonia mundi, Linz 1619; Opera, éd. *C. Frisch* 5, Francfort et Erlangen 1864, p. 86] que le choix des mots latins rationalis, irrationalis pour rendre les mots grecs λόγος, ἄλογος, n'est pas heureux.*

24) *Le Triparty en la science des nombres, écrit à Lyon en 1484; (cf. I 1, note 87), [ms. fol. 45^b, 46^a; Bull. bibl. storia mat. 13 (1880), p. 654/5]. *Luc Paciuolo* dont la „Summa de Arithmetica", écrite en 1487, (cf. I 1, note 95) a exercé, en son temps, une très grande influence sur le développement des mathématiques, dit *nombre sourd* (fol. 45^a), tandis que *N. Chuquet* évite cette locution. *R. Descartes* dit encore *quantité sourde* [par ex.: Géom.[22]), livre 3; Œuvres 6, p. 452].*

25) Arithmetica integra, Nuremberg 1544.

26) Item licet infiniti numeri fracti cadant inter quoslibet duos numeros immediatos, quemadmodum etiam infiniti numeri *irrationales* cadunt inter quoslibet duos numeros integros immediatos. Ex ordinibus tamen utrorumque facile est videre, ut nullus eorum ex suo ordine in alterum possit transmigrare [Arith.[25]), fol. 103^b, 104^a].

27) Il les désigne, en général, sous le nom d'irrationnels et non de sourds [Arith.[25]), fol. 134^a]; il désigne par *racines sourdes* de binomes et de résidus, les expressions de la forme $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm b}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, qui ne peuvent se réduire à des formes plus simples telles que $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$.

resté attaché aux idées d'*Euclide*[28]). Cependant, le fait d'avoir formulé l'existence d'une certaine analogie entre les véritables nombres (les nombres rationnels) et les symboles irrationnels n'est pas tout à fait sans importance, alors que les contemporains de *M. Stifel* ne voyaient guère sous ces symboles que la représentation de calculs aboutissant pratiquement à un nombre rationnel inexact, en tant que ne pouvant satisfaire à la condition supposée par le symbole, et s'en écartant seulement plus ou moins selon le degré d'approximation[29]).

*La construction de tables trigonométriques de plus en plus perfectionnées et l'invention des logarithmes, contribuèrent surtout à préparer la généralisation du nombre rationnel étendue même à d'autres irrationnelles que les racines de nombres naturels, en répandant l'usage des suites, qui, quoique pratiquement limitées, étaient supposées ne pas l'être dans la pensée. Ce n'est toutefois qu'en s'affranchissant de l'influence exclusive des idées des anciens que l'introduction systématique des nombres irrationnels au même titre que les nombres rationnels, devenait vraiment possible. Le progrès dans cet ordre d'idées devait résulter d'un changement complet de *méthode.**

4. François Viète. René Descartes. *Le point de départ de ce changement de méthode se trouve dans les publications de *François Viète* (1591). C'est *F. Viète* qui nous a appris à calculer avec des lettres représentant des grandeurs, *sans perdre la trace des lettres*, en faisant usage d'un symbolisme spécial permettant d'effectuer les opérations sur les lettres, comme si ces lettres représentaient des nombres déterminés, et c'est *F. Viète*

28) L'opinion contraire émise par *C. I. Gerhardt* [Gesch. der Math. in Deutschland, Munich 1877, p. 69] semble erronée. *M. Stifel* commence son livre 2 [Arith. [25]) fol. 103ᵃ] par discuter si les nombres irrationnels sont des nombres véritables (veri), ou des nombres fictifs (ficti). Il dit le pour et le contre, et donne l'argument que voici contre leur caractère de véritables nombres: Non autem potest dici numerus verus, qui talis est ut praecisione careat, et ad numeros veros nullam cognitam habeat proportionem. Sicut igitur infinitus numerus, non est numerus: sic irrationalis numerus non est verus numerus, quum lateat sub quadam infinitatis nebula. Il conclut qu'*Euclide* a nié ouvertement que les nombres irrationnels fussent des nombres.

29) *En cherchant à montrer que les qualités des racines et des fractions sont semblables, *S. Stevin* [L'Arithmétique, Leyde 1585, fol. 5ᵃ et p. 30 1, 35; cf. *Pappus* [7]), livre 2; éd. *F. Hultsch* 1, p. 2, 6, 22] soulevait pendant la première moitié du siècle suivant le plus grand nombre de ses contemporains [voir par ex. *H. Meynier*, L'Arithmétique, éd. Paris 1614, p. 267 et *J. A. Le Tenneur*, Traité des quantitez incomensurables, Paris 1640, p. 50, 61, 63, 67].*

30) *Pendant tout le moyen âge [cf. *Léonard de Pise*, Liber abbaci [21]), fol. 54ᵇ, 55ᵃ; éd. *B. Boncompagni* 1, p. 132] on avait, à l'exemple des Grecs [cf. *Aristote*, *Φυσικὴ ἀκρόασις*, livre 7, chap. 5; éd. Acad. Berlin 1 (1831), p. 249 col. b, p. 250 col. a; éd.

qui a eu l'idée de renouveler la méthode des anciens en la fondant dans l'Algèbre nouvelle ainsi constituée. Mais *F. Viète* a été arrêté dans cette voie dès les premiers pas pour ne pas avoir su se *détacher* suffisamment de l'interprétation géométrique des expressions algébriques, qui lui était familière. Ayant fait se correspondre une lettre A et une longueur déterminée, il lui semblait naturel de faire aussi se correspondre A . A et le carré, A . A . A et le cube construit sur cette longueur. Ce mode de correspondance l'empêcha de donner à la science qu'il avait fondée toute la généralité dont elle est susceptible.*

C'est *René Descartes* qui, en fixant d'une façon toute différente la correspondance des symboles algébriques et des grandeurs extensives, a permis de réaliser effectivement le changement de méthode annoncé. Après avoir[31]) fixé l'unité de longueur, et désigné par des lettres le rapport des différentes longueurs à la longueur-unité, il s'inspire de la théorie des proportions des anciens, pour faire correspondre de nouvelles *longueurs* au résultat de toutes les opérations connues effectuées sur ces lettres comme si elles représentaient des nombres.

*Si a et b correspondent respectivement aux longueurs L et L′, au produit ab, par exemple, correspond, pour *R. Descartes,* la longueur qui est à L comme L′ est à la longueur-unité; au quotient $\frac{a}{b}$ correspond la longueur qui est à la longueur-unité, comme la longueur L est à la longueur L′, etc. . . . Il crée ainsi[32]) l'unité d'interprétation qui manquait à *F. Viète*: l'Algèbre et la Géométrie sont parfaitement soudées l'une à l'autre, ou plutôt se pénètrent mutuellement. Et comme *rien ne se dit d'une grandeur en général qui ne se puisse rapporter à une grandeur en particulier*[33]), *l'Algèbre se trouve du même coup soudée à*

F. Didot 2, Paris 1878, p. 341; *Diophante*, Opera [17]) 1, p. 90, 92], souvent désigné par des lettres des grandeurs quelconques; mais les résultats des opérations effectuées sur ces lettres étaient alors désignées par de nouvelles lettres, en sorte que nulle trace des opérations effectuées ne subsistait dans les résultats, sauf toutefois pour les puissances de l'inconnue [cf. I 1, **26**]; l'emploi de lettres ne constituait donc pas un réel progrès sur celui de chiffres quelconques, arbitrairement fixés; il était même moins avantageux que la représentation des nombres par des lignes, des surfaces et des volumes, avec la nomenclature empruntée à la Géométrie, quoique cette nomenclature ne fût applicable que jusqu'au troisième degré d'homogénéité.*

31) Géom. [22]), livre 1; Œuvres 6, p. 369/71.

32) **L. Liard,* Revue philos. 10 (1880), p. 598; „Descartes", Paris 1882, p. 59. Voir aussi *A. Mouchot,* La réforme cartésienne, Paris 1877.*

33) *Regulae ad directionem . . . : reg. 14; éd. *V. Cousin* 11, Paris 1826, p. 296/7. Les grandeurs qu'il est le plus aisé de se représenter sont les lignes, c'est pour-

la science universelle des grandeurs, qu'elle traduit en une écriture commode[34]).*

Après l'apparition de la Géométrie de *R. Descartes*, (1637), la nouvelle méthode se développa sous le nom de *Géométrie analytique*, en utilisant les travaux fondamentaux de *P. Fermat*[35]). Ce développement même fit naître le besoin de généraliser la notion de nombre, de façon à permettre de représenter effectivement tous les vecteurs par des nombres; ce besoin s'accentua d'ailleurs après l'institution définitive du calcul infinitésimal par *P. Fermat*, *G. W. Leibniz* et *I. Newton*[36]), et, lentement[37]), aux classes d'irrationnelles *particulières*[38]) étudiées exclusive-

quoi *R. Descartes* se sert de l'étendue linéaire pour éclairer la marche de l'Algèbre [cf. Discours de la Méthode, Leyde 1637, 2e partie; Œuvres[22]) 6, p. 20].*

34) Il importe de remarquer que *R. Descartes* ne cherche pas à abstraire la science des nombres de celle des grandeurs extensives; les rapports de longueurs ne sont pas pour lui des nombres: *ils les remplacent seulement* [cf. *F. Debaune*, Remarques dans l' éd. *F. Schooten* (éd. latine) de la Géométrie de *R. Descartes*, Leyde 1659, p. 107.

35) *Ad locos planos et solidos isagoge [Œuvres, éd. *Ch. Henry* et *P. Tannery* 1, Paris 1891, p. 91/110; trad. 3, Paris 1896, p. 85/101], mémoire publié seulement en 1679, mais certainement indépendant, quant au fond, de la Géométrie de *R. Descartes*.*

36) *I. Newton* donne, au début de son Arithmétique universelle, la définition du nombre que voici: *On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce qu'on regarde comme l'unité* [Arith. univ., Cambridge 1707, nouv. éd. Leyde 1732, p. 4; trad. *N. Beaudeux* 1, Paris an X., p. 2; l'éd. de 1707 a été publiée d'après des Cours professés par *I. Newton* vers 1685]. Il convient d'observer que *I. Newton* ne fait aucun usage de cette définition générale du nombre pour établir, comme on pourrait s'y attendre, une Théorie des nombres irrationnels, en s'appuyant sur la Théorie des proportions d'*Euclide*. Comme l'a fort bien dit *O. Stolz* [Math. Ann. 22 (1883), p. 516] cette définition ne joue dans son Traité qu'un simple rôle de parade.

37) Malgré leur manque d'originalité et le peu de perspicacité dont y fait parfois preuve leur auteur, les Traités de mathématiques de *Chr. Wolf*, étaient très-répandus pendant la première moitié du 18e siècle; ils permettent donc de se rendre assez nettement compte du point de vue généralement adopté à cette époque. Dans ses Elementa matheseos universae, 1, Halle 1717; éd. 1730, p. 24, col. a, le nombre est défini comme étant „ce qui se rapporte à l'unité comme une ligne droite à une autre ligne droite". *Il suffit de consulter l'Encyclopédie, Paris 1751/77, en particulier le Discours préliminaire de (*Jean le Rond*) *d'Alembert*, ou l'Encyclopédie méthodique, Paris 1784/5 de *d'Alembert* et ses Eléments de philosophie [Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie, 2e éd. 4, Amsterdam 1759, p. 154; Œuvres 1, Paris 1821, p. 261] pour se rendre compte du point de vue auquel on se plaçait pendant la seconde moitié du 18e siècle, et apercevoir l'influence exercée par *d'Alembert* lui-même dans l'évolution de l'idée de nombre.*

ment jusqu'alors, vint ainsi se superposer la notion de *nombre réel*[39]) *quelconque,* servant de *mesure* aux grandeurs, en sorte que la *méthode de Descartes* aboutit finalement à l'*identification des notions de nombre et de grandeur.*

Sous l'influence de la généralité donnée ainsi à l'idée de nombre, les mathématiciens s'habituèrent à spéculer *directement* sur les nombres mesurant les grandeurs; peu à peu ils appliquèrent les résultats obtenus dans cette voie à l'étude des propriétés des figures géométriques, s'écartant ainsi de plus en plus du point de vue des anciens[40]) qu'ils finirent par abandonner tout-à-fait. Le dernier terme de cette évolution semble dû à *A. M. Legendre*[41]), qui démontre les propositions concernant la *similitude,* en raisonnant sur les *nombres* qui représentent les longueurs[42]), et en appliquant à ces nombres les théorèmes d'Arithmétique ou d'Algèbre supposés préalablement établis.

---

38) Parmi toutes les irrationnelles que la méthode nouvelle de *R. Descartes* introduisait en fait en Arithmétique, on prétendit pendant longtemps n'envisager que celles qui correspondent à des vecteurs pouvant être déduits les uns des autres par des constructions géométriques. Ainsi *Chr. Wolf* dit encore [Elem. math. [37]) 1, p. 91, col. b]: In Geometria et Analysi demonstrabitur, tales radices, quae actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam, consequenter eosque irrationales, cum ex hypothese rationales non sint. Il faut observer toutefois que la notion de construction géométrique semble avoir été à cette époque singulièrement détournée du sens que lui donnaient les Anciens; ainsi *Chr. Wolf* supposait que l'on peut construire des paraboles de tous les ordres, et obtenir par ce procédé les expressions de la forme $\sqrt[m]{x}$, où m est un nombre naturel quelconque [Elementa analyseos mathematicae, pars I, contenus dans Elem. math. [37]) 1, p. 539, col. b et p. 540 col. a].

39) *C'est *R. Descartes* qui a le premier employé le mot *réel* dans le sens que nous lui donnons [Géom. [22]), livre 3; Œuvres 6, p. 453].*

40) *Déjà les Grecs de la période de décadence avaient suivi la même voie pour les nombres rationnels et les premières irrationnelles envisagées. Les Hindous s'étaient particulièrement distingués par la désinvolture avec laquelle ils jonglaient avec les symboles numériques. Les Arabes nous avaient transmis la science des uns et des autres, si bien qu'avant *F. Viete* on s'était déjà souvent écarté de la doctrine rigoureuse des Grecs de la période classique, à laquelle *R. Descartes* nous avait ramenés tout en l'universalisant par l'invention de sa méthode nouvelle.*

41) *A. M. Legendre,* Eléments de Géométrie, Paris an II, (12ᵉ éd. 1823), livre 3 et Note IV. **S. F. Lacroix* fait précéder ses Eléments de Géométrie, Paris an V, d'un Supplément à son Traité élémentaire d'Arithmétique, contenant une théorie des proportions. Dans ses Eléments de Géométrie, Paris 1843, 2ᵉ éd. Paris et Bruxelles 1867, *E. Catalan* introduit plus systématiquement encore, au lieu des relations entre les grandeurs, les relations entre les nombres qui les mesurent.*

42) Voir *O. Stolz,* Math. Ann. 22 (1883), p. 517 (en note). *O. Stolz* est

5. Point de vue métrique. Lorsqu'on se place au point de vue *métrique*, couramment adopté pendant plus de la moitié du 19e siècle, et qui est encore aujourd'hui celui de plusieurs Géomètres, tous les nombres procèdent de la mesure des divers vecteurs OA d'une droite orientée[43]) par le choix d'une origine O et d'un vecteur unité OU. Ce dernier est mesuré par le nombre 1, le vecteur symétrique $\overline{OU'}$ par le nombre — 1. Un vecteur OA est mesuré par un nombre a positif ou négatif[44]), suivant que le sens de OA est celui de $\overline{OU}$ ou celui de OU', la valeur absolue de a mesure le rapport des longueurs OA et OU. Ce rapport peut d'ailleurs être obtenu de diverses manières à chacune desquelles correspond un *algorithme* déterminé.

Si l'on applique aux deux longueurs quelconques $\overline{OA}$ et $\overline{OU}$ le procédé donné par *Euclide* pour déterminer la plus grande mesure commune de deux vecteurs commensurables (procédé identique à la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres naturels) et que l'on désigne par x le rapport de OA à $\overline{OU}$, par b_0 le plus grand entier positif ou nul contenu dans x, par x_1 le nombre défini par l'égalité $x = b_0 + \frac{1}{x_1}$, par b_1 le plus grand entier contenu dans x_1, par x_2 le nombre défini par l'égalité $x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}$, ..., le

loin de critiquer *A. M. Legendre* comme l'avaient fait *A. F. Möbius* [Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, p. 190; Werke 1, Leipzig 1885, p. 176] et *H. Hankel* qui qualifiait ce procédé de ὕστερον πρότερον [Theorie der complexen Zahlsysteme, Leipzig 1867, p. 66].

43) *Cette convention sur les signes ne se trouve nullement dans la Géométrie de *R. Descartes* [*P. Tannery*, Interméd. math. 4 (1897), p. 126 (Question 1080)]. Il se borne à interpréter géométriquement les racines négatives des équations, comme l'avaient fait, avant lui, *F. Viète* et *A. Girard*. Mais appliquée à une équation représentant une courbe, cette interprétation devait naturellement amener à attribuer aux deux variables des valeurs négatives aussi bien que positives. Toutefois la convention ne s'est établie que peu à peu et lentement.*

44) **R. Descartes*, le premier, désigne par une seule et même lettre un nombre quelconque positif ou négatif, mais il ne semble nullement s'astreindre à appliquer systématiquement cette convention, même lorsqu'elle abrège beaucoup la discussion [*P. Tannery*, Abh. Gesch. Math. 9 (1899), p. 513]. Dans sa Géométrie[22]) [livre 3; Œuvres 6, p. 459], pour traiter les équations dont les coefficients peuvent avoir deux signes, il remplace le signe par un point, et indique le résultat du calcul dans le cas de chaque signe pris isolément. De *I. Newton*[36]) à *A. L. Cauchy* [Cours d'Analyse de l'Ecole polyt. 1, Analyse algébrique, Paris 1821, p. 5, 27; Œuvres (2) 3, Paris 1897, p. 19, 38], le nom de *nombre* est, en général, réservé aux nombres positifs. *Newton* lui-même parle toutefois déjà de nombres négatifs [Arith. univ. [36]), p. 180]; dans sa trad. *N. Beaudeux*[36]) 2, 2 ne traduit pas „numerum negativum"; il écrit seulement — 5.*

rapport x se présentera sous forme de *fraction continue régulière*[45])

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots}};$$

b_0 est le premier terme de la fraction continue, $b_1, b_2, \ldots$ en sont les *quotients incomplets*, $\frac{1}{b_n}$ est la n^e fraction composante ou le $(n+1)^e$ terme. Le procédé s'arrête, ou non, suivant que les longueurs $\overline{OA}$ et $\overline{OU}$ sont commensurables ou incommensurables. Dans le premier cas, on dit que la fraction continue est *finie* (c'est à dire, formée d'un nombre fini de fractions composantes), dans le second cas, on dit qu'elle est *infinie*.

*Si l'on adjoint au vecteur-unité $\overline{OU}$ les vecteurs auxiliaires $\overline{OU_1}, \overline{OU_2}, \ldots, \overline{OU_n}$ de longueurs égales à $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 a_2}, \cdots, \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \cdots$ où $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ désignent des nombres naturels arbitrairement fixés suivant une loi déterminée, on peut aussi obtenir le rapport envisagé x sous la forme[46])

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} + \cdots = \alpha_0 + \cfrac{\alpha_1 + \cfrac{\alpha_2 + \cfrac{\alpha_3 + \cdots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des nombres naturels que l'on détermine successivement, dans l'ordre indiqué, de façon que l'on ait $\alpha_0 \leqq x < \alpha_0 + 1$, et que les numérateurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ soient plus petits que les dénominateurs correspondants $a_1, a_2 \ldots$. Cet algorithme, auquel on a donné le nom de *fraction continue ascendante* [cf. I 4] n'a rien de commun avec le précédent; il peut arriver qu'il soit illimité, quand bien même $\overline{OA}$ et $\overline{OU}$ sont commensurables, en sorte que la distinction essentielle entre longueurs commensurables et incommensurables ne s'y réflète pas de la même façon que dans l'algorithme des fractions continues.*

Quand on prend tous les nombres naturels $a_1, a_2, \ldots$ égaux à un même nombre naturel a, le rapport envisagé se présente sous

45) On dit aussi parfois *ordinaire*, au lieu de *régulière*; *H. E. Heine* disait [Handbuch der Kugelfunktionen, Berlin 1861; 2e éd. 1, Berlin 1878, p. 264] du développement d'un nombre en fraction continue régulière que c'est le développement *vrai* de ce nombre; ce développement vrai est *univoque* [cf. I 4].

46) Cf. *G. Cantor*, Z. Math. Phys. 14 (1869), p. 124.

la forme d'une *fraction systématique*, limitée (I 1, **25**) ou illimitée, à base a [cf. n° **11**],

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a^n} + \cdots;$$

pour $a = 2$, on obtient une *fraction dyadique*[47]), pour $a = 10$ on obtient une *fraction décimale*, pour $a = 60$ une *fraction sexagésimale*. On conçoit une infinité d'algorithmes analogues à ceux que nous venons de mentionner et qui sont les plus usuels; tous les nombres se présentent sous la forme d'un de ces algorithmes composé d'un nombre fini ou infini de fractions se déduisant les unes des autres d'après une règle déterminée.

Deux nombres sont *égaux* lorsqu'ils servent de mesure au même vecteur $\overline{OA}$; ils sont *symétriques* (cf. I 1, **17**) lorsqu'ils servent de mesure à deux vecteurs symétriques $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$. L'ordre de grandeur de deux nombres inégaux a, b, est réglé par la position relative des extrémités A, B des deux vecteurs OA, $\overline{OB}$ auxquels a, b servent de mesure. Les nombres qui sont représentés par une fraction, et ceux qui leur sont égaux (qu'ils soient formés d'un nombre fini ou infini de termes), sont les *nombres rationnels*, ils mesurent les vecteurs commensurables au vecteur-unité. Tout nombre qui n'est pas rationnel est dit *irrationnel;* les nombres irrationnels mesurent les vecteurs incommensurables au vecteur-unité (I 1, **23**). Le fait que les nombres irrationnels sont représentés par une suite illimitée de fractions ne semble pas devoir être un obstacle à leur introduction en Arithmétique, puisque, dans certains cas, il en est de même pour les nombres rationnels eux-mêmes.

Jusqu'ici tout est clair dans cette doctrine métrique, mais voici la difficulté. Il ne suffit évidemment pas de généraliser les nombres naturels, en *définissant* convenablement des nombres qui les comprennent comme cas particulier; il faut encore montrer que l'on est en droit d'effectuer, sur les nombres généralisés, les diverses opérations de l'Arithmétique suivant des règles déterminées, par exemple suivant les règles établies pour les nombres naturels. Or, ici la *démonstration* est impossible. On a mis assez longtemps à s'en apercevoir; la difficulté sautait cependant aux yeux, mais on a cru pouvoir la tourner, soit en faisant l'hypothèse gratuite que non seulement à chaque vecteur correspond un nombre, ce qui résulte de la définition même du nombre, mais qu'inversement à chaque symbole obtenu en combinant, par les règles de l'Arithmétique, les algorithmes représentant les nombres,

47) Ces fractions correspondent au système *binaire* de numération [cf. I 1, **9** note 78].

correspond aussi *nécessairement* un vecteur, auquel cas évidemment la démonstration cherchée serait aisée. A ceux qui doutaient de la légitimité de cette hypothèse, les uns répondaient que cette réciproque avait un caractère d'évidence géométrique qui dispensait de tout éclaircissement, d'autres prétendaient éclaircir la question au moyen de considérations d'ordre métaphysique sur la continuité, la notion de limite et les infiniment petits, qui n'aboutissaient finalement qu'à l'obscurcir davantage. Puisque la démonstration de l'hypothèse est impossible, c'est à un *postulat* qu'il faut faire appel, comme l'ont les premiers mis en pleine lumière *G. Cantor* et, presque simultanément, *R. Dedekind*. Ce n'est qu'en vertu d'un postulat qu'à tout nombre représenté par un des algorithmes envisagés correspond un vecteur [48]). Sans doute, complétée par ce postulat, la doctrine métrique redevient rigoureuse, mais elle cesse alors d'être lumineuse comme toute doctrine dans l'exposé de laquelle il est nécessaire de faire intervenir des postulats étrangers à son objet. On verra plus loin (n° 9) comment on a cherché à éviter cet écueil.

6. Point de vue de Ch. Méray. Cependant, plusieurs années avant que *G. Cantor* n'eût mis ce fait en évidence, quelques mathématiciens, justement préoccupés des difficultés que nous venons de signaler et du manque de rigueur, et même de clarté, que présentaient ainsi les démonstrations de théorèmes qui soutiennent toute l'Analyse, cherchaient, indépendamment les uns des autres, à édifier une théorie nouvelle entièrement dégagée de toute considération impliquant des grandeurs concrètes et étaient ainsi amenés à approfondir la notion de nombre irrationnel. Ils parvinrent à pénétrer la véritable nature de ces nombres, et ce sont les résultats essentiels qu'ils ont obtenus que nous allons énumérer dans l'ordre où ils ont été *publiés*.

---

48) *G. Cantor* [Math. Ann. 5 (1872), p. 128 [1871]]; *R. Dedekind* [Stetigkeit und irrationale Zahlen, Brunswick 1872; 2e éd. 1892, p. 11]. La forme sous laquelle *R. Dedekind* énonce ce postulat permet de remplacer l'idée vague que l'on se fait trop souvent de la continuité d'une droite par une notion claire et précise. Elle consiste à admettre que quand on distribue tous les points d'une droite en deux groupes tels que chacun des points du premier groupe soit situé à gauche de chacun des points du second groupe, il y a toujours un point de la droite, et un seul séparant les deux groupes. D'après *S. Pincherle* [53]) [Giorn. mat. (1 18 (1880), p. 190] il ne saurait en être autrement; il ne faudrait toutefois pas en conclure que *K. Weierstrass* ait jamais partagé cette manière de voir. *F. Klein* [Sitzgsb. phys. medic. Soc. Erlangen 6 (1873/4), p. 52/64; Math. Ann. 22 (1883), p. 249; 37 (1890), p. 572] et *M. Pasch* [Math. Ann. 30 (1887), p. 129] ont fait leurs réserves à l'égard de la façon dont *R. Dedekind* énonce son postulat.

Ch. Méray est le premier[49]) qui ait trouvé un sens purement arithmétique à l'expression *nombre irrationnel.* Sous le nom de *variante*[50]), il envisage une suite formée par un nombre infini de nombres rationnels $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ (que nous supposerons ici à un seul indice pour fixer les idées) et, dans le cas où à tout nombre rationnel positif ε arbitrairement fixé, correspond un indice n *à partir duquel* la différence $v_{n+p} - v_n$ reste plus petite que ε en valeur absolue, quelle que soit la loi de variation relative imposée aux indices n et $p > 0$, pendant que le premier croît indéfiniment, il convient de *dire* que la variante v (la suite infinie $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$) est convergente.

*Deux variantes convergentes u, v, ou, si l'on veut, les deux suites correspondantes

$$u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots; \quad v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots,$$

sont dites *équivalentes,* lorsque la différence $u_m - v_n$ tend vers 0 quand les indices m, n augmentent tous deux indéfiniment d'une manière quelconque.

S'il existe deux nombres rationnels U, V tels que, *à partir* de valeurs convenables des indices m, n, les différences $U - u_m$, $V - v_n$, restent plus petites, en valeur absolue, qu'un nombre positif arbitrairement fixé, ces deux nombres U, V sont nécessairement égaux ou inégaux, suivant que les variantes u, v sont équivalentes ou non, et, dans cette dernière alternative, le signe de $U - V$ est celui que finit par conserver $u_m - v_n$. Lorsqu'il n'existe pas de nombres rationnels U, V, jouissant de cette propriété, rien n'empêche, si l'on juge qu'il y a avantage à le faire, *d'employer un langage figuré,* d'introduire des *nombres fictifs,* de les représenter par des *signes* quelconques, enfin de *dire* que ces nombres fictifs sont *égaux* ou *inégaux* suivant que les variantes convergentes u, v sont équivalentes ou non, et, dans ce dernier cas, de dire que le nombre fictif U est supérieur (plus grand) ou inférieur (plus petit) au nombre fictif V suivant que la différence $u_m - v_n$, dont le signe finit toujours par être constant, finit par rester positive ou négative.

Il n'est d'ailleurs pas difficile d'étendre à ces nombres fictifs toutes les opérations définies pour les nombres rationnels; elles correspondent à d'autres opérations déterminées spéciales, bien plus longues à énoncer

49) Revue des sociétés savantes: sc. math. (2) 4 (1869), p. 284 [Mars-Avril].

50) **Ch. Méray* disait alors: *variable progressive.* Il a remplacé cette expression par celle de *variante* dans son Nouveau précis d'Analyse infinitésimale, Paris 1872, p. 1 et a conservé depuis la même dénomination [Ann. Ec. Norm. (3) 4 (1887), p. 341; Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale 1, Paris 1894, p. 23].*

seulement, mais que l'on pourrait exécuter sur les suites de nombres rationnels conduisant à la notion des variantes convergentes, puis, de là, à celle des nombres fictifs en création.

La définition des nombres fictifs embrasse effectivement les nombres rationnels, car chacun de ces derniers a peut être envisagé, si l'on veut, comme créé par la suite $a, a, a, \dots$ à laquelle correspond manifestement une variante *convergente.*

Finalement rien ne s'oppose à ce que les mêmes spéculations se déroulent sur des suites formées par des nombres fictifs (en mélange avec des nombres rationnels s'il y a lieu). On définit ainsi (toujours au sens figuré qui leur est propre), autant de nombres fictifs que l'on veut.

Il ne reste plus, pour être en droit d'assimiler entièrement ces nombres fictifs aux nombres rationnels, qu'à se convaincre de l'avantage qu'il y a à faire usage, en Analyse, du langage abrégé que permet leur définition. Cet avantage apparaît d'ailleurs immédiatement par le caractère de plus grande universalité [51]) qu'il permet de donner aux diverses propositions que l'on rencontre; les énoncés de ces propositions prennent ainsi un tour plus direct, plus abrégé et plus simple [52]).

Tous les nombres fictifs dont on vient de retracer la genèse sont les *nombres réels;* ceux qui ne sont pas rationnels sont dits *irrationnels:* leur véritable nature se dégage nettement des principes formulés par *Ch. Méray.**

7. Point de vue de K. Weierstrass. *Dans ses leçons [53]), professées à l'Université de Berlin, *K. Weierstrass* appelait *quantité numérique* [54])

---

51) *Déjà la proposition que tout nombre rationnel N a une racine carrée, n'est pas vraie quand on laisse aux mots leur sens littéral. En l'énonçant comme vraie, on exprime le *fait positif* que l'on peut imaginer une infinité de variantes convergentes équivalentes u, c'est à dire de *suites* $u_1, u_2, \dots, u_m, \dots$, telles que les carrés u_m^2 diffèrent de N, en valeur absolue, de moins qu'un nombre positif ε, arbitrairement fixé aussi petit que l'on veut, à partir d'un indice $m = \mu$ déterminé par le choix de ε.*

52) *Au fond, *Ch. Méray* ne sépare pas l'extension apportée à la notion de nombre par la conception des nombres irrationnels, avec ses motifs et ses conséquences, des extensions qu'ont procurées, d'une part la notion des nombres fractionnaires et d'autre part la notion des nombres relatifs (qu'il appelle *qualifiés*). Chacune de ces notions englobe les précédentes, et il en est de même, ensuite, de la notion de nombre complexe.*

53) Quelques indications sur les fondements de la doctrine de *K. Weierstrass* ont été publiées par *E. Kossak* [Progr. Friedr.-Werderschen Gymn. Berlin 1872]; *E. Kossak* avait suivi le Cours de *K. Weierstrass* pendant le semestre d'hiver 1865/66. *S. Pincherle* a développé cette doctrine [Giorn. mat. (1) 18 (1880), p. 178; pour ce qui concerne les nombres irrationnels, voir p. 185 et suiv.]. Voir aussi *O. Biermann,* Theorie der analyt. Funct., Leipzig 1887, p. 19. Il importe toute-

tout ensemble dont on se donne les éléments et le nombre de fois que chaque élément y figure. Cette définition ne suppose nullement que les éléments donnés sont en nombre fini, mais elle suppose que chaque élément ne figure qu'un nombre fini de fois dans l'ensemble. Quand un ensemble est formé d'un nombre fini d'éléments, il est regardé comme égal à la somme de ses éléments; deux ensembles d'un nombre fini d'éléments sont égaux lorsque les sommes respectives de leurs éléments sont égales.

Limitons-nous au cas où les éléments de la quantité numérique sont 1 et des *quantièmes.* Nous dirons, dans ce cas, que la quantité numérique est *absolue.* On regardera une telle quantité numérique comme n'étant pas altérée, lorsqu'on y remplace un ensemble partiel quelconque, formé d'un nombre fini d'éléments, par un ensemble égal au sens précédent. Pour être en droit d'assimiler les quantités numériques absolues à des *nombres absolus,* il faut se limiter à celles d'entre elles pour lesquelles on peut définir l'égalité et le sens de l'inégalité, de façon à pouvoir les comparer les unes aux autres, ainsi qu'aux nombres rationnels absolus; il faut aussi montrer que, par une définition convenable des opérations fondamentales de l'Arithmétique, les quantités numériques envisagées se trouvent soumises aux mêmes règles de calcul que les nombres rationnels absolus. Ces circonstances se présenteront pour les quantités numériques absolues qui seront spécifiées un peu plus loin comme *finies.*

On dit qu'un nombre rationnel absolu r est contenu dans une quantité numérique absolue a lorsqu'on peut distraire de a un ensemble partiel α égal à r. On dit qu'une quantité numérique absolue est *finie,* lorsqu'on peut assigner un nombre rationnel R tel que tout nombre rationnel r contenu dans a soit plus petit que R.

Deux quantités numériques absolues finies a, b sont dites *égales,* lorsque *chaque* nombre rationnel absolu contenu dans a est contenu dans b, et que *chaque* nombre rationnel absolu contenu dans b est contenu dans a. Lorsque deux quantités numériques absolues finies a, b ne sont pas égales, il existe nécessairement au moins un nombre rationnel absolu, qui est ou bien contenu dans a sans être contenu dans b, ou bien contenu dans b sans être contenu dans a. Dans le premier cas on dit que a est plus grand que b, dans le second cas on dit que a est plus petit que b.

On appelle *somme* de deux quantités numériques absolues finies

---

fois de remarquer que ces publications n'ont pas été faites sous la direction de *K. Weierstrass* lui-même [48]).

54) „Zahlengrösse."

a et b, la quantité numérique c définie par l'ensemble dont les éléments sont ceux qui figurent dans a ou b, chacun de ces éléments étant pris un nombre de fois égal au nombre de fois qu'il figure dans a augmenté du nombre de fois qu'il figure dans b. On appelle *produit* de deux quantités numériques absolues finies a et b, la quantité numérique absolue c définie par l'ensemble dont les éléments s'obtiennent en formant de toutes les manières possibles le produit de chaque élément de a par chaque élément de b. On définit de même la somme et le produit d'un nombre *fini* quelconque de quantités numériques absolues finies; ces sommes et produits sont eux-mêmes des quantités numériques absolues *finies*.

On appelle *somme* d'un nombre infini de quantités numériques absolues $a, b, c, \ldots$ la quantité numérique absolue s définie par l'ensemble dont les éléments figurent dans l'une ou l'autre des quantités numériques $a, b, c, \ldots$, chacun de ces éléments e étant pris un nombre de fois n_e égal au nombre de fois qu'il figure dans a, augmenté du nombre de fois qu'il figure dans b, augmenté du nombre de fois qu'il figure dans $c, \ldots$; pour que la quantité numérique s soit finie et déterminée, il faut que chacun des éléments qui figurent dans s y figure un nombre *fini* de fois (en d'autres termes, il faut que chacun des nombres n_e soit fini); il faut, en outre, et il suffit que l'on puisse assigner un nombre N tel que la somme d'un nombre fini *quelconque* des quantités numériques envisagées $a, b, c, \ldots$ soit inférieur à N. Lorsque la somme s est finie, on peut l'obtenir en groupant comme on veut les quantités numériques $a, b, c, \ldots$, tout comme si elles étaient en nombre fini, chaque groupe pouvant d'ailleurs être formé par un nombre fini, ou par un nombre infini de quantités numériques. Il résulte de la définition même de la *somme* d'un nombre fini ou infini de quantités numériques absolues déterminées, que *toute quantite numérique absolue est la somme des éléments qui y figurent.*

K. Weierstrass poursuivait l'exposition de sa doctrine en considérant toujours les nombres relatifs comme un *couple* de deux nombres absolus qui ne jouent d'ailleurs pas le même rôle (chacun d'eux est affecté d'un signe déterminé). Au reste, ce point de vue ne diffère pas essentiellement de celui qui a été exposé (I 1, **17** et **22**) pour les nombres relatifs entiers (ou fractionnaires).

Il importe d'observer que ce qui, aux yeux de *K. Weierstrass* justifiait l'extension de la notion de quantité numérique à des ensembles formés d'un nombre *infini* d'éléments, était le désir de donner, *dans tous les cas,* une solution à des problèmes qui, sans cette extension, n'en comporteraient que dans certains cas particuliers (la résolution de l'équation binome du second degré à coefficients entiers, en fournit un premier exemple).*

En cherchant à simplifier la doctrine des quantités numériques de *K. Weierstrass*, *G. Cantor* s'est rencontré[55]) avec *Ch. Méray*. *H. E. Heine* a exposé cette doctrine d'une façon très claire[56]) et avec plus de détails que ne l'avait fait *G. Cantor*, en utilisant quelques communications verbales de *H. A. Schwartz* et de *G. Cantor*; *G. Cantor* a ensuite, dans un second mémoire[57]), modifié quelque peu son point de vue[58]), afin de mettre encore, si possible, davantage en relief le fait que, dans la doctrine arithmétique, la définition du nombre irrationnel est entièrement indépendante de tout ce qui se rapporte à l'idée de limite[59]).

---

55) *G. Cantor* [48]), Math. Ann. 5 (1872), p. 123 [Déc. 1871].

56) J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 173 [Oct. 1871]. Comme *Ch. Méray*, *H. E. Heine* insiste sur le caractère *conventionnel* des nombres irrationnels. Ce caractère apparaissait aussi, quoique moins explicitement, dans les cours professés par *K. Weierstrass* [53]), puisque la définition de *K. Weierstrass* revient au fond à admettre comme postulat que toute suite infinie monotone croissante admet une borne supérieure (nº **20**) ou, si l'on veut, à *créer* cette borne supérieure quand elle n'existe pas; *K. Weierstrass* n'énonçait toutefois pas ce postulat sous cette forme.

57) Math. Ann. 21 (1883), p. 565/8 [Oct. 1882]. Dans ce mémoire, *G. Cantor* compare aussi les doctrines de *K. Weierstrass* et de *R. Dedekind* à la sienne propre. *H. Burkhardt* [Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 46 (1901), p. 179] cherche à mettre en évidence que des trois définitions du nombre irrationnel c'est celle de *R. Dedekind* qui est la plus avantageuse lorsqu'on cherche à obtenir des valeurs approchées d'un nombre irrationnel donné; celle de *K. Weierstrass* est, au contraire, la moins avantageuse. Il convient toutefois d'observer que les nombres irrationnels que l'on rencontre dans la pratique ne se présentent presque jamais sous forme de coupures.

58) La notion de *suite fondamentale* (*Fundamentalreihe*) de *G. Cantor* est identique à celle de *variante convergente* de *Ch. Méray*; la notion de *suite élémentaire* de *H. E. Heine* est identique à celle de *variante infiniment petite* de *Ch. Méray*. *La terminologie adoptée par *G. Cantor* et *H.E. Heine* permet mieux que celle de *Ch. Méray* de séparer nettement l'exposé de la généralisation de la notion de *nombre* de l'exposé du développement de l'idée de *limite*.*

59) Le second point de vue auquel se place *J. Tannery* dans le premier chapitre de son Introd. à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886 [Oct. 1885], p. 24, se rattache directement aux doctrines de *Ch. Méray* et de *G. Cantor*. L'exposé de *O. Stolz* [8]), [Allg. Arith. 1, p. 97; Theor. Arith., p. 138]. est très élémentaire, les fractions systématiques lui servent de point de départ. La marche suivie par *P. Bachmann* [Vorles. über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892, p. 6] offre peut-être certains avantages au point de vue de l'enseignement; elle consiste essentiellement à définir les nombres irrationnels et les opérations à effectuer sur ces nombres, au moyen de *deux* suites de nombres rationnels, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, telles que $b_n > b_{n+1} > a_{n+1} > a_n$ et que, quel que soit le nombre rationnel positif ε arbitrairement fixé, on ait

8. Point de vue de R. Dedekind. La notion purement arithmétique de *coupure*[60]) est due à *R. Dedekind.* Elle permet de définir le nombre irrationnel sans faire appel à la suite infinie ou à l'ensemble de nombres rationnels qui le représentent dans la doctrine de *Méray-Cantor* ou dans celle de *Weierstrass.*

R. Dedekind remarque tout d'abord que l'on peut *séparer* d'une infinité de manières l'ensemble de tous les nombres rationnels en deux ensembles tels que chaque nombre (rationnel) du premier ensemble soit plus petit que chaque nombre (rationnel) du second: chacune de ces séparations constitue une *coupure.* Lorsque, parmi les nombres du premier ensemble, il y en a un qui est plus grand que tous les autres, ou que, parmi les nombres du second ensemble, il y en a un qui est plus petit que les autres, on dit que ce nombre (rationnel) correspond à la coupure envisagée, ou encore qu'il produit cette coupure. Dans le cas contraire qui se présente déjà dans l'extraction des racines, on convient de faire correspondre un symbole déterminé à la coupure, et l'on *dit* encore que ce symbole produit la coupure. Comme cette correspondance permet de comparer les symboles ainsi définis, soit entre eux, soit aux nombres rationnels, et de montrer que l'on peut effectuer sur ces symboles les mêmes opérations que sur les nombres rationnels (en déduisant des coupures correspondant aux symboles donnés d'autres coupures correspondant aux symboles cherchés), il est naturel de *dire* que les nouveaux symboles représentent des nombres tout comme les nombres rationnels eux-mêmes[61]).

Dans son Traité d'arithmétique, *Joseph Bertrand*[62]) avait déja insisté sur ce que le nombre qui mesure une *grandeur incommensu-*

$|b_\nu - a_\nu| < \varepsilon$ à partir d'un indice ν dont la valeur dépend du choix de ε; un nombre irrationnel est alors représenté par l'ensemble des deux suites envisagées.

60) *R. Dedekind*, Stetigkeit[48]), p. 12.

61) *R. Dedekind* s'est contenté de développer les parties essentielles de sa doctrine. *M. Pasch* a donné plus de détails [Einleitung in die Diff. und Integralrechnung, Leipzig 1882, p. 1/14]. Voir aussi Math. Ann. 40 (1892), p. 149, où les quelques modifications faites par *M. Pasch* à son premier exposé du point de vue de *R. Dedekind*, ont eu pour objet de mettre en évidence que l'emploi de locutions empruntées à la géométrie n'infirme en rien le caractère purement arithmétique de ce point de vue. Ce caractère est mis en pleine lumière dans l'exposé purement arithmétique dû à *G. Ricci* [Giorn. mat. (2) 4 (1897), p. 22] et dans celui d'*A. Capelli* [id. p. 209] qui n'en diffère que peu; l'introduction du symbole (a_1, a_2) pour désigner le nombre défini au moyen des classes de nombres (a_1), (a_2) fournit un algorithme qui facilite l'exposé de la théorie des opérations.

62) 1e éd. Paris 1849; 11e éd. Paris 1895, p. 233, 271.

rable avec l'unité, peut être défini en indiquant *quels sont les nombres rationnels plus petits ou plus grands que lui.* Cette définition suppose toutefois essentiellement l'existence des grandeurs incommensurables et n'implique donc aucunement la notion purement arithmétique[63]) de coupure telle que l'a donnée *R. Dedekind,* elle en est seulement la traduction géométrique.

Après avoir défini les nombres irrationnels par des coupures, tout comme l'avait déjà fait *R. Dedekind,* ce qui permet de mettre nettement et rapidement en évidence l'ordre de succession de ces nombres, *J. Tannery*[64]) introduit les *variantes convergentes* (ou *suites fondamentales*) *qui correspondent à ces coupures,* montre que l'on peut établir soit sur les ensembles (*Dedekind*), soit sur les variantes (*Méray*) la théorie de opérations à effectuer sur les nombres rationnels et rapproche ainsi les points de vue de *Ch. Méray* et de *R. Dedekind.*

$_*$*E. Amigues* a mis en évidence[65]) les avantages que présente la méthode directe et exclusive des ensembles (*méthode de Dedekind*) pour établir les règles des opérations arithmétiques sur les nombres irrationnels.*

Il importe de ne pas perdre de vue la nature essentiellement symbolique des *nombres réels.* Que l'on se place au point de vue de *Méray-Cantor,* à celui de *Weierstrass,* ou à celui de *Dedekind,* rien dans la définition d'un nombre réel ne permet de se le représenter comme correspondant *parfaitement* (I 1, **1**) à une grandeur déterminée[66]); les calculs effectués sur des nombres réels n'ont pour objet que ces symboles eux-mêmes. Les nombres réels suffisent toutefois

---

63) Was sind und was sollen die Zahlen, Brunswick 1888; 2e éd. 1893; p. XIV de la préface [1887] de la 1e édition.

64) Introd.[59]) 1e éd., p. 24; voir aussi Leçons d'arith., Paris 1894, p. 378.

65) $_*$Ann. Fac. sc. Marseille 2 (1892), p. 33; *J. Tannery* se place d'ailleurs entièrement au point de vue de *R. Dedekind* dans la seconde édition de sa théorie des fonctions qui est sous presse.*

66) Si l'on néglige cette distinction capitale entre les nombres réels quelconques et les nombres qui représentent des grandeurs [Voir par ex. *R. Lipschitz,* Lehrb. der Analysis 1, Bonn 1877, sect. 1] on s'expose à des critiques du genre de celles que *E. Illigens* a faites aux doctrines de *K. Weierstrass* et de *G. Cantor* [Math. Ann. 33 (1889), p. 155; 35 (1890), p. 451; Réplique de *G. Cantor* id. 33, (1889), p. 476]. On pourra consulter à ce sujet *A. Pringsheim,* Jahresb. deutsch. Math. Ver. 6^1 (1897), p. 78. Si au contraire on tient compte de cette distinction capitale, les critiques tombent d'elles-mêmes. Il est d'ailleurs impossible de concevoir, comme cherche à le faire *E. Illigens*, des *quantités* qui seraient indépendantes de toute représentation spatiale [*A. Pringsheim*, Sitzgsb. Akad. München 27 (1897), p. 322 en note].

à la mesure des grandeurs[67]); ils permettent même de préciser ce que cette notion de mesure des grandeurs contient d'intuitif. C'est ensuite un tout autre problème que de fixer les conditions sous lesquelles à un nombre réel (symbole) donné, correspond (ou non), une des grandeurs d'une espèce déterminée[68]), et la façon dont aux relations entre ces symboles correspondent alors des relations entre ces grandeurs[69]).

9. Point de vue de Paul du Bois-Reymond. Postulat d'Ascoli. A ses débuts, la direction arithmétisante représentée par *K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor* et *H. E. Heine*, en Allemagne, et par *Ch. Méray* en France, n'a sans doute rencontré aucun adversaire[70]) plus résolu que *Paul du Bois-Reymond*. La nouvelle doctrine commençait à peine à se répandre que déjà il cherchait à en ébranler les fondements.

Pour *Paul du Bois-Reymond*, la connexion absolue des deux notions de nombre et de grandeur *mesurable* (qu'il appelle *linéaire*), semble déjà s'imposer à celui qui étudie leur développement parallèle dans le passé; c'est donc aller contre le développement historique des sciences mathématiques que d'essayer de séparer l'étude du nombre de celle des grandeurs mesurables, en construisant d'abord l'échelle des nombres pour y rattacher ensuite les grandeurs mesurables au moyen du *postulat de Cantor-Dedekind*. Il lui semblait d'autre part

---

67) Toutes les démonstrations de ce théorème s'appuient d'ailleurs sur *l'axiome d'Archimède* [cf. notes 1, 148]. Voir *S. Pincherle* [Giorn. mat. (1) 18 (1880), p. 189], *G. Cantor*[48]) [Math. Ann. 5 (1872), p. 127], *J. Tannery* [Arith.[64]) p. 435]. Les relations entre nombre et grandeur ont été étudiées avec soin par *O. Hölder* [Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 1] et par *O. Stolz*[8]) [Allg. Arith. 1, p. 121; Theor. Arith. p. 172]. *E. von Huntington* a montré [Diss. Strasbourg, éd. Brunswick, 1901] comment on peut développer la doctrine des nombres réels (et complexes) en opérant systématiquement avec des vecteurs.

68) *Si, par exemple, les grandeurs envisagées sont des vecteurs situés sur une même droite orientée, et ayant même origine, rien n'oblige de poser le *postulat de Cantor-Dedekind.* On pourrait, si l'on veut, poser tout au contraire qu'à chaque *nombre algébrique* seulement correspond un vecteur; toutes les constructions des anciens pourraient être effectuées dans l'espace constitué en posant ce postulat pour chacune des droites que l'on envisage [*R. Dedekind,* Was sind[63]) p. XII de la préface de la 1e édition].*

69) *A. Pringsheim* [Sitzgsb. Akad. München 27 (1897), p. 325].

70) Il est assez curieux de constater que *H. Hankel*, le champion du principe de permanence (cf. I 1, **11**), estimait, lui aussi [complexe Zahlsyst.[42]), p. 46], qu'une théorie des nombres irrationnels faisant entièrement abstraction de toute notion de grandeur, devait être sinon impossible, du moins très difficile à réaliser pratiquement, et que, si l'on y parvenait jamais, ce ne saurait être qu'en faisant usage d'artifices peu naturels dont il ne serait pas aisé de démêler la portée.

devoir insister sur les conséquences désastreuses que la doctrine arithmétisante ne pouvait manquer d'avoir sur la constitution définitive de l'Analyse; il s'élevait contre le caractère *arbitraire* des définitions; pour lui, le fait d'abstraire complètement la notion de nombre de celle de quantité était rabaisser l'Analyse au rang d'un simple *jeu*, où les signes que l'on combine ont un sens aussi arbitrairement fixé[71]) que celui que l'on donne aux pièces d'un échiquier[72]). Pourquoi, disait-il, fixer un sens plutôt qu'un autre? On aura beau dire que chacun finira bien par en apercevoir la raison, que la théorie sera justifiée par les applications qu'elle rend seule possibles; bien peu se déclareront satisfaits, bien peu se résigneront à édifier une Analyse purement verbale en renonçant à se guider, ne serait-ce que bien vaguement, à la lumière de leur intuition; et ceux mêmes qui accordent volontiers que ce guide ne saurait apporter aucun argument décisif, hésiteront certainement à se priver entièrement de son concours.

Est-il d'ailleurs bien certain que ce soit un véritable postulat qu'exprime la proposition de *Cantor-Dedekind*, ou, si l'on veut, la proposition que *Paul du Bois-Reymond* préférait lui substituer, et d'après laquelle à toute fraction décimale (limitée ou illimitée), correspond un point déterminé et un seul, sur toute droite orientée[73])? Cette correspondance ne résulte-t-elle pas plutôt de nécessités d'ordre psychologique? *Pour élucider ce point fondamental, *Paul du Bois-Reymond* imagine deux philosophes qu'il qualifie d'*idéaliste* et d'*empiriste*, les met aux prises et nous fait assister à leurs débats. L'idéaliste cherche à *démontrer* la correspondance envisagée, mais il ne peut y parvenir et finalement cette correspondance revêt pour lui un caractère de nécessité inéluctable; il reconnaît qu'elle résulte de la façon dont il pose la notion même d'espace. Pour l'empiriste il n'y a pas de point sur une droite, mais seulement des vecteurs que l'on peut concevoir aussi petits que l'on veut; la droite elle-même est, si l'on veut, un cylindre dont le rayon de base peut être conçu aussi petit que l'on veut; dès

---

71) Lorsqu'on se place au point de vue du nombre ordinal (I 1, 4), l'échelle des nombres réels que l'on obtient en Arithmétique, et avec laquelle on apprend à calculer d'après des règles qui peuvent sembler fixées arbitrairement, donne effectivement naissance à un pur formalisme, entièrement dégagé de toute intuition.

72) *P. du Bois-Reymond,* Die allgemeine Functionentheorie, 1, Tubingue 1882; trad. *G. Milhaud* et *A. Girod,* Nice 1887, p. 61. *Voir aussi *L. Couturat,* De l'infini math., Paris 1896, p. 322, 331.*

73) Comme tout nombre irrationnel peut être représenté par une fraction systématique infinie, à base quelconque, ce postulat revient au fond à celui de *G. Cantor.*

qu'on fixe ce rayon r, toute partie de la droite de longueur $< r$ peut être envisagée comme un point au même titre que le cylindre est envisagé comme une droite. Il est d'ailleurs aisé de voir qu'à tout nombre $r > 0$ correspond un nombre naturel p tel que si, dans une fraction décimale illimitée déterminée, on laisse de côté toutes les décimales à partie de la p^e, la fraction décimale limitée ainsi obtenue et celle qu'on en déduit en augmentant sa dernière décimale d'une unité diffèrent l'une de l'autre de moins de r; à ces deux fractions décimales limitées et à la fraction décimale illimitée envisagée qu'elles enserrent manifestement, *correspond* donc *un point*, au sens actuel du mot. Quand r varie, p varie, ce qu'on entend par *point* varie, *mais la correspondance subsiste.* Ainsi pour l'empiriste comme pour l'idéaliste, quoique pour des raisons bien différentes, à toute fraction décimale illimitée correspond nécessairement un point sur une droite orientée.*

Ce n'est pas ici qu'il convient d'expérimenter la valeur de l'argumentation de *Paul du Bois-Reymond* au point de vue de l'épistomologie[74]) (théorie de la connaissance). Quelle que soit la conclusion à laquelle elle incite le *philosophe,* elle ne saurait guère qu'affermir finalement le *mathématicien* dans l'idée que pour fonder une théorie du nombre irrationnel sur l'étude des grandeurs mesurables, il est indispensable de faire appel à quelque proposition (axiome, postulat ou hypothèse confirmée par l'expérience) remplaçant plus ou moins celle de *Cantor-Dedekind.*

Dans la doctrine du nombre irrationnel que *G. Ascoli* oppose à la doctrine arithmétisante, comme seule conforme à la nature des choses, ce postulat est le suivant[75]): Envisageons une suite infinie de vecteurs $\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2}, \ldots, \overline{a_n b_n}, \ldots$ *chacun* situé tout entier à l'intérieur du précédent et tels qu'à chaque entier rationnel positif ε, fixé aussi petit que l'on veut, corresponde un indice n à partir duquel les longueurs des vecteurs $\overline{a_n b_n}$ soient toutes inférieurs à ε: il existe un point, et un seul, situé à l'intérieur de *tous* ces vecteurs. En s'appuyant sur ce postulat, on peut édifier une théorie des nombres réels à l'abri des critiques formulées à la fin du n° **5**. Le point de vue de *G. Ascoli* serait donc légitime si l'intuition spatiale que nous avons a priori, était nette et précise, ou même pouvait être rendue telle par simple abstraction. Il ne semble pas toutefois qu'il en soit ainsi. Le nombre de ceux qui estiment que l'intuition sensible conserve toujours par elle-même quelque chose de flottant et d'imprécis a beaucoup augmenté dans

74) *P. du B-R.* Functh. [72]); trad. p. 31/169.

75) R. Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 28 (1895), p. 1060.

les dernières années; si, comme tout porte à le croire, cette opinion s'accentue encore, aucune doctrine analogue à celle de *G. Ascoli* ne parviendra à se substituer à la doctrine arithmétisante; la caractéristique de toute doctrine arithmétisante est précisément de suppléer à l'imprécision de l'intuition spatiale en constituant a priori, sans faire aucun appel à cette intuition, non plus qu'à toute autre intuition sensible, l'échelle des nombres réels, pour faire correspondre ensuite[76]) à cette échelle, au moyen d'un postulat, la suite (l'échelle) des points d'une droite; la notion de droite revêt ainsi le caractère de netteté et de précision qui lui manquait[77]) et que l'on est aujourd'hui en droit d'exiger de toute notion mathématique.

10. Point de vue de L. Kronecker. C'est en se plaçant à un point de vue tout différent que *L. Kronecker* a combattu la doctrine arithmétisante. Il la rejette, non pas parce qu'elle est arithmétisante[78]), mais au contraire, parce qu'elle ne l'est pas assez. Elle ne l'est pas assez, parce qu'elle conserve un certain nombre de notions artificielles dont la véritable origine est essentiellement distincte de celle de nombre naturel et qu'ainsi, dans cette doctrine, les propriétés des nombres et systèmes de nombres naturels, dont la connaissance constitue finalement toute l'Analyse, loin de pouvoir se déduire les unes des autres *au moyen d'un réseau d'identités,* comme l'exigerait notre entendement pour être pleinement satisfait, ne nous apparaissent reliées les unes aux autres que par des intermédiaires *étrangers à l'Arithmétique.* Le rôle joué par ces intermédiaires n'est d'ailleurs pas seulement un rôle secondaire, puisqu'il n'est en général pas possible de s'en défaire au moyen d'un nombre fini de transformations effectuées sur les nombres naturels eux-mêmes.

$_*$C'est pour suppléer à ce manque d'arithmétisation complète de la doctrine dite arithmétisante, que *L. Kronecker* a préconisé un changement de méthode qui aboutirait, s'il était réalisé, à une véritable révolution scientifique[79]).

---

76) *H. von Helmholtz* insiste aussi sur un autre avantage qu'offre cette méthode: c'est la certitude de pouvoir décrire, *avec telle approximation que l'on veut,* celles des relations entre objets réels auxquelles on peut appliquer le système de symboles qui constitue l'Arithmétique [Philos. Aufsätze, *Ed. Zeller* gewidmet, Leipzig 1887, p. 20; Wiss. Abh. 3, Leipzig 1895, p. 359].

77) Voir, par exemple, *F. Klein*[48]), Math. Ann. 37 (1890), p. 572.

78) Le mot *arithmétiser* est dû à *L. Kronecker* qui l'a employé dans le sens restreint conforme à sa doctrine [J. reine angew. Math. 101 (1887), p. 338; Werke 3^1, Leipzig 1899, p. 253].

79) $_*$*E. Netto,* Mathematical papers of the Chicago Congress 1893, éd. New-York 1896, p. 244.*

L. Kronecker prétend séparer nettement l'Analyse de la Géométrie et de la Mécanique. Elle doit en différer aussi bien par son objet (étude des propriétés des nombres naturels) que par sa *méthode* qui doit lui être propre. Tandis qu'en Géométrie et en Mécanique les quantités que l'on envisage sont naturellement ordonnées suivant leur ordre de grandeur, l'étude des propriétés des nombres naturels *nécessite des groupements tout différents* de ces nombres; c'est donc aller *contre la nature des choses* que de vouloir créer une doctrine comme celle que l'on a, bien à tort, désignée sous le nom d'arithmétisante, et qui prétend servir de base à la fois à l'étude du nombre naturel et à celle des grandeurs extensives; une telle doctrine ne saurait être qu'artificielle[80]).*

L'Analyse doit, d'autre part, se garder de considérations générales d'ordre logique étrangères à son objet. Les définitions ne doivent introduire en Analyse que des notions auxiliaires facilitant l'étude des divers groupes naturels que l'on forme pour étudier les propriétés des nombres. Ces notions auxiliaires doivent avoir un caractère arithmétique et non logique seulement, en sorte qu'elles ne sauraient porter que *sur des groupes dont chaque élément puisse être effectivement obtenu au moyen d'un nombre fini d'opérations*[81]), et non sur des groupes simplement déterminés par une convention logique non contradictoire.

*De même l'évidence logique d'un raisonnement ne suffit pas pour légitimer l'emploi de ce raisonnement en Analyse. Pour avoir donné une démonstration mathématique d'une proposition, il ne suffit pas, par exemple, d'avoir établi que la proposition contraire implique contradiction. Il faut donner un *procédé* permettant d'obtenir, au moyen d'un nombre fini d'opérations arithmétiques au sens ancien du mot, effectuées sur les éléments que l'on envisage, le résultat qu'énonce la proposition à démontrer. *C'est ce procédé qui constitue l'essence même de la démonstration; il ne vient pas s'y ajouter.*

Pour constituer l'Analyse, *L. Kronecker* adjoint aux nombres naturels des symboles $u, v, \dots$ (en nombre fini) soumis par définition, aux mêmes règles de calcul que ces nombres, et il se propose d'étudier les propriétés des nombres naturels, en même temps que celles des polynomes en $u, v, \dots$ ayant pour coefficients des nombres naturels

80) *A. Pringsheim* défend le point de vue opposé [Sitzgsb. Akad. München 27 (1897), p. 323 en note].

81) Festschrift zu *E. E. Kummer*'s Doctor-Jubiläum, Sept. 1881, éd. Berlin 1882 § 4; J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 11 en note; Werke 2, Leipzig 1897, p. 257; *J. Molk*, Thèse, Paris 1884, p. 6; Acta math. 6 (1885), p. 6.

déterminés. L'ensemble de ces polynomes forme ce qu'il appelle le *domaine d'intégrité* $[1, u, v, \ldots]$; chacun de ces polynomes est un *élément* de ce domaine d'intégrité. L'introduction des symboles $u, v, \ldots$ n'a d'ailleurs pour objet que de faciliter l'étude des groupes de nombres naturels; elle n'introduit aucune notion étrangère à celle de ces nombres; elle les relie seulement.

Il peut être avantageux, dans certaines recherches, de supposer que quelques uns des symboles $u, v, \ldots$ soient soumis à une ou plusieurs conditions déterminées; on envisagera, par exemple, le domaine d'intégrité $[1, u, v]$, où v est un symbole tel que $v + 1 = 0$, tandis que le symbole u n'est soumis à aucune condition restrictive; ou encore le domaine d'intégrité $[1, v]$ où quelque polynome en v (comme $v^2 + 1$ par exemple) soit égal à zéro[82]. *L. Kronecker* appelle *indéterminés* tous les symboles $u, v, \ldots$ adjoints aux nombres naturels; il appelle *entièrement indéterminés* ceux de ces symboles, tels que u, qui ne sont soumis à aucune condition restrictive: un polynome en u ne doit être regardé que comme une certaine façon d'écrire ses coefficients *en les distinguant les uns des autres*; on peut d'ailleurs, au cours de toute déduction, y remplacer u par le nombre naturel que l'on veut. Les conditions telles que $v + 1 = 0$, ou $v^2 + 1 = 0$, imposées aux autres symboles indéterminés, sont toujours supposées non contradictoires; dans chaque recherche particulière il peut y avoir lieu de vérifier qu'il en est ainsi.

La généralisation de la notion d'égalité, à laquelle on est amené dans la doctrine dite arithmétisante, est au fond provoquée par la Géométrie; elle doit donc rester étrangère à l'Analyse telle que l'a conçue *L. Kronecker.* Dans cette Analyse, on superpose à la notion d'égalité, au sens ancien du mot, celle de *congruence*: congruence prise suivant un module, congruence prise suivant un système de modules[83]; chacun de ces modules est d'ailleurs choisi parmi les éléments du domaine d'intégrité que l'on envisage.

Le principe de l'économie dans la science, économie de temps,

---

82) **L. Couturat* affirme [Revue métaph. 6 (1898), p. 444] qu'à ce point de vue purement formel, les n racines d'une équation algébrique $f(x) = 0$, sont indiscernables. Cela n'est pas exact; on peut obtenir au moyen d'un nombre fini d'opérations n intervalles dans chacun desquels $f(x)$ ne change de signe qu'une fois au plus [Cf. I 12].*

83) C'est là une généralisation d'une notion due à *C. F. Gauss* et d'un point de vue adopté par *A. L. Cauchy* *[Voir *H. Padé*, Premières leçons d'Algèbre élém., Paris 1892; préface de *J. Tannery,* p. XIII en note]. La critique faite par *L. Couturat* à cette introduction systématique de la notion de congruence [Infini math [72]), p 613, 616] repose sur un malentendu.*

ments des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$. Relations entre les fonctions σ et les fonctions ϑ. Sur quelques fonctions du rapport des periodes. Formules diverses. Transformation linéaire des fonctions ϑ. Généralités sur les transformations linéaires. Transformation lineaire des fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ de M. Hermite. Détermination, en fonction des coefficients de la transformation linéaire, des racines huitiemes de l'unité qui figurent dans les formules de transformation des fonctions ϑ et de la racine vingt-quatrième de l'unité qui figure dans la formule de transformation de la fonction $h(\tau)$. Transformation quadratique des fonctions ϑ. Duplication de l'argument. Transformation d'ordre impair des fonctions ϑ. Multiplication de l'argument. Sur un théorème de M. Hermite. Relations entre les fonctions ϑ. Théorèmes d'addition. Identites de Jacobi. Formule de Schröter. — CHAP. IV. *Les quotients des fonctions σ et des fonctions ϑ.* Les fonctions ξ. Les fonctions sn, cn, dn. Notations diverses. Transformation linéaire des fonctions elliptiques. Transformation quadratique des fonctions elliptiques. Duplication de l'argument. Application aux développements des fonctions sn, cn, dn. Transformation d'ordre impair des fonctions elliptiques. Multiplication de l'argument. Aperçu sur le probleme général de la transformation. — Tableau des formules du Calcul differentiel.

Table des Matières du Tome III.

Calcul intégral (Ire Partie). Théorèmes généraux. — CHAP. I. *Applications du theoreme de Cauchy sur les integrales d'une fonction d'une variable imaginaire.* Premières applications du théoreme de Cauchy. Decomposition des fonctions doublement périodiques en eléments simples. Fonctions doublement périodiques de seconde espece. Décomposition de ces fonctions en eléments simples. Fonctions doublement périodiques de troisième espece. Autres expressions propres à représenter les fonctions doublement periodiques. — CHAP. II. *Applications de la formule de décomposition en élements simples.* Les fonctions σ, ζ, p. Les fonctions ξ, sn, cn, dn. Developpement de pu en serie entière. Expression des dérivées de pu et de $p(u-a)$ au moyen des puissances de pu. Expression lineaire des puissances pu au moyen des derivées de pu. Développement en series entieres des fonctions ξ, sn, cn, dn. Expressions lineaires des derivées des fonctions ξ, sn, cn, dn au moyen des puissances de ces fonctions. Expressions lineaires des puissances des fonctions ξ, sn, cn, dn au moyen des dérivées de ces fonctions. Application de la transformation de Landen au développement en série entière de la fonction cn Application aux fonctions de Jacobi de la méthode de décomposition en éléments simples. CHAP. III. *Suite des theorèmes généraux.* — CHAP. IV. *Addition et Multiplication.* Théorèmes d'addition pour la fonction pu. Multiplication pour la fonction pu. Théoremes d'addition pour les fonctions ξ, sn, cn, dn. — CHAP. V. *Développements en séries trigonométriques.* Developpement de $\log \vartheta(v)$, de ses dérivées et des fonctions doublement periodiques ordinaires. Developpement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Développements des quantités e_α, η_α, k, K, E,... en series en q. — CHAP. VI. *Integrales des fonctions doublement périodiques.* Intégrales rectilignes le long d'un segment joignant deux points congrus, modulis $2\omega_1$, $2\omega_3$. Intégration le long d'un chemin quelconque. Cas general. Seconde methode ne convenant qu'au cas normal. — Inversion. — CHAP. VII. *On donne k^2 ou g_2, g_3; trouver τ ou ω_1, ω_3.* Le problème posé admet une solution et de cette solution on peut déduire toutes les autres. Etude de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x\sin^2\varphi}}$ considérée comme fonction de x. Calcul effectif de τ, ω_1, ω_3. — CHAP. VIII. *Inversion des fonctions doublement périodiques du second ordre, en particulier de la fonction* sn. Représentation de la fonction inverse de $\operatorname{sn} u$ par une intégrale definie. Evaluation de u connaissant $\operatorname{sn} u$ ou pu.

Table des Matières du Tome IV.

40407 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

PREMIÈRES LEÇONS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS. — OPÉRATIONS SUR LES POLYNOMES;

PAR

HENRI PADÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

Avec une Préface

DE

JULES TANNERY,

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

UN VOLUME IN-8; 1892. — PRIX : 2 FR. 50 C.

Introduction.

Les éléments sur lesquels se développent tout d'abord les théories de l'Arithmétique sont les *nombres entiers*. Ils constituent le premier ensemble qui soit l'objet de nos spéculations mathématiques: nous pouvons l'appeler l'ensemble du premier ordre.

Mais déjà, dès la théorie de la division, on se trouve amené à étendre cet ensemble, à adjoindre aux nombres entiers toute une nouvelle catégorie de nombres, les nombres fractionnaires; on obtient ainsi l'ensemble des *nombres rationnels*. C'est l'ensemble du second ordre, dont l'ensemble du premier ordre, celui des nombres entiers, ne constitue qu'une partie.

Cet ensemble du second ordre devient de nouveau insuffisant, dès que l'on aborde l'extraction des racines, et l'on doit alors procéder à une nouvelle extension, adjoindre aux éléments déjà introduits une nouvelle catégorie de nombres, les nombres irrationnels ou incommensurables. Ainsi s'obtient l'ensemble du troisième ordre, celui des *nombres rationnels et irrationnels*, qui embrasse celui du second ordre et par suite celui du premier.

L'étude de ces trois premiers ensembles constitue ce que l'on a coutume d'appeler proprement l'*Arithmétique*.

Et cependant on peut aller plus loin et faire voir comment l'ensemble du troisième ordre devient lui aussi insuffisant, comment on est amené à adjoindre à ses éléments toute une nouvelle catégorie de nombres, les nombres négatifs; par cette annexe s'obtient l'ensemble du quatrième ordre, celui des *nombres positifs et négatifs;* c'est le premier de ceux dont l'étude constitue, à proprement parler, l'*Algèbre,* qui apparaît bien ainsi comme l'Arithmétique généralisée, l'*Arithmétique universelle* de Newton.

Cette necessité d'introduire les nombres négatifs se rencontre lorsque l'on cherche a résoudre les problèmes les plus simples de l'Arithmétique en les *mettant en équations;* on s'aperçoit vite qu'en se bornant au seul ensemble des nombres rationnels et irrationnels, on est dans l'impossibilité d'arriver à des règles générales pour résoudre ces équations; on reconnaît en même temps quelle est la nature des nouveaux éléments qu'il faut introduire pour vaincre cette difficulté, et comment on devra alors modifier les définitions des opérations fondamentales.

Avec l'introduction des nombres négatifs ne se clôt pas la suite des généralisations ; la même question qui la nécessite conduit, en effet, à une nouvelle extension de l'ensemble des élements, à l'introduction des quantités complexes. On constitue ainsi l'ensemble du cinquième ordre auquel appartient celui des nombres positifs et négatifs, et, par suite, chacun des précédents.

Enfin, des questions d'un autre ordre, la représentation symbolique de certaines grandeurs, conduisent encore à de nouvelles généralisations, et ainsi se constitue, sans qu'il soit possible d'en apercevoir le terme, la série des ensembles de plus en plus généraux qui s'imposent successivement à notre étude et qui forment la base de toute l'*Analyse.*

Il ne faut cependant pas croire que plus l'ordre de l'ensemble auquel on s'adresse est elevé, plus l'intérêt qu'il présente est considérable. Des propriétés et des applications nouvelles peuvent, il est vrai, apparaître; c'est ainsi que la continuité, qui est appelée à jouer un si grand rôle dans l'étude des ensembles d'ordre plus élevé, apparait avec l'ensemble des nombres rationnels; quand on est en possession de l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels on peut mesurer toute grandeur mesurable; avec les nombres positifs et négatifs on arrive à la représentation des grandeurs à deux sens inverses l'un de l'autre, etc. Mais, par contre, à mesure que les ensembles s'élargissent, les opérations fondamentales auxquelles sont soumis leurs éléments peuvent perdre de leurs propriétés. On le conçoit aisément, puisque c'est en introduisant des éléments nouveaux que l'on passe d'un ensemble à ceux d'ordres plus élevés. Ainsi, pour ne citer qu'un exemple simple, dans l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels, l'extraction de la racine carrée est une opération qui conduit à la connaissance d'un seul nombre; outre qu'elle n'est plus toujours possible, elle conduit à un résultat ambigu dans l'ensemble des nombres positifs et négatifs.

Comment peut-on procéder à l'étude d'un ensemble déterminé? Deux voies semblent naturellement s'offrir. La première consiste à partir de l'ensemble d'ordre immédiatement inférieur; à annexer à ses éléments les éléments nouveaux qui doivent être introduits pour obtenir l'ensemble que l'on veut étudier, puis à étendre celles des définitions, celles des propriétés qui, applicables pour l'ensemble qui sert de point de départ, peuvent encore convenir à celui auquel on arrive. Ainsi l'on peut passer, par une sorte de synthèse, de l'ensemble d'ordre le moins élevé, successivement, aux ensembles d'ordres plus élevés. C'est la voie qui est toujours suivie pour les ensembles d'ordre inférieur; c'est ainsi que, des propriétés des nombres entiers, on conclut d'abord à celles des nombres fractionnaires, puis, réunissant les deux catégories de nombres, on se trouve en possession des propriétés des nombres rationnels, qui forment l'ensemble du second ordre; c'est ainsi encore qu'on passe d'abord des nombres rationnels aux nombres irrationnels pour conclure ensuite aux propriétés de l'ensemble du troisième ordre qui comprend, à la fois, les deux espèces de nombres. C'est aussi la voie que semble avoir suivie la science elle-même dans son développement, allant du simple au composé; et cependant ce n'est pas celle qui est suivie pour l'étude des ensembles d'ordre plus élevé.

Ici, dès que l'on a reconnu la nature des éléments qui doivent composer l'ensemble à étudier, on les définit de toutes pièces. pour ainsi dire en bloc, sans distinguer ceux d'entre eux qui correspondront aux éléments de l'ensemble d'ordre inférieur. De même se définissent à nouveau, pour tous les éléments sans distinction, les opérations auxquelles ils doivent être soumis, et ainsi peut être faite, entièrement, l'étude de l'ensemble, sans qu'ont l'ait rattaché effectivement à aucun autre. Après seulement on distingue parmi ses éléments ceux qui constituent l'ensemble de l'ordre inférieur, et l'on fait remarquer que les opérations que l'on a définies, appliquées en particulier à ces éléments spéciaux, reproduisent certaines des opérations relatives à cet ensemble. Ainsi, quand on a reconnu la nécessité de l'introduction des quantités complexes, on les définit *a priori*, on définit les opérations d'addition, de multiplication, etc., puis l'on remarque que ces opérations appliquées aux quantités complexes où le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul, quantités qui peuvent être regardées comme constituant l'ensemble des nombres positifs et négatifs. ne sont autres que ces mêmes opérations définies dans l'étude de cet ensemble.

Cette seconde méthode, qui a tous les défauts des qualités de l'autre, a cependant un côté précieux. Elle a l'avantage de mettre tous les éléments qui constituent l'ensemble à étudier sur un même plan, de leur attribuer. dès le début, un rôle équivalent, et par là de placer sous son véritable jour l'étude nouvelle, que l'on entreprend, d'un ensemble nouveau.

C'est celle que nous avons adoptée pour notre étude des propriétés fondamentales des nombres positifs et négatifs. Dans ce cas spécial, l'avantage que nous venons de lui reconnaître emprunte, en effet, à une circonstance toute particulière, une nouvelle importance. La nature des nombres positifs et négatifs est telle que, pour les représenter de la façon la plus simple, il n'est pas besoin de créer de nouveaux symboles : ceux dont on fait usage dans l'étude de l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels suffisent. Mais il faut pour cela attribuer aux signes $+$ et $-$ un double sens. Tandis que dans l'étude de l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels ces signes sont exclusivement des signes d'opérations dans l'étude des nombres positifs et négatifs, ils peuvent être regardés tantôt comme des signes d'opérations, tantôt comme des signes faisant connaître la classe a laquelle appartient le nombre qui en est précédé.

La confusion qui résulte de cette double signification est sans doute la plus grande difficulté que l'on rencontre dans l'exposition de l'addition et de la soustraction algébriques. Elle se trouve évitée, si l'on consent à définir les nombres positifs et négatifs sans faire usage des signes $+$ et $-$, par exemple, au moyen de deux indices. l'un pour les nombres positifs, l'autre pour les nombres négatifs; il suffit alors de poursuivre les conséquences des propriétés de l'addition pour voir bientôt *s'introduire nécessairement* la nouvelle signification des signes $+$ et $-$. C'est ainsi que nous avons fait; sans doute on est en droit de dire que ce n'est pas là une méthode naturelle: peut-être trouvera-t-elle indulgence à cause de la clarté qu'elle donne à ces débuts toujours un peu pénibles de la théorie des opérations algébriques.

Extrait de la Préface.

J'espère que le livre de M. Padé sera lu avec un vif intérêt par les élèves et par les maîtres; il est d'une extrême clarté, et tous ceux qui ont réfléchi au sujet qu'il traite reconnaîtront que ce n'est pas un petit mérite.

JULES TANNERY.

Table des Matières.

18013 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

MÉRAY (Ch.), Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — **Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques.** (Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.) Quatre beaux volumes grand in-8 se vendant séparément.

I^re Partie : *Principes généraux;* 1894.................... 13 fr.
II^e Partie : *Etude monographique des principales fonctions d'une seule variable;* 1895.................................. 14 fr.
III^e Partie : *Questions analytiques classiques;* 1897.......... 6 fr.
IV^e Partie : *Applications géométriques classiques;* 1898...... 7 fr.

Extrait de la Préface.

.. L'Ouvrage que nous annonçons est aussi une reconstruction de la même branche de l'Analyse, mais d'un caractère radical et simple, faisant retour aux idées de Lagrange et d'Abel, utilisant sous des formes nouvelles les moyens de démonstration indiqués par Cauchy, affermissant leur puissance. La méthode de l'Auteur consiste à prendre pour base *unique* de la théorie des fonctions *dans ses moindres détails* la possibilité générale de les représenter par des séries entières (formule de Taylor), sauf à asseoir solidement cette propriété universelle sur l'analyse successive des principaux algorithmes qui donnent naissance à de nouvelles fonctions ainsi que sur son existence préexistante pour les fonctions connues impliquées dans ces calculs comme données. Les dérivées sont définies non plus par des limites de rapports, mais comme coefficients des accroissements des variables dans les développements des accroissements des fonctions en séries entières par rapport à ceux-ci; c'est l'intuition de Lagrange rendant leur existence évidente, rendant dès lors inutile toute restriction à cet égard. Les intégrales indéfinies ne sont plus des limites de sommes, prises entre des limites variables, mais de simples résultats de calcul inverse des dérivées, ce qui dispense de la distinction si fastidieuse, faite quelquefois entre les fonctions *intégrables* et celles qui ne le sont pas. L'existence de toute nouvelle fonction est déduite de la *Méthode des coefficients indéterminés,* appliquée à la construction de son développement, complétée par la discussion soigneuse de la convergence de cette série....

Les avantages de cette méthode sont nombreux : la rigueur du raisonnement devient absolue, sa simplicité extrême, puisque tout, sans effort, découle d'un seul principe suffisant à toutes choses, les reliant étroitement les unes aux autres, les expliquant les unes par les autres, puisque les énoncés et les démonstrations reprennent, pour ne jamais s'en écarter, les allures des parties les plus claires de l'Algèbre. La théorie des fonctions imaginaires délivrée de ses adhérences artificielles avec la Trigonométrie se montre maintenant naturelle, renfermant celle des fonctions réelles au lieu de lui être pesamment subordonnée; les considérations pénibles qui se rattachent à la discussion de la *monogénéité,* ce mot lui-même, sont définitivement supprimés. Il est bien vrai, comme on l'a déjà opposé à l'Auteur, que les fonctions sans autre propriété que la continuité, la possession de dérivées considérées comme limites de rapports, etc., sont mises ainsi hors la loi; à cette objection M. Méray se rendra quand on lui aura montré une seule fonction de ce genre, non développable par la formule de Taylor, dont la considération ait procuré autre chose que des thèmes difficiles aux jeux de l'esprit mathématique.

Si ces innovations sont considérables, elles ne sont pas improvisées; dès 1872, l'Auteur les a proposées sommairement dans son *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* et depuis vingt-quatre ans il les développe minutieusement devant ses élèves.

Le public peut donc le suivre avec eux sans manquer aux règles de la prudence.

Titres des Chapitres.

47695. Paris. — Imp. Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.

Je n avais ni la place, ni les connaissances nécessaires pour indiquer partout, d'une façon sûre, la filiation historique des idées; je n'ai fait nulle histoire et je le regrette. Sauf quelques noms consacrés par l'usage, j'ai évité les noms propres; l'habitude d'accoler un nom à toutes les propositions me semble un abus qui n'a rien à faire avec l'histoire. Lors même que cette habitude est consacrée, elle ne va pas sans inconvénient; il est fâcheux qu'un élève de Mathématiques spéciales ne connaisse Descartes que par la regle des signes, Newton que par la méthode d'approximation ou la formule du binome et qu'il soit tenté de regarder Rolle comme aussi grand mathématicien que Descartes ou Newton. Je n'ai point cité davantage, bien qu'ils fussent souvent d'excellents géometres, les auteurs des démonstrations ou des améliorations à des demonstrations antérieures : il m'aurait été parfois difficile de distinguer entre les souvenirs de mes lectures, de mes conversations avec mes maîtres, mes collègues ou mes éleves. Ne pouvant le faire partout, je ne l'ai fait nulle part.

N'ayant cité personne, je dois m'excuser d'autant plus d'avoir souvent renvoyé le lecteur à mon *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* Ce dernier livre a été écrit avec des préocupations tout autres que les présentes *Leçons.* Je me suis proposé d'y présenter les choses, sous une forme abstraite, avec une entière rigueur logique : cette rigueur est indispensable quand on veut penétrer dans certains domaines de la Science, où celui qui prétendrait s'en passer commettrait a coup sûr les plus lourdes erreurs; celles-ci ne sont guere à craindre, au moins actuellement, dans les applications des Mathématiques, et il n'est pas mauvais, en commençant, de ne pas se laisser paralyser par la terreur d'y tomber : quelques lecteurs, toutefois, peuvent désirer connaître le complément d'un raisonnement, la suite d'une théorie : c'est à ce désir possible que j'ai voulu répondre.

En achevant la rédaction, j'ai été quelque peu effraye de la longueur de mon manuscrit : je voudrais me persuader que cette longueur tient à l'abondance des explications et au nombre des exemples : je serai heureux si le lecteur trouve trop facile la lecture de ces Leçons et s'il juge qu'il aurait bien pu traiter seul les exemples que j'ai développés. Toute brièveté a son mérite, même la brièveté verbale, que je n'ai nullement cherchée; mais la veritable brièveté n'est pas celle-là : le parfait enseignement serait, à mon sens, un enseignement tel que celui qui l'a reçu et qui se l'est completement assimilé s'étonne du peu de place que tiennent dans sa propre pensee les principes fondamentaux, les théories qui s'en déduisent, les méthodes qui en resultent, parce que ces principes sont si clairs, ces déductions si naturelles, ces méthodes si aisées qu'il peut à chaque instant les retrouver sans effort. Est-il besoin de dire que je n'ai nullement la prétention de m'être approché de cet idéal, même de loin ?

Table des Matières du Tome I.

Table des matières du Tome II.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.
Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

COURS DE GÉOMETRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

LEÇONS

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES COORDONNÉES CURVILIGNES,

Par G. DARBOUX,

Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences,
Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris.

~~DEUX VOLUMES GRAND IN-8, SE VENDANT SÉPARÉMENT~~ :

Tome I : Volume de ~~xi-367~~ pages; 1910 .... 16 fr.
~~Tome II~~ .... (~~En préparation~~.)

Préface du Tome I.

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier Volume est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches.

Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication.

Extrait de la Table des Matières du Tome I.

Livre I. *L'équation du troisième ordre.* — Chap. I. Les familles de Lamé. Théorème de Dupin et sa réciproque. — Chap. II. Systèmes triples comprenant une famille de plans ou une famille de sphères. — Chap. III. Étude d'une intégrale particulière de l'équation du troisième ordre. — Chap. IV. Formes diverses de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre. — Chap. V. Les familles de Lamé formées avec des quadriques. — Chap. VI. Systèmes orthogonaux à n variables. Extension des méthodes précédentes.

Livre II. *Les coordonnées curvilignes.* — Chap. I. Systèmes orthogonaux à n variables. — Chap. II. Le trièdre mobile. — Chap. III. Recherche d'un système triple particulier. — Chap. IV. Recherche d'un système triple particulier (*suite*). Examen du troisième type de solution. — Chap. V. Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur. — Chap. VI. Les systèmes triples de M. Bianchi.

37854 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Quantités continues usuelles. Abréviations dans le système métrique. Remarques sur ces abréviations. Durées. Angles. Angles et durées. Autres quantités. Manières d'écrire. Préceptes divers. Nombres approchés. — *Nombres indéterminés.* Usage des lettres. Lettres employées. Caractères simples et distincts. Lettres que l'on confond. Menus détails. Lettres à formes multiples. Variétés d'un alphabet. Systèmes simultanés. Variétés usitées. Alphabets hébreu, gothique, russe. Accents et indices. Indices nombreux et compliqués. — *Signes d'opérations.* Les sept opérations fondamentales. Signes + et —. Nombres positifs et négatifs. Signes de la multiplication. Suppression du signe ×. Signes de la division. Signe de la puissance. Opérations inverses de la puissance. Signe de la racine. Exposants divers. La septième opération. — *Signes de coordination.* Préambule. Signes de groupement. Signes de groupement superposés. Suppression des signes de groupement. Signes de séparation. Autres signes de séparation. Signes de correspondance. Résumé. — *Signes de fonctions.* Notion de fonction. Fonctions explicites. Variantes. Fonctions indéterminées. Fonctions determinées. Caractéristiques des fonctions. Nombre dépendant d'un autre. Fonction dépendant d'une autre. Valeurs particulières des fonctions. Fonctions inverses. — *Signes de relations.* Diverses sortes. Signe =. Signe d'identité. Signe de congruence. Signes d'équipollence et d'équivalence. Signes d'inégalité proprement dits. Signes négatifs de relation. Signes doubles de relation. Sur les relations mathématiques. — *Notations de la Geometrie.* Objets de la Géométrie. Figures planes rectilignes. Figures planes curvilignes. Figures polyédriques. Figures courbes dans l'espace. Des projections en général. Géométrie descriptive. Lettres sur les figures. Geométrie sans figure. — *Signes de la Géométrie analytique.* Coordonnées. Généralités sur les coordonnées. Des lettres en Géométrie analytique. Points; coefficients directeurs. Equations de la géométrie analytique. Hyperespaces. Representation intrinsèque des courbes. Géométries analytiques sans coordonnées. — *Signes des Mathématiques appliquées.* Stéréotomie et charpente. Edifices, meubles, machines. Géométrie cotée. Topographie. Géodésie. Astronomie. Mécanique. Physique, Chimie, Histoire naturelle. — *Signes de rédaction.* Divisions d'un Ouvrage ou Mémoire. Tables et titres courants. Appels de notes. Renvoi à un paragraphe. Texte et figures. Texte et calculs. Mots très fréquents. Pasigraphie mathématique.

II° PARTIE. — **Choix.** *Netteté du signe.* Définition de la netteté. Visibilité du signe. Forme du signe. Position et orientation. Positions relatives. Assemblage des éléments. Brièveté du signe. Signes compliqués. Immuabilité du signe. Signes assimilables. — *Précision du signe.* Définition de la précision. Différence de deux signes. Première règle fondamentale. Notation des dérivées. Seconde règle fondamentale. Signes équivalents. Initiales mnémoniques. — *Rappel des propriétés de l'objet.* Nécessité de ce rappel. Rappel direct. Signe d'un objet simple. Signe d'un objet complexe. Structure. Symétrie et dissymetrie. Objet regardé comme simple, comme complexe. Rappels nécessaires. Rappels superflus. *Rappel des rapports entre les objets.* Généralités. Objets analogues; objets disparates. Signes analogues; signes disparates. Sortes d'objets. Sortes de signes. Correspondances entre les sortes. Représentation des sortes d'objets. Représentation des correspondances. Méthode à suivre. — *Choix des signes généraux.* Les deux grandes espèces de signes mathématiques. Choix des signes numériques. Choix des signes d'opération. Choix des signes de coordination. Signes de fonction. Signes de relation. Signes de rédaction. Résumé. — *Mesure des quantités.* Définitions précises. Sur les abréviations. Erreurs courantes. Signes comparables. Quantités correspondantes. Grandeur de l'unité. — *Objets d'une seule sorte, en nombre determiné.* Règle. Bonne notation de deux objets analogues. Nouvelles bonnes notations de deux objets analogues. Mauvaises notations de deux objets analogues. Nouvelles mauvaises notations de deux objets. Autres mauvaises notations de deux objets. Remarques sur nos règles. Objets d'une même sorte, en nombre déterminé. Usage des accents pour des objets d'une même sorte, en nombre déterminé. Usage des indices pour des objets d'une même sorte, en nombre déterminé. Usage des numéros. — *Objets d'une même sorte, en nombre indéterminé.* *n* objets d'une même sorte. Suite limitée ou illimitée.

EXTRAITS DE LETTRES ADRESSÉES A L'AUTEUR

... Vous avez fait une œuvre à laquelle je souhaite un grand succès. Je le souhaite pour vous et pour moi, pour la facilité et l'agrément de mes lectures. Les écrivains se négligent trop souvent.

... J'ai été charmé par la netteté de vos aperçus, par leur solidité, par votre présence d'esprit qui n'oublie jamais rien, par votre sentiment profond de l'ordre et de la subordination naturels des choses que les plus grands géomètres ne possèdent pas mieux que vous, et par l'élégance, la limpidité de votre style qui vous font toujours lire sans fatigue, avec profit et plaisir.... Le peu que j'ai lu encore de vos pages me fait cet autre plaisir d'aller toujours jusqu'ici au-devant de ce que je pense moi-même. Ce que j'aurais pu écrire de votre Ouvrage aurait eté superposable, pour le fond, avec ce que j'en ai vu. Votre livre sera bon à lire, avec utilité pratique, pour les jeunes professeurs curieux de bien noter dans leurs leçons, dans leurs écrits.

... Je viens de feuilleter votre travail de bénédictin que je vous remercie de m'avoir adressé. Vous avez eu une idée bien originale de concevoir cet ouvrage. Je voudrais qu'il devînt classique à l'Ecole Normale et, en général, obligatoire dans toutes les Facultés où l'on aspire à former des professeurs.

... Vous avez eu une excellente idée de réunir en un volume tout ce qui concerne les notations mathématiques et de les accompagner d'une foule de renseignements du plus grand intérêt.

... Je n'ai pu encore que parcourir cet Ouvrage considérable qui a dû vous coûter beaucoup de peine et qui est certainement le fruit de longues meditations, mais je me propose de le lire en entier et ce sera pour moi une besogne agréable, car à l'intérêt de la matière s'ajoutera l'élégance du style.

... J'ai reçu votre livre où je vais me plonger, tant que je pourrai. Avec l'espoir de vous suivre, au moins de loin, car vous êtes un philosophe en même temps qu'un savant, et un philosophe clair.

Œuvre entièrement originale, personne n'a encore traité ce sujet. — Le style de l'ouvrage est litteraire, et le fond des plus intéressants.

Ouvrage qui aurait bien pu s'intituler « Traité sur la justesse, l'élégance et la beauté du style mathématique ». M. Désiré André a rendu un vrai service en le publiant.

Le sujet que vous avez traité offre un intérêt si considérable qu'il est vraiment extraordinaire que personne avant vous n'ait eu l'idee d'en entreprendre l'étude systématique.... Apres avoir parcouru votre livre, je suis plus disposé à croire que ceux qui se sont occupés du même sujet ont recule devant l'étendue de la tâche et l'érudition nécessaire pour la mener a bien.

46184 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins 55.

THÉORIE DES NOMBRES,

LE CALCUL DES NOMBRES ENTIERS.
LE CALCUL DES NOMBRES RATIONNELS.
LA DIVISIBILITÉ ARITHMÉTIQUE;

PAR

ÉDOUARD LUCAS,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

UN VOL. GR. IN-8, AVEC FIG. DANS LE TEXTE; 1891. PRIX : 15 FR.

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (janvier 1892).

L'existence scientifique d'Édouard Lucas, si prématurément enlevé à l'affection de sa famille et de ses amis, a été consacrée surtout à l'étude de l'Arithmétique supérieure. A côté de recherches très intéressantes sur les autres branches des Mathématiques, et d'œuvres de vulgarisation vraiment remarquables, il a produit, dans la plupart des recueils périodiques d'Europe et des États-Unis, de très nombreux travaux sur la Théorie des nombres. Il était en correspondance avec les plus illustres représentants de cette science, si française par ses origines, et malheureusement si délaissée en France de nos jours.

Unissant au plus haut degré de grandes facultés d'invention à une érudition merveilleuse, il était préparé, mieux que personne, à la publication d'une œuvre comme celle que nous voulons analyser aujourd'hui, et qui est malheureusement la dernière sortie de sa plume, puisque la mort est venue le prendre quelques semaines à peine après l'apparition de ce premier volume.

En dehors des regrets que fait toujours éprouver la perte d'un esprit puissant et original, on pouvait être en droit de déplorer qu'une œuvre de cette valeur restât inachevée. Cependant, à ce point de vue spécial, il importe de constater deux faits : le premier, c'est que les manuscrits laissés par Lucas après sa mort, ainsi que ses nombreux Mémoires sur la Théorie des nombres, pourront permettre de constituer et de publier un second volume, assurément moins étendu que celui qu'il avait projeté, mais néanmoins suffisant pour compléter l'ouvrage sur les points essentiels; le second fait, c'est que le volume paru forme à lui seul une œuvre complète, et d'une valeur considérable, ainsi qu'on pourra s'en rendre compte, je l'espère, par l'exposé qui va suivre.

J'ai déjà eu l'occasion de dire, sous une forme trop concise peut-être et au risque de ne pas me faire entièrement comprendre, que ce premier volume, en dépit de son titre, était moins le commencement d'une théorie des nombres qu'une introduction à cette science. C'est précisément là ce qui lui donne un caractère d'unité; c'est là ce qui fait qu'en dépit des apparences nous avons devant nous une œuvre formant un tout; moins achevée que si l'auteur avait pu y ajouter les compléments préparés dans son esprit, mais telle cependant que personne désormais ne pourra étudier la Théorie des nombres et écrire sur ce sujet sans avoir lu et médité l'ouvrage d'Édouard Lucas.

L'Ouvrage débute par une préface contenant de précieuses indications historiques, et dans laquelle l'auteur établit la ligne de démarcation, essentielle selon lui, entre l'Algèbre proprement dite et la Théorie des nombres. C'est dans la notion de discontinuité qu'il trouve le caractère de cette dernière science.

Dans une remarquable introduction se trouve ensuite rapidement étudiée la filiation des idées arithmétiques, leurs origines et leurs applications. Ce n'est pas sans un certain étonnement que beaucoup de lecteurs s'apercevront que des théories, paraissant exclusivement abstraites au premier coup d'œil, sont souvent d'un intérêt pratique considérable, et peuvent même devenir d'un très grand secours pour des usages industriels.

Ainsi que l'indique le titre, reproduit en tête de cet article, l'Ouvrage comprend trois grandes divisions ou *Livres*. Le Livre I traite des nombres entiers, et se divise en huit Chapitres : addition des nombres entiers; soustraction des nombres entiers; multiplication des nombres entiers; division et classification des entiers; les nombres figurés; l'analyse combinatoire; la géométrie de situation; la multiplication algébrique.

Sur ces sujets, en apparence si simples, on trouvera, dans les Chapitres que nous venons d'énumérer, une abondance de renseignements; nous citerons, en particulier, le triangle arithmétique, les tableaux de sommes et de différences, les systèmes de numération, la notion des congruences, les permutations figurées, les échiquiers de M. Delannoy, les réseaux et régions.

Le Livre II comprend dix Chapitres, intitulés : les nombres fractionnaires; le calcul des probabilités; la division algébrique; les polynômes dérivés; le calcul symbolique; sommation des puissances numériques; les fonctions symétriques; les déterminants; les suites récurrentes linéaires; les fonctions numériques du second ordre. On y rencontre d'intéressantes propriétés des polynômes, des données générales sur les probabilités, sur l'interpolation, sur les dérivées des polynômes à une ou plusieurs variables; le calcul symbolique, dont Lucas a fait un si grand et si habile usage, est étudié avec beaucoup de soin, ainsi que les applications de ce calcul aux nombres de Bernoulli, et à plusieurs problèmes célèbres sur les permutations figurées; les sommations des puissances numériques constituent encore une application du calcul symbolique, et ramènent l'auteur aux nombres de Bernoulli et d'Euler, et aux suites de Cesaro. Le chapitre des fonctions symétriques résume les travaux les plus essentiels concernant cette belle théorie; de même, en ce qui concerne les déterminants et les équations linéaires. A propos des suites récurrentes, Lucas reproduit la substance de ses recherches sur les travaux de Léonard de Pise (Fibonacci) et sa remarquable théorie des fonctions numériques du second ordre U_n et V_n, qui offrent avec les fonctions circulaires de frappantes analogies. C'est une étude pleine de profondeur et d'originalité, qui lui appartient en propre, et qui peut devenir entre des mains habiles un instrument d'une grande puissance pour des recherches nouvelles. Nous croyons savoir que l'extension de ces fonctions au troisième ordre était l'un des rêves scientifiques de l'auteur; il fondait sur des recherches dans cette direction les plus belles espérances pour la découverte de nouvelles et importantes propriétés arithmétiques. Nous attirons sur ce point l'attention des jeunes géomètres qui se sentiraient tentés par l'étude de l'Arithmétique supérieure, et voudraient se faire les continuateurs de Lucas.

Le Livre III est plus exclusivement arithmétique que les précédents; il comprend : codiviseurs et comultiples; les nombres premiers; les diviseurs des nombres; de l'indicateur; les restes; les fractions continues.

Nous ne saurions assez recommander l'emploi de ces termes de codiviseurs et comultiples que propose ici Lucas, et qui, nous l'espérons, deviendront bientôt d'un usage courant. Sur la distribution des nombres premiers, l'auteur donne un résumé des connaissances, bien peu étendues malheureusement, qui sont aujourd'hui acquises à la science; la divisibilité des factorielles, les beaux théorèmes de MM. Tchebycheff et de Polignac, les nombres parfaits, aliquotaires, amiables, les diviseurs des nombres, les théorèmes de Dedekind, Liouville et Dirichlet sont présentés par lui sous une forme concise et très claire cependant.

L'indicateur, suivant l'heureuse expression de Cauchy, est l'expression $\varphi(n)$ du nombre des entiers $1, 2, \ldots, n$ qui sont premiers à n. C'est une notion très intéressante en théorie des nombres, et que Lucas étudie avec grand soin, en la généralisant à divers points de vue. On verra figurer dans ce Chapitre des théorèmes d'un grand intérêt, parmi lesquels plusieurs sont inédits et ne pourraient se trouver dans aucun autre ouvrage. Le Chapitre des restes comprend une première étude sommaire des congruences, et de nombreuses applications, parmi lesquelles nous retenons les théorèmes de Fermat, de Wilson, de Staudt et Clausen, etc. La théorie des fractions continues est rapidement étudiée en elle-même, pour arriver aussitôt à des applications arithmétiques, et spécialement à l'intercalation et à la médiation des suites, et à l'analyse indéterminée du premier degré.

Des *Notes et Additions*, terminant le volume, se rapportent : à la partition des polygones; aux problèmes des rencontres et des ménages; aux nombres d'Hamilton; aux réseaux d'un quinconce; à la sommation des indicateurs; aux permutations circulaires avec répétition; aux restes du triangle arithmétique; aux nombres de Clausen et de Staudt; à l'extraction des racines, et aux réduites intermédiaires.

Un des caractères particuliers de l'Ouvrage dont il s'agit consiste dans l'abondance extraordinaire des questions traitées ou indiquées sous le titre d'*exemples*. A tout instant, on voit énoncer des applications variées, souvent inattendues; un développement sobre, au besoin quelques lignes seulement, apprennent au lecteur où en est l'état actuel de la question qu'on vient d'indiquer. Pour employer une comparaison élégante formulée par l'un des amis de l'auteur, et que nous avons recueillie, il semble qu'on visite un bel édifice, et qu'à chaque pas des fenêtres présentent à vos yeux des paysages variés, pleins d'attrait, aux horizons plus ou moins lointains, et dont l'aspect provoque à des excursions nouvelles.

Lucas n'avait certes pas la prétention de dire le dernier mot sur la Théorie des nombres; il savait, au contraire, combien est encore immense le champ des vérités arithmétiques inconnues. Mais il aimait cette science avec passion; il lui avait consacré la meilleure part de sa vie scientifique; et sa grande ambition était de la faire aimer et connaître.

Si parmi la jeune génération de savants français, qui a l'avenir devant elle, il s'en trouve quelqu'un pour essayer de reprendre la tradition si tristement interrompue, il contribuera à la gloire scientifique de notre pays, et rendra du même coup le plus juste hommage à la mémoire d'un géomètre dont les travaux n'ont pas été appréciés de son vivant à [illegible] véritable valeur, mais que sa *Théorie des nombres* classe par[illegible] maîtres de la science.

C.-A[illegible]

LEÇONS
SUR LES
SÉRIES A TERMES POSITIFS
PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE,

Par Émile BOREL,
Maître de Conférences à l'École Normale supérieure,

RECUEILLIES ET REDIGÉES PAR ROBERT D'ADHÉMAR.

Un volume grand in-8, avec figures; 1902. .... 3 fr. 50 c.

Préface.

L'étude des séries à termes positifs, qui est l'objet de ces Leçons, est étroitement liée à la théorie de la croissance et, par là, se rattache à bien des problèmes de la plus grande importance en Analyse, et particulièrement en Théorie des fonctions. Il a déjà été question de plusieurs de ces problèmes dans mes Ouvrages antérieurs sur la Théorie des Fonctions; comme je l'ai déjà indiqué, une Théorie générale de la croissance devrait logiquement être l'Introduction à toute étude d'Analyse; mais c'est seulement après avoir étudié séparément les diverses questions où la croissance intervient que l'on pourra tenter l'exposition complète de la Théorie générale; les éléments de cette Théorie sont esquissés dans le Chapitre III de ces Leçons.

Ce petit Livre a été rédigé d'après vingt Leçons que j'ai faites au Collège de France en 1900-1901....

Sur bien des points, il aurait été possible d'ajouter de nombreux compléments, car le sujet est extrêmement vaste; mais en augmentant ainsi l'étendue de ces Leçons, je leur aurais sans doute enlevé la forme si vivante qu'a su leur donner M. d'Adhémar....

Table des Matières.

priè... a-
géometres ...
rieure, et vo...

Guichard, Harkness, Hensel, Hölder, Hilb…
Kohn, Krazer, Landsberg, Liebmann, v. Lilient…
Mehmke, Meyer, Müller, Netto, Neuberg, Osgood,
Pareto, Pincherle, Pringsheim, Rohn, Runge, Scheffers, …s, Seg…
Selivanov, Schubert, Simon, Sommer, Sommerfeld, Stäckel, …, Steinitz
Study, Vahlen, Vessiot, Voss, Wälsch, Wangerin, H. Weber, E. v. Weber, Wellstei… Wirtinger, Wiman, Zeuthen"; dans l'édition française, ils seront exposés par MM. …doyer, D. André, Appell (de l'Institut), Baire, Borel, Bourlet, Bricard, …ahen, Cartan, Delassus, Drach, Floquet, Goursat, Guichard, Hadamard, Jacottet, Kœnigs, Laisant, Lebesgue, Le Roux, Le Vavasseur, Maillet, Molk, d'Ocagne, Oltramare, Padé, Painlevé (de l'Institut), Pareto, Picard (de l'Institut, Poincaré (de l'Institut), Poterin du Motel, J. Tannery, P. Tannery, Tresse, Vessiot, Vogt."

Les tomes IV—VI, consacrés aux mathématiques appliquées, sont rédigés dans l'édition allemande par MM. Félix Klein à Göttingue (Mécanique), Arnold Sommerfeld à Aix la Chapelle (Physique), Emile Wiechert à Göttingue et Ph. Furtwängler à Potsdam Géodésie, Topographie et Géophysique), Charles Schwarzschild à Göttingue (Astronomie). Dans l'édition française ils seront rédigés, d'après l'édition allemande, pour les questions d'ordre général par M. Jules Molk à Nancy, et plus particulièrement pour la Mécanique par M. Paul Appell à Paris, pour la Physique par M. Alfred Potier à Paris, pour la Topographie, la Géodésie et la Géophysique par M. Charles Lallemand à Paris, pour l'Astronomie par M. Henri Andoyer à Paris. Les noms des savants et des ingénieurs auxquels sont dus les différents articles de mathématiques appliquées seront publiés ultérieurement.

Il serait superflu d'insister davantage sur l'intérêt que présente l'Encyclopédie. Cet ouvrage a sa place marquée dans toutes les bibliothèques scientifiques.

Table des matières.

Mathématiques pures.

Tome I

rédigé, dans l'édition allemande, sous la direction de W. Fr. Meyer-Königsberg; rédaction française sous la direction de J. Molk-Nancy.

Premier volume: Arithmétique.

Second volume: Algèbre.