

THÉORIE  
DES  
SCIENCES

PLAN DE SCIENCE INTÉGRALE

PAR

L. BOURDEAU

*Ad lucem, per lucem.*

TOME PREMIER

PARIS

BRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET C<sup>ie</sup>

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

—  
1882



THÉORIE  
DES SCIENCES

PLAN DE SCIENCE INTÉGRALE

---

PARIS. — IMPRIMERIE ÉMILE MARTINET, RUE MIGNON, 2.

---

THÉORIE  
DES  
SCIENCES

PLAN DE SCIENCE INTÉGRALE

PAR

L. BOURDEAU

*Ad lucem, per lucem.*

TOME PREMIER

PARIS  
LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET C<sup>o</sup>

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1882

Tous droits réservés



## ERRATA DU TOME PREMIER

---

- Page 27, ligne 19, *au lieu de δ: lisez de.*
- 125, ligne 26, *au lieu de (L., v. 1130), lisez (L. IV, v. 1130).*
  - 131, ligne 14, *au lieu de sens du contact, lisez sens de contact.*
  - 134, ligne 12, *au lieu de ses corps, lisez les corps.*
  - 134, ligne 13, *au lieu de l'effectuer, lisez s'effectuer.*
  - 141, ligne 23, *au lieu de par celles, lisez parmi celles.*
  - 167, ligne 3, colonne 3, *au lieu de sens besoin, lisez sens de besoin.*
  - 201, ligne 28, *au lieu de (Dialogo... giornata), lisez (Dialogo..., giornata 1<sup>ma</sup>).*
  - 288, ligne 34, *au lieu de M. Mannheim, lisez M. Mannheim.*
  - 293, ligne 5, *au lieu de équivalut, lisez équivaut.*
  - 359, ligne 19, *au lieu de στατικός lisez στατικός.*
  - 374, ligne 7, *au lieu de l'Aréostatique, lisez l'Aréostatique.*
  - 409, ligne 2, *au lieu de ces lois qui sont, lisez ces lois sont.*
  - 416, titre, *au lieu de III, lisez I.*
  - 416, ligne 25, *au lieu de puis les corrélations, lisez puis sur les corrélations.*
  - 418, ligne 3, *au lieu de unis par rapports, lisez unis par des rapports.*
  - 419, ligne 6, *au lieu de ils sont ainsi, lisez ils sont aussi.*
  - 426, ligne 27, *au lieu de subies par le corps, lisez subies par les corps.*
  - 436, ligne 32, *au lieu de ces effets, lisez ses effets.*
  - 452, ligne 3, *au lieu de partir de celle, lisez partir de celui.*



# THÉORIE DES SCIENCES

PLAN DE SCIENCE INTÉGRALE

---

## INTRODUCTION

L'univers est immense et l'esprit de l'homme borné. Pour connaître l'ensemble des choses, il y aurait à l'examiner sous une multitude d'aspects, dans une infinité de détails, et nous n'en pouvons discerner clairement qu'un petit nombre à la fois. Il faut donc proportionner les difficultés de l'étude à la mesure de notre capacité restreinte, recourir à des artifices d'analyse et procéder par explorations successives. L'unique expédient consiste à scinder le problème total de la connaissance, inabordable directement, en problèmes partiels plus simples et à les disposer par séries, c'est-à-dire à constituer des sciences.

Ce mot « science » qui signifie « système de connaissances », a, dans l'usage, divers sens qu'il serait

L. BOURDEAU.

1. — a

bon de distinguer. Il sert également à désigner les sciences théoriques ou d'investigation qui visent à la découverte du vrai, et les sciences pratiques ou d'application dont l'objet est la conquête de l'utile. Mais il ne convient qu'aux premières. Les secondes le portent indûment parce que, n'ajoutant rien à la connaissance, elles se bornent à mettre en œuvre; au mieux de nos intérêts, les vérités déjà connues. Ce sont des arts plutôt que des sciences, et leur classement relève de la technologie.

Les sciences pratiques écartées, restent les sciences spéculatives qui, sans se préoccuper de l'utile, ont pour seul but la connaissance du vrai. Elles se répartissent en sciences préparatoires ou provisoires et en sciences organisatrices ou définitives. L'esprit humain, dont le point de départ est une complète ignorance, cherche d'abord la vérité au hasard, sans plan ni méthode. Allant où sa curiosité l'appelle, errant à l'aventure dans le champ de l'inconnu, il trouve et recueille une quantité de données qu'il accumule confusément dans des cadres de convention. Mais, ce premier travail effectué, la tâche s'impose de mettre en ordre les gains obtenus, afin de constituer des ensembles où les connaissances se lient et se classent. Vient alors la phase organisatrice qui dresse, d'après des vues systématiques, le plan d'une science dont toutes les parties se tiennent et forment corps. La première étude représente moins des sciences faites que des sciences en train de se faire; la seconde établit les sciences véritables sur un fondement rationnel.

Le cycle de la connaissance comprend ainsi trois stades : l'un de préparation confuse, l'autre de coordination logique, le dernier d'application fructueuse. La science pure se résume dans les sciences du second degré. Ce sont les sciences par excellence. Nous en ferons l'objet exclusif de notre étude.

Insistons sur les caractères qui distinguent les deux sortes de sciences spéculatives. Elles diffèrent par leur objet, leur méthode et leurs résultats.

L'attribution de sujets déterminés à des sciences spéciales semble pouvoir s'opérer d'une foule de façons, l'esprit étant libre de choisir à sa convenance les choses qu'il veut étudier ; cependant, si l'on considère les conditions générales de l'analyse qui se réfère nécessairement à l'ordre de la nature ou aux lois de l'entendement, on voit que tous les modes possibles de répartition se ramènent à deux et doivent concerner des existences formelles ou des conceptions idéales. On se propose toujours de connaître soit des réalités concrètes, soit des phénomènes abstraits. L'attention se porte, tantôt sur certaines choses étudiées sous la totalité de leurs aspects, et tantôt sur certains de ces aspects étudiés dans la totalité des choses. Dans un cas, on distribue les êtres par groupes et l'on examine chacun d'eux sous diverses faces, afin d'avoir de lui une connaissance aussi entière que possible ; dans l'autre, on institue des classes de phénomènes dont l'ordre est à scruter partout où ils se produisent, et l'on doit examiner l'ensemble des choses sous une apparence unique. Ces deux manières

de limiter les sujets d'étude conduisent à établir, d'une part, des sciences particulières, de l'autre, des sciences générales. Elles caractérisent deux états d'esprit, deux phases de connaissance. La première précède, la seconde suit une exploration sommaire des choses. La disposition des réalités par groupes est, au début, l'œuvre d'ignorants qui, pour circonscrire un champ de recherches, posent des bornes où il leur plaît, forment des collections arbitraires d'objets, et fondent ainsi des sciences particulières. La répartition des phénomènes par classes est, au contraire, l'œuvre de savants qui, pour mieux se rendre compte de ce qu'on a découvert, distribuent logiquement les notions acquises, coordonnent les faits par séries et constituent de la sorte des sciences générales. L'esprit humain a passé, avec le temps, de l'une à l'autre méthode.

Le système le plus simple pour instituer des sciences, le seul qui soit praticable de prime abord, se réduit à détacher de la multitude des choses celles qui intéressent le plus, afin d'en faire un examen isolé. Dans le vaste ensemble des réalités, on sépare celles qu'on souhaite connaître de celles que, provisoirement, on se résigne à ignorer. On retient une partie du tout, on écarte le reste et l'on conclut à une préférence exclusive par une élimination systématique.

Ainsi se sont établies les sciences « particulières ». Comme l'indique leur nom, elles « mettent à part » certains objets sur lesquels la curiosité se porte et l'attention se concentre. Chacune d'elles comprend

## INTRODUCTION.

une collection de choses concrètes dont on s'applique à scruter tous les aspects connaissables. L'Astronomie, par exemple, est la science des corps célestes ; la Géographie décrit la surface de la terre ; l'Hydrographie traite du régime des eaux ; la Météorologie, de l'atmosphère ; la Minéralogie, des corps bruts ; la Botanique, des plantes ; la Zoologie, des animaux ; l'Anthropologie, de l'homme ; etc.

Cette manière de déterminer les objets des sciences a sa raison d'être et ses avantages. Elle s'imposait à l'origine quand une seule chose, l'existence des réalités, étant connue avec certitude, l'option ne pouvait porter que sur des séries d'êtres. Le premier travail d'analyse dut conséquemment se borner à les disposer par groupes en vertu d'analogies apparentes ou de simples conventions d'esprit. Ces cadres commodes, aisés à étendre ou à resserrer au gré des explorateurs, limitaient les recherches à ce qu'on pouvait embrasser sans trop de peine et fournissaient des informations utiles sur les choses dont la connaissance importait le plus. Toutefois, un pareil mode de partage entraînait des inconvénients qui, peu sensibles d'abord, mais sans cesse accrus, devaient aboutir à une inextricable confusion.

Les sciences particulières sont, en général, mal délimitées, parce que le trait de ressemblance qui sert à grouper les êtres est presque toujours superficiel ou variable. L'esprit, attiré hors des bornes convenues par les connexions des choses, va d'un groupe à l'autre et ne sait plus où commence, où doit finir l'exploration. Ainsi l'Astronomie se proposait, dans le principe,

d'étudier les corps célestes à l'exclusion des corps terrestres; mais on reconnut ensuite que la Terre elle-même est un astre et rentre avec tout ce qui la compose dans le champ des études astronomiques. La Géographie ne se sépare pas par une ligne bien nette de la Cosmographie dont elle dépend. Les sciences naturelles peuvent être considérées comme une annexe de la Géographie. L'Anthropologie se rattache à la Zoologie; l'Histoire à l'Anthropologie; etc. L'objet de ces sciences n'est donc pas circonscrit avec précision et n'a pas un caractère de spécialité suffisamment accusé.

La multiplicité des aspects sous lesquels on examine chaque groupe contribue à rendre les bornes des sciences plus incertaines encore. L'Astronomie, pour faire connaître les astres, doit étudier leur forme, leur grandeur, leurs distances, leurs mouvements, leur état physique, la nature chimique de leurs éléments et même les conditions d'habitabilité des mondes... La Géographie est un composé de notions empruntées à toutes les sciences : elle relève de l'Astronomie pour la détermination des lieux; de la Géologie pour celle des terrains; de la Météorologie pour celle des climats; elle utilise en outre les indications de la Minéralogie, de la Botanique, de la Zoologie; enfin, elle se lie plus directement encore à l'Anthropologie, à l'Histoire, à l'Économie politique... La Minéralogie, science mieux circonscrite en apparence, mêle à des recherches sur la composition des corps bruts l'étude de leurs propriétés dynamiques, physiques, organoleptiques; la description de leur structure, la mention de leurs gisements, l'histoire de leurs applications dans l'indus-

trie ou les arts, etc. Si limitée que paraisse l'objet d'une science particulière, ceux qui la cultivent restent donc libres de pousser au loin leurs investigations dans tous les sens. La borne avance ou recule selon leur désir et ne se trouve jamais fixée. Par suite, ces sciences ne comportent pas de définition précise et l'on ne saurait se faire une juste idée de leur étendue.

Ce n'est pas tout. Dans des sciences ainsi constituées, nulle règle ne préside au classement des problèmes. Le même arbitraire qui sert à grouper les choses, les divise et les subdivise sans fin. Le principe une fois admis, rien n'interdisait en effet de scinder les objets d'étude quand cela pouvait être utile, et l'on eut recours à cet expédient chaque fois qu'une science accrue excéda les forces d'un travailleur isolé. Comme la recherche devenait d'autant plus efficace que le champ d'exploration se restreignait davantage, on fut conduit à opérer des démembrements successifs et l'on s'engagea dans une voie de particularité croissante. Ainsi la Zoologie a dû répartir entre des sections nombreuses l'ensemble du règne animal et l'on a vu s'ériger en sciences indépendantes la Zoophytologie, la Malacologie, l'Helminthologie, la Carcinologie, l'Entomologie, l'Ichthyologie, l'Herpétologie, l'Ornithologie, la Mammalogie, l'Anthropologie... Chacune de ces sciences partielles s'est partagée à son tour et l'on aboutit de la sorte aux monographies d'espèce. L'Anthropologie, section bien réduite de la Zoologie, s'est ramifiée en une multitude de branches, suivant que l'on considérait l'homme physique (Anatomie, Physiologie, Médecine, Ethnogra-

phie...), l'homme moral (Psychologie, Éthique, Esthétique, Morale...) ou l'homme social (Philologie, Histoire, Économie politique, Droit...). L'Histoire, appliquant le même système, répartit son sujet immense par régions, par époques, par États, par séries d'événements, et se perd à la fin dans un minutieux détail de biographies et d'anecdotes. Impossible d'assigner une limite à ces divisions facultatives. Plus on est allé loin dans l'analyse des choses et plus on a vu surgir de problèmes; plus, conséquemment, on a dû instituer de sciences. Il serait déjà malaisé d'en dresser une liste exacte, et cette liste, complète aujourd'hui, cesserait de l'être demain, chaque génération usant à son tour du droit de l'allonger à sa convenance. En réalité, on peut établir autant d'études particulières que la pensée conçoit de groupes distincts de choses et, comme il est loisible d'effectuer ces groupements d'une infinité de manières, le nombre des sciences qui leur correspondent est infini.

Ce mode d'attribution, où l'on ne tient pas compte des relations naturelles des choses, entraîne un inconvénient capital : la limitation arbitraire des sujets d'étude et leur fractionnement sans terme rendent difficile, sinon impossible, la découverte des lois. L'ordre dont elles sont l'expression n'apparaît en effet que dans l'ensemble, car la nature n'a pas de lois spéciales pour les collections d'objets qu'il nous plaît d'établir, et plus les recherches se restreignent dans le détail, moins il devient aisé de surprendre les rapports d'où résulte l'unité du tout. Or, la connaissance des lois est le vrai but de la science, et l'impuissance où sont de l'atteindre

les études particulières les réduit à n'être que des répertoires de faits.

Au point de vue des procédés de recherches, une autre cause d'infériorité résulte pour elles de l'obligation où elles se trouvent d'employer divers artifices d'exploration afin de pouvoir scruter un groupe donné de choses sous des aspects différents. Par suite, elles n'ont pas de moyen d'investigation qui leur soit propre. Chacune d'elles applique tour à tour toutes les méthodes et c'est là une raison pour qu'elles n'en perfectionnent aucune.

Ces inconvénients, si graves pour chaque science prise à part, le sont plus encore pour la science totale que, réunies, elles devraient constituer. Essaye-t-on de rapprocher les sciences particulières, tout ordre s'évanouit et la confusion devient extrême. Parmi tant d'études séparées, on n'entrevoit ni plan, ni suite, ni proportion. L'esprit s'égaré dans cette foule de sujets qui ne se coordonnent pas et même se refusent à toute entreprise de classement régulier. Aucune synthèse ne réussirait à donner une vue claire de l'ensemble, parce que nulle idée générale n'a présidé à la distribution des choses. On n'a que des parties de connaissance, toujours sur le point de se résoudre en parcelles. Personne ne conçoit la Science dans la plénitude de ses développements et n'a le vif sentiment de son unité. La plupart des explorateurs la méconnaissent, se confinent dans quelque lot exigü dont ils s'exagèrent à plaisir l'importance et font profession de dédain pour tout le reste, faute de voir nettement la place et le prix de ce qu'ils savent dans l'intégralité du savoir humain.

Ceux qui, moins exclusifs, voudraient ne pas ignorer les éléments et les conclusions de la science universelle, ne savent où les trouver et les cherchent vainement dans un amas de vérités de détail. Cet état de choses n'est pas seulement préjudiciable à la diffusion des connaissances; il nuit aussi à leurs progrès, parce que les sciences, mal établies et sans relations, ne se prêtent pas les secours qu'on pourrait attendre de leur accord. Il y aurait plutôt entre elles des occasions de conflit, car leurs bornes indécises, non moins faciles à déplacer qu'à poser, sont une cause de compétitions fréquentes. Sans frontières fixes et reconnues, elles empiètent les unes sur les autres et se disputent avec des droits égaux la possession des mêmes sujets.

Des limites arbitraires, une fragmentation sans terme, un défaut absolu d'ordre, de méthode et d'unité, voilà donc les conséquences de la particularité. Les sciences ainsi constituées n'ont ni objet défini avec précision, ni divisions rationnelles, ni lois générales, ni méthodes appropriées d'investigation. Ce sont moins des sciences véritables que des éléments de science, des données qu'une élaboration nouvelle doit systématiser et unir. Elles représentent une condition intermédiaire entre l'ignorance initiale et la connaissance finale des choses. Les créateurs de ces sciences imparfaites ont rempli une fonction comparable à celle des carriers qui extraient du sein de la terre et amoncellent en désordre à sa surface les matériaux d'une construction future, œuvre d'architectes et de maçons. Il faut qu'une science supérieure reprenne ces blocs

grossiers, les façonne, les dispose d'après un plan d'ensemble et fasse surgir, en place d'un tas de fragments sans forme et sans équilibre, un monument régulier et stable.

Le seul moyen de mettre un terme à la confusion actuelle consiste à répartir autrement les sujets d'étude, à constituer au lieu de groupes convenus de choses, des classes raisonnées de phénomènes, et à remplacer une multitude de sciences particulières, rebelles à toute coordination, par un petit nombre de sciences générales qui admettent un ordre fixe et se lient méthodiquement.

Lorsqu'on embrasse par la pensée l'ensemble des réalités, on reconnaît que certaines catégories de faits se retrouvent dans la totalité des choses et en marquent les traits essentiels, les aspects caractéristiques, à tel point que, sans eux, les choses ne pourraient plus se concevoir. Autant la réflexion constate de ces aspects dans la nature, autant on devra instituer de sciences générales. Dans le principe, la détermination de ces catégories de phénomènes n'aurait pas été possible, car la claire vue de leur généralité impliquait des connaissances préalables. On débuta donc par une répartition des réalités entre les sciences particulières ; mais plus on avança dans cette recherche, plus il devint manifeste que les divers groupes étaient scrutés sous un petit nombre d'aspects invariables. On fut alors amené à considérer ces aspects des choses au lieu des choses elles-mêmes et, dans les sujets, on ne tint plus compte que des attributs. Ainsi se constituèrent des

sciences générales. Indiquons les avantages qu'offre leur établissement.

La diversité des aspects sous lesquels il nous est donné de saisir la nature, se réfère à nos principaux modes de perception ou de conception et se trouve limitée par eux. Les sciences qui leur correspondent sont par suite peu nombreuses et faciles à distinguer. En raison de la spécialité de leur objet, elles peuvent être nettement circonscrites et définies. Malgré l'apparence contraire, l'abstrait est plus simple que le concret, le premier montrant isolées les propriétés des choses, confondues dans le second. Une collection de réalités, si restreinte qu'on la suppose, sera toujours plus complexe qu'une classe de phénomènes, si étendue qu'elle soit, parce que, dans un cas, on doit examiner des séries d'aspects, tandis que, dans l'autre, on se réduit à un seul. Il suffit alors de bien spécifier les classes de faits, et cela même est aisé puisque chacune d'elles diffère des autres dans la totalité des choses. Chaque science, ayant ainsi un objet strictement déterminé, sera tenue de s'y renfermer comme dans un domaine propre et moins exposée à s'égarer en de capricieuses digressions.

Les sciences générales peuvent seules établir des divisions méthodiques et un programme raisonné. Par cela même que leur sujet d'étude est une classe de phénomènes, l'analyse porte, non plus sur des groupes de choses qu'on subdivise en groupes moindres sans diminuer ainsi la complexité des problèmes, mais sur les faces diverses d'un même aspect, ce qui entraîne une simplification réelle. Cette manière de

partager les faits ne se prête pas à des scissions arbitraires qui laissent subsister sur une aire moindre toutes les difficultés ; il faut distribuer les questions de telle sorte que l'esprit puisse passer, sans trop de peine, de celles qui sont le moins complexes à celles qui le sont le plus. Il serait même possible, comme nous le ferons voir, de poser des règles de répartition applicables aux diverses sciences et d'établir un programme de recherches qui permettrait de les toutes étudier sur le même plan.

Les sciences particulières, dont les divisions artificielles rompent l'enchaînement naturel des causes et des effets sont incapables de découvrir des lois. Les sciences générales, au contraire, s'appliquant à suivre une même série de faits dans la totalité des choses, arrivent à reconnaître ce que leur ordre a d'universel et de constant, c'est-à-dire à formuler les lois de l'ensemble.

En ce qui concerne les moyens d'investigation, chaque science, astreinte à étudier une seule catégorie de phénomènes, est obligée de se faire une méthode appropriée aux difficultés spéciales de son objet. Cette méthode, par suite d'un exercice continu, se perfectionne avec le temps et développe ses artifices en vue de résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Enfin, les sciences générales se lient, quand on les rapproche, comme les membres d'un corps. Un principe de coordination les domine. Elles représentent les aspects divers de la même réalité. Leur unité résulte de celle de la nature et la reproduit. Réunies, elles constituent un système logique. Les sujets d'étude

étant ainsi disposés, on aurait, en place d'une multitude de sciences particulières, mal limitées et discordantes, un nombre restreint de sciences générales bien définies, distribuées avec ordre et formant un tout. La raison satisfaite trouverait à la fois plus de cohérence dans l'ensemble et plus de netteté dans le détail. D'un chaos de notions confuses, on verrait sortir un monde réglé.

Les sciences générales se distinguent donc par un double trait des sciences particulières : tandis que celles-ci établissent à priori des collections de choses et les étudient sous de multiples aspects; celles-là déterminent à posteriori des classes de phénomènes et scrutent sous un seul aspect la totalité des choses. Par conséquent, chaque science générale, pour justifier son titre, devra satisfaire aux deux conditions suivantes : borner ses recherches à une seule catégorie de faits et l'explorer dans le monde entier. Toute science sera défectueuse, c'est-à-dire plus ou moins entachée de particularité, qui limitera son étude à des groupes d'êtres ou qui examinera son objet sous des aspects différents.

Quelques sciences, mêlées de bonne heure aux sciences particulières, mais plus rationnellement établies, offrent un exemple du mode d'attribution dont nous venons d'indiquer la loi. La tendance de l'esprit de recherche à suivre en certaines matières un enchaînement logique d'idées, fit instituer des sciences générales ou des parties de ces sciences. Ainsi l'Arithmétique, la Géométrie et l'Algèbre composent, sous

le nom de Mathématiques, une science générale bien délimitée, celle des grandeurs, qui s'applique à tout. Ainsi encore la Dynamique, la Physique et la Chimie ont un caractère marqué de généralité. Par malheur, cette manière de répartir les objets d'étude, pratiquée par instinct plus qu'avec réflexion, ne fut pas étendue à toutes les séries de faits. Le système des sciences particulières continua de prévaloir, et l'établissement parmi elles de sciences générales, loin de remédier à la confusion, contribua plutôt à l'accroître. Des réformes partielles ne pouvaient, en effet, suffire; il fallait une refonte totale. La classification des sciences doit reprendre et coordonner l'ensemble intégral des connaissances.

D'éminents penseurs ont, depuis trois siècles, agité ce grand problème, le plus important par ses conséquences qu'il soit possible de poser; mais aucun ne l'a résolu. Bacon (*Instauratio magna*, lib. II, cap. I), Locke (*Essai sur l'entendement humain*, liv. IV, ch. XXI) et d'Alembert (*Système des connaissances humaines*, discours en tête de la grande Encyclopédie), ont proposé des modes de répartition fondés, non sur les caractères intrinsèques des objets de connaissance, mais sur des distinctions convenues entre les facultés de l'intelligence classées en mémoire, raison et imagination. Dans ces cadres arbitraires, les sciences les plus disparates se trouvèrent rangées côte à côte et, en place d'une confusion naïve, on eut un désordre pédantesque. Plus près de nous, Hegel et Oken ont encore tracé à priori leurs plans de coordination des sciences. Notre âge, mieux instruit des conditions de

la vraie méthode, veut enfin substituer à ces classifications artificielles une classification naturelle, c'est-à-dire conforme à la nature des choses et à celle de l'esprit humain.

Le xix<sup>e</sup> siècle a vu s'opérer en ce sens des tentatives qui, si elles n'ont pas atteint le but, ont du moins indiqué la voie. Dans son *Essai sur la Philosophie des sciences*, Ampère a établi une classification systématique où figurent pêle-mêle, réparties en cent trente-deux sections, des sciences générales, des sciences particulières et jusqu'à des applications technologiques. Plus récemment, Herbert Spencer a disposé les sciences dans un ordre où il semble avoir évité comme à plaisir d'être simple. Il distingue trois sortes de sciences : 1<sup>o</sup> abstraites (Logique, Mathématiques); 2<sup>o</sup> abstraites-concrètes (Mécanique, Physique, Chimie); 3<sup>o</sup> concrètes (Astronomie, Géologie, Psychologie, Sociologie) (voy. *Classification des sciences*). C'est mêler encore indûment les sciences générales et les sciences particulières. De plus, le principe de distinction est mal établi, car la différence entre le concret et l'abstrait étant celle du fait à l'idée, les diverses sciences peuvent paraître alternativement concrètes, si l'on considère la réalité des choses, et abstraites, si l'on se réfère aux conceptions qui les représentent dans notre esprit.

Le plus puissant effort pour établir un ordre méthodique parmi les sciences est dû à Auguste Comte (*Cours de Philosophie positive*, 1830-1842). Son système de connaissances se réduit à instituer six sciences : Mathématique, Astronomie, Physique, Chimie, Biologie

et Sociologie. Cette classification a sur les autres l'avantage d'une grande netteté; néanmoins, elle prête encore à de graves critiques. Elle est d'abord incomplète en ce qu'elle omet la science première qui constate la réalité des choses et parvient directement à la vérité par l'évidence. En outre, elle ne sépare pas avec assez de soin les sciences particulières des sciences générales. Après avoir exprimé, au début de son ouvrage, l'intention formelle d'exclure les premières et d'admettre seulement les secondes, A. Comte a commis d'étranges méprises à cet égard, puisque, sur les six sciences présentées par lui comme générales, trois, l'Astronomie, la Biologie et la Sociologie, sont en réalité particulières. La réforme n'est donc accomplie qu'à moitié. Enfin, les limites, presque toujours mal posées entre les ordres de faits, laissent subsister bien des causes de confusion. Les sciences, tantôt trop restreintes, n'embrassent pas la totalité de leur sujet, et, tantôt trop vastes, comprennent des choses qui leur sont étrangères. En somme, aucune des sections établies par A. Comte ne nous paraît devoir, à moins de changements considérables, trouver place dans un classement définitif. Quant aux subdivisions des sciences, l'auteur du *Cours de Philosophie positive* n'a pas même soupçonné qu'elles gagneraient à être opérées méthodiquement. Ses programmes ont été tracés sans vue d'ensemble et les problèmes afférents à chaque science, distribués par routine ou par caprice, ne sont pas répartis suivant une loi générale, d'après un plan rationnel. Sa théorie des sciences est donc à la fois insuffisante et défec-

tucuse. Elle aurait besoin d'être complétée et rectifiée.

Notre dissentiment avec le chef de l'école positiviste irait même au delà de détails d'attribution ; il porterait sur l'ensemble du problème et sur la manière d'en concevoir la solution. A. Comte s'est proposé de fonder une « Philosophie » ; plus ambitieux, nous voudrions instituer une « Science ». Une philosophie, en effet, alors même qu'elle s'intitule « positive » et professe un dédain profond pour la métaphysique, s'en rapproche toujours par certains côtés. Elle est également affaire d'opinion et de système, sujette à devenir secte. On l'a vue même, par une déviation étrange, se transfigurer en religion et s'ériger en église avec dogmes, culte et pontife (voy. A. Comte, *Catéchisme positiviste, ou sommaire exposition de la religion universelle*, 1852) <sup>1</sup>. Les croyants seuls ont manqué. Il y a, non une Philosophie des sciences, mais une Philosophie *et* des sciences. L'une se transporte d'un vol hardi en plein absolu et s'efforce d'en donner par divination des vues idéales ; les autres, confinées dans le relatif, explorent patiemment la réalité, à l'unique fin de la montrer telle qu'elle est. Il faut éviter de confondre ces deux ordres de recherches qui tendent à des buts différents par des voies distinctes. On ne pourrait les unir qu'à leur détriment commun. Réduire la philosophie à spéculer sur les sciences, c'est lui couper les ailes et lui retrancher l'inconnaisable, son vrai domaine. Asservir les sciences à la philosophie, c'est les exposer à bien des périls sur cette

1. Huxley a pu définir le positivisme « un catholicisme moins le Christianisme ».

mer de la métaphysique, si féconde en naufrages et vouée par la mobilité même de ses éléments à d'éternelles fluctuations. Nul accord n'est possible entre ceux qui, s'avouant incapables d'atteindre le vrai, se contentent du vraisemblable<sup>1</sup>, et ceux qui, selon le conseil de Descartes, « réputant presque pour faux tout ce qui n'est que vraisemblable » (*Discours de la méthode*, 2<sup>e</sup> partie), aspirent à posséder le vrai lui-même, avec une entière certitude. Aussi longtemps d'ailleurs que la Philosophie ne sera pas une science, la Science ne pourra que déchoir à s'offrir pour une philosophie. C'est pourquoi nous avons préféré donner à ce travail le titre de « Science intégrale » ou de « Science des sciences », n'ignorant pas combien il serait difficile de le justifier, mais n'en trouvant pas qui indique mieux comment il convient de traiter un pareil sujet.

Dans l'ensemble de la connaissance humaine, il y a place, en effet, pour une science maîtresse qui, faisant sa spécialité des généralités et dominant de haut les sciences proprement dites, devrait assigner à chacune d'elles son objet, marquer leurs limites respectives, classer les problèmes, établir les méthodes d'investigation ou de preuve, et finalement ramener toutes les notions à l'unité. Au moyen

1. « Je vous donne des *probabilités*, ne me demandez rien de plus » (Platon, *Timée*, ch. III). Selon Descartes, « la Philosophie donne le moyen de parler *vraisemblablement* de toutes choses... » (*Discours de la méthode*, 1<sup>re</sup> partie). — Un historien de la philosophie (M. Hippeau) compte trois cent cinquante philosophes entre Thalès et Cousin. De l'aveu de ce dernier, aucun d'eux n'a rien établi de définitif et, après des hypothèses sans nombre, la métaphysique n'est, en fait de certitude, pas plus avancée que le premier jour.

âge, époque de foi plus que d'examen, saint Thomas d'Aquin résuma les croyances de son temps dans une *Summa Theologiæ*; Descartes, restaurateur de la philosophie, avait projeté une *Summa Philosophiæ* dans son *Traité du monde* resté inachevé; notre âge, où prévaut la recherche positive, aurait mission d'accomplir une *Summa Scientiæ*. Leibniz l'a rêvée sous le nom de « Science générale ». Une synthèse de ce genre dont le besoin est, de nos jours, impérieusement senti, s'impose désormais comme une condition de progrès. Nous n'avons point, cela va de soi, la prétention d'exécuter cette œuvre immense; nous nous proposons seulement d'en dresser le plan.

Le travail de la coordination des sciences comprend plusieurs tâches distinctes qui veulent être abordées successivement. Il faut, en premier lieu, constituer les divers ordres de connaissances et les exposer chacun à part; ensuite, les comparer, scruter leurs relations et mettre leur hiérarchie en lumière; enfin, rétablir l'unité de la science, conforme à celle de la nature. Tels sont les problèmes que nous examinerons dans les trois parties dont se composera cette étude.

# PREMIÈRE PARTIE

## CONSTITUTION DES SCIENCES



## PRÉLIMINAIRE

### DÉTERMINATION DES SCIENCES GÉNÉRALES

Pour qu'une science soit régulièrement constituée, plusieurs conditions sont nécessaires. Les principales concernent la définition de son objet, l'établissement de son programme et l'organisation de sa méthode.

Avant tout, il importe de définir nettement l'objet de la science. Qui se met en voyage a besoin de savoir où il veut aller. Au début de chaque étude, il faut se rendre compte des choses à étudier, les séparer des autres sujets de connaissance et, par ce moyen, éviter les fausses attributions, les excursions oiseuses, les chances de confusion. « Quand on sait bien ce qu'on cherche, on le trouve toujours, » dit un maître dans l'art de découvrir (Cl. Bernard). La définition marque des bornes précises, circonscrit le champ d'exploration et détermine exactement l'étendue qu'auront à parcourir les recherches, les frontières qu'elles ne devront pas dépasser. Bien établie, la définition doit comprendre toute la matière d'une science et ne convenir qu'à elle.

L'objet de l'étude est ensuite à diviser rationnellement. Le progrès de la connaissance exige que les problèmes soient abordés dans l'ordre où ils peuvent le mieux être résolus. Il faut donc tracer un programme qui permette de com-

#### 4 DÉTERMINATION DES SCIENCES GÉNÉRALES.

mencer par les plus simples et de s'élever par degrés jusqu'aux plus complexes. Sans classement de ce genre, on courrait le risque de s'attaquer d'abord aux questions les plus difficiles et de perdre son temps à vouloir les trancher prématurément, tandis qu'on négligerait les problèmes élémentaires, d'une solution relativement aisée. Suivre un ordre logique, c'est aller par la plus droite voie à la découverte de vérités qui s'enchaînent; procéder au hasard, c'est marcher à l'aventure et constituer une connaissance pleine de lacunes et de confusion.

Enfin, après avoir déterminé ce que l'on veut étudier et l'ordre dans lequel on pourra le mieux l'étudier, il reste à organiser les procédés de recherche, les moyens d'investigation. Chaque science doit mettre en œuvre des artifices adaptés à la nature des vérités qu'elle poursuit et des obstacles qu'elle rencontre. C'est en cela que consiste sa méthode, instrument indispensable de toute exploration raisonnée. Qui entreprendrait sans méthode l'étude d'une science ressemblerait à un voyageur prêt à parcourir un pays inconnu sans guide, sans carte, sans boussole et sans ressources.

Lorsqu'une science, réalisant ces trois conditions, a été clairement définie, divisée avec ordre et pourvue de la méthode qui lui convient, elle se trouve érigée à l'état positif. Son développement n'est plus qu'une affaire d'application et de temps. Examinons sous ce triple aspect les sciences que nous voulons établir.

## I

## DÉFINITION DES SCIENCES

La première question qui se pose concerne le nombre des sciences à instituer. Combien devons-nous admettre de classes de faits dans la nature ou de catégories d'idées dans l'esprit humain? En d'autres termes, de combien de manières pouvons-nous concevoir l'ensemble des choses et sous combien d'aspects faut-il l'étudier pour le connaître? A. Comte s'est abstenu de toute discussion à ce sujet, comme si un tel problème n'intéressait pas la science et relevait uniquement de la métaphysique. Tout au rebours, c'est là le problème fondamental de la constitution des sciences et la métaphysique est impuissante à le résoudre. L'initiateur de la philosophie positive, faute d'avoir embrassé d'abord dans toute son étendue, puis analysé avec soin l'objet intégral de la science, n'a pas pu opérer avec certitude le dénombrement de ses parties. Il énumère à *priori* six ordres de connaissances sans dire pourquoi il se limite à ce nombre et sans qu'on soit assuré qu'il n'a rien omis. Cette manière de procéder qui, dès le point de départ, ouvre la porte à l'erreur, nous semble illogique et peu prudente. Il est nécessaire de commencer par une révision des phénomènes de la nature et des concepts qui leur correspondent dans notre esprit.

Le problème que nous soulevons ici a été longuement

débatu dans les écoles philosophiques sous le nom de « question des catégories » (de κατηγορία attribution); mais aucune n'en a donné la solution rationnelle. Toutefois, là où la métaphysique a échoué, il n'est pas impossible à la science de réussir, car elle tente d'autres voies. Rappelons les théories les plus célèbres proposées par les philosophes sur cet important sujet. Si elles n'indiquent pas la route à suivre, elles signalent du moins celles qu'il faut éviter, et cela même est un renseignement qui a son prix, puisque, d'ordinaire, l'esprit humain n'arrive à la vérité qu'après avoir parcouru tous les sentiers qui mènent à une erreur.

L'école de Pythagore, à qui revient le mérite d'avoir formulé le plus ancien système de catégories, admettait dix principes fondés sur des contrastes d'idées où dominaient les considérations mathématiques. C'étaient : 1° le fini et l'infini; 2° l'impair et le pair; 3° l'un et le multiple; 4° le droit et le gauche; 5° le masculin et le féminin; 6° le repos et le mouvement; 7° le droit et le courbe; 8° la lumière et les ténèbres; 9° le bien et le mal; 10° le carré et l'oblong. — On ignore pourquoi les Pythagoriciens crurent devoir borner à dix leurs catégories, car, une fois en si beau chemin, rien ne les empêchait de multiplier indéfiniment ces antithèses.

Aristote, dans sa Logique, distingue aussi dix catégories ou chefs d'idées, mais il les établit autrement, savoir: 1° la substance (οὐσία); 2° la quantité (πόσον); 3° la qualité (ποιόν); 4° la relation (πρός τι); 5° le lieu (ποῦ); 6° le temps (πότε); 7° la situation (κεῖσται); 8° l'état (ἔχσειν); 9° l'action (ποιεῖν); 10° la passion (πάσχειν). Tels sont, d'après le Stagirite, les dix modes de l'existence, les catégories de l'entendement. Rien ne pourrait se concevoir en dehors (*Organon, des catégories*). Cependant l'auteur même de ce système fameux propose, dans un appendice, d'adjoindre aux catégories précédentes

quatre catégories nouvelles : l'opposition, la priorité, la simultanéité et le mouvement (Id. id.) Enfin, dans le livre des *Topiques*, il distingue encore les attributs qu'il appelle « dialectiques », les seuls sur lesquels on discute : la définition, le propre, le genre et l'accident.

Les Stoïciens, suivant le commentaire de Simplicius sur l'ouvrage d'Aristote, réduisirent à quatre les catégories : la substance (είς ὑποκείμενα); la qualité (ποιά); l'absolu (πῶς ἔχοντα); et le relatif (καὶ πρὸς τί πῶς ἔχοντα).

Dans l'Inde, le système de philosophie de Kanada (le *Vaiceshika*) répartit les attributs des choses en six classes (*Padarthas*) : la substance, la qualité, l'action, le commun, le propre et la relation. Les disciples de Kanada firent une septième catégorie de la négation de toutes les autres.

Au moyen âge, la Scolastique admit, d'après Porphyre (*Introduction à la Logique d'Aristote*), cinq sortes d'idées universelles sous le nom d' « universaux » : le genre, l'espèce, la différence, le propre et l'accident. Les principes des choses furent énumérés dans le distique suivant :

Mens, mensura, quies, motus, positura, figura,  
Sunt cum materia cunctarum exordia rerum.

Les philosophes modernes, à qui le spectacle de tant de variations dans le passé aurait, semble-t-il, dû inspirer quelque prudence, ont ajouté leurs contradictions à celles de leurs devanciers sans réussir à y mettre un terme. Leibnitz, défendant contre Locke le système des catégories, propose de le modifier au lieu de le rejeter. Il réduit leur nombre à cinq : 1° la substance; 2° la quantité; 3° la qualité; 4° l'action et la passion; 5° la relation (*Notes sur le système de Locke*).

Hume reconnaît seulement quatre catégories : l'exis-

tence, l'ordre dans l'espace, l'ordre dans le temps et la causation (*Essai sur l'entendement humain*). Stuart Mill adopte cette division et se contente d'y adjoindre la ressemblance. (*Système de Logique*, liv. I, ch. v).

Kant, reprenant cette vieille question, toujours renaissante, des catégories, a constitué des groupes balancés et symétriques où il semble avoir voulu combiner les systèmes de Pythagore, d'Aristote et de Zénon. Il distingue :

- 1° La quantité (unité, pluralité, — totalité) ;
- 2° La qualité (affirmation, négation, — limitation) ;
- 3° La relation (substantialité, causalité, — réciprocité) ;
- 4° La modalité (possibilité, réalité, — nécessité).

(*Critique de la raison pure, Logique transcendante, des catégories*).

Nous pouvons borner là cette revue. Les systèmes que nous venons de mentionner ont un défaut commun qui les rend tous inacceptables. Ils répartissent des abstractions pures et s'appliquent aux idées plus qu'aux choses. Il serait même exact de dire qu'ils s'appliquent aux mots mieux encore qu'aux idées. Les théories de ce genre, propices aux discussions d'école, avaient pour unique avantage d'établir des distinctions subtiles, d'étayer des argumentations sophistiquées et de fournir ainsi le moyen de disserter congrument sur toute espèce de sujets (Aristote, début des *Topiques*), sans mettre à même d'en élucider aucun. Comme elles spéculent sur les formes vides de la pensée au lieu de considérer la réalité des faits, elles n'ont pas pu conduire à la constitution d'une seule science, moins encore, à la découverte d'une seule vérité. Parmi tant de catégories fictives, bien peu seraient propres à servir de cadre pour des recherches efficaces. A quelles connaissances précises auraient chance d'aboutir des études sur la substance, la

qualité, le temps, l'espace, la relation, l'opposition, la possibilité, la réciprocité, l'affirmation ou la ressemblance? Autant vaudrait, selon l'expression d'Aristote, poursuivre des oiseaux qui s'envolent. Ces catégories sont si vagues et si générales que chacune d'elles comprendrait au besoin le tout de la science humaine. Elles représentent moins des aspects différents des choses que l'universalité des choses. En place d'une division effective, on a de simples distinctions verbales et l'intégralité du sujet se trouve reproduite sous divers noms. Le caractère de spécialité qui devrait être la marque de sciences bien établies leur fait généralement défaut. Cherchons si, en abordant le problème par un autre biais, il ne serait pas possible d'en obtenir la solution.

Comme une part de vérité se mêle toujours aux erreurs humaines pour en faire l'illusion et le prestige, on pourrait extraire de ces théories, dont aucune, prise en soi, ne satisfait la raison, les éléments d'un système pleinement rationnel. Ils s'y rencontrent, en effet, mais confondus avec des éléments métaphysiques dont le voisinage les altère et les obscurcit. Essayons de les dégager. Quelques-unes des catégories que nous avons citées correspondent aux sujets de sciences bien déterminées. Telles sont la quantité, dont l'arithmétique cherche la mesure; la situation, le repos et le mouvement, dont traitent la Statique et la Dynamique, etc. Il y aurait donc un triage à faire, des indications à coordonner. Peut-être arriverait-on ainsi à effectuer en partie la conciliation, nous voudrions pouvoir dire la réconciliation de la Métaphysique et de la Science.

Le moyen de discerner sûrement les catégories positives de celles qui ne le sont pas consiste à voir si elles s'appliquent ou non à des classes de faits, c'est-à-dire si elles comportent ou ne comportent pas une définition

précise. La question des catégories, moins abstruse qu'on ne le croit, n'est en somme qu'une question de sciences à constituer. Si, en effet, la valeur de nos idées tient à ce qu'elles représentent des objets de connaissance, il doit manifestement y avoir autant de classes d'idées que d'ordres de connaissances et pas davantage. Par conséquent, les seules catégories recevables se reconnaîtront à ce signe qu'elles peuvent être le sujet d'études bien délimitées. Les autres sont de simples concepts métaphysiques, et, ne pouvant conduire à rien puisqu'elles n'assignent aux recherches aucun but positif, ne méritent pas qu'on s'en occupe. L'analyse qu'il convient de faire doit donc répartir simultanément les faits et les idées. Leur disjonction compromet tout et suffirait à expliquer, d'une part, le long avortement de la Philosophie, de l'autre, l'anarchie où se débattent les sciences. Classer les idées sans tenir compte des faits, c'est spéculer sur des abstractions sans profit pour la connaissance des choses; distribuer les faits sans tenir compte des idées, c'est instituer, sans plan ni méthode, des sciences particulières. Dans les deux cas, l'arbitraire et la convention dominant. Il faudrait tenir compte à la fois des idées et des faits, c'est-à-dire grouper les faits conformément à des idées, suivre tout ensemble l'ordre de la nature et les lois de l'entendement. En d'autres termes, les catégories de la science doivent être effectives et raisonnées, viser des phénomènes connaissables et les répartir d'après un idéal logique. Établies séparément, les catégories d'idées sont illusoire et les catégories de faits confuses. Associées, au contraire, elles se servent réciproquement de contrôle. Leur accord procure aux sciences générales l'extension rationnelle qui fait défaut aux sciences particulières et la réalité positive dont les catégories métaphysiques sont dépourvues. L'artifice consiste ainsi à

déterminer dans la totalité des choses des séries de phénomènes en rapport avec des séries d'idées.

Les aspects de la nature, si grande que paraisse au premier abord leur diversité, se laissent réduire, quand on les examine avec réflexion, à quelques faits généraux et simples auxquels correspondent les concepts fondamentaux de la raison. Tâchons d'en opérer l'analyse. Le nombre de ces aspects caractéristiques des choses nous indiquera combien nous devons distinguer de catégories et conséquemment instituer de sciences.

Ce qui frappe tout d'abord, quand on considère l'ensemble des choses, c'est que des choses existent. Leur réalité, qui nous donne prise sur elles et nous permet de les percevoir, constitue le fait essentiel, l'idée véritablement première. Cet aspect de la nature est le plus élémentaire, le plus aisé à constater, le seul manifeste de soi. Sa connaissance marque le point de départ de l'exploration des choses, car on ne les étudie que parce qu'elles sont et, si elles n'étaient pas, il n'y aurait pas lieu de s'en occuper. Cette classe de faits et d'idées comprend tout ce qui se rapporte aux constatations d'existence. Elle semble se confondre avec la catégorie de substance qu'à la suite d'Aristote la plupart des métaphysiciens ont admise dans leurs systèmes; Aristote identifie en effet la substance et l'être, le propre de la substance étant, dit-il, d'exprimer quelque chose de réel (*τὸδὲ τί σημαίνειν*. *Des catégories*, 3, b. 10); mais, tandis que l'idée de substance est, comme celle d'existence pure, d'ordre métaphysique et inaccessible aux recherches, les idées de réalité perceptible sont d'ordre positif et composent la matière d'une science.

L'esprit ne peut pas constater des existences distinctes sans voir surgir du rapprochement de ces données une

nouvelle classe de problèmes relatifs à la détermination des grandeurs. Par cela même, en effet, que des réalités co-existent pour la pensée, on est amené à les concevoir sous le double aspect du nombre et de l'étendue. Ces notions, qui résultent d'un rapport d'idées, peuvent être l'objet de spéculations purement logiques où l'on cherche à déterminer les unes par les autres les inégalités des quantités et des dimensions. Il semble qu'à raisonner de la sorte sur des conceptions abstraites on perde de vue la réalité des choses; mais, d'abord, l'idée de grandeur se lie à celle d'existence, si manifestement positive; en outre, les lois des grandeurs régissent, avec une rigueur parfaite, tous les ordres de faits. Ces éléments de connaissance tiennent donc aux réalités par leur origine et par leurs applications. Comme ils ont une nature spéciale et une extension sans limites, il convient de les ranger dans une seconde catégorie comprenant ce qui a rapport aux grandeurs et à leur mesure.

Les notions d'existence et celles de grandeur, combinées, procurent l'idée de corps ou de masses, c'est-à-dire de réalités à la fois perceptibles et mesurables. L'esprit ne se borne pas à considérer les choses sous l'un ou sous l'autre de ces deux aspects; il en conçoit un troisième qui diffère des précédents par cela seul qu'il les unit. Des corps ne peuvent pas exister en plus ou moins grand nombre et sous des dimensions assignables sans occuper, les uns par rapport aux autres, des positions qui tantôt sont fixes et tantôt varient. L'idée de force doit alors intervenir pour expliquer comment, dans certains cas, les masses restent immobiles et, dans d'autres, changent de lieu. Ces phénomènes, dits d'équilibre ou de mouvement, sont à scruter en toutes choses. Ils composeront, en conséquence, une troisième catégorie, celle des faits de collocation.

Poursuivons l'analyse des aspects de la nature et, comme on n'arrive à la connaissance de ce qui est composé que par l'étude de ses parties, opérons dans la complexité des choses des divisions successives. Les corps dont nous venons de constater l'existence, de mesurer la grandeur et d'établir les situations, sont des fragments de l'universelle réalité ; mais ces fragments, capables par leurs dimensions d'impressionner nos organes, se résolvent en parcelles dont l'atténuation peut être portée bien au delà du point où elles cessent d'être perçues, sans néanmoins différer, autrement que par leur exigüité, des corps dont elles sont détachées. La masse, décomposée en particules impalpables et invisibles, semble alors s'évanouir et disparaître. Cependant ces particules homogènes des choses ne perdent point, en se séparant, leur réalité matérielle. Isolées, elles conservent les propriétés des corps et il leur suffit de s'agréger de nouveau pour reconstituer les agrégats primitifs. On donne à ces éléments le nom de « molécules ». Leur assemblage réalise dans les masses un ordre fixe ou variable de collocation. Toutefois il n'est plus possible de s'en rendre compte directement, puisque, par leur petitesse, ils échappent à l'observation, et nous sommes réduits, pour en juger, à l'étude des résultantes médiatees produites dans la condition des corps sous forme de modalités sensibles. Les faits de ce genre, que désigne l'expression de « phénomènes physiques », ont une spécialité tranchée et s'accomplissent dans tous les corps. Ils motivent, en conséquence, l'établissement d'une quatrième catégorie.

Pénétrons plus avant dans la constitution des choses : les molécules dont se composent les corps ne sont pas le dernier terme de leur division que l'esprit puisse concevoir. Les particules homogènes des masses les représentent encore sous de moindres dimensions ; mais elles sont

elles-mêmes composées d'éléments hétérogènes d'une petitesse extrême qu'on appelle « atomes » et dont les modes de groupement déterminent dans les corps des qualités spéciales qui servent à différencier leur nature. Outre les modalités physiques dont la cause consiste en actions moléculaires et auxquelles se rattachent les propriétés générales des choses, il y aurait donc à scruter en elles la composition chimique, qui résulte de l'union variable des atomes et d'où provient l'infinie diversité des propriétés particulières. Les transformations que les corps subissent quand leur substance se modifie sont l'effet de l'association ou de la dissociation de leurs éléments. La science doit tenir compte de ces phénomènes et les réunir dans une cinquième catégorie sous le titre de faits de combinaison.

Parvenus à ce degré de division de la matière que la raison se refuse à dépasser parce que, au delà, elle ne conçoit plus rien clairement, cherchons dans une autre direction d'idées les conséquences des données qui précèdent. Lorsque les atomes se groupent pour constituer des molécules, ils doivent se colloquer suivant certaines conditions d'équilibre, dans un ordre qui assure la permanence de l'agrégat. Lorsque, ensuite, les molécules s'unissent pour constituer des masses, elles doivent aussi prendre, sous l'empire de la cohésion, un mode d'arrangement favorable à leur stabilité commune et dont témoigne la permanence des corps. Cette double ordonnance des atomes dans les molécules et des molécules dans les masses aboutit à la production d'éléments plastiques qui, se coordonnant à leur tour, réalisent des formes sans nombre, soit inorganiques, soit organisées. Les faits de ce genre ont évidemment la même généralité que ceux de composition et de modalité, puisqu'ils en sont la résultante nécessaire. Rangeons-les dans une

sixième catégorie qui comprendra les modes de structure.

Enfin chaque corps, construit conformément à un type défini, se trouve, par l'effet même de sa structure, doué de l'aptitude à développer, dans le milieu où il est placé, une activité qui lui est propre. Sa condition plastique, fixe parmi des occurrences variables, le dispose à subir, d'une façon particulière, les influences qui s'exercent autour de lui et à réagir contre elles avec plus ou moins d'énergie, dans tel ou tel sens. Ces séries d'actions et de réactions, liées par l'unité persistante de la forme, constituent des « fonctions ». Les unes font successivement croître et décroître les corps; les autres assurent, chez les êtres vivants, le renouvellement de la substance et la régénération du type; des fonctions psychiques procurent aux êtres animés la faculté de sentir et de se mouvoir. A des degrés divers, des actes fonctionnels s'accomplissent dans tous les corps. Il y a donc lieu d'en composer une septième et dernière catégorie.

L'esprit humain, cédant à une nécessité logique, éprouve le besoin de rattacher les séries distinctes d'effets à des causes spéciales dont chacune a son mode d'action et sa condition de connaissance. Ces raisons des choses sont : la réalité ou perceptivité pour les existences; la rationalité pour les grandeurs; la gravité pour la collocation des masses; l'action physique ou force moléculaire pour les modalités; l'action chimique ou affinité pour les combinaisons des substances; une action formatrice ou plasticité pour les faits de structure; enfin, une puissance d'activité pour les fonctions.

Ces forces ou principes d'action ne sont pas des réalités véritables, mais de simples conceptions de l'entendement, expression abstraite et générale de la coordination des faits. Au fond, la force est une comme l'univers est un et

la puissance qui anime les choses se confond avec leur essence. Les forces que particularisent nos sciences représentent les modes d'application, dans des conditions déterminées, de la force universelle. A ce titre, elles ont leur utilité comme moyen d'analyse. « Alors même que l'esprit serait un jour conduit à abandonner l'idée de forces diverses, à regarder tous les modes de force comme des manifestations différentes d'une seule et même force ou à les résoudre définitivement en mouvements, il nous serait permis néanmoins d'employer certains termes conventionnels pour exprimer les différents modes d'action de cette force unique qui envahirait tout. » (Grove, *Corrélation des forces physiques*, trad. française, p. 329.)

Au terme de cette analyse, nous avons sept classes de faits soumises à des lois distinctes de production et auxquelles correspondent sept catégories d'idées. Ces divisions fondamentales, dans lesquelles rentrent tous les aspects de la nature et tous les concepts de la raison, sont : 1° l'existence ; 2° la grandeur ; 3° la collocation ; 4° la modalité ; 5° la composition ; 6° la structure ; 7° les fonctions. Là s'arrête pour nous l'investigation positive et nous touchons la limite de la connaissance certaine. Pour avoir des choses une notion intégrale, il est donc nécessaire, mais il suffit de constater d'abord leur réalité, de mesurer ensuite leur grandeur, puis de déterminer leur situation, de scruter leur condition moléculaire, de reconnaître leur état de composition, enfin de décrire leur forme et d'exposer l'ordre de leurs fonctions. Ces aspects une fois étudiés à fond et en toutes choses, on saurait d'elles tout ce qu'on en peut savoir.

Consacrons une science à chacune des catégories de faits que nous venons d'établir, nous aurons les sept sciences générales suivantes :

- 1° L'Ontologie positive ou Logique, science des réalités;
- 2° La Métrologie ou Mathématique, science des grandeurs;
- 3° La Théséologie ou Dynamique, science des situations;
- 4° La Poïologie ou Physique, science des modalités;
- 5° La Craséologie ou Chimie, science des combinaisons;
- 6° La Morphologie, science des formes;
- 7° La Praxéologie, science des fonctions.

Telles seront pour nous les catégories de la science. Après avoir indiqué de la sorte les divisions principales d'une étude de la nature, voyons comment il conviendrait d'opérer les subdivisions ultérieures.

## II

### PROGRAMME DES SCIENCES

Les sept sciences générales entre lesquelles nous venons de répartir la science totale des choses ont besoin d'être divisées à leur tour. Chacune d'elles comprend des multitudes de problèmes, les uns faciles à résoudre, les autres malaisés à élucider. Il importe de poser à part chacun d'eux et de les tous distribuer avec ordre, en raison de leur complexité croissante, afin qu'on puisse passer de l'un à l'autre par une gradation continue. Ce classement raisonné des problèmes constitue le programme des sciences, non moins nécessaire à leur établissement qu'un plan à la construction d'un édifice. Avec cette donnée, on peut à tout moment se rendre compte de l'état de l'œuvre; on voit ce qui est fait, ce qui reste à faire et où doivent le plus utilement porter les efforts. Les traités usuels sont très défec-

tueux à cet égard. Ils se contentent d'exposer les solutions obtenues et montrent ce qu'on sait sans indiquer ce qu'on ignore. On n'a point par eux une idée juste de l'ensemble et l'on entrevoit de vastes lacunes dont ils ne permettent pas de mesurer l'étendue.

Énumérer et classer les problèmes, en d'autres termes, tracer un plan de recherches qui donne par avance un aperçu de ce que sera la science achevée, telle est donc la première tâche qui s'impose au début de chaque étude. Jusqu'ici, pourtant, les programmes des sciences n'ont pas été rationnellement établis. On a divisé leurs sujets par convention ou par caprice, et cela, non seulement dans les sciences particulières où nulle entrave ne gênait la fantaisie des répartiteurs, car ils pouvaient, sans inconséquence, partager arbitrairement des groupes arbitraires de choses; mais même dans les sciences générales où un autre esprit aurait, semble-t-il, dû prévaloir. Les réformateurs ont suivi le commun exemple et A. Comte ne formule aucune règle propre à diriger dans le classement des problèmes. Nous croyons que les sciences, bien constituées, devraient distribuer leur matière d'après des lois invariables et, par conséquent, se construire toutes sur le même plan. L'institution d'un programme général présenterait de notables avantages, parce qu'il suffirait de connaître une science pour concevoir le type idéal de toutes les autres et marquer la place où leurs vérités encore ignorées viendront se ranger. Essayons de pressentir quel pourrait être cet ordre.

Descartes a énoncé quelques-unes des règles qui doivent guider dans la répartition d'un ensemble de problèmes: « diviser chacune des difficultés en autant de parties qu'il se pourra et qu'il sera requis pour les mieux résoudre; — conduire par ordre ses pensées, en commençant par les

objets les plus simples et les plus aisés à connaître pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés; — enfin faire des dénombrements si entiers et des revues si générales qu'on soit assuré de ne rien omettre. » (*Discours de la méthode*, 2<sup>e</sup> partie, règles 2, 3 et 4.)

Ce sont assurément là d'excellents préceptes; toutefois il ne faut s'en exagérer ni la nouveauté, puisque les savants de tous les âges les avaient appliqués d'instinct, ni surtout l'efficacité, car on ne voit pas que, depuis Descartes, leur connaissance ait conduit les philosophes à de bien grandes découvertes. Ce que ces formules ont de sommaire et de vague ne laisse pas d'embarrasser dans la pratique. Comment effectuer la résolution d'un sujet complexe en autant de parcelles qu'il se pourra? Comment ensuite le reconstituer par des revues générales? Cela n'est pas indiqué. Nulle règle n'est posée à cet égard et chacun procède comme il lui convient. Par suite, ces opérations qui, bien accomplies, seraient si utiles, mal dirigées, donnent presque toujours des résultats défectueux. Tantôt l'objet d'une science est, de prime-abord, mis en lambeaux par l'institution d'une multitude de sections confuses, et tantôt ces sections sont précipitamment groupées en ensembles incohérents. Le désordre, dans les deux cas, provient du trop grand nombre des parties qui ne permet à l'esprit de voir nettement ni leurs différences quand on les sépare, ni leurs rapports quand on les unit. Il faudrait une règle claire, applicable à tous les ordres de difficultés, qui pût servir à diviser les problèmes et à lier les solutions sans qu'on eût jamais de confusion à redouter. Voici comment il serait possible de l'établir.

Le principe de toute répartition méthodique consiste à distribuer les choses de telle sorte que les semblables se

trouvent réunies et les contraires séparées. Comme les ressemblances et les différences des choses ou de leurs aspects admettent une infinité de degrés, on a toute latitude pour former une infinité de groupes; mais il y aurait avantage à procéder par divisions et subdivisions successives, en s'appliquant à constituer chaque fois le moindre nombre possible de groupes, afin de rendre leur distinction plus claire. Or, les différences n'étant jamais plus sensibles que dans le contraste, le mieux serait de se réduire systématiquement à deux groupes mis en regard l'un de l'autre et si tranchés qu'on ne courrait pas le danger de les confondre. On aurait ainsi, pour employer les expressions de Labruyère, « une opposition de vérités qui se donnent du jour l'une à l'autre ». Chaque difficulté se résoudreait par un dilemme, et l'esprit, n'ayant à choisir qu'entre deux voies, serait moins perplexe que lorsqu'une foule de chemins s'ouvrent devant lui. Tel est l'artifice « dichotomique » (de δίχα τέμνειν, couper en deux) dont l'usage, introduit par Linné dans les classifications d'histoire naturelle, devrait trouver place dans toutes les sciences. La dichotomie, en effet, a la valeur d'une méthode logique de premier ordre et se prête avec un égal succès, soit à l'analyse des faits, soit, par inversion, à la synthèse de leurs rapports. Elle donne le moyen aisé, d'une part, de diviser les choses jusque dans le plus extrême détail, par des bipartitions successives, en tenant compte, chaque fois, du principal élément de différence; de l'autre, d'unir les vérités par couples de grandeur croissante, jusqu'à reconstitution complète de l'ensemble, en consultant, à chaque degré, le plus notable élément de ressemblance. Conformément à cette règle, on pourrait établir dans toutes les sciences un mode uniforme de répartition.

Deux voies seulement livrent accès à la connaissance des choses. L'esprit humain va, dans ses recherches, du composé au simple par une analyse des problèmes, ou de simple au composé par la synthèse de leurs solutions. De ces deux manières de procéder, la première s'applique à la détermination des faits, la seconde à celle de leurs rapports.

« Toutes choses, dit Pascal, étant causées et causantes, aidées et aidantes, médiates et immédiates, et toutes s'entretenant par un lien naturel et insensible qui lie les plus éloignées et les plus différentes, je tiens impossible de connaître les parties sans connaître le tout, non plus que de connaître le tout sans connaître particulièrement les parties. » (*Pensées*, éd. Havet, art. I, I.) L'objet d'une science ressemble à une vaste trame où il faut examiner séparément chaque fil pour en déterminer la matière, puis considérer leur mode d'assemblage qui constitue le tissu. Dans tout sujet d'étude on doit de même scruter d'abord les faits un à un en s'efforçant d'en épuiser autant que possible le détail, ensuite les comparer afin de reconnaître leur ordre. Ce sont là deux tâches distinctes qui exigent des aptitudes différentes chez les ouvriers chargés de les accomplir. Tandis que les investigateurs constatent et relèvent les particularités, les généralisateurs systématisent et ramènent à l'unité les notions éparses. Les uns ont le génie de la recherche minutieuse, les autres, celui de la spéculation hardie. Malgré l'opposition de leurs tendances, ils se complètent par leur accord et donnent à la connaissance son plein développement. Chaque science générale se compose ainsi de deux parties, la première descriptive, qui signale les faits et montre le comment des choses; la seconde explicative, qui établit les rapports des faits, et rend compte du pourquoi. Une science n'est entière que lorsque ces deux ordres de pro-

blèmes sont résolus, car, réduite à des constatations de faits, elle accumulerait confusément des fragments de connaissance; et, réduite à des vues théoriques, elle ne serait qu'un jeu d'imagination. Des relevés de faits et des coordinations de faits sont également nécessaires. Quand un sujet a été bien étudié sous ces deux aspects, on le connaît en détail et dans l'ensemble, c'est-à-dire intégralement.

En conséquence, nous partagerons chacune des sciences générales en deux parties principales relatives, l'une à l'étude des faits, l'autre à celle de leurs rapports. On pourrait nommer « Phénoménologie » la section qui traite des faits isolés et « Cœnologie » (de κοινός, commun) celle qui coordonne les faits par séries. Les problèmes de la première sont les plus simples, puisque chacun d'eux se résout à l'aide de ses propres données, sans qu'on ait besoin de s'occuper d'aucun autre, le résultat cherché se bornant à une description exacte du phénomène. Les problèmes de la seconde sont, au contraire, complexes, parce qu'on doit suivre, d'un fait à l'autre, des enchaînements d'influences qui, de proche en proche, s'étendent à tout. En outre la recherche des rapports entre les faits implique manifestement la connaissance préalable de ces faits. Il faut donc commencer par l'analyse des faits et terminer par la synthèse de leurs relations. On n'arriverait à rien en suivant une marche inverse, car spéculer sur l'ensemble des choses avant d'en avoir exploré le détail, c'est raisonner sur ce qu'on ignore et prendre l'inconnu pour point de départ. La Métaphysique procède ainsi, mais cela suffit à expliquer son impuissance.

Avant tout, il importe de bien connaître les faits. Ils constituent la donnée première, le fond de réalité certaine.

Édifier la science sans faits, c'est vouloir, comme dit Montaigne, bâtir une muraille sans pierres. Toute science est tenue de se construire avec ces matériaux et celle qui prétendrait s'en passer ne justifierait pas son nom. Loin de professer pour les faits le mépris superbe dont se targue la Métaphysique<sup>1</sup>, les sciences témoignent à leur égard un religieux respect, les tenant pour le principe même de la connaissance, pour la révélation partielle des lois qui régissent les choses. Conséquemment, elles subordonnent leurs théories au contrôle des faits, toujours prêtes à y renoncer dès qu'ils les démentent. Pour elles, le système le mieux accrédité ne saurait prévaloir contre un fait bien établi. En dehors de la réalité vraie, on ne peut en effet qu'imaginer, et l'inanité de la plupart des hypothèses *à priori* montre assez clairement combien est précaire la base sur laquelle on tente de les asseoir. Ces conceptions idéales, bonnes pour charmer des rêveurs mais non pour instruire des hommes de science, ne valent pas qu'on s'y arrête. Les conceptions *à posteriori*, au contraire, ont un fondement d'autant plus solide qu'elles reposent sur une plus large assise de faits. Inattaquables tant qu'elles ont pour support tous les faits connus, elles ne peuvent être ébranlées que par des faits nouveaux qui les contredisent. La science doit donc se renfermer dans le monde des faits et, même dans ses spéculations les plus hautes, dans ses théories les plus générales, ne jamais les perdre de vue. Son premier soin et son attention constante s'appliquent en conséquence à recueillir de copieux approvisionnements de faits, à les déterminer avec précision, à les scruter jusque dans le plus infime détail. Son ambition serait de n'en laisser échapper aucun, afin d'êtreindre la réalité des choses dans

1. On sait le mot de Royer-Collard : « Les faits, je les méprise ! »

toute son étendue. Bacon signalait aux sciences naissantes la condition de leur établissement, lorsqu'il insistait d'une manière pressante sur l'importance des faits, méconnue de puis des siècles. Il veut qu'elles vivent « courbées sur les faits », attentives à leur ordre et constamment occupées à chercher en eux la vérité. Au sortir des stériles controverses de la Scolastique, combats d'ombres dans les nuages, c'était indiquer la voie lente et pénible, mais sûre, qui seule conduit à la connaissance des choses.

L'unique moyen d'explorer avec méthode un vaste ensemble de faits consiste à le décomposer par « l'analyse » (de ἀνάλυσις, résolution). L'intelligence fractionne les difficultés qui l'arrêtent et parvient à les surmonter en détail. Dans un sujet dont la grandeur dépasse sa mesure ou la complexité sa pénétration, elle distingue des parties, puis dans ces parties des parcelles, et prolonge les subdivisions jusqu'à ce que la clarté résulte d'une parfaite simplicité. L'analyse, qu'Aristote appelle si justement « la clef de toutes les sciences » (*Politique*, liv. I, ch. 1), est le plus puissant moyen d'élucidation. Scinder les problèmes constitue l'œuvre essentielle de la « science », et son nom même l'indique, puisque l'étymologie assigne à ce mot le sens initial de « fendre<sup>1</sup> ».

La constatation des faits ne représente pourtant qu'une moitié de la science, et si là s'arrêtaient les recherches, la connaissance du sujet resterait fort incomplète. Au travail qui distingue et sépare doit succéder celui qui rapproche et unit. A diviser sans cesse les choses, on pourrait sans doute rendre la vue du détail très claire; mais celle

1. Le latin « scire » se rattache à un radical sanscrit « ki, » savoir, dérivé de « chid » pour « skid » qui signifie « fendre ». (Littré, *Dictionnaire de la langue française*.)

de l'ensemble ne cesserait pas d'être confuse et même le deviendrait de plus en plus. Un amas de notions ne compose pas une science ; il représente seulement la matière d'une science, et plus on a subdivisé les problèmes, plus il importe de lier les solutions. Il faut alors mettre ces données en ordre, scruter leurs rapports, les expliquer les unes par les autres et faire dépendre leurs séries de causes qui se subordonnent. Toutefois il ne peut s'agir ici que des causes secondes, du pourquoi relatif des faits, non de la cause première, du pourquoi absolu ou, selon l'expression de Leibnitz, du « pourquoi du pourquoi ». Nous savons, par l'inutilité des efforts de la Philosophie, qu'en tout les notions absolues, les causes premières et les fins dernières nous échappent. Bacon les appelle « sourdes » ; elles n'entendent pas nos questions et n'y font aucune réponse. Les interroger serait donc perdre son temps. Au jugement de Newton, quiconque se livre à cette recherche donne par cela même la preuve qu'il manque d'esprit scientifique. Nous ne pouvons acquérir que des connaissances bornées sur des causes secondes et des fins prochaines ; néanmoins, comme leur enchaînement se prolonge sans terme assignable, nos sciences ont devant elles une carrière indéfinie et nous aurons le droit de nous plaindre quand il ne leur restera plus rien à découvrir.

L'ordre de la nature n'admet pas de phénomènes isolés, car l'absence de rapport équivaldrait pour eux à l'absence de cause effective. Tous sont connexes et, soit simultanés, soit successifs, résultent d'un concours d'influences. L'univers est un système d'actions qui se coordonnent par séries et dont l'ensemble réalise une grandiose unité. Après avoir considéré le tout comme un composé de parties, il faut donc considérer les parties comme composant un tout et chercher à reconnaître les relations qui les lient.

A mesure que l'esprit possède plus d'indications de faits, il veut démêler leur entrecroisement, systématiser leur ordre et l'exprimer par des lois. Selon la définition si générale qu'en a donnée Montesquieu, ce terme de lois désigne « les rapports nécessaires qui dérivent de la nature des choses ». (*Esprit des lois*, liv. I, ch. 1). Sans doute, pour la science, tout est loi, car la nature ne fait rien sans règle, et chaque phénomène a la sienne; mais les particularités ont seulement des conditions particulières; les lois véritables sont l'expression de la connexité des faits et ne se laissent par conséquent surprendre que dans les séries. Les sciences analytiques, réduites à noter le détail des phénomènes sans pouvoir assigner de lois à l'ensemble, constituent de simples répertoires dont la confusion augmente avec la richesse. L'abondance de ces données se tournerait vite en chaos si l'on ne prenait soin de lier les faits par des théories qui, se liant à leur tour, rétablissent l'ordre des choses et le font concevoir comme un tout logique.

La fonction véritable de la science consiste à grouper les informations partielles et à ramener par des lois leur multiplicité à l'unité<sup>1</sup>. La raison, comme la nature dont elle est le reflet, aspire en toutes choses à l'ordre et à l'unité. « Le rapport de la raison et de l'ordre est extrême, dit Bossuet; l'ordre est ami de la raison et son propre objet. » La connaissance, pour être parfaite, doit condenser en quelques brèves formules une foule de notions et faire embrasser d'une étreinte de longues suites de vérités. D'après la doctrine platonicienne, il n'y a d'essentiel que ce qui dure; ce qui arrive et passe a peu de valeur. Les faits, s'écoulant sans cesse, ne sont pour ainsi dire jamais : « *Semper fluint, nunquam sunt.* » Ils représentent l'ap-

1. Le terme de λόγος qui, par le suffixe « logie », sert à dénommer les sciences, a, outre le sens « d'exposé de faits », celui « d'ordre » et de « loi ».

parence fugitive de l'éternelle réalité que la pensée voudrait saisir dans ce qu'elle a d'universel et d'immuable. Les lois, qui expriment les constantes des phénomènes, peuvent seules satisfaire la raison. Elles expliquent les effets passagers par des causes fixes, ce qui change par ce qui ne change pas. La science, résumant dans des lois ce que l'ordre des phénomènes a de régulier et de stable, subordonne ensuite ces lois les unes aux autres et remonte de cause en cause, jusqu'à une cause générale et simple qui explique tout sans avoir elle-même besoin d'explication. Ce sommet, que chaque science s'efforce d'atteindre, marque le point culminant de la connaissance. L'esprit, parvenu à cette hauteur, domine l'ensemble des faits contingents et, maître des principes, tient en main la suite entière des conséquences. Il est établi au cœur des choses et de leur ordre. Sa science est alors aussi complète qu'il le puisse souhaiter.

L'étude des rapports procède par voie de « synthèse » (*σύνθεσις*, διὰ σύν τιθημι mettre avec). Cette méthode, exacte contrepartie de l'analyse, va du particulier au général. Elle rapproche les faits, les compare, les unit et s'élève par degrés à la conception du tout. Postérieure à l'analyse, puisqu'elle spéculé sur ses données, la synthèse est moins avancée dans son œuvre et la plupart des sciences, riches en notions de détail, mais encore pauvres en lois, paraissent manquer d'unité. L'accord même de leurs théories laisse beaucoup à désirer. Achievées, elles devraient attribuer chaque série d'effets à une cause unique et concilier par elle les antinomies apparentes. Leur triomphe est de faire rentrer dans la formule d'une loi donnée les phénomènes exceptionnels ou contradictoires qui semblent la démentir. Ainsi s'effacent les différences des cas, et leurs disparates, vues de haut, se conçoivent comme les déductions d'un principe invariable.

Dans un ordre entier de faits, la science montre le même fait indéfiniment diversifié.

Au terme de cette double étude qui, mettant tour à tour en œuvre l'analyse et la synthèse, explore les deux faces du sujet, on a de lui une connaissance minutieuse dans le détail et concordante dans l'ensemble. On saisit les parties dans leur multiplicité, le tout dans son unité. Par là se trouve réalisée l'intime alliance du fait et de l'idée qui constitue la science générale, à la fois positive et rationnelle.

Nous venons de partager les sciences en deux sections principales. Dans chacune d'elles on aurait à résoudre un grand nombre de problèmes qu'il importe de classer.

Les faits, examinés un à un, sont relativement simples ou relativement complexes et, par suite, aisés ou difficiles à constater. Il convient donc de les répartir en deux séries. L'idée d'une distinction de ce genre est ancienne dans la science. De tout temps, par exemple, la Mathématique a étudié séparément les deux aspects de la grandeur, le nombre et l'étendue. La Dynamique a, de même, pris soin de disjoindre les faits d'équilibre et ceux de mouvement. L'école de Pythagore, dont les catégories étaient fondées sur le principe du dualisme, les avait déjà mis en opposition dans l'une d'elles. On doit au génie d'Aristote la distinction plus profonde de la « puissance » et de l'« acte » ou de l'état « virtuel » des forces et de leur état « actuel » (*De l'âme*, liv. II, ch. v). Blainville, généralisant cette vue, avait proposé de partager en deux groupes tous les ordres de faits et de considérer d'abord la condition « statique » des choses, ensuite leur condition « dynamique » (*Principes généraux d'anatomie comparée*). Partout, en effet, où la

force intervient comme cause des phénomènes, elle se manifeste sous deux aspects en apparence contraires : tantôt elle est virtuelle, passive, consacrée à produire des effets constants où son énergie, suspendue et latente, existe seulement en puissance, à l'état de « tension » ; et tantôt elle est actuelle, agissante, en cours de développement, capable de produire des effets divers où son énergie se déploie. La première condition des choses montre ce qu'elles ont de permanent ; la seconde ce qu'elles ont de variable. La force semble sommeiller dans un cas, s'éveiller dans l'autre, se tenir en réserve ou se dépenser. Cependant ces deux états sont moins opposés que corrélatifs. La force se régénère en passant de l'un à l'autre, sans rien perdre de sa puissance, même quand elle paraît inactive. La disparité de ses modes d'action tient à ce que, dans certaines occurrences, elle se trouve arrêtée par des obstacles, réagit contre eux sans pouvoir les surmonter et se borne à produire des effets d'une persistante uniformité ; au lieu que, dans d'autres, libre de s'exercer, elle suit ses propres lois et modifie l'ordre des choses par des mutations successives. Mais, virtuelle ou actuelle, expectante ou efficiente, c'est toujours la même force qui agit et, quoique ses applications diffèrent, sa nature ne change pas. Il est pourtant nécessaire de tenir compte, dans les sciences de faits, d'une dissemblance aussi marquée, et cette considération motive la division principale de leurs problèmes. Toutefois, comme cette règle n'est applicable ni aux spéculations de la Mathématique, ni aux données de l'Ontologie, nous devons chercher un mode plus général de répartition qui convienne à tous les sujets.

Dans une science quelconque, on aurait à distinguer deux sortes de faits : les uns, simples et fixes, se retrouvent partout et toujours les mêmes, ou du moins leurs varia-

tions, quand ils en comportent, sont très limitées; les autres, complexes et transitoires, changent de place et de moment en moment. Les premiers sont les plus faciles à connaître, puisque, en raison de leur uniformité générale, il suffit de les déterminer une fois pour toutes, n'importe où, n'importe quand. Les seconds, multiformes d'aspect, sont au contraire malaisés à constater, parce qu'il faut les suivre à travers des séries de mutations et les saisir sous des apparences diverses. Conséquemment, nous diviserons la partie analytique des sciences en deux sections, l'une « élémentaire », consacrée à l'étude des faits qui ne varient pas ou qui varient peu; l'autre « spéciale », chargée de décrire les faits que signale une variabilité caractéristique et qui, par cela même, posent une multitude de problèmes. La science des éléments est en général restreinte, à cause de la simplicité, du petit nombre et de la permanence de ses données. Cependant ces notions premières ont une importance très grande. Elles établissent le fondement sur lequel tout le reste se construit. Quoique leur acquisition soit relativement aisée, puisque les faits élémentaires peuvent être constatés en tous temps et en tous lieux, la tâche ne laisse pas d'avoir ses difficultés. Elle exige des recherches préalables, des définitions exactes et des théories sommaires. — La science des faits spéciaux est beaucoup plus étendue. Elle doit scruter les choses dans une condition de mutabilité qui les fait différer d'elles-mêmes, selon les lieux, les temps ou les circonstances, et relever le vaste détail de leurs variations éventuelles. La partie des sciences qui s'applique à résoudre ces problèmes ne pouvait se constituer que postérieurement à la précédente, car, sans la connaissance de ce que l'ordre des faits a de stable, l'étude de ce qu'il a de changeant ne pourrait guère être abordée. L'esprit avait besoin de points de repère fixes

pour y rattacher les aspects mobiles des choses et se reconnaître dans leur incessante diversité.

Il convient également d'instituer deux classes de rapports, en considération de leurs degrés de particularité ou de généralité. Les connexions qui unissent les choses peuvent être, en effet, directes et spéciales, ou médiatees et indéfinies. Dans un cas, elles forment des groupes limités de faits dont les relations sont étroites; dans l'autre, elles coordonnent des séries de groupes dont le lien plus lâche se prolonge en corrélations lointaines. Les rapports de la première classe, simples et restreints, sont le moins difficiles à démêler, parce qu'ils se produisent entre faits peu nombreux et déterminés; ceux de la seconde ont une nature complexe, résultant de ce qu'ils relient des multitudes de choses diverses et les modifient par des influences qui s'étendent à l'infini. Nous appellerons « comparée » la section des sciences qui étudie les relations particulières des faits, en vue de les expliquer en détail les uns par les autres, et « générale » celle qui, coordonnant les groupes de faits, formule les lois de l'ensemble. La première n'effectue que des synthèses partielles; la seconde opère la synthèse totale et donne à la science son couronnement.

Nous arrivons ainsi à distinguer, dans chaque science générale, deux sortes de faits et deux sortes de rapports. On peut encore subdiviser ces séries en leur appliquant la même règle de partage qui a servi à les établir. Il suffit, pour cela, de marquer dans chaque classe de faits des degrés de complexité, comme dans chaque classe de rapports des degrés de généralité.

Dans l'ordre des faits élémentaires, par exemple, il serait bon d'examiner séparément ceux dont la simplicité est

irréductible ou la fixité constante, et ceux qui ont une simplicité moindre, une fixité relative; en d'autres termes, les éléments premiers, qui ne comportent de changements d'aucune sorte, et les éléments secondaires ou dérivés, qui en admettent de peu d'étendue. La science doit manifestement débiter par l'étude des faits dont la condition de simplicité est si grande qu'on n'en peut pas concevoir qui le soit davantage. Ceux qui offrent déjà un commencement de variabilité sont à examiner en second lieu.

De même, parmi les phénomènes dont la mutabilité constitue le trait distinctif, on devra d'abord étudier ceux où elle est contenue entre des limites assignables, parce qu'il est encore possible de les décrire sans trop de peine; puis ceux où elle se développe sans limites et qui soulèvent les problèmes les plus complexes.

Dans l'ordre des relations spéciales, on aurait aussi à distinguer deux degrés, en raison du plus ou du moins d'extension des groupes. Les rapports de ce genre peuvent s'établir de fait à fait ou de fait à série. Dans le premier cas, on constitue des couples dont les termes sont unis par une corrélation immédiate; dans le second, on rattache les uns aux autres des faits liés par une influence collective et l'on en compose une série.

Enfin, l'étude des relations générales devra les distribuer également en deux classes, suivant que leur généralité est limitée ou illimitée, c'est-à-dire, qu'elles unissent par un rapport commun des séries de faits ou la totalité des faits. Il est, en effet, possible de concevoir deux sortes de lois, les unes qui, limitatives encore, s'appliquent à des séries de groupes; et les autres qui, atteignant le dernier terme de la généralisation, régissent l'universalité des choses. Elles expriment, dans une formule unique, l'intégralité de leurs rapports.

Ces indications suffisent à faire comprendre la manière de procéder dans le double travail de la décomposition analytique et de la reconstitution synthétique des objets des sciences. Nous ne suivrons pas plus loin, en ce moment, le détail des applications de la méthode à l'établissement de leurs programmes. Lorsque les exigences de l'étude feront sentir le besoin de fractionner davantage les problèmes, il sera toujours facile de multiplier les divisions en distinguant, dans chaque sous-ordre de faits, des degrés de complexité, comme, dans chaque sous-ordre de rapports, des degrés de généralité. L'essentiel est que les subdivisions successives portent toujours sur la nature des choses et ne cessent pas d'être méthodiques, car, si l'on admettait un seul instant l'arbitraire ou la convention dans ces analyses, le classement ne serait plus raisonné.

Le programme dont nous venons d'indiquer le plan et de tracer l'esquisse répartit les problèmes des sciences conformément aux lois de la classification naturelle, puisqu'il tient compte des caractères principaux des choses et les subordonne hiérarchiquement. Son exécution systématique aurait de grands avantages pour l'étude des divers ordres de faits.

Comme il utilise, dans une mesure égale, les ressources de l'analyse et celles de la synthèse, il permet de diviser les problèmes jusque dans le plus infime détail et de coordonner les solutions jusque dans le plus vaste ensemble. On peut alors effectuer les divisions et les revues que conseille Descartes avec un ordre dont il n'a pas donné la formule et scruter sans confusion, d'une part, la suite entière des faits, de l'autre, la suite entière des rapports.

En répartissant de la sorte les aspects des choses au lieu des choses elles-mêmes, on simplifie les problèmes,

parce qu'on examine l'ensemble sous des points de vue de plus en plus restreints. L'unique expédient d'analyse, pour les sciences particulières, consiste à le devenir toujours davantage. Après qu'elles ont fait choix d'une collection d'objets, elles la partagent en collections moindres, sans pouvoir obtenir ainsi une simplification réelle, puisque chaque groupe, si réduit qu'il soit, comprend des choses qu'il faut examiner en leur entier, c'est-à-dire, sous une multitude d'aspects. Les sciences générales, au contraire, divisant ces aspects, circonscrivent par degrés la recherche et opèrent une analyse efficace dont le résultat est de rendre les questions de moins en moins complexes. Il est à noter, en effet, qu'à travers leurs divisions et subdivisions successives, elles ne perdent pas le caractère de généralité qui les distingue et, malgré le fractionnement progressif des problèmes, l'ensemble des choses reste intact. Chaque section des sciences est tenue de l'explorer en totalité et particularise seulement la manière de l'examiner. Ce n'est donc plus l'universelle réalité que l'on scinde, ce sont les difficultés de son étude, et la vérité devient, par suite, moins malaisée à découvrir.

Les problèmes, ainsi classés, composent une série dont tous les termes s'enchaînent. La recherche va du simple au composé dans l'analyse des faits et du particulier au général dans la synthèse des rapports. On passe, comme par une pente continue, des éléments les plus fixes, qui peuvent être constatés directement, à ceux qui admettent des variations de peu d'étendue, puis aux faits complexes dont les mutations sont limitées, enfin à ceux dont les changements sont indéfinis. Abordant ensuite l'étude des rapports, on groupe successivement les faits par couples, par séries, par séries de séries, et l'on vise à former un tout de l'ensemble. La connaissance s'élève donc par une progression

régulière de la plus grande simplicité des faits à la plus grande généralité des lois et traverse sans s'y perdre la complexité des choses.

Cette manière de procéder trouve sa confirmation dans l'histoire des sciences. L'esprit humain, guidé par l'instinct logique ou plutôt cédant à l'empire de la nécessité, a parcouru dans ses investigations séculaires des stades analogues. En tout il part du simple pour arriver au composé, puis coordonne le multiple pour le réduire à l'unité. Chaque étude commence par recueillir un amas de faits. Les moins complexes et les plus constants sont naturellement les premiers connus ; ceux qui, composés et variables, exigent plus d'attention, sont ensuite explorés. Après les constatations minutieuses et les relevés patients, viennent les essais de théories qui, fort incomplètes d'abord, puis de mieux en mieux adaptées aux faits, réussissent à les expliquer par séries et finalement dans l'ensemble. Une marche inverse n'aurait aucune chance d'aboutir. Lorsque, dans leur impatience du but, les chercheurs ont voulu spéculer sur les faits avant de les bien connaître et construire à *priori* des systèmes imaginaires, l'inanité de leurs efforts a été la conséquence de l'erreur commise.

Enfin, une répartition uniforme des sciences faciliterait la comparaison des divers ordres de connaissances et rendrait possible l'étude, jusqu'ici peu praticable, des relations qui les lient. Avec des divisions symétriques et parallèles, il devient aisé d'opérer des confrontations fructueuses entre les différentes classes soit de faits, soit de rapports, car les aspects des choses offrent la correspondance la plus exacte quand on les compare au même degré de simplicité ou de complexité, de particularité ou de généralité. Ces corrélations des sciences, dont l'intérêt est si grand, sont restées obscures et négligées tant que des répartitions

confuses n'ont pas laissé discerner, à travers l'incohérence des analyses, la régularité de l'ensemble et le moyen d'en effectuer la synthèse. Une classification rationnelle, commune à toutes les sciences, introduirait dans leur assemblage un principe d'ordre et de connexion, gage d'unité future pour la science intégrale.

### III

#### MÉTHODES DES SCIENCES

Les sciences une fois définies et leurs problèmes classés, il reste à exposer les voies et moyens de connaissance. Chaque science est astreinte par la spécialité même de son objet à mettre en œuvre, pour l'explorer, des modes appropriés de recherche. L'ensemble de ces procédés d'investigation constitue sa « méthode », terme qui, pris dans l'acception la plus large, indique la route à suivre pour atteindre un but (*μέθοδος*, perquisition, de *μετά* suivant, et *ὁδός* chemin).

L'usage assigne également le nom de méthodes à l'analyse et à la synthèse; mais il faudrait alors distinguer deux sortes de méthodes: les unes générales, qui s'appliquent à toutes les sciences et dont l'utilité se borne à poser les problèmes, sans procurer directement la solution d'aucun; les autres spéciales, au moyen desquelles les problèmes sont résolus. Les premières servent à tracer un programme et les secondes à l'exécuter. Malgré l'importance de ces instruments d'étude, sans le secours desquels toute explo-

ration serait impossible, leur théorie générale est à peine ébauchée. On n'a pas encore traité méthodiquement des méthodes. Le *Discours de la méthode* serait à refaire au point de vue des sciences positives car, si grand que soit son mérite philosophique, l'œuvre de Descartes est pour elles d'une insuffisance notoire.

Les mêmes considérations qui induisent à séparer dans la nature les catégories de faits obligent à les étudier de différentes façons. Il y a donc lieu d'établir autant de méthodes que nous avons institué de sciences. Voyons comment l'esprit de recherche est tenu de procéder dans les diverses voies où elles l'engagent.

Au début de la connaissance, il faut admettre une méthode instinctive que l'esprit applique spontanément et sans réflexion, parce qu'il n'est pas encore capable de réflexion. Les premières vérités qui entrent dans notre intelligence devaient y pénétrer d'elles-mêmes, sans étude et sans effort, en vertu de leur évidence propre. Leibnitz distingue deux sortes de notions, les unes sur lesquelles nous avons une prise directe, les autres qu'il faut demander à une investigation (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, liv. IV, ch. II, § 2). Les premières, dites manifestes, se perçoivent de prime abord. Il n'est besoin ni de les chercher, ni de les poursuivre; il suffit de les constater. Elles s'imposent dès qu'on les rencontre et leur certitude ne laisse rien à désirer. Les secondes, au contraire, cachées et de difficile accès, exigent une recherche attentive, des poursuites opiniâtres, un siège en règle, de méthodiques approches, un victorieux assaut. Une pareille différence entre les manières de connaître motive une division correspondante des sciences. Les vérités d'évidence immédiate constituent la science première et sont acquises par

« intuition » ; les vérités d'évidence médiate composent les sciences proprement dites et sont établies par « démonstration ».

L'intuition ou vue directe de l'évidence procure les notions relatives à l'existence des choses. Comme ces données se réduisent à de simples affirmations de réalité, la perception a, dès le principe, le pouvoir de les constater. L'être prend d'abord possession de lui-même par la conscience, puis étend ses informations au dehors à l'aide de divers sens, coordonne les idées, les associe et les échange. Ces représentations mentales des choses se produisent, se classent, se combinent et se vérifient sous la loi de l'évidence.

Pour étendre le champ de la spéculation et passer des vérités manifestes aux vérités problématiques, un changement de méthode est nécessaire. Il faut alors trancher des questions douteuses, élucider des points obscurs, aplanir des difficultés. La manière de procéder diffère selon la nature des sciences.

L'esprit, borné d'abord à des notions intuitives, ne peut que les rattacher les unes aux autres par voie de conséquence et en former une chaîne susceptible de se prolonger indéfiniment. Partant de vérités générales reçues à titre d'axiomes, il en fait l'analyse, dispose dans un ordre logique les propositions qui en dérivent et parvient ainsi à des vérités imprévues dont l'évidence, quoique indirecte, est égale à celle des axiomes puisqu'elle en découle. Ce mode de recherche ne s'applique avec une rigueur parfaite qu'aux problèmes de grandeur. Les déterminations abstraites du nombre et de l'étendue représentent en effet des idéalités pures dont la concordance et les lois sont entièrement rationnelles. La Mathématique, prenant pour prémisses les inférences les plus certaines de l'Ontologie, en

tire de vastes conséquences et va jusqu'aux vérités les plus lointaines que les axiomes renferment implicitement, sans laisser rompre le fil continu d'évidence qui les unit. Cette méthode, œuvre de la réflexion s'exerçant sur des données manifestes, s'appelle la « déduction ».

Sortons du monde des constatations ontologiques, qu'éclaire le plein jour de l'évidence directe, et de l'abstraction mathématique, où le raisonnement établit, anneau par anneau, des chaînes sans fin d'évidences dérivées : entrons dans le monde des phénomènes. Là nous aurons à tenir compte de conditions et d'occurrences qui nous obligeront à constituer une méthode nouvelle. Ni l'intuition, en effet, ni la déduction ne seraient aptes à résoudre de semblables problèmes parce que, dans l'ordre relatif où s'accomplissent les faits, la spontanéité d'évidence, propre aux notions de réalité, et la rigueur logique des spéculations sur les grandeurs font également défaut. Les choses cessent d'être manifestes, parce qu'elles sont complexes, et ne peuvent pas se déduire d'axiomes, parce qu'elles sont contingentes. La loi des phénomènes est de se produire dans des conditions déterminées, locales et transitoires. Ils apparaissent, se développent et disparaissent. Il faut donc les surprendre dans leur mobilité fuyante, constater à un moment et en un lieu donnés l'état réel des choses et les suivre dans leurs mutations éventuelles, c'est-à-dire recourir à des artifices d'exploration. Les diverses catégories de faits, inégalement complexes et subordonnées à un plus ou moins grand nombre d'influences, réclament des moyens appropriés de recherche.

Le cas le plus simple est celui où les phénomènes, résultant d'une cause constante et uniforme d'action, se produisent sous la même loi, en série unilinéaire, et ne varient qu'en raison de l'intensité ou du mode d'application

de la force. Il suffit alors d'« observer » les faits. Cette méthode, qui associe l'intuition et la déduction, convient spécialement à l'étude de la Dynamique. Pour connaître l'ordre de collocation des corps, il faut constater d'abord leur réalité au moyen de la perception, puis établir leurs situations respectives et s'assurer, par des mesures précises, que ces situations restent fixes ou subissent des changements. La détermination de ces données se réduit à des évaluations de distances, de poids, d'angles et de temps. L'observation, qui les procure, se borne ainsi à transporter dans le monde des phénomènes effectifs la mesure théorique des grandeurs.

Une condition déjà plus complexe est celle où les faits, au lieu de se développer en série simple, sous l'action d'une force unique, se développent en plusieurs séries et paraissent dépendre de forces diverses dont chacune, prise à part, comporte des graduations d'effets, mais qui, réagissant les unes sur les autres, s'entrecroisent incessamment. Tel est le cas des phénomènes physiques. Le seul moyen de démêler ces influences corrélatives et d'apprécier exactement la part de chacune d'elles consiste à intervenir dans leur ordre et à les diriger parmi des occurrences variables, en les contraignant de s'exercer tantôt séparément, tantôt de concert. C'est ce que fait l'« expérimentation ». Cette méthode, non plus contemplative, comme l'observation, mais active et d'autant plus efficace, saisit les phénomènes sous leurs apparences passagères, les amène à se produire au milieu de circonstances alternativement simplifiées et compliquées, suit les enchaînements d'influences et finit par rattacher la totalité des effets de modalité à un même principe d'action dont les lois dominant la dynamique moléculaire.

L'étude des faits de composition soulève des problèmes encore plus malaisés à résoudre. Les phénomènes chi-

miques ne sont plus disposés, comme les phénomènes physiques, en un petit nombre de séries connexes dont chacune varie par degrés réguliers et continus; ils forment une infinité de degrés irréguliers et discontinus, c'est-à-dire que chaque modification de substance entraîne pour les corps un changement subit et complet de propriétés. On ne peut donc plus se contenter d'établir par expérience quelques degrés et s'en servir pour construire une échelle applicable à la série tout entière; il faut épuiser le détail de faits dont aucun ne ressemble à aucun autre. Une méthode, à la fois subtile et précise, était nécessaire pour ouvrir l'accès de ce monde, plein de métamorphoses, de mutations de substance, associer ou dissocier des atomes dans les conditions les plus diverses et faire parcourir à leurs agrégats le cycle des transformations que l'affinité comporte. Cette méthode, qui procède par voie d'analyse pour décomposer les corps et par voie de synthèse pour les composer, nous l'appelons, faute d'un nom usuel pour désigner simultanément ces deux moyens de recherche, méthode d'« intégration ».

Suivons l'ordre de complexité des choses. En Chimie, chaque fait de composition diffère de tous les autres, mais, pris en lui-même, il ne change pas. Ses conditions sont fixes, et s'il doit être déterminé à part, il se détermine une fois pour toutes. En Morphologie, au contraire, chaque fait de conformation a bien aussi ses conditions particulières qui exigent un examen séparé; il réalise un type d'espèce, constitue un mode de structure; mais, au lieu d'être invariable comme les cas de combinaisons, il n'a qu'une fixité relative et se plie à des mutations de détail, suivant l'âge, le sexe, l'état de développement, les variétés et les races qu'admet une même espèce. Dans tous les groupes de formes, à tous les degrés, on trouve des

ressemblances et des différences à constater. Il faut tenir compte de ces données et en établir la balance dans l'ensemble des séries, sans qu'on puisse jamais signaler une similitude complète ou une dissemblance absolue. La méthode qui dirige la science dans la description et le classement des phénomènes plastiques s'appelle la « comparaison ».

Enfin, après les faits de structure dont les variations limitées se laissent ramener à des types doués d'une constance relative et répartir à demeure dans les cadres de la classification, il reste à scruter un ordre de phénomènes dont les développements changent sans cesse, s'éloignent toujours davantage d'un point de départ et suivent des lois d'évolution ou de progrès. Les phénomènes de fonction, se produisant sous la double influence des formes et des milieux, dépendent de proche en proche de tout ce qui les entoure ou les précède et s'expliquent par des concomitances ou des séquences qui s'entrecroisent et se prolongent à l'infini. L'exploration de ces effets, les plus complexes de la nature, rend donc nécessaire une méthode capable de démêler, dans la suite ou le concours des causes, les résultantes d'actions et de réactions sans terme assignable. A. Comte l'a instituée sous le nom de « filiation » ; mais il réduit indûment son application à la Sociologie. Elle convient, et convient seule, à l'étude de tout l'ensemble des fonctions. En outre, comme elle ne se borne pas à noter des successions d'effets et qu'elle doit aussi tenir compte de simultanéités d'action, nous croyons préférable de l'appeler, d'une manière moins restrictive, méthode de « connexion ».

En résumé, nous avons sept méthodes adaptées aux recherches des sciences générales, savoir :

1° L'intuition, qui constate la réalité manifeste des choses ;

2° La déduction, qui détermine la mesure logique des grandeurs ;

3° L'observation, qui reconnaît l'ordre de collocation des corps ;

4° L'expérimentation, qui scrute les modalités physiques ;

5° L'intégration, qui révèle la composition des substances ;

6° La comparaison, qui décrit et classe les formes ;

7° La connexion, qui expose le développement des fonctions.

Ce sont là nos moyens de connaissance. Aucun autre chemin ne conduit à la vérité. Ces diverses méthodes précèdent les unes des autres et se suivent comme les termes d'une progression. L'intuition donne à toutes l'évidence pour point de départ et l'unique but de la démonstration est de rendre manifestes, par un supplément de lumière, les vérités qui ne portent pas leur certitude avec elles. La déduction, acceptant à titre d'axiomes les inférences les plus générales et les plus claires de l'intuition, en fait découler des séries de conséquences. Elle est, pour ainsi dire, une intuition réfléchie, capable de raisonnement, apte à lier de longues suites d'évidences coordonnées. L'observation, combinant les ressources des deux méthodes qui précèdent, constate et mesure en même temps. L'expérimentation constitue une observation active qui, au lieu d'attendre que les phénomènes s'accomplissent, les provoque et les modifie à sa convenance. L'intégration, sorte d'expérimentation systématique, soumet à une double épreuve d'analyse et de synthèse la totalité des faits de combinaison. La comparaison représente une intégration générale et simultanée qui, pour caractériser chaque forme, doit indiquer ses ressemblances et ses différences avec toutes les autres. Enfin, la connexion, non contente

de comparer les fonctions entre elles, compare les stades successifs de chacune d'elles et cherche dans l'universel ensemble la loi de variations continues.

Ainsi les différentes méthodes compliquent par degrés leurs artifices d'investigation et les rendent de plus en plus efficaces afin de pouvoir résoudre des problèmes dont la complexité va croissant.

Les méthodes que nous venons d'indiquer comportent des modifications spéciales dont l'effet est de les plier aux diverses manières d'envisager chaque sujet. Les subdivisions que nous avons établies dans les sciences se retrouvent dans leurs méthodes, car les procédés doivent nécessairement varier suivant qu'on les applique à l'analyse des faits ou à la synthèse des rapports, et même suivant que l'analyse porte sur des faits élémentaires ou sur des faits spéciaux, enfin que la synthèse vise à constituer des groupes ou des ensembles.

Tant qu'une science se borne à constater les éléments des choses, sa méthode se réduit à quelques artifices très simples. Lorsque, ensuite, elle aborde les variations des faits, elle doit étendre ses moyens de recherche, les adapter à la diversité des cas et redoubler de sagacité pour surprendre, à travers des métamorphoses sans nombre, l'insaisissable Protée. L'étude des rapports, succédant à celle des faits, exige un nouveau progrès qui procure à la méthode le pouvoir de lier par séries les notions acquises. Enfin l'établissement des théories générales et la découverte des lois d'ensemble imposent un dernier perfectionnement. La science n'arrive en effet à résumer dans une brève formule un ordre entier de connaissances et à faire dériver d'une cause unique la totalité des faits, qu'à condition de beaucoup embrasser et de fortement étreindre,

ce qui suppose une méthode parvenue à son plus complet développement.

Comme complément de la théorie des méthodes, il resterait à exposer les moyens de preuve. Les sciences, désireuses de mettre leurs vérités hors de conteste, et même à l'abri de tout soupçon, s'efforcent de confirmer, par différents modes de probation, l'exactitude de leurs solutions et la justesse de leurs lois. Outre l'art de découvrir, il y a un art de prouver. Stuart Mill blâme avec raison A. Comte d'avoir négligé le second (*Auguste Comte et le Positivisme*, p. 58). Comment s'assurer, en effet, que l'erreur ne se tient pas cachée au point de départ ou au terme de la spéculation? Quelles garanties a-t-on que les voies indiquées par la méthode conduisent sûrement à la vérité? Si attentif que soit l'esprit, si grande que soit sa vigilance, une méprise est toujours possible et, quand par malheur elle se produit, il faut pouvoir la reconnaître. La vérité n'est d'ailleurs jamais trop certaine et deux démonstrations valent mieux qu'une. Il importe donc d'employer tous les procédés possibles de vérification et de contrôle.

La preuve s'effectue, pour chaque science, non par un changement de méthode, car aucune d'elles ne dispose de plusieurs méthodes, au choix, mais par un changement de marche qui fait appliquer la même méthode dans un autre sens. Il faut procéder différemment pour découvrir et pour prouver : dans le premier cas, on va des données du problème à la solution cherchée; dans le second, de la solution trouvée à ses conséquences, qui toutes doivent s'accorder avec les faits établis. Voyons quels artifices produit, dans les diverses sciences, ce renversement des méthodes.

Les vérités de l'Ontologie, manifestes par elles-mêmes,

sont les seules qui n'aient pas besoin de preuve et, quand on voudrait leur en donner, on ne le pourrait. L'évidence ne comporte pas de démonstration. Elle fournit au contraire à la démonstration son point de départ, puisque, sans principes certains, raisonner serait impossible. Tout dépend ainsi de l'évidence immédiate qui, au rebours, ne dépend de rien. Elle n'a que faire de preuves ; elle est au-dessus de toute preuve, et qui exigerait qu'on lui prouve l'évidence ressemblerait à un aveugle demandant qu'on éclaire le soleil. Les axiomes s'énoncent, ils ne se démontrent pas et même entreprendre d'ajouter par le raisonnement à leur évidence est le moyen d'en diminuer la clarté. L'intuition a seule qualité pour se contrôler elle-même et marquer des degrés dans la certitude. Les jugements individuels se confirment par leur accord et s'infirmement par leurs contradictions. L'unanimité est donc ici une garantie. L'opinion commune, moins faillible que l'opinion personnelle, corrige en partie ses erreurs et les bons sens ne se croit en sûreté que lorsqu'il rallie l'adhésion universelle. Cependant, comme tout le monde peut se tromper, le fait ne saurait suffire ; il faut la loi. Le vrai criterium de l'évidence est l'inconcevabilité absolue de la négative.

Les vérités mathématiques, établies par la déduction, n'admettent que des preuves d'ordre logique. On vérifie alors les résultats obtenus en variant le mode de démonstration. En Arithmétique, par exemple, on fait la preuve d'une opération par l'opération inverse, de l'addition par la soustraction, de la multiplication par la division, ou réciproquement. En Géométrie, on change le mode de construction des figures et le même théorème se démontre de diverses façons. La science des grandeurs, appliquant le principe de contradiction, prouve d'une

manière générale l'irrécusabilité de ses lois par la réduction à l'absurde de toute proposition contraire. La vérité se trouve alors étayée en deux sens opposés et la rationalité de l'affirmation tire une évidence nouvelle de l'irrationalité de la négation.

En matière de faits, la preuve doit être fournie par les faits eux-mêmes. Si, dans le détail, leur constatation paraît suspecte, on doit les examiner de nouveau jusqu'à ce que leur authenticité soit mise hors de doute. Quant aux lois qu'on leur assigne, l'exactitude s'en démontre par une concordance parfaite avec l'ensemble des faits serré d'aussi près que possible. Les relevés qui, dans les sciences, servent de support aux théories, ne peuvent naturellement comprendre qu'un nombre limité de phénomènes, tandis que la loi est tenue de les tous régir. Sa formule, qui anticipe et généralise, a quelque chose de conjectural et d'aventuré. Il faut, en conséquence, montrer que la théorie, conçue pour rendre compte d'une série de faits observés, convient à la totalité des faits observables, affirmés par avance, mais appelés ultérieurement à témoigner pour ou contre. L'autorité des lois repose sur leur généralité qui a besoin d'être absolue, car une seule exception obligerait de les modifier ou d'y renoncer. On ne doit donc les admettre que sous la réserve d'une confirmation permanente et, pour devenir indubitables, il faut qu'elles résistent victorieusement et sans cesse à l'épreuve d'une vérification générale. On est réduit, pour les établir, à quelques faits particuliers; mais on a, pour les contrôler, la suite indéfinie des faits éventuels. Dès que la loi est formulée, son ordre, qui régir les phénomènes futurs avec autant de rigueur que les phénomènes passés, autorise des prévisions pour l'avenir, et l'expérience de chaque jour, spéculant sur leur justesse, reconnaît sans peine si les occurrences

se produisent conformément à la règle, car la moindre dérogation ne manquerait pas de surprendre à titre d'anomalie. Cette preuve, incessamment fournie par les faits, corrige ce qu'à l'origine l'insuffisance des données avait de précaire. L'artifice de la probation consiste ainsi à redescendre des lois aux faits, tandis que la découverte remonte des faits aux lois. Notre science des phénomènes se compose d'inductions vérifiées.

La justification des lois de la Dynamique est aisée. Comme les faits de collocation sont simples et directement observables, la théorie trouve partout ses applications et sa preuve. Aucune science n'établit de prévisions aussi étendues et aussi sûres. La constance des conditions d'équilibre et la régularité des modes de mouvement reçoivent des faits une démonstration continue et c'est parce que leurs lois ont été reconnues exactes dans la généralité des cas où nous en préjugeons les effets que nous avons une si ferme confiance en la fixité de leur ordre. Lorsque la Dynamique, sur la foi de ses théories, trace la route des astres dans le ciel, prédit leurs situations pour un moment donné et signale même à l'observation des astres inaperçus, la preuve est éclatante, péremptoire, aussi complète qu'on le puisse désirer.

La Physique ne vérifie pas seulement ses lois par des répétitions d'expériences et des prévisions justifiées qui remplacent une généralisation étroite par une généralisation plus large destinée à devenir universelle avec le temps ; elle tire un moyen spécial de preuve de la concordance des modes hypothétiques de l'action moléculaire en rapport avec les corrélations d'effets. Les modalités forment des séries connexes ; les explications qu'on en donne doivent, par conséquent, se lier et correspondre. Il ne suffirait donc pas qu'une loi proposée rendît compte d'un groupe

de phénomènes; il faut en outre qu'elle s'harmonise avec les lois relatives aux autres groupes, rentre dans leur ordre, soit en partie expliquée par elles et concoure à les expliquer. Les théories de la Physique ne peuvent pas rester indépendantes, ainsi qu'on l'a cru longtemps; elles sont interdépendantes, se contrôlent mutuellement et doivent contribuer ensemble à l'institution d'une théorie générale qui trouvera sa preuve dans leur accord. L'unité de la science une fois établie sur cette base, toutes ses lois seront solidaires et il ne sera plus possible d'en contester une sans ébranler toutes les autres.

En Chimie, les deux méthodes d'analyse et de synthèse se servent réciproquement de contre-épreuve. La première décompose les corps en leurs éléments et la seconde les recompose avec ces mêmes éléments. Lorsque les résultats concordent, la preuve de fait est acquise. Une vérification plus générale ressort de la disposition des séries dans les systèmes de nomenclature et des prévisions qu'elles autorisent.

Les lois de structure ont pour contrôle l'ordre intégral des faits de conformation. A défaut d'une ressemblance qui n'est parfaite nulle part, on doit retrouver partout des analogies qui croissent ou décroissent par degrés. Toute interruption dans les séries signale des lacunes à combler. La classification, fondée sur des caractères anatomiques, est, en outre, confirmée par les indications de l'Embryologie et de la Paléontologie. Les prévisions mêmes ne sont pas interdites à la science des formes. Déjà elle a pu reconstruire, à l'aide de quelques débris, des espèces disparues; un jour peut-être il lui sera donné de rétablir par avance les types intermédiaires entre les séries ou même de prophétiser les formes futures.

Enfin, les lois des fonctions trouvent leur preuve dans

le concert de tous les modes d'activité. Leurs développements, que relie des connexions multipliées, s'expliquent par des actions et des réactions sans fin. On ne pourrait pas établir une théorie des fonctions psychiques sans tenir compte des fonctions physiologiques, ni, chez les êtres animés, une théorie des fonctions physiologiques sans tenir compte des fonctions psychiques. Là, tout se tient, et l'affirmation d'antinomies ou de dualisme est une présomption d'erreur. Loin qu'il y ait opposition de principes ou de tendances, il y a conciliation, harmonie et unité. La concomitance universelle de ces phénomènes n'admet de contradiction d'aucune sorte et les fait tous converger vers une commune fin.

Telles sont les méthodes d'investigation et de probation que les sciences mettent en œuvre. Leur ensemble constitue une méthode unique, la méthode positive, seule capable de conduire à l'évidence et d'établir avec certitude la vérité.

Nous venons de définir les sciences générales, d'esquisser leur programme et d'indiquer leurs méthodes. Avant d'exposer plus en détail les ordres de connaissances sommairement institués, nous croyons utile d'en présenter dans le tableau ci-joint un résumé synoptique. Nous avons disposé cette table à double entrée afin de montrer, d'une part, les divisions des sciences, de l'autre, le parallélisme de leurs sections. Il suffit de comparer ce plan de classification à celui que A. Comte a mis en tête du *Cours de philosophie positive* pour juger de la différence des deux systèmes.

**CLASSIFICATION**  
**DES SCIENCES**

**TOME 1 (p. 50**



CLASSIFICATION DES SCIENCES

SCIENCE INTÉGRALE DES CHOSES

OBJETS DES SCIENCES	DIVISIONS DES SCIENCES				MÉTHODES DES SCIENCES
	PHÉNOMÉNOLOGIE, ANALYSE DES FAITS		CŒNOLOGIE, SYNTHÈSE DES RAPPORTS		
	ÉLÉMENTAIRES OU FIXES	COMPOSÉS OU VARIABLES	PARTICULIERS OU DE SÉRIE	GÉNÉRAUX OU D'ENSEMBLE	
1. <i>Ontologie positive ou Logique,</i> science des réalités.	<i>Ontologie élémentaire,</i> sc. des idées objectives.	<i>Ontologie spéciale,</i> sc. des idées subjectives.	<i>Ontologie comparée,</i> sc. des associations d'idées.	<i>Ontologie générale,</i> sc. des identifications d'idées.	Méthode d'intuition.
2. <i>Métrie ou Mathématique,</i> science des grandeurs.	<i>Mathématique élémentaire,</i> sc. du nombre.	<i>Mathématique spéciale,</i> sc. de l'étendue.	<i>Mathématique comparée,</i> sc. des rapports des grandeurs.	<i>Mathématique générale,</i> sc. de l'équation des grandeurs.	Méthode de déduction.
3. <i>Théséologie ou Dynamique,</i> science des situations.	<i>Dynamique élémentaire,</i> sc. de l'équilibre.	<i>Dynamique spéciale,</i> sc. du mouvement.	<i>Dynamique comparée,</i> sc. des résultantes d'effets.	<i>Dynamique générale,</i> sc. des lois de collocation.	Méthode d'observation.
4. <i>Poïologie ou Physique,</i> science des modalités.	<i>Physique élémentaire,</i> sc. des modalités constantes.	<i>Physique spéciale,</i> sc. des modalités changeantes.	<i>Physique comparée,</i> sc. des corrélations des modalités.	<i>Physique générale,</i> sc. de l'unité des forces physiques.	Méthode d'expérimentation.
5. <i>Craséologie ou Chimie,</i> science des combinaisons.	<i>Chimie élémentaire,</i> sc. des substances fixes.	<i>Chimie spéciale,</i> sc. des substances muables.	<i>Chimie comparée,</i> sc. des degrés de composition.	<i>Chimie générale,</i> sc. des lois de composition.	Méthode d'intégration.
6. <i>Morphologie,</i> science des formes.	<i>Morphologie élémentaire,</i> sc. des matériaux de structure.	<i>Morphologie spéciale,</i> sc. des modes de structure.	<i>Morphologie comparée,</i> sc. des rapports plastiques.	<i>Morphologie générale,</i> sc. des lois de conformation.	Méthode de comparaison.
7. <i>Praxéologie,</i> science des fonctions.	<i>Praxéologie élémentaire,</i> sc. des fonctions somatiques.	<i>Praxéologie spéciale,</i> sc. des fonctions psychiques.	<i>Praxéologie comparée,</i> sc. des rapports des fonctions.	<i>Praxéologie générale,</i> sc. des lois de fonctionnement.	Méthode de connexion.



# LIVRE PREMIER

## ONTOLOGIE POSITIVE OU LOGIQUE

SCIENCE DES RÉALITÉS

---

### CHAPITRE PREMIER

#### DÉFINITION DE L'ONTOLOGIE POSITIVE

L'Ontologie ou Science première constate la réalité des choses. Leur existence est le plus simple des aspects de la nature qu'il nous soit donné de saisir. Cette notion doit logiquement précéder toutes les autres dans notre esprit. Avant de chercher à savoir ce que sont les choses, il faut s'assurer qu'elles sont, car, si elles n'étaient pas, l'étude n'aurait pas de but et la science manquerait d'objet.

La constatation des êtres marque donc le point de départ de la connaissance positive, la condition de toute recherche. Sans que nous puissions dire ce qu'est en soi l'existence, l'idée de réalité s'impose dès le début comme une conception nécessaire. Notre impuissance à l'analyser tient même à ce qu'elle constitue la vérité primordiale, au-delà de laquelle tout nous échappe. L'existence est indéfinissable; on ne peut la définir que par elle-même. Elle est également inexplicable; c'est un fait sans antécédent et sans cause, étranger à tout rapport

I. — 4.

de contingence ou de relativité. Diderot prétend quelque part que la plus insoluble des questions consiste à demander « pourquoi il existe quelque chose. » Il se trompe. Ce n'est pas là une question et la poser serait illogique : elle ne comporte pas de réponse en dehors de ses propres données. L'existence n'a pas de pourquoi. Elle est et n'a pas besoin de raison d'être. Ce n'est pas un *quæsitum*, mais un *datum* implicitement contenu dans toute question et qui se soutient par lui-même. Si, en effet, on pouvait assigner une cause à l'être, cette cause deviendrait être à son tour et réclamerait explication. Au lieu de résoudre le problème, on ne réussirait qu'à le poser de nouveau.

Nous n'avons donc pas à définir ou à expliquer l'existence. Cela n'est heureusement pas nécessaire dans l'ordre relatif où la science est tenue de se placer. Il suffit que la réalité des choses puisse être connue avec certitude. Or, il n'y a pas de vérités plus évidentes que les simples affirmations d'existence. En outre, ces notions sont d'une importance extrême puisque tout le reste en dépend. Elles constituent des idées, c'est-à-dire des représentations mentales qui, directement ou indirectement, correspondent à des réalités formelles. Savoir que les choses existent revient à s'en faire une idée exacte, à spécifier leurs attributs et à démêler leurs rapports. L'esprit acquiert de la sorte des informations sur les êtres, sur les manières d'être et sur les relations entre les êtres. Cet ensemble de connaissances compose une science précise et bien déterminée.

Considérons l'existence comme un fait auquel se rattachent tous les caractères des choses sans qu'on puisse le caractériser lui-même et, renonçant à découvrir son essence, étudions les moyens dont nous disposons pour le constater. La science première établit d'abord des données certaines sur les réalités, classe ensuite ces notions, les associe, les compare et formule leurs rapports en juge-

ments. L'Ontologie comprend ainsi la formation des idées, leur coordination par séries, leur concordance logique, leur expression par le langage et leur vérification sous les lois du sens commun. Ce grand sujet a été jusqu'ici abandonné aux spéculations de la philosophie. Il appartient de droit à la science et, comme l'édifice entier de la connaissance positive repose sur la théorie des idées, on ne saurait en faire un trop soigneux examen.

L'Ontologie, qui se borne à certifier la réalité des êtres, a par cela même une spécialité bien marquée. Aucune des autres sciences ne scrute la nature sous cet aspect et toutes le supposent préalablement connu. On ne les voit point, au début de leurs investigations, établir sur preuves l'existence des choses qu'elles veulent étudier. Elles tiennent cette vérité pour acquise, car la moindre incertitude sur un point aussi essentiel atteindrait l'objet même de leurs recherches et ruinerait dans son principe la rationalité de la connaissance. Chacune d'elles semble même si sûre de cette donnée qu'elle ne s'inquiète pas de savoir d'où elle vient et sa confiance bâtit sur ce fondement sans se mettre en peine d'en vérifier la solidité. La Mathématique raisonne sur les grandeurs et ne se demande pas si les conceptions abstraites de nombre et d'étendue correspondent à quelque chose de réel ou si les axiomes d'où ses déductions procèdent sont aussi certains qu'universellement reçus. La Dynamique observe les situations des corps et ne songe pas à s'enquérir si vraiment des corps existent. La Physique expérimente les faits de modalité; la Chimie analyse les substances; la Morphologie décrit les formes et la Physiologie expose l'ordre des fonctions, sans qu'aucune de ces sciences s'astreigne d'abord à démontrer qu'il y a des effets physiques, des substances, des formes, des êtres actifs. Étrange oubli de la logique et de la méthode! Si pourtant l'idée que nous avons de ces choses ne représentait rien de réel; si les existences qu'elles supposent n'étaient qu'illusion, apparence vaine, songe d'imagination; si rien

n'avait jamais été ou si la pensée pouvait tout mettre en doute, nos sciences, pure chimère, s'évanouiraient dans le néant. Pour les asseoir sur une base assurée, il fallait avant tout constater avec évidence la réalité des choses qu'elles veulent scruter. C'est ce que fait la science première, science des données initiales ou des principes de connaissance.

L'idée d'existence diffère de celles de grandeur, de situation, de modalité, de composition, de structure et de fonction en ce que, seule, elle est infinie et absolue. Elle est infinie, c'est-à-dire qu'on ne peut la définir. On ne sait où fixer son point de départ et son terme, soit dans le temps, soit dans l'espace ; elle n'en a pas. Elle contient le temps et l'espace et n'est pas contenue par eux. Elle est aussi absolue parce qu'elle constitue un fait qui subsiste de lui-même et ne dépend d'aucun autre. Les phénomènes dont les sciences proprement dites font leur étude sont déterminés et relatifs. Ils ont des bornes, des conditions, des causes. Tous ensemble représentent de simples manières d'être. Mais l'être lui-même est inconditionnel, sans limites et sans cause. Rien ne l'explique et il sert à expliquer tout le reste. Sa connaissance est directe et, pour l'atteindre, on n'a pas à suivre de voies détournées. Il n'admet pas de plus ou de moins : la réalité est ou n'est pas ; elle compose un tout indivisible sur lequel porte une affirmation ou une négation catégorique. Ces traits distinguent profondément l'existence des autres sujets d'étude.

La généralité de la science des êtres est évidente de soi : elle comprend tout, le réel et le possible. Le néant seul reste en dehors de son objet ; mais cette exclusion n'en restreint nullement l'étendue parce que le néant, loin d'affirmer une réalité connaissable, indique par antiphrase (*non ens*) l'absence de réalité, c'est-à-dire un état qui ne correspond à rien dans la nature et n'a d'existence fictive que pour la pensée. Scruter ce qui n'est pas, impli-

querait contradiction. La science de rien se réduit à rien. Nous n'avons donc pas à nous occuper du néant. C'est une conception abstraite qui présuppose l'existence et se borne par hypothèse à la supprimer<sup>1</sup>.

Au contraire, tout ce qui est, a été, doit être ou pourrait être, tout ce qu'il nous est donné de percevoir ou de concevoir comme existants rentre dans la science des réalités. Constater des êtres et leurs attributs, coordonner ces notions et formuler leurs rapports, il n'est rien que cela n'embrasse. Ce champ d'exploration n'a pour limites que celles de la réalité même ou plutôt de notre aptitude à la saisir. Nos sensations, nos idées, les mots de nos langues, les inférences de nos esprits la reflètent ou l'expriment. Nos arts<sup>2</sup>, nos illusions, nos rêves, nos vérités, nos erreurs mêmes, se rapportent toujours à l'inévitable réalité. Quoi que nous puissions penser, imaginer ou faire, nous n'en sortons pas un instant : *in ea vivimus, movemur et sumus*.

Un ordre à ce point spécial et général de connaissances doit être érigé en science distincte. Les philosophes lui ont donné les divers noms d'« Ontologie » (de *ὄντολογία*, science de l'être), d'« Idéologie » (de *ιδέα* et *λόγος*, science des idées), ou enfin de « Logique » (de *λόγος* discours); mais, sous aucun de ces titres, ils n'ont réussi à la constituer à l'état positif. La science que nous voudrions établir se prête à recevoir les mêmes dénominations, suivant que l'on considère la réalité des choses, ou les idées qui la représentent, ou l'expression de ces idées par le langage. Ce ne sont point là, en effet, des sujets différents, mais les apparences multiples d'un même sujet<sup>3</sup>. Néanmoins, lorsque nous appli-

1. L'étymologie du mot « rien » (*rem* de *res*, chose) montre également que les termes qui servent à exprimer la négation de l'existence en impliquent l'affirmation.

2. « L'art est le miroir splendide de la réalité. » (Shakespeare, *Hamlet*, a. 3, sc. 2.).

3. *Ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum* (Spinoza, *Ethique*, 2<sup>e</sup> partie, Propos. 7). Pour Hegel, l'Ontologie et la

quons à la science des êtres ces termes consacrés par l'usage, nous devons prévenir que nous les détournons un peu de leur acception traditionnelle et fixer avec soin le sens que nous leur attribuons.

L'Ontologie, que nous appelons positive pour la distinguer de l'Ontologie métaphysique, n'est pas pour nous la connaissance de l'être en soi. Nous laissons la philosophie se livrer à cette recherche et nous renonçons à définir l'existence comme à mesurer l'infini ou à déterminer, soit le principe de la force, soit la nature de la substance. La science des réalités traite, non de l'existence en général, fait absolu et insaisissable, mais des existences, fait relatif, susceptible d'être constaté avec certitude. Si le tout se dérobe par son infinité à nos étreintes, les parties de ce tout, mieux à la mesure de notre intelligence, peuvent être un objet d'investigation <sup>1</sup>. L'Ontologie positive ne vise qu'à procurer des notions certaines sur les réalités dont l'univers se compose. Elle est la science des êtres et se refuse à spéculer sur l'essence de l'être.

L'Idéologie, telle que nous la comprenons, diffère également de celle des métaphysiciens. Au lieu de regarder les idées comme indépendantes des choses (idées innées de Descartes) ou même capables de les produire (idées-mères de Platon), elle ne sépare pas les idées des réalités qui leur correspondent et les tient pour des phénomènes représentatifs dont l'étude suffit à constituer une science des êtres. Les choses n'existent pour nous qu'autant qu'elles sont représentées par des idées et les idées n'ont de valeur qu'autant qu'elles représentent des choses. La manière dont les réalités nous impressionnent, les idées que, par suite, nous en avons, nos inférences sur leurs relations

Logique se confondent. Le monde trouve son image dans l'idée et les faits sont des idées vues dans la réalité des choses.

1. « Fais une bonne fois ton profit de cet aphorisme le plus sage de tous : il n'y a pas de secret pour toi dans le total, mais il y en a un grand dans les parties. » (Goethe, *Faust*, 3<sup>e</sup> partie.)

et l'échange de ces notions entre les esprits, voilà les faits sur lesquels doivent exclusivement porter les recherches de l'Idéologie scientifique.

Enfin, par Logique nous n'entendons pas l'art d'appliquer des procédés dialectiques et des formes de raisonnement, art plus captieux qu'utile qui se réduit le plus souvent à disserter sans conclure. La vraie Logique n'est pas celle de l'école, dont le pédantesque appareil n'a pas fait découvrir une seule vérité ; c'est la logique spontanée qui élabore les idées, les classe, les associe, les exprime et les compare, moins avec réflexion que par intuition. Son œuvre la plus admirable est la création du langage. On pourrait définir cette logique, comme le propose Descartes, « l'art de penser » ou, d'après le sens étymologique du mot (λόγος, oratio), « l'art de discourir », c'est-à-dire de concevoir des idées justes et de les traduire au moyen de la parole. Le langage, en effet, est la manifestation sensible, la vivante incarnation de la pensée. En lui, l'idée et le signe se confondent, non moins indissolublement unis que, dans les choses, la substance et la forme, l'organe et la fonction. Les réalités, les idées et l'expression des idées, logiquement inséparables, constituent l'objet de la science. Son étude, ainsi conçue, n'a rien d'abstrait. Herbert Spencer regarde à tort la Logique comme la première des sciences abstraites (*Classification des sciences*, p.6). Il n'y a pas, au contraire, de science plus concrète, qui tienne à la réalité de plus près et fasse mieux corps avec elle. C'est une science de faits qui examine les choses par leur côté le plus positif. Elle se borne, il est vrai, à spéculer sur des idées ; mais, en tant qu'elles ont une valeur ontologique, les idées ne sont pas de pures idéalités, des créations de l'entendement ; elles se réfèrent à des êtres réels et, si de telles données sont abstraites, toutes les sciences le seront aussi, puisque celles mêmes qui étudient les phénomènes et qu'on appelle concrètes ont des idées pour matériaux. Il serait plus exact de dire que la Logique comprend tout,

l'abstrait et le concret, l'un n'étant que l'image réfléchie de l'autre.

L'importance de l'Ontologie, science suspecte d'affinités métaphysiques, a complètement échappé, malgré ce qu'elle a de « positivité » manifeste, au fondateur de la Philosophie positive. On n'en trouve pas trace dans son système et une omission pareille suffirait à le rendre inacceptable. Privée de ce support, la théorie des connaissances est un édifice sans base, suspendu en l'air par un artifice de la pensée. A. Comte paraît bien avoir eu, dans les derniers temps de sa vie, la velléité d'introduire parmi les sciences une science si nécessaire; mais il n'a pas su reconnaître le véritable objet de la Logique et, par une méprise dont Hobbes avait déjà donné l'exemple, il l'a confondu avec celui de la Mathématique<sup>1</sup>. Sans doute, la Mathématique, dont toutes les vérités se déduisent d'axiomes par séries de raisonnements, fait une continuelle application des procédés logiques; mais elle n'est pas pour cela la Logique même et sa fonction consiste à spéculer sur des principes préalablement établis. La Logique, antérieure à la Mathématique, lui est donc indispensable tandis qu'elle se suffit à elle-même. La ligne de séparation est facile à tracer entre les deux sciences: la première constate la réalité des choses par intuition directe; la seconde détermine les rapports des grandeurs à l'aide de la déduction.

Une erreur générale explique pourquoi l'Ontologie positive n'a pas pris jusqu'ici le rang élevé qu'elle a droit d'occuper parmi les sciences. Isolée dans des conditions particulières de simplicité et mise pour ainsi dire hors concours par l'évidence même de ses vérités, elle est le plus mal apprécié des ordres de connaissances. Non seulement elle n'a pas trouvé place dans les classifications, mais encore les langues mêmes n'ont pas, pour la désigner,

1. V. Hobbes, *Computatio sive Logica*; et A. Comte, *Synthèse subjective*, t. I, contenant le système de Logique ou traité de Philosophie mathématique, 1856.

de dénomination usuelle. On hésite à lui accorder le titre de science, réservé d'ordinaire aux systèmes de vérités démontrées. Le préjugé commun n'attache de prix qu'aux notions le moins répandues et celui-là seul est réputé savant qui sait ce que le vulgaire ignore. Les hommes font surtout cas de l'effort, parce que rien ne leur coûte davantage. Ils estiment à haut prix ce qu'ils obtiennent avec peine et ce dont ils jouissent sans fatigue leur semble de peu de valeur. Or, la science dont nous parlons appartient à tous. Ce n'est pas le lot envié d'une élite, mais un patrimoine universel et les plus pauvres esprits n'en sont pas déshérités. Chacun acquiert si naturellement ces notions qu'il ne sait même pas, à moins d'y avoir beaucoup pensé, comment elles lui arrivent. Il apprend les choses sans étude et sans leçons. On ne voit point que la science première soit professée dans les écoles ni exposée dans des traités. Les savants la négligent parce que, ne devant rien à leurs travaux, elle n'ajouterait rien à leur gloire, et la foule, déçue par la banalité d'un savoir dont personne n'est dépourvu, n'en soupçonne pas l'importance. Cette importance est cependant très grande et il suffit de réfléchir un instant pour se convaincre que la science la plus connue et, par suite, la moins honorée, est en réalité la plus précieuse.

Si, en effet, on estime qu'en matière de connaissances comme en fait de richesses les plus utiles sont celles dont l'usage est général et constant, les notions d'existence devront être mises au premier rang, car elles sont seules indispensables. Les sciences proprement dites constituent le privilège d'un petit nombre et, si grand que soit l'avantage de les posséder, la multitude de ceux qui les ignorent dit clairement combien il est aisé de s'en passer. Mais la science première est de nécessité stricte et nul ne pourrait en ignorer les éléments sans cesser d'être. L'homme privé de la faculté de percevoir, de retenir ou d'exprimer des idées, est incapable de tout et mort à la vie intellec-

tuelle. Les données de l'Ontologie représentent donc pour nos esprits une sorte d'atmosphère diffuse, inaperçue comme l'air qui nous environne, mais non moins nécessaire et sans cesse respirée. La généralité de ce savoir, loin d'être pour lui un motif d'exclusion ou de dédain, lui mérite plutôt la prééminence. La science des réalités est la science maîtresse, celle des vérités primordiales, qui en tout importent le plus. Si elle nous était ôtée, il ne nous resterait rien. Elle se soutient par elle-même, s'établit avant les autres sciences et, sans faire d'emprunts à aucune, leur assure à toutes de solides fondements.

## CHAPITRE II

### PROGRAMME DE L'ONTOLOGIE POSITIVE

Le mot « idée », pris dans son acception étymologique (de *ἰδέα*, *εἶδος*, image, apparence) et dans le sens que, d'ordinaire, la Psychologie lui assigne, indique une représentation mentale des choses qui équivaut à une affirmation de leur existence. Nous avons à examiner comment les idées se forment, se classent, s'associent et s'échangent. C'est là tout le sujet de l'Ontologie positive.

Pour le répartir avec ordre, nous devons d'abord distinguer deux sortes d'idées : les unes, relativement simples et faciles à isoler, se réfèrent à une réalité donnée ou à un groupe de réalités semblables; elles sont exprimées par les mots dont nos langues font usage pour dénommer ou qualifier les choses; — les autres, complexes et variables, associent les précédentes, déterminent leurs rapports et forment des jugements; elles correspondent aux phrases ou propositions de nos conversations et de nos livres. Il convient d'étudier à part ces deux classes de notions et de commencer par la première qui soulève le moins de difficultés. Conséquemment, nous diviserons l'Ontologie en deux sections principales, savoir : l'Ontologie analytique, qui traite de la formation du détail de nos idées, et l'Ontologie synthétique, dont l'objet est la connaissance des corrélations d'idées.

## Méthode d'intuition.

Ontologie ana-lytique, sc. de la for-mation des idées.	Ontologie élémentaire sc. des idées objec-tives.	Théorie des idées objectives. 1. Idées discrètes, du moi. 2. Idées concrètes, du non-moi. Notion des réalités particulières	Intuition directe, perception des idées.	Intuition analytique.
	Ontologie spéciale, sc. des idées subjek-tives.	Théorie des idées subjectives. 1. Idées générales, des séries d'entités. 2. Idées abstraites, des séries d'attributs Notion des classes de réaliés.	Intuition indirecte, conception des idées.	
Ontologie syn-thétique, sc. des corréla-tions d'idées.	Ontologie comparée, sc. des associations d'idées.	Théorie de l'association des idées. 1. Association des idées objectives. 2. Association des idées subjectives. Ordre logique des idées.	Intuition comparée, connexion des idées.	Intuition synthétique.
	Ontologie générale, sc. des identifications d'idées.	Théorie de l'identification des idées. 1. Identification des idées objectives. 2. Identification des idées subjectives. De l'évidence et du sens commun.	Intuition générale, vérification des idées.	

Ontologie positive

# I

## ONTOLOGIE ANALYTIQUE

### SCIENCE DE LA FORMATION DES IDÉES

Les idées, quand on les considère à ce degré de simplicité où elles s'expriment par un mot, doivent être subdivisées en deux classes, suivant qu'elles représentent les choses isolément ou par séries, c'est-à-dire qu'elles visent, soit des entités particulières ou leurs attributs concrets, soit des collections d'entités ou d'attributs. Les premières se rattachent à des perceptions directes, les secondes à des conceptions dérivées. Obligés d'employer les termes de la langue philosophique et d'en modifier le sens pour les adapter à nos analyses, nous appellerons « objectives » les idées qui se rapportent à des « objets » réels, signalés par des sensations expresses, et « subjectives » les idées conçues par le « sujet » opérant sur les données de la perception. L'Ontologie analytique se partagera de la sorte en deux sections, l'une « élémentaire », qui s'applique à déterminer les éléments de nos idées, les radicaux de nos concepts; l'autre « spéciale », consacrée à l'étude des idées générales ou abstraites.

## I. — ONTOLOGIE ÉLÉMENTAIRE

### SCIENCE DES IDÉES OBJECTIVES

#### THÉORIE DES IDÉES OBJECTIVES. DE LA PERCEPTION

L'Ontologie élémentaire étudie la genèse des idées en les prenant aussi près que possible de leur origine première, c'est-à-dire dans les données immédiates de la perception. Il n'y a rien en effet de plus simple que les idées dont la production s'accomplit spontanément sous l'influence des réalités elles-mêmes et qui résultent d'une communication directe entre l'objet connu et le sujet connaissant. On peut les définir des sensations perçues. La « perception » (de « *percipere* » pour « *capere* » prendre) est une prise de possession intellectuelle des choses par l'impression qu'elles produisent sur un organisme sensible. La certitude de son existence propre, que le sujet trouve au-dedans de lui-même, et la manière dont les objets extérieurs agissent sur ses organes des sens, lui permettent d'affirmer des réalités effectives. C'est en cela que consiste son premier fonds de connaissances et l'on ne saurait remonter plus haut dans l'étude de la formation des idées. Les notions que la perception procure ont ainsi pour caractère de correspondre toujours à un objet réel ; c'est pourquoi nous les appelons « objectives ».

Les analyses des philosophes démontrent que les éléments de toutes les idées entrent dans nos esprits par la voie de la perception. Les divers modes de sensation, continuellement actifs, nous livrent un nombre indéfini de notions et ce qu'il nous a été donné de percevoir

de la sorte nous aide ensuite à concevoir tout le reste.

La perception a même seule qualité pour affirmer avec certitude l'existence des choses. Il n'y a de réalités indubitables que les réalités perçues et ce qui ne peut pas être constaté par ce moyen est comme s'il n'était pas<sup>1</sup>. Les métaphysiciens s'abusent quand ils prétendent faire admettre, à grand renfort d'arguments, des êtres insaisissables pour la perception. Ils se trompent de méthode. La nécessité même où ils se trouvent d'étayer de preuves ces existences problématiques dit assez combien elles sont peu manifestes. Or, en pareil cas, les preuves laissent toujours à désirer, car on ne supplée pas l'évidence, et, comme démonstration de réalité, rien ne vaut une sensation expresse. Sans doute, la science admet aussi par induction des entités que la perception ne peut atteindre. Tels sont les astres supposés de l'Astronomie<sup>2</sup>, les molécules de la Physique, les atomes de la Chimie, les forces, l'éther, etc. Mais les conceptions de ce genre, si grande que soit leur vraisemblance, manquent de réalité objective et portent le cachet de l'idéal. Ce sont moins des êtres véritables que des manières de concevoir ou d'expliquer les choses, et l'esprit qui, faute de pouvoir êtreindre la vérité même, doit se contenter de fictions, conserve, puisqu'il les crée, le droit de les modifier ou de les écarter selon l'état de ses connaissances. Au contraire, l'existence de ce que les sens attestent ne fait l'objet d'aucun doute. On ne saurait nier de bonne foi la réalité des choses perçues et les sophistes qui ont affecté de n'en être pas sûrs en théorie n'ont pas laissé, dans la pratique, d'agir comme s'ils étaient parfaitement convaincus. De telles vérités s'imposent. Ce sont les plus manifestes de toutes.

1. *Idem judicium est de iis quæ non sunt et quæ non apparent.* (Ancien adage juridique.)

2. On a pu, d'après les indications de la théorie, affirmer par avance la réalité d'astres inaperçus (Neptune, Vulcain, etc); mais, avant d'être constatés *de visu*, ils n'avaient qu'une existence probable et l'on en pouvait douter l'observation seule en a fait d'incontestables réalités

Il nous suffit donc d'avoir des sens qui s'exercent et une intelligence qui fonctionne pour acquérir des notions certaines sur l'existence des choses en situation d'impressionner nos organes. Examinons en détail comment se forment ces idées. Il convient de distinguer celles qui concernent le sujet connaissant et celles qui se rapportent à des réalités étrangères. Dans un cas, en effet, l'objet de nos perceptions est au-dedans de nous-mêmes et, dans l'autre, au dehors. Ces deux aspects de l'être, désignés par les expressions de « moi » et de « non-moi », correspondent à deux modes de perception, à deux ordres de connaissances. Les idées relatives au moi sont simples, primordiales et, en général, persistantes, parce que leur objet est inséparable du sujet. Les idées relatives au non-moi sont, au rebours, dérivées, variables, essentiellement transitoires. Comme leur objet est distinct du sujet, elles ne pénètrent dans l'esprit qu'en se rattachant au moi. L'Ontologie élémentaire doit conséquemment étudier, d'une part, les idées « discrètes » ou « particulières » dont le type est dans le moi ; et, de l'autre, les idées « concrètes » ou « attributives » dont la claire notion est fournie par le non-moi.

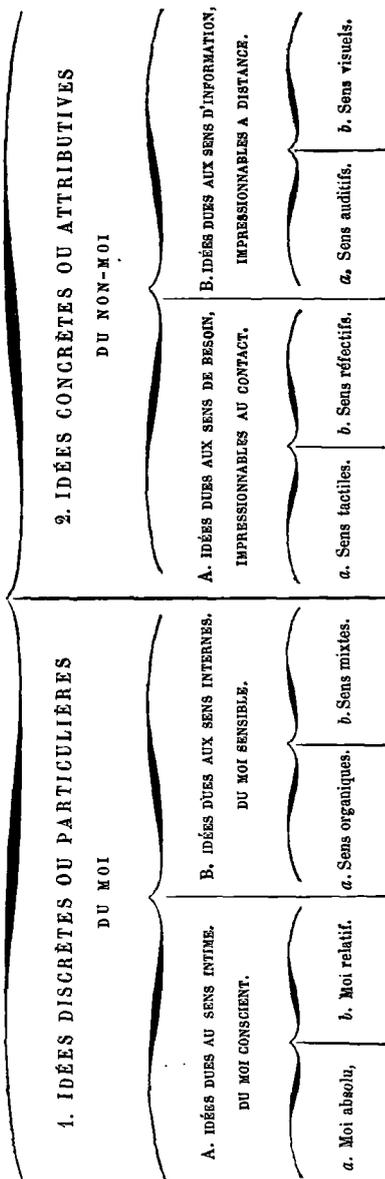
#### 1. IDÉES DISCRÈTES OU PARTICULIÈRES. DU MOI

Toute connaissance implique un sujet connaissant. Il serait en effet illogique de supposer qu'un être pût acquérir des notions sur l'existence des choses sans avoir préalablement celle de son existence propre. Avant d'affirmer des réalités étrangères, l'esprit doit affirmer sa réalité personnelle. L'idée du moi est le point de départ de la pensée et, selon l'expression de Kant, « le véhicule de tous nos concepts ». La manière dont le moi se connaît constitue donc le problème fondamental de l'Ontologie. Son étude n'est pourtant pas ancienne ; Maine de Biran et Fichte l'ont entreprise les premiers.

# ONTOLOGIE ÉLÉMENTAIRE

## SCIENCE DES IDÉES OBJECTIVES

### ONTOLOGIE ÉLÉMENTAIRE.



Si simple que paraisse l'idée du moi, l'analyse peut la décomposer en distinguant la perception de l'être par le sens intime et celle des manières d'être par les sensations internes. La première constate le moi total et absolu; la seconde, ses états partiels et relatifs.

A. — Du sens intime et du moi conscient.

Prenons l'homme au début de son évolution mentale : l'esprit, vide de connaissances, est, selon la comparaison d'Aristote, « une table rase » (*De l'âme*, liv. III, chap. IV) ou, comme nous disons, « une page blanche ». Il n'y a rien dans l'intelligence que l'intelligence même <sup>1</sup>, capable de tout apprendre, mais ignorant tout et s'ignorant elle-même. En cet état, la première idée que l'être puisse percevoir, la seule qu'on doive appeler innée, puisqu'elle naît spontanément en lui avec la conscience qu'il a de lui-même, est l'idée de son existence. — « Je suis ». — Telle est la vérité qui, venant à luire dans la nuit de son inconscience originelle, lui révèle la lumière. Cette vérité, l'esprit n'en fait pas, comme Descartes, la conclusion d'un raisonnement qui serait une tautologie pure; il ne se dit pas qu'il est parce qu'il pense, car il pourrait mieux encore se dire qu'il pense parce qu'il est; il est et pense tout ensemble, sans discerner son existence de sa pensée.

Dans cette donnée, qu'on serait tenté de croire d'une irréductible simplicité, on aurait encore à distinguer le moi intégral ou absolu et les modes généraux de la sensibilité.

a. — Au plus profond de notre être, dans le mystère du sens intime, se pose le moi identique et un. Cette notion ne s'acquiert pas tout à coup, comme brille un éclair dans

1. *Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu, — excipe nisi ipse intellectus.* (Leibnitz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, liv. II, ch. 1).

les ténèbres ; elle apparaît, d'abord indécise et obscure, pendant une phase inconnue de la vie embryonnaire, puis de plus en plus nette, à mesure que l'intelligence se développe. Des psychologues ont soutenu que la perception du moi n'est pas antérieure à celle du non-moi et résulte de l'opposition ou du choc de deux sensations distinctes qui, se limitant l'une l'autre, se déterminent réciproquement. Une sensation unique, uniforme, comme celle du moi isolé, serait, disent-ils, insaisissable pour la pensée. La conscience aurait alors pour cause l'ébranlement ressenti par le moi au contact du non-moi. — Sans contester le surcroît de lumière que la perception du non-moi apporte à celle du moi, nous croyons pourtant indispensable d'admettre, comme condition même de la sensation externe, une conscience personnelle, aussi vague qu'on le voudra, mais réelle, indépendante et capable de percevoir directement le sujet. Quand il serait vrai que la perception exige, pour se produire, un contraste d'impressions, rien n'obligerait d'attendre que l'idée du non-moi vienne s'opposer à celle du moi et la susciter. La conscience pourrait aussi bien provenir des impressions diverses que l'être trouve au dedans de lui-même. Elle résumerait simplement les perceptions internes d'un système organique dont toutes les parties sont sensibles et réagissent les unes sur les autres. Le sens intime a sans doute pour point de départ une multitude de sensations infiniment petites, sourdes et séparément imperceptibles, mais qui, recueillies par l'appareil nerveux, réunies dans un centre où leur sommation s'opère, deviennent, par leur accord, susceptibles d'être perçues clairement. La conscience représenterait ainsi la résultante générale des faits d'impression latente, le confluent des courants de sensibilité qui traversent en tous sens l'organisme et, pour employer les termes de Kant, « l'unité synthétique de l'aperception ».

Mais cette unité se compose de parties et, par suite, la conscience admet du plus et du moins, des degrés de luci-

dité. Quoique le moi se tienne pour indivisible, la réflexion démêle en lui plusieurs moi que l'analyse sépare. Notre conscience totale est faite de consciences partielles qui se surajoutent et qu'il n'est pas impossible de disjoindre. Nous pouvons retrancher d'abord une conscience facultative qui, atteignant chez l'adulte, sous la discipline de l'attention, le maximum de clairvoyance, donne à l'être la pleine possession de lui-même. Cette conscience supérieure, mais intermittente et variable, s'égare dans la rêverie et se perd durant le sommeil. Alors, néanmoins, persiste une conscience inférieure qui, moins nette mais plus stable, permet à la précédente de se ressaisir au réveil. La demi-conscience de lui-même qu'a encore l'homme endormi est relativement claire dans le rêve et presque incertaine dans le sommeil profond. Elle disparaît à son tour et s'évanouit dans la défaillance. Une autre conscience, ténébreuse et pour ainsi dire aveugle, continue pourtant de veiller et, grâce à elle, l'être se retrouve en reprenant connaissance. Au plus bas degré de la perception, il faudrait placer cette conscience, réelle encore quoique tout à fait inconsciente, qu'attestent les actions réflexes. Nous touchons ici la limite où la notion du moi devient insaisissable pour la pensée. Cependant ce mode infime de conscience, qui ne correspond plus qu'à des sensations indistinctes, précède la naissance puisqu'il détermine les mouvements du fœtus, et persiste même après la mort puisqu'on en observe les effets chez les décapités.

Ainsi le sens intime s'éclaire et s'obscurcit tour à tour. Pour surprendre ses premières lueurs, il faut remonter jusqu'aux indices les plus rudimentaires de la sensibilité dans l'organisme naissant. Mais, à partir du moment où elle se forme, l'idée du moi est perçue sans interruption tant que dure la cause de vitalité qui la produit. Si, en effet, le sentiment de l'existence était suspendu un seul instant, le lien qui unit nos impressions serait brisé. Il y aurait en nous autant d'êtres inconnus les uns aux autres

que de lacunes dans la conscience. L'idée du moi, sur la permanence de laquelle notre identité se fonde, constitue l'idée essentielle et nécessaire. Les autres idées, contingentes et passagères, se rattachent à cette donnée qui seule est constante et trouvent en elle leur unité.

Le sens intime, à qui nous devons la révélation première et le vif sentiment de l'existence, est donc le sens ontologique par excellence. Établi au centre même de toute réalité, il perçoit l'être « comme à nu » (Maine de Biran). Plus direct que les sens externes, il n'est pas obligé de traverser des impressions médiates pour arriver, par une voie détournée, à la connaissance des choses, connaissance imparfaite qui ne saisit d'elles qu'une apparence trompeuse et comme un reflet brisé; il est la sensation prise à sa source, dans ce qu'elle a de plus clair. L'idée du moi se distingue de toutes les autres par son évidence absolue. Aucun doute ne peut l'atteindre, car douter, c'est encore être, et qui voudrait se nier ne réussirait qu'à s'affirmer. Là se trouve, comme l'a montré Descartes, le point fixe de la certitude. Tout l'édifice de la connaissance repose sur ce ferme fondement.

La notion d'existence, telle que la procure le sens intime, offre, en outre, des caractères sur lesquels il importe d'insister. L'idée du moi, strictement particulière, puisqu'elle ne franchit pas les limites de notre être, est néanmoins générale et se retrouve dans toutes les autres dont elle forme le lien. Considérée au début, alors que, exclusive et unique, elle constitue le tout de la pensée, elle est indéterminée, inconditionnelle, absolue. Née avec nous et ne finissant qu'avec nous, elle n'a ni commencement ni terme dans la mémoire, car il serait irrationnel que l'être pût se souvenir de l'avoir acquise ou perdue. Enfin, comme le moi prend conscience de lui-même avant que les sens externes entrent en activité, il ne se connaît pas de limites, se présume sans limites et se répute « infini ». On doit, croyons-nous, rapporter à cette notion primordiale

de l'être les idées d'absolu et d'infini toujours associées par une sorte de nécessité logique, à celle d'existence pure. Les idées de relatif et de fini, concernant les modes variables de l'existence, sont subséquentes et dérivées. Elles procèdent de sensations circonscrites et transitoires. L'infini n'est pas, comme la structure du mot (in-fini) porterait à le supposer, la négation du fini; c'est au contraire le fini qui est la limitation, la décroissance, la négation de l'infini. On pourrait, pour plus de précision, distinguer deux idées de l'infini, l'une que révèle directement le sens intime, avant toute notion de limite, l'autre qui résulte d'une série sans fin de suppressions de limites arrivant par abstraction à les toutes éliminer. La première se rapporte à la donnée initiale d'existence; elle est antérieure à l'idée du fini; la seconde lui est postérieure et se réfère plutôt aux concepts d'espace et de temps. La conscience débute par l'affirmation de l'existence sans condition et sans bornes. Lorsque, ensuite, l'idée de l'être a été analysée dans ses modes et généralisée dans son extension, nous rattachons à l'ensemble des choses ces attributs d'infini et d'absolu qui paraissent lui convenir mieux qu'à nous; mais il y a là comme une transposition de la pensée et c'est en nous, dans l'intuition première du moi, que l'origine de ces concepts métaphysiques doit être cherchée. Le type de toute réalité se trouve dans la conscience.

*b.* — Malgré son identité persistante, le moi n'est pas invariable. Il suit, à travers des contingences sans nombre, le cours d'une évolution qui tantôt se déroule régulièrement et tantôt se sent arrêtée par des obstacles. A ces deux conditions de vie correspondent deux états de conscience qui expriment les modifications principales du moi et le font se connaître dans ce qu'il a, non plus d'absolu, mais de relatif. Le plaisir et la peine, affections élémentaires ou tons de la sensation, représentent les modes généraux et, pour ainsi dire, les pôles de la sensibilité. Toutes nos per-

ceptions spéciales rentrent dans l'un ou dans l'autre état et sont agréables ou pénibles, car, s'il en était d'indifférentes, elles ne seraient pas senties et passeraient inaperçues. La seule qu'il faille admettre comme indifférente est la constatation même de l'être par le sens intime, impression qui ne cause de soi ni plaisir ni peine et signale simplement un fait.

La distinction des manières d'être, la première que le moi puisse opérer dans ses états de conscience, développe en deux sens opposés les données de la perception et fait une ligne de ce qui n'était qu'un point. Le moi se double en quelque sorte et se connaît sous deux aspects différents. Il y a en lui le moi qui souffre et le moi qui jouit; néanmoins les deux se confondent dans l'unité du sens intime. Malgré leur antagonisme apparent, ces états si dissemblables se touchent par une frontière d'indifférence dont les sentiments moyens, les plus nombreux de beaucoup, ne s'écartent guère; mais les sentiments extrêmes tendent la sensibilité jusqu'à la briser. Le plaisir et la peine revêtent, dans le détail, des formes sans nombre qui, très nettes pour la perception, le sont moins pour la réflexion et résistent aux efforts de l'analyse. Une classification raisonnée des sentiments réaliserait un desideratum de la science. Les psychologues ne sont même pas encore fixés sur les causes, les tendances et la signification de ces faits. Les uns, comme Wundt, en font une question de contraste. Les autres (Wolff, Kant, ...), rattachent l'agréable à l'utile, le pénible au nuisible. D'autres enfin (Bain, H. Spencer, L. Dumont...), considèrent les sentiments comme les aspects psychiques de phénomènes physiologiques relatifs à l'activité de l'appareil d'innervation et constituant pour lui un gain ou une perte.

Le plaisir, et sous ce nom il faut comprendre toutes les sensations agréables, de quelque ordre qu'elles soient, nous paraît être l'expression de la vie accrue, des besoins

satisfaits, des aptitudes fructueusement exercées. Son attrait est un but proposé aux aspirations de l'être, une incitation continuelle à l'activité et au progrès.

La peine est, au contraire, l'expression de la vie diminuée, de nécessités qui réclament, de contraintes subies, de privations imposées. Ses effets se déploient sur une aire incomparablement plus étendue que celle des sentiments agréables et les dépassent de beaucoup en intensité. Cela nous semble fâcheux; néanmoins, la nécessité d'un pareil ordre ressort de ce que le nombre des choses utiles à la vie est restreint, tandis que celui des choses nuisibles ne l'est pas. Nos besoins sont limités; il nous faut peu pour subsister; au rebours, les dangers sont innombrables et nous menacent incessamment. Nous sommes exposés à souffrir, non appelés à jouir dans chaque fibre de notre corps, dans chaque application de nos facultés. Mais c'est là une condition d'existence et, malgré l'aversion qu'elle nous inspire, la douleur, « grande calomniée » (Sully-Prud'homme, *La justice*), nous est plus amie que le plaisir. Gardienne vigilante de nos intérêts les plus chers, elle nous prodigue dans un monde où tout est péril, de salutaires avertissements.

Les états généraux de la sensibilité tiennent de si près au sens intime qu'ils ne peuvent pas en être séparés et nous montrent le moi sous deux faces corrélatives quoique opposées. Ils introduisent dans son unité un principe de variation qui s'étend sur tout. Les êtres ont d'autant mieux conscience d'eux-mêmes qu'ils éprouvent plus de peines et plus de plaisirs. Vivre, c'est être agité.

Les informations du sens intime constatent ainsi le moi permanent, le font se connaître à divers degrés de lucidité, enfin lui révèlent l'antagonisme des affections agréables ou pénibles de la sensibilité. Le moi sait alors qu'il existe, qu'il est absolu dans son essence, relatif dans ses modes et susceptible d'être impressionné diversement

sans que son identité soit compromise. C'est là une donnée fondamentale, mais sommaire, et la connaissance que l'être a de lui-même manque de netteté dans le détail. Voyons comment, grâce aux sensations internes, elle se développe et se précise.

B. — Des sensations internes et du moi sensible.

La perception du moi par le sens intime, bornée à une affirmation d'existence personnelle et à la distinction des états généraux de la sensibilité, se complète par la notion d'états spéciaux auxquels correspondent des sensations définies. L'être, s'élevant à une activité plus complexe, prend possession de ses organes, en recueille les indications variées et, dans le tout indéterminé de l'existence, apprend à discerner des parties, des changements, des sensations locales et temporaires. La simplicité du moi se décompose, s'analyse et s'éclaircit par degrés.

L'étude des impressions organiques a été longtemps négligée et, par suite, l'origine d'un certain nombre d'idées très générales restait pleine d'obscurité. L'importance de ces éléments de connaissance a été mise en lumière par Cabanis. Les données de la sensation interne, qui occupent un rang intermédiaire entre celles du sens intime et celles des sens externes, sont quelquefois rapportées à un « sens vital », organe de la sensibilité générale; mais nous croyons préférable de les rattacher à deux sortes d'impressions qui proviennent, l'une du système de la vie organique, l'autre du système de la vie de relation.

a. — Des sensations particulières se lient au fonctionnement de l'organisme et en signalent la condition physiologique, les besoins, les troubles, les satisfactions. Presque indifférentes à l'état normal, mais énergiques par

occurrence et parfois d'une redoutable intensité à l'état pathologique, elles font percevoir au moi le détail de ses modifications. Les données de ce genre ne deviennent guère distinctes qu'à partir de la naissance, c'est-à-dire du moment où l'être doit chercher la satisfaction de ses besoins. Suscitées par l'activité vitale, elles viennent immédiatement après les informations du sens intime et constituent le moteur destiné à mettre en branle le mécanisme de la sensibilité.

Des sensations diffuses nous avertissent de l'état général de l'organisme par des impressions de bien-être, de malaise, d'énergie, de faiblesse, d'excitation, de fatigue, etc. Ces indications d'ensemble, quoique nettement saisies par la perception, sont difficiles à définir et ne se prêtent guère à l'analyse.

Des sensations mieux déterminées se localisent dans certains organes et signalent leur condition particulière. Citons la faim, la soif, la réplétion, le dégoût, les effets divers produits par les aliments, les médicaments, les poisons, les maladies, etc. Mentionnons encore le besoin de respirer, de dormir, l'appétit génétique, etc. Celles de ces impressions qui se rattachent à des fonctions régulières obéissent à une loi d'alternance et réclament périodiquement satisfaction.

*b.* — Après les sensations organiques, exclusivement internes, examinons les sensations thermiques et musculaires, dont la nature est mixte. Elles concernent encore des besoins ou des états de l'organisme, mais elles se produisent le plus souvent par l'effet de causes extérieures et confinent aux sensations externes sans néanmoins se confondre avec elles.

Les êtres vivants devaient avoir, comme condition d'existence, une sensibilité spéciale pour la chaleur, puisque la vie se développe entre certaines limites de température qu'elle ne pourrait pas dépasser impunément. Les impres-

sions thermiques répondent à cette exigence et donnent aux organismes animés le moyen de se conserver dans un milieu variable. Comme elles intéressent le corps entier, elles sont diffuses et partout senties. Le sens, jusqu'ici peu étudié, de la chaleur, est assez difficile à colloquer dans une théorie des sensations, car il est en partie interne comme les sens organiques, en partie externe comme les sens proprement dits et susceptible de s'exercer, soit sous l'influence immédiate des corps, comme le toucher, soit à distance comme la vue. On le confond habituellement avec le tact parce que, dans le plus grand nombre des cas, les deux sortes d'impressions se produisent ensemble à la surface de l'organisme; mais Carus a nettement établi la spécificité du sens thermique. Tandis, en effet, que les sensations tactiles ont pour cause des actions de contact dont l'influence s'exerce mécaniquement ou par pression, les sensations thermiques résultent d'actions moléculaires et sont occasionnées par une addition ou une soustraction de chaleur. Il est du reste facile de séparer par expérience les deux ordres de sensations : au contact d'un corps solide de même température que la peau, le toucher seul est actif; dans un air froid ou près d'un foyer, on n'éprouve que l'impression thermique. Si donc le sens de la chaleur se rapproche du toucher par une connexité fréquente de fonction, il a néanmoins un rôle distinct, plus général, et sa vraie place est parmi les sens internes.

Les sensations musculaires ne concernent plus directement les besoins de l'organisme; elles se rapportent à un mode d'activité dont le but est de leur procurer les satisfactions requises. Destutt de Tracy a, le premier, reconnu l'importance de ces impressions. Leur analyse, dont on est surtout redevable à Charles Bell, montre qu'il faut chercher en elles l'origine des idées de force, de poids, de résistance, de mouvement, d'étendue et, conséquemment, de corporéité, car l'étendue et la résistance caractérisent le mieux la réalité sensible des corps. La comparaison de

ces données nous apprend à localiser les parties de l'organisme et cette connaissance contribue à la netteté des indications du toucher. Quelques impressions de ce sens, qu'on peut appeler dynamique, sont continues. La sensation de poids est, par exemple, constante et le corps, même immobile ou couché, a la perception de sa propre pesanteur. L'être passe, par la contraction volontaire des muscles, de la sensation passive de poids à la sensation active de mouvement. Le sens musculaire maintient notre équilibre, détermine le jeu des organes et nous rend aptes à une foule d'actions où se déploient notre vigueur et notre adresse. Il est susceptible d'acquérir une délicatesse très grande et d'apprécier des poids ou des distances infimes. Ainsi le raccourcissement du muscle droit interne de l'œil permet de saisir des différences de  $1/250^{\circ}$  de millimètre. Étroitement associées aux sensations tactiles, puisque la peau recouvre partout des muscles, les sensations musculaires forment une transition entre les impressions organiques et les impressions des sens externes. Plus discriminatives que les premières, moins spéciales que les secondes, elles dépendent des deux et coordonnent leurs relations.

On voit combien les sensations internes ajoutent de lumière à la connaissance du moi, telle que l'établit le sens intime. L'idée vague d'existence se détermine par des idées plus explicites de mode, de cause, de force, d'activité, de durée. L'être, distinguant en lui des manières d'être, des impressions locales et successives, va de l'idée d'unité à celle de multiplicité; de l'idée de permanence à celle de temps; de l'idée d'infini à celle de fini; de l'idée d'absolu à celle de relatif. Cette transformation de nos concepts, que la réflexion ne peut comprendre parce qu'elle est antérieure à la réflexion, s'effectue naturellement par la concordance, dans un même esprit, de l'idée totale du moi, due au sens intime, et des idées relatives aux divers états

du moi, que procurent les sensations internes. Le problème de la relation entre l'infini et le fini, qui est insoluble en Mathématique où la spéculation, emprisonnée dans le fini, manque de commune mesure pour le comparer à l'infini, se résout de lui-même en Ontologie par l'identité manifeste de l'être qui se perçoit simultanément sous deux aspects, unique et simple dans la conscience, multiple et changeant dans les états de conscience. L'idée d'infini correspond à l'intégralité du moi pris dans son indétermination première; l'idée de fini exprime la distinction de ses modes et la limitation de ses parties. Les perceptions internes analysent ainsi la donnée, d'abord confuse, de l'existence. Elles font concevoir le nombre par la séparation des éléments du moi, l'étendue par la notion de leur contiguïté, le temps par celle de la continuité de l'existence à travers une suite de changements; elles procurent l'idée de force par la conscience de l'activité volontaire, l'idée de cause par la relation des effets antécédents et des effets subséquents, etc. Ces notions si générales, à la fois nécessaires et peu précises, se rattachent directement à celle d'existence, sont comme elle le produit de perceptions primordiales et tirent leur origine de la sensation interne, quoiqu'elles trouvent ensuite leur application la plus étendue dans l'ordre des sensations externes. Leur principe est en nous et si le moi ne les trouvait pas au dedans de lui-même, il ne réussirait pas à les découvrir au dehors.

Ainsi s'établit la connaissance du moi. Au terme de cette première initiation, l'être se possède tout entier. D'une part le sens intime lui donne sans relâche le sentiment de l'existence et signale les modes principaux de ses affections; de l'autre, les sensations internes analysent le détail de ses états et règlent ses conditions d'activité. Le sujet, dès lors pleinement constitué, peut vivre et entrer en relation avec la multitude des choses dont ses besoins le font

dépendre. Voyons comment il acquiert la notion des réalités étrangères et de quelles idées l'enrichit le vaste monde que les sens externes ouvrent à ses informations.

## 2. — IDÉES CONCRÈTES OU ATTRIBUTIVES. DU NON-MOI

Tandis que les sensations internes, dont l'objet est en nous, constatent la réalité du moi qu'attestent les idées discrètes ou particulières, les sensations externes, dont l'objet est hors de nous, font connaître les réalités du non-moi auxquelles correspondent les idées concrètes ou attributives. Le monde extérieur commence là où finit le domaine du sens intime. Si le moi est ce dont nous avons conscience et que nous pouvons mouvoir, le non-moi est ce dont nous n'avons pas conscience et qui oppose de la résistance à nos mouvements. Ces deux sortes de données se limitent réciproquement; mais, dans un cas, le sujet et l'objet se confondent, au lieu que, dans l'autre, ils sont distincts. La sensation externe, incapable de nous livrer directement la notion de l'existence des choses, ne nous fournit à leur égard que des indications d'attributs. Nous n'avons pas conscience de la réalité des autres êtres; nous ne percevons d'eux que les impressions qu'ils produisent sur nous, c'est-à-dire des apparences interprétées et comme traduites dans une autre langue. Pour affirmer, d'après ces indices, des réalités étrangères, la pensée doit faire un détour et traverser une induction. Néanmoins, l'idée du non-moi est encore élémentaire, puisque, comme celle du moi dont elle procède, elle se lie à des sensations formelles. Seulement, elle n'est plus primordiale et immédiate, mais secondaire et dérivée. Simple résultante des modifications du moi, elle constitue le prolongement et, pour ainsi dire, la projection extérieure de nos états de conscience.

A partir du moment où les sens externes entrent en activité, l'être, mis par eux en rapport avec le monde des choses,

voit s'agrandir démesurément le champ de ses connaissances. L'existence se révèle à lui dans la prodigieuse variété de ses attributs. Les premières impressions de cet ordre lui apprennent que quelque chose qui n'est pas lui et où sa conscience n'a pas d'accès existe en dehors de lui. Le non-moi est dans le principe un tout indéterminé ; mais le moi en débrouille peu à peu la confusion à l'aide de divers sens dont les données, plus variées et mieux définies que celles des sens internes, ont un caractère marqué de spécialité. Ce sont les vrais sens, les seuls qu'on ait reconnus et dénommés de tout temps. Examinons leur rôle dans la genèse des idées. Quoiqu'ils aient été le plus étudiés, les anciennes analyses n'ont pas su les classer méthodiquement. Nous les répartirons en deux sections comprenant : l'une, les sens de besoin, qui s'exercent au contact ; l'autre, les sens d'information, qui sont impressionnés à distance. Ce mode de classement est indiqué par la nature elle-même, car le premier groupe (toucher, goût et odorat), spécialement affecté aux exigences de la vie nutritive, suffit à la faune inférieure, aveugle et aphone ; tandis que le second (ouïe et vue), inséparable d'aptitudes intellectuelles, appartient en propre à la faune supérieure. Ces ressources inégales de perceptivité entraînent de notables différences d'idées et de conditions d'existence.

· A. — Sens de besoin, impressionnables au contact.

Les sens qu'impressionne le contact des choses, bornés à des indications périphériques, signalent l'existence des réalités du non-moi qui, atteignant la limite du moi, ont avec lui des rapports directs et peuvent le mieux l'influencer. Leur champ d'exploration est très circonscrit, puisqu'il ne dépasse pas la superficie de l'organisme ; néanmoins les données qu'ils procurent ont une importance extrême, parce que les choses qui nous intéressent le plus sont celles

qui nous touchent de plus près. Ces impressions se réfèrent à nos principaux besoins et sont surtout appétitives. Il conviendrait de distinguer, d'une part, le tact qui perçoit les corps en masse; de l'autre, les sens de réfection (goût et odorat), qui en font l'analyse et peuvent saisir des particules impalpables.

*a.* — Le toucher, sens élémentaire, a pour organe la peau qui recouvre tout l'organisme et l'enveloppe comme d'un vêtement de sensations. Les impressions tactiles, impliquant une réaction contre un corps voisin, la distinction d'un sujet et d'un objet qui se déterminent l'un l'autre, nous font concevoir clairement les idées d'extériorité, de corporéité, liées à celle de résistance et les plus propres à caractériser les réalités étrangères. Le toucher effectue avec une grande netteté la démarcation capitale du moi et du non-moi. Séparant par une limite précise l'être qui est en nous des êtres qui sont hors de nous, il assigne une commune frontière à deux mondes ontologiques. Le tact fait surtout connaître les attributs des choses qui dépendent de la cohésion et les actions que les corps exercent mécaniquement les uns sur les autres. Il indique s'ils sont lourds, légers, polis, rugueux, durs, piquants, mous, collants, humides, etc. C'est un sens mathématique dont l'aptitude consiste principalement à mesurer. Ses informations, restreintes mais sûres, servent de contrôle à celles des sens qui, s'exerçant à distance, ont à la fois plus de portée et moins de rigueur. L'étude du toucher n'est pas ancienne. Or doit aux Weber une minutieuse analyse de ses données (*De subtilitate tactus*, 1834).

Le sens tactile est communément regardé comme simple, à cause de sa diffusion. Il convient pourtant de distinguer avec les physiologistes deux sortes de toucher, l'un passif et général, l'autre actif et spécial.

Le premier, réparti sur toute la surface du corps, constitue un tact rudimentaire, réduit à percevoir des effets de

résistance ou de pression, de repos ou de mouvement. Aucun animal n'en est dépourvu, bien que, chez la plupart, sa sensibilité soit obtuse, parce qu'elle s'exerce à travers des téguments inertes, coquilles, carapaces, écailles, plumes ou poils. Sa délicatesse varie par places, selon le degré d'épaisseur ou de souplesse de la peau et l'abondance des corpuscules tactiles. C'est un sens de préservation qui répond au besoin permanent des organismes de n'être pas écrasés, déchirés ou meurtris.

Le second sens du toucher est localisé dans des organes dont la structure présente les dispositions les plus variées (antennes, palpes, tentacules, barbillons, langue, lèvres, mains...). Au lieu d'attendre et de subir le contact des choses, le toucher actif, en rapport avec le sens musculaire, va les chercher, les expérimente et se plie à elles. Ce sens, aussi susceptible d'éducation que le précédent l'est peu, donne avec infiniment plus de précision les idées de volume, de forme, de situation, de distance, etc. Cependant on doit encore le ranger parmi les sens de besoin. Il est à remarquer en effet que ses organes les plus délicats (la pointe de la langue, les lèvres ...) sont situés à l'entrée des voies digestives et collaborent aux fonctions de la nutrition.

En somme, le toucher a des aptitudes diverses et sa spécialisation imparfaite rend sa nature ambiguë. Il est en partie appétitif, en partie préventif et en partie discriminatif.

*b.* — Les autres sens de contact, déjà mieux déterminés, perçoivent de très petites particules des corps qui échapperaient à la prise du toucher. Le goût et l'odorat, à demi-internes et en relation directe avec les besoins de la vie organique, exigent, l'un l'ingestion, l'autre l'aspiration d'éléments réduits à une condition moléculaire et nous font ainsi juger des substances par échantillon. Moniteurs de la réfection, placés comme des sentinelles vigilantes au

seuil des voies digestives ou respiratoires, ils président aux deux plus impérieuses nécessités de l'existence, le besoin d'aliments assimilables et celui d'air salubre. Ces deux sens, plus organiques qu'intelligents, fournissent peu de données à l'activité de l'esprit <sup>1</sup>, et leurs impressions, agréables ou pénibles, semblent être de simples modes localisés de la sensibilité générale.

Le goût perçoit les qualités sapides des substances dissoutes. Les sensations gustatives sont extrêmement variées ; mais la mémoire n'en garde qu'une empreinte assez vague, et le langage, impuissant à les exprimer, répartit sommairement les saveurs en douces, acides, sucrées, salines, piquantes, amères, âcres, astringentes, etc. La sensibilité du goût diffère selon les substances. Ce sens discerne 1/100<sup>e</sup> de sucre dans l'eau, 1/800<sup>e</sup> de sel marin et jusqu'à 1/1 000 000<sup>e</sup> de sulfate de quinine.

L'odorat, doué d'une délicatesse exquise, est impressionné par les émanations des corps et signale les qualités nuisibles de l'air. Il est à noter, en effet, que les gaz à odeur désagréable sont plus ou moins délétères. Quelques-uns, il est vrai, comme l'oxyde de carbone, sont à la fois inodores et toxiques ; mais ils ne se rencontrent guère dans la nature et ces produits de nos artifices prennent pour ainsi dire l'organisme au dépourvu. L'odorat, pouvant reconnaître de loin les substances, constitue un sens recteur qui détermine des séries d'actions. Il est au goût, dans l'ordre des sens réfectifs, ce que la vue est au toucher, dans l'ordre des sens idéogènes. Sa fonction, moins exclusive, a parfois une importance considérable chez certains groupes d'animaux. Dans la classe des poissons, le lobe olfactif représente plus de la moitié du cerveau. Le chien doit à la finesse de son flair la meilleure part de son intelligence et un jeune animal chez lequel on opère la section

1. Dans le rêve, où l'imagination combine librement ses matériaux, le souvenir des sensations du goût et de l'odorat est très rarement évoqué.

du nerf olfactif reste idiot. La gamme des odeurs, très étendue pour la sensation, mais théoriquement confuse, va de la fétidité à la suavité, à travers des degrés sans nombre.

Les sens de contact forment un groupe naturel et paraissent résulter des modifications d'un même sens adapté à des conditions spéciales d'activité. Leurs aptitudes, en rapport avec les divers états de la matière, nous font connaître les corps sous leur triple aspect solide, liquide et gazeux. Le toucher n'éprouve nettement l'impression de résistance qu'au contact des solides; les liquides et les gaz au repos le trouvent presque insensible. Le goût, au contraire, ne perçoit bien que les substances dissoutes et diluées; les solides insolubles et les gaz sont insipides pour lui. Enfin l'odorat ne saisit que les effluves gazeuses, les corps à l'état de vapeur; les liquides les plus odorants, quand ils baignent l'organe olfactif, ne l'impressionnent pas.

B. — Sens d'information, impressionnables à distance.

Les sens capables de percevoir de loin les choses sont, quant au nombre, à la netteté et à la valeur des notions qu'ils procurent, bien supérieurs aux sens de contact. Les impressions de ceux-ci s'effacent vite et, ne correspondant qu'à l'actualité du besoin, ne laissent guère de traces durables dans la mémoire. Elles parlent peu à l'imagination et ne livrent à l'esprit que de rares matériaux à mettre en œuvre, comme on le voit par le petit nombre des mots consacrés à leur expression dans les langues. Sans doute, ces données, si restreintes qu'elles soient, pourraient suffire à une conception du monde extérieur; mais la connaissance du non-moi serait singulièrement bornée si tout ce qui est hors de notre atteinte restait ignoré. On peut s'en faire une idée par le degré d'abaissement où sont placés les animaux réduits au toucher, au goût et à l'odorat,

êtres imparfaits que, pour cette cause, nous appelons inférieurs. Les sens à longue portée, étendant leurs informations à distance, embrassent des séries de choses et agrandissent démesurément la sphère de nos perceptions. Grâce à eux, la sensibilité, pour ainsi dire partout présente, semble douée d'une sorte d'ubiquité. Ces sens, moins étroitement asservis aux *nécessités organiques*, fournissent des lumières plutôt que des satisfactions. Ils se désintéressent en partie et c'est cet état d'indifférence affective qui leur permet de devenir intellectuels, idéogènes, agents préférés de l'investigation scientifique et de l'appréciation esthétique. Ils comprennent l'ouïe, dont la portée a des limites restreintes, et la vue, qui s'exerce à toute distance.

*a.* — Les sensations auditives, déterminés par les vibrations des corps, font percevoir une classe de modalités physiques d'où se déduisent des indications de nature, de condition, de distance, de mouvement, etc., en rapport avec l'intensité, la hauteur et le timbre des sons. Ces données, sans utilité directe pour le besoin, exigent une interprétation et devaient, conséquemment, s'adresser à l'intelligence. — On n'admet d'ordinaire qu'un sens de l'ouïe; cependant on serait conduit à le dédoubler par des considérations analogues à celles qui font distinguer deux sortes de tacts.

L'ouïe générale, la seule que les animaux possèdent, se borne à la faculté d'entendre des sons et de les interpréter par instinct. Ce sens, purement préventif et peu susceptible de culture, ne va guère au delà de la perception des bruits dont la cause est en relation avec quelque besoin, c'est-à-dire qui signalent un appel ou un danger, une proie ou un ennemi...

L'ouïe spéciale, dont l'homme a le privilège, attache aux sons une signification idéale ou abstraite. C'est un sens intelligent et artiste, capable de prendre par l'éducation et l'exercice les plus larges développements,

comme en témoignent la parole et la musique. Il y a en effet deux manières d'entendre, l'une brutale et sommaire, l'autre explicite et délicate. L'homme près duquel se tient une conversation dans une langue étrangère, l'enfant ou le sauvage qui assiste à un concert, ne perçoivent qu'un bruit confus, là où une oreille exercée démêle une multitude de sons coordonnés dont chacun a un sens pour l'esprit ou pour le goût. Cette aptitude à saisir les inflexions de la voix, les degrés des tons et les nuances du timbre, devait faire de l'ouïe l'intermédiaire de l'expression et de la correspondance des idées, à cause de la variété des sensations qui servent à les traduire et de la facilité avec laquelle nous pouvons les provoquer dans le rayon habituel de notre activité.

*b.* — La vue *a*, parmi les sens externes, une prééminence qui tient à l'étendue, au nombre et à la netteté de ses impressions. L'analyse doit les attribuer, non comme il est d'usage, à un sens unique, mais à deux sens dont la spécialité est facile à établir quoiqu'ils s'exercent par le même organe.

La sensation purement optique consiste en impressions produites sur la rétine par la lumière. Elle nous renseigne sur son intensité (éclat) et sur sa qualité (couleur). L'œil ne perçoit par lui-même que des surfaces colorées. Toutefois son exquise sensibilité peut opérer des distinctions sans nombre. Ainsi, le pouvoir éclairant du soleil étant 800 000 fois supérieur à celui de la pleine lune, qui lui-même est 2 500 fois supérieur à celui de Sirius, l'œil parcourt une infinité de degrés entre ces termes extrêmes dont le rapport est de 2 000 000 000 à 1. — En fait de couleurs; il suffit de dire que la teinturerie des Gobelins prépare et utilise plus de 14 000 nuances.

Une seconde classe de sensations visuelles résulte de l'accord, établi par expérience, entre les impressions rétinienne et des impressions musculaires. L'adaptation op-

tique et la mesure de l'angle visuel à l'aide des muscles de l'œil (fibres de l'iris, muscle ciliaire accommodant le cristallin, muscles du globe oculaire), servent à mesurer les distances. La vue, capable d'apprécier des intervalles 2 000 fois plus petits que ceux qui marquent la limite des aptitudes du toucher, procure avec une grande délicatesse les idées de forme, de grandeur, de mouvement, etc. Douée d'aptitudes généralisatrices et propre à percevoir des ensembles, elle est le sens de la perspective et le meilleur juge de l'ordre dans l'étendue. Par elle s'accomplit en un instant, avec une incomparable précision, la synthèse d'une foule de données que, sans son secours, il serait presque impossible de raccorder. On sait combien les aveugles, réduits à palper en détail les choses, éprouvent de difficulté à concevoir en entier celles dont les dimensions excèdent beaucoup la mesure de la main. Pour eux, l'idée d'un grand animal, d'un arbre, d'un édifice, d'une ville, d'un paysage, est toujours pleine de lacunes et de confusion. Le clairvoyant, au contraire, embrasse du regard une quantité de choses et les coordonne sur-le-champ. Il possède une sorte de tact idéal qui, remédiant à l'insuffisance et aux lenteurs du toucher, va saisir à toute distance une multitude d'objets. En outre, la vue est le sens le plus actif, le plus impressionnable, celui dont les perceptions se gravent le plus profondément dans la mémoire. Aucun autre ne procure à l'activité de l'esprit autant d'éléments de connaissance.

Toutefois, cette supériorité de la vision est compensée par quelques désavantages. Si la vue embrasse plus que le toucher, elle étreint moins sûrement. La main circonscrit les objets de peu de volume et les perçoit en même temps de tous les côtés. L'œil n'en voit qu'un aspect partiel, moins de la moitié. Dans les ensembles, ce sens constate les choses en gros, d'une façon très sommaire et bien des détails lui échappent. La pensée doit alors se contenter d'un léger croquis, d'un « aperçu ». L'esprit supplée par habitude ou par

hypothèse à ce qui manque, mais non sans péril pour la vérité. C'est pourquoi la vue, qui prête à l'illusion et aux méprises, inspire l'imagination autant qu'elle instruit la raison. Ses « images », vagues et de contour indécis, à cause de l'impossibilité pour l'attention de percevoir nettement beaucoup de choses à la fois, sont incertaines et faciles à modifier.

Malgré ces défauts que l'expérience corrige en partie, grâce au contrôle des autres sens, la vue, qui fournit les notions les plus nombreuses, les plus variées et, par conséquent, les plus susceptibles de comparaison, a mérité de prendre, comme moyen d'information, une prépondérance dont témoigne le langage. Son nom est devenu le nom même des « idées » (*ιδέα*, image, de *εἶδεν*, voir). Le terme de « phénomène » qui signifie « apparence visible » (*φαινόμενον* de *φαίνεσθαι*, briller, apparaître), atteste encore que les mutations des choses sont le plus souvent constatées par cette voie. Les mots « voir, » dans le sens de comprendre, « montrer », « démontrer », « spéculer », etc., se rattachent également au sens intellectuel par excellence. Enfin les expressions d' « évidence » (*e videre*) et d' « intuition » (*intueri*) confirment l'importance générale des impressions de la vue. Si la nature nous avait faits aveugles, notre esprit aurait perdu la meilleure part de ses « clartés ».

Moins bornés que les sens internes, les sens externes perçoivent ainsi l'existence sous ses aspects les plus divers et les plus complexes. Tandis que les premiers, réfléchissant leurs impressions sur eux-mêmes, ont des tendances qu'on pourrait appeler centripètes et convergent vers le foyer de la sensibilité, les seconds, ouverts sur le dehors, sont plutôt centrifuges, discriminatifs, appréciateurs de différences. Grâce à eux, le non-moi, assemblage immense de choses, se révèle peu à peu sous ses attributs variés. Nous apprenons à distinguer et à reconnaître une foule d'objets et de qualités. Le tableau du monde extérieur

se dessine trait par trait dans l'intelligence et la sensation, continuellement active, y fait figurer tout ce qu'elle a pu toucher, goûter, sentir, entendre et voir.

#### CONCLUSION

Tel est le mode de formation de nos idées les plus simples. La perception, réduite d'abord à la conscience de nous-même, agrandit par degrés le cercle de ses constatations ontologiques. Au sens intime, qui certifie l'existence du moi et signale les états généraux de la sensibilité, s'ajoutent d'abord les sensations organiques, puis les sensations thermiques et musculaires, au moyen desquelles le moi discerne ses manières d'être avec une précision croissante. Les sens externes viennent ensuite joindre leurs indications à celle des sens internes. Ceux qui s'exercent au contact renseignent sur la nature et la condition des corps voisins que le besoin a un intérêt direct à connaître. Enfin les sens à longue portée, prenant possession de l'étendue, perçoivent les choses par groupes et, moins asservis aux nécessités de l'organisme, fournissent à l'intelligence ses plus précieuses données. L'ouïe s'exerce dans une sphère encore circonscrite; la vue étend presque à l'infini ses explorations. La connaissance des êtres, partant du moi comme centre, rayonne et se répand progressivement dans le monde. Les sens qui atteignent le plus loin et embrassent le plus d'objets suggèrent le plus d'idées.

A travers les stades de cette information continue, le moi se pose lui-même et constate ses attributs; ensuite, il reconnaît les attributs du non-moi et affirme des réalités extérieures. Il sait alors qu'il existe et que des choses sans nombre existent autour de lui. La totalité des existences perçues compose un ensemble plein de diversité, mais aussi de confusion. La mise en ordre de ces éléments de connaissance va constituer la tâche de l'Ontologie spéciale.

## II. — ONTOLOGIE SPÉCIALE

### SCIENCE DES IDÉES SUBJECTIVES

#### THÉORIE DES IDÉES SUBJECTIVES

La perception nous livre, sous forme d'idées objectives, la notion d'êtres et d'attributs déterminés; mais là s'arrêtent ses aptitudes, et, si utiles que soient de telles données, elles constituent moins une science que les matériaux d'une science. Limitées dans l'étendue, transitoires dans la durée et sans coordination, elles n'offrent aucun des caractères qu'exigerait une connaissance méthodique des choses, la généralité, la permanence et l'unité.

La sensation, dont le pouvoir se borne à constater les réalités en détail, ne sort pas du particulier et du concret. Elle les révèle, il est vrai, avec une évidence parfaite; mais, quel que soit le nombre des impressions subies et quoique l'activité des sens l'augmente sans cesse, ce que la perception nous apprend de la totalité des êtres se réduit à bien peu de chose quand on le compare à ce qu'elle en laisse ignorer.

En outre, ces notions, non moins bornées dans le temps que dans l'espace, ne franchissent guère les limites du présent. Le passé leur échappe vite et l'avenir se dérobe entièrement à leur prise. La perception, actuelle de sa nature, exige la présence des choses et cesse avec elle. Pour peu même que l'impression se prolonge, elle s'affaiblit par degrés et n'est bientôt plus sentie. La mémoire ne conserve d'elle qu'une trace qui s'atténue insensiblement et finit par se perdre tout à fait. Les idées objectives sont en

général fugaces. La plupart de celles que chaque jour voit se produire disparaissent en peu de jours. Quelques-unes à peine, dues aux plus intellectuels des sens, persistent à l'état de souvenirs et surnagent sur un océan d'oubli. A moins de provenir de sensations très vives ou fréquemment répétées, elles s'oblitérent et s'évanouissent dans un temps très court.

Enfin la perception, qui recueille ces données selon les occasions et les rencontres, les accumule en désordre et, réduite à les établir une à une, n'a pas le pouvoir de les classer. Il en résulte que, si les particularités sont claires, l'ensemble reste ténébreux et confus. Pour constituer une science avec les éléments que la sensation fait entrer pêle-mêle dans notre esprit, il fallait les coordonner, c'est-à-dire les répartir par séries.

Les idées objectives devaient donc subir une élaboration spéciale afin d'acquérir les qualités qui leur manquaient, l'étendue, la permanence et l'ordre. Un débrouillement si nécessaire est opéré par la « conception ». Ce terme, opposé par le langage à celui de « perception », indique, non plus une simple prise de possession des idées sous l'influence des objets qui leur correspondent et qui semblent s'« imprimer » en nous (impression), mais une sorte de « génération » d'idées qui naissent des précédentes. L'esprit, passif dans la production des idées objectives, devient actif dans celle des idées subjectives. Il compare, assimile, distingue, trie et classe. Par cela même, il met dans la connaissance quelque chose de lui, le lien qui n'existait pas, le fil qui, de perles éparses, fait un collier.

Le principe de toute coordination consiste à réunir les semblables et à séparer les dissemblables. Pour connaître un ensemble de choses, il faut les distribuer en groupes constitués de telle sorte que chacune d'elles soit éloignée de celles dont elle diffère et rapprochée de celles qui lui ressemblent. On aurait du tout une vue très nette si l'on

pouvait déterminer exactement ce que ses parties ont de divers et ce qu'elles ont de commun. Le monde de nos concepts tourne ainsi entre les deux pôles de la distinction et de l'assimilation.

La compréhension d'un ordre quelconque se fonde d'abord sur le principe de distinction. Comme la confusion résulte de la diversité des choses, il importe de les disposer par séries en tenant compte de leurs principales disparités. Le discernement ou sens de la discrimination est la faculté maîtresse de l'intelligence. L'activité de l'esprit s'exerce surtout sur des différences et la loi des contraires régit le système entier de nos conceptions. « *Distinguo* est, dit Montaigne, le plus universel membre de la Logique. » Nous opposons le froid et le chaud, le fort et le faible, le grand et le petit, la lumière et les ténèbres, le plaisir et la peine, le bien et le mal, le beau et le laid, le vrai et le faux, le vice et la vertu, la vie et la mort, etc. Mais, dans ces cadres sommaires, il y aurait à marquer bien des degrés et leur détail n'a pas de fin.

En face du principe de distinction se pose le principe d'identité. Ce ne serait point assez de séparer les choses par la considération de leurs qualités contraires, car, si elles différaient en tout ou si l'on ne savait d'elles que leurs différences, l'esprit manquerait de lien pour les unir. On doit donc aussi constater leurs similitudes. Ce que les réalités ont de commun autorise à les réunir dans un même groupe. Mais, ici encore, plusieurs cas seraient à spécifier. La ressemblance parfaite, portant sur tous les points et ne laissant saisir de différence d'aucune sorte, s'appelle « identité » (de *idem*, le même). La simple ressemblance admet des traits de disparité sur un fond de similitude. Enfin l'analogie se réduit à quelques traits de similitude sur un fond de disparité.

Considérant à la fois les choses sous ce double aspect, l'esprit, maître de les opposer par leurs différences et de les unir par leurs ressemblances, les répartit de manière

qu'elles se ressemblent dans un même groupe et diffèrent d'un groupe à l'autre. Dès lors, la connaissance ne se borne plus à constater les réalités une à une ; elle les range par séries d'après leurs degrés de ressemblance et de disparité. La science des choses se trouve par cela même agrandie et simplifiée. N'étant plus arrêtée par les bornes si étroites de la perception, elle conçoit des ensembles et donne aux impressions réunies la persistance qui manquait aux impressions isolées. En outre, à la confusion originelle elle fait succéder un classement régulier. Par suite de cette transformation, les idées sont, non plus « présentatives », mais « représentatives ». Au lieu de viser des réalités particulières ou des attributs concrets, elles se réfèrent à des collections d'êtres ou d'attributs. Ces manières de concevoir les choses sont propres au « sujet » et c'est pourquoi nous appelons « subjectives » les notions qu'elles constituent.

La métamorphose des percepts en concepts n'est pourtant pas encore l'œuvre de la réflexion. Elle s'opère spontanément, sans que nous en ayons conscience, par l'effet des traces inégales que les impressions des choses laissent dans la mémoire. Hume a montré comment les données de la sensation doivent, à mesure qu'elles se produisent, se confondre par leurs ressemblances et se distinguer par leurs différences. Prenons le cas le plus simple, celui où les perceptions se répètent dans des conditions à peu près pareilles, comme il arrive à l'égard des choses avec lesquelles nous avons de fréquents rapports : les impressions, presque identiques, se superposent en se succédant, s'additionnent dans une même idée et se gravent en traits d'autant plus profonds qu'elles ont été plus souvent renouvelées. Considérons maintenant le cas plus complexe où la perception s'exerce sur des objets en partie semblables et en partie différents : une disjonction s'effectuera dans leurs caractères, parce la mémoire ne gardera pas de tous un souvenir également net. Ce qu'ils offrent de pareil la

frappera par un effet d'impressions répétées et sera mieux retenu; ce qu'ils ont de divers, ne correspondant qu'à des impressions isolées, sera plus vite oublié. L'intelligence conservera donc de la similitude des choses une empreinte durable et laissera perdre le souvenir de leurs disparités. Le triage des données de la perception se fera naturellement, par une sorte de sélection, la prédominance appartenant à celles qui se reproduisent le plus grand nombre de fois. Du fonds mouvant des idées objectives se dégageront peu à peu des idées d'une autre nature, résumant ce que les premières offrent de commun, élimination faite de ce qu'elles ont de particulier.

Cette théorie de la formation des idées subjectives a trouvé récemment une sorte de vérification expérimentale dans l'ingénieuse invention des « portraits composites » dus à M. Galton (portraits génériques de Huxley) : lorsqu'on superpose dans une même épreuve photographique des séries de portraits de même grandeur et pris à peu près dans le même sens, les particularités individuelles s'effacent, les traits généraux se dessinent, et l'on voit apparaître par degrés un type idéal où se résument les caractères dominants de la famille, de la nation ou de la race. C'est l'image exacte du travail accompli par la conception.

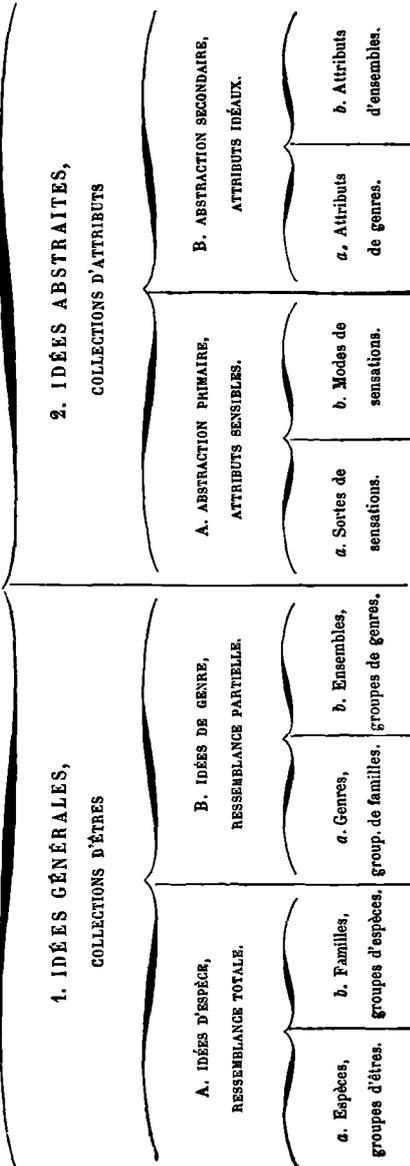
Par suite de cette élaboration d'idées, les éléments de connaissance se groupent et se coordonnent. La perception les livrait séparément et les accumulait en désordre; la conception les distribue par séries et les classe. Ces deux sortes de notions diffèrent profondément. Chacune des données de la sensation, considérée à part, est fixe, car elle a pour cause une impression ressentie par le sujet, impression qui, prise à sa date, constitue un fait déterminé dont les conditions ne varient pas. L'idée objective porte donc en elle un principe d'immutabilité et le seul changement qu'elle admette tient à son oblitération graduelle dans la mémoire. Les produits de la conception

sont au contraire variables, parce qu'ils dépendent d'impressions diverses et successives dont le total n'est jamais arrêté. L'idée subjective, ravivée ou modifiée par chaque sensation nouvelle de même ordre, change selon le degré d'information et devient toujours plus compréhensive ou plus nette. L'idée particulière de tel homme que nous avons pu connaître à une époque de notre vie, persiste sans changement, aussi longtemps qu'elle n'est pas oubliée. C'est une médaille qui s'use et devient fruste sans que l'empreinte se dénature. Mais l'idée générale d'homme, qui résume toutes les impressions produites sur nous par nos semblables, se modifie suivant l'âge, le milieu et les circonstances. Par suite de perceptions qui se renouvellent sans cesse et sont rarement identiques, la raison remanie continuellement ses concepts. Néanmoins l'idée trouve sa fixité dans ce qu'elle a de constant, et sa permanence, assurée par le fond de similitude des choses, contraste avec la fugacité de la plupart des idées objectives. La mémoire semble conserver sous une forme ce qui disparaît sous l'autre. Les données de la perception, d'une durée généralement si courte et qui s'effacent à mesure qu'elles se succèdent, comme les vagues de la mer, ne se perdent point entièrement. On les croit à tort évanouies quand le souvenir n'en garde plus de trace appréciable : la conception les recueille et les perpétue après les avoir transformées en idées subjectives.

Nous appelons « Ontologie spéciale », par opposition à l'« Ontologie élémentaire », la partie de la science qui traite de la genèse des concepts. Elle spéculé sur les mêmes faits d'existence, mais les montre sous un autre jour. Comme nous avons distingué deux modes de perception qui constatent, l'un, les réalités particulières, l'autre, leurs attributs concrets, nous devons distinguer deux modes de conception qui leur correspondent et produisent, d'une part, les idées générales, de l'autre, les idées abstraites.

ONTOLOGIE SPÉCIALE

SCIENCE DES IDÉES SUBJECTIVES



L. BOURDEAU.

1. — 7

## 1. IDÉES GÉNÉRALES. COLLECTIONS D'ÊTRES

Les idées générales se forment par la réunion en groupes définis des idées particulières. Prenant les êtres en entier, sans les défaire, elles les assimilent par séries. A mesure que la perception signale l'existence de réalités pareilles, la conception les rapproche et tend à les identifier. L'esprit, inattentif aux différences qui distinguent les choses dans le détail et qui, moins apparentes ou moins souvent perçues, laissent des vestiges moins accusés, s'attache aux ressemblances qui le frappent davantage et les condense dans un type. L'idée générale représente ainsi les similitudes d'une collection d'objets. Elle remplace une foule de notions relatives à des êtres de même nature par la notion d'un être idéal qui résume en lui tout la série. Cette opération simplifie la connaissance, puisqu'elle ramène la multiplicité des percepts à l'unité de concept et place l'esprit sur une hauteur d'où il embrasse d'un seul regard toutes les choses qui se ressemblent. Il les voit alors, non plus dispersées et confuses, mais réunies et coordonnées. Au lieu d'individus sans nombre, il conçoit un nombre limité de types. L'idée générale a donc une nature mixte : elle ne correspond pas à une réalité effective, comme le croyaient les « réalistes »<sup>1</sup> ; mais elle n'est pas davantage une forme vide de la pensée, comme le soutenaient les « nominalistes ». Elle est à la fois réelle, en ce qu'elle se réfère à des existences positives, et nominale, en ce que le lien qui les unit est une conception de l'entendement. La longue querelle du Nominalisme et du Réalisme aboutit, en effet, à la théorie du « Conceptualisme » proposée par Abélard.

1. « J'entends toujours parler de l'homme ; je n'ai jamais rencontré que des hommes. » (J. de Maistre). Ou encore : « la nature, quelle est cette femme ? » (Id.)

L'ancienne philosophie distinguait seulement avec Aristote deux sortes d'idées générales, celle d'« espèce » et celle de « genre », sans attribuer une signification précise à ces termes dont la valeur, toute relative, exprimait une simple différence en plus ou en moins. Le même groupe était qualifié d'espèce ou de genre suivant qu'on l'opposait à des groupes plus étendus ou plus restreints. Ces divisions flottantes sont une cause de confusion. Il y aurait avantage à donner un sens fixe aux mots d'espèce et de genre, sauf à subdiviser ces groupes quand cela sera nécessaire. On établirait ainsi un plan général de classification où pourraient rentrer toutes les séries de réalités. Lorsque, en effet, on considère l'ensemble des groupes institués par la généralisation, on voit qu'il est possible de le répartir en deux sections principales, l'une, où les ressemblances des choses l'emportent sur leurs différences; l'autre, où les différences l'emportent sur les ressemblances. Dans le premier cas, la pensée spéculé sur les similitudes totales et constitue des groupes restreints représentés par l'idée d'espèce; dans le second, elle tient compte de similitudes partielles et forme des groupes étendus auxquels correspond l'idée de genre.

A. — Idées d'espèce ou de ressemblance totale.

Les idées générales les plus aisées à concevoir et, conséquemment, les premières acquises, groupent les choses qui offrent dans leur ensemble plus de ressemblances que de différences. L'esprit avait donc plus de raisons pour les unir que pour les séparer. Nous appelons « espèces » les groupes ainsi composés. Il y aurait lieu de subdiviser l'espèce suivant que les différences éliminées pour l'établir sont peu appréciables ou déjà sensibles. L'espèce proprement dite comprendrait alors les êtres unis par la plus grande somme de ressemblances. Des espèces voisines

formeraient un groupe supérieur sous le nom de famille.

*a.* — La détermination scientifique de l'espèce est un problème difficile que les naturalistes n'ont pas encore pleinement résolu ; mais nous prenons ici le mot d'espèce dans son acception générale, comme terme servant à désigner une série de choses quelconques qui se ressemblent extrêmement. Entre certains êtres, la similitude est telle parfois qu'on aurait peine à reconnaître un individu parmi ses pareils. La généralisation était, en ce cas, presque forcée, surtout lorsque ces êtres, comme il arrive souvent, se trouvaient réunis en nombre. La vue d'une foule d'hommes, d'une troupe d'animaux, d'une forêt d'arbres, d'un monceau de pierres, rendait presque inévitable une notion à la fois particulière pour chaque objet pris à part et collective pour leur assemblage. Cette manière de concevoir les choses a fait établir tous les groupes élémentaires désignés par des noms communs. Malgré sa simplicité, l'idée d'espèce n'est point irréductible et se décompose en idées de groupes partiels.

Dans l'espèce humaine, par exemple, le langage a, dès l'origine, dénommé le groupe « homme », le groupe « femme », et, dans chacun d'eux, le groupe « enfant », le groupe « adulte », le groupe « vieillard », puis des groupes ethniques et des races. Les espèces d'animaux et de plantes furent de même réparties quand elles présentaient des différences appréciables. Un système analogue pouvait être appliqué à toutes sortes d'objets. Dans une espèce de monnaie, comme la pièce de cinq francs en argent, on distingue les pièces françaises, italiennes, belges, et, dans chaque série, les pièces marquées à telle effigie, datées de tel millésime. Dans l'édition d'un livre, les exemplaires, presque identiques, pourront différer par la qualité du papier, la netteté de l'impression, la reliure, etc.

La réunion de ces groupes très peu dissemblables constitue l'espèce au sens propre du mot. Ainsi, l'idée

d'homme s'obtient en supprimant entre tous les êtres humains dont la perception a constaté séparément l'existence, les disparités accessoires de sexe, d'âge, de conformation, de couleur ou de nationalité, pour ne retenir que les traits communs, l'identité de type, de nature et d'aptitudes. Les diverses pièces de cinq francs, quelle que soit leur empreinte ou leur provenance, forment un groupe spécial en raison de l'identité de matière, de titre, de dimensions, de poids et de valeur. Divers ouvrages de même format (in-folio, in-4°, in-8°, in-16...), composent en librairie une même espèce, malgré les différences qui peuvent tenir au choix des caractères, au nombre des lignes, à la largeur des marges, etc. On doit, d'une manière générale, considérer comme espèce toute collection de choses dont la conception exprime dans un type déterminé la plus grande ressemblance et la moindre extension.

b. — Comme on obtient l'idée d'espèce par la réunion des êtres qui se ressemblent le plus, on arrive à l'idée de famille par celle des espèces que relie une étroite similitude.

Les naturalistes, rapprochant de l'espèce humaine les espèces de grands singes dits « anthropoïdes », qui offrent avec elle de frappantes analogies de structure, en forment un seul groupe zoologique <sup>1</sup> et, bien avant eux, les populations de l'ancien monde, guidées par l'instinct logique, avaient appelé d'un même nom ces représentants du même type là où ils se trouvaient voisins <sup>2</sup>. Avec les diverses espèces de bœufs, on a constitué la famille des bœufs ou bovidés; avec les diverses espèces de chênes, la famille des

1. Linné a réuni sous la qualification commune d' « Homo » : l'homme, (H. sapiens), l'orang-outang (H. satyrus), le chimpanzé (H. troglodytes), et le gibbon (H. lar.).

2. En malais, « orang-outang » signifie « homme des bois » (de orang, homme et outang, forêt). Les indigènes de la presqu'île de Malacca prennent eux-mêmes ce nom, sans être arrêtés par la crainte de provoquer des confusions.

chènes. A côté des pièces de cinq francs viennent se ranger d'autres pièces de semblable nature qui diffèrent des précédentes en grandeur et en valeur, mais composent avec elles une famille monétaire, la monnaie d'argent. De même, la réunion des ouvrages imprimés de divers formats, constitue le livre, etc.

Parfois il fut nécessaire de grouper des familles, quand elles offraient encore de notables ressemblances, dans des séries supérieures que nous appellerons tribus. Ainsi l'homme et les anthropoïdes rentrent dans la nombreuse tribu des singes. Leurs différentes espèces ont entre elles de tels rapports que, pour connaître la structure du corps humain, les anatomistes, auxquels les préjugés religieux interdisaient l'étude des cadavres, se sont contentés longtemps de disséquer des singes, et Galien a composé un traité d'anatomie sans pouvoir recourir à d'autres moyens d'information. La famille des bœufs fait partie du groupe des ruminants. Diverses familles d'arbres résineux (pins, sapins, cyprès, cèdres, etc.) sont réunies dans la tribu des conifères. Si l'on rapproche la monnaie d'argent, la monnaie d'or, la monnaie de cuivre, ... la parité de nature métallique et de fonction autorise à ne plus voir en elles qu'un seul groupe désigné par l'expression générale de monnaie. Enfin, le livre, la brochure, le journal, l'affiche... sont également compris sous le titre d'imprimés.

La conception des idées générales les plus simples s'est effectuée durant une phase initiale de la civilisation. Les enfants arrivent de bonne heure à la connaissance des groupes d'espèce, comme on le voit par la facilité avec laquelle, dès qu'ils essaient de parler, ils convertissent les noms propres en noms communs. Les premiers mots dont ils font usage pour désigner les êtres qui les entourent, perdent vite leur sens particulier et sont appliqués par eux à tous les êtres pareils. Il en est de même des peuples sauvages et l'on ne connaît pas de langue où les termes spéci-

fiques fassent défaut. Toutefois, comme la distinction des espèces implique déjà des différences appréciables, il y avait à surmonter, pour concevoir l'idée de famille, une difficulté qui n'arrêtait pas pour celle d'espèce et qui a retenu au plus bas degré de la généralisation certains peuples incapables d'un tel effort. Ainsi, les Choctaws de l'Amérique du Nord ont des mots spéciaux pour désigner le « chêne blanc », le « chêne noir », le « chêne rouge »... ; mais ils n'en ont pas pour indiquer simplement « un chêne ». Ils sont, sur ce point, réduits à l'idée d'espèce dans ce qu'elle a de moins étendu.

B. — Idées de genre ou de ressemblance partielle.

L'utilité de la généralisation serait bien restreinte si son rôle se bornait à déterminer des groupes d'espèce en se référant aux ressemblances totales, car la plupart des choses n'ont entre elles que des ressemblances partielles. Il importait cependant de noter aussi les moindres éléments de similitude et jusqu'aux analogies les plus lointaines, afin de pouvoir établir entre toutes sortes d'objets un lien de série. L'œuvre essentielle de la « généralisation » consiste à constituer des « genres ». La conception de ces nouveaux groupes ouvre à la pensée les plus larges perspectives, parce qu'elle lui permet de spéculer sur des collections croissantes de choses et lui donne le moyen de tout classer. Mais la tâche devenait d'autant plus malaisée qu'on embrassait dans l'unité d'un même concept une plus grande diversité d'êtres. Dans la généralisation primaire, les ressemblances étaient manifestes, puisqu'elles portaient sur la plupart des points, et les différences peu sensibles, puisqu'elles ne portaient que sur quelques-uns. Dans la généralisation secondaire, au rebours, les différences étaient nombreuses et très apparentes, les ressemblances rares et mal accusées. Il fallait donc discerner des similitudes de moins en moins

visibles parmi des disparités de plus en plus frappantes, ce qui exigeait un notable progrès d'attention et de sagacité. Nous distinguerons également dans la généralisation supérieure deux degrés, l'un où la formation des groupes est motivée par la considération d'un certain nombre d'éléments de ressemblance, l'autre où il n'est plus tenu compte que de quelques-uns ou même d'un seul. Le premier correspond aux idées de genre proprement dit, le second aux idées d'ensemble.

*a.* — Après avoir institué les espèces en supprimant les particularités individuelles et les familles en supprimant les diversités spécifiques, on fut conduit par le développement de la généralisation à éliminer les différences des familles et à les réunir en groupes plus vastes représentés par les « genres ».

Reprenons les exemples qui nous ont déjà servi : la famille des singes, celle des ruminants, celle des carnassiers, et plusieurs autres que relie des traits communs de similitude, forment un groupe général sous le nom de « mammifères ». Les diverses familles de végétaux à tige ligneuse sont collectivement désignées sous le nom d'« arbres », tandis que le langage confond sous celui d'herbes une multitude de plantes basses et de peu de durée. Les économistes assimilent à la monnaie de métal, qui a une valeur intrinsèque, la monnaie de papier, qui n'a qu'une valeur de crédit. Les imprimés figurent avec les manuscrits dans la classe des documents écrits, etc.

Élevons-nous encore d'un degré. La généralisation, se référant à des caractères de moins en moins spéciaux et, par cela même, de plus en plus étendus, groupe des séries très diverses par la considération de minimes ressemblances. Les mammifères, les oiseaux, les reptiles et les poissons se ramènent au type unique des vertébrés. Toutes les plantes herbacées ou arborescentes qui portent des fleurs et se reproduisent par des semences ont reçu le nom

de « phanérogames ». Les différentes sortes de monnaies usitées chez les peuples civilisés rentrent, avec les objets divers qui en tiennent lieu chez les peuples barbares ou même sauvages, dans la série des signes représentatifs de la valeur. Les documents, soit imprimés, soit manuscrits, font, comme les inscriptions gravées, partie des textes historiques....

*b.* — Les idées les plus générales constituent des collections de genres en tenant compte d'éléments toujours plus atténués de ressemblance.

Les vertébrés, par exemple, unis aux articulés, aux mollusques et aux zoophytes, composent le groupe des « animaux ». Les plantes phanérogames et les plantes cryptogames sont comprises dans celui des « végétaux ». Les signes représentatifs de la valeur figurent avec tous les objets d'échange parmi les « choses utiles » ou éléments de richesse. Les textes quelconques, les traditions orales, les données de l'archéologie et de la mythologie sont des documents, matériaux de l'histoire...

Enfin, ces collections de genres prennent à leur tour place dans des ensembles qui, atteignant bien vite le terme des généralisations possibles, finissent par embrasser la totalité des êtres. Ainsi les animaux et les végétaux composent le groupe des « organismes » ou « corps vivants ». Les corps vivants et les corps bruts se trouvent réunis dans la classe générale des « corps ». Les choses utiles se confondent avec les choses inutiles et les choses nuisibles sous la qualification indéterminée de « choses ». L'idée d'« être », la plus générale qui se puisse concevoir, comprend toutes les réalités connaissables.

L'esprit humain a lentement gravi les degrés qui mènent à ce faite. S'il a conçu de bonne heure les idées d'espèce, il n'est parvenu que très tard à exprimer celles de genre. Les langues des peuples sauvages, qui parfois abondent en termes propres à désigner les groupes res-

treints de choses, en manquent presque toujours pour indiquer les plus étendus. Les Australiens en sont un exemple : ils savent très bien dénommer les différentes sortes d'arbres, de poissons et d'oiseaux qu'ils ont intérêt à connaître et à rappeler; mais ils ne peuvent pas traduire les idées génériques d'arbre, de poisson ou d'oiseau (Lubbock, *Origines de la civilisation*). La conception du type des mammifères n'est pas ancienne. La distinction des phanérogames et des cryptogames date de Linné. L'analogie de structure qui permet de grouper les « vertébrés » avait échappé à ce grand naturaliste et a été mise en lumière par Lamarck. L'idée d'« animal » dépasse la puissance de compréhension de la plupart des sauvages. Les Grecs eux-mêmes ont été longtemps incapables de la formuler et le terme de ζῷον, inconnu chez eux durant l'âge homérique, ne devint en usage que vers l'époque de Platon (Curtius, *Manuel d'étymologie grecque*). A mesure en effet que l'esprit généralisait davantage, il devenait plus difficile de découvrir le trait indistinct de ressemblance entre des choses presque de tous points dissemblables. Pour établir, sous le nom de « moteur », l'assimilation de tout ce qui développe de la force, que ce soit un homme de peine, un animal auxiliaire, le vent, un cours d'eau, le balancement des marées, un poids qui tombe, un ressort qui se détend, une vapeur élastique, une poudre explosive, un courant d'électricité, l'attraction d'un aimant..., il fallait beaucoup de réflexion et de clairvoyance. Il en fallait plus encore pour constituer des ensembles avec une multitude d'objets dont l'unique lien était un caractère peu apparent perdu parmi des disparités sans nombre. L'idée d'être qui contient tout était pour cette cause une des plus difficiles à dégager et n'a pas encore trouvé d'expression dans certaines langues relativement cultivées.

Ainsi la généralisation coordonne le confus amas des

idées particulières. L'esprit, qui s'égarerait si vite dans le pêle-mêle des notions de réalité que la perception accumule sans relâche, distribue les êtres par groupes en tenant compte à la fois de leurs ressemblances pour les unir et de leurs différences pour les séparer. Les avantages de ce mode de classement et le besoin d'y recourir ont fait multiplier les groupes en vue d'établir dans la généralité autant de degrés qu'on en discernait dans la ressemblance. La détermination de ces séries hiérarchiques représente ainsi une sorte de classification, non pas raisonnée et précise comme celles de la science, mais intuitive et sommaire, dont les cadres sont indiqués par les termes généraux des langues. Une répartition de ce genre suffisait pour qu'on pût raisonner des choses à la lumière de l'évidence. La pensée, libre alors de gravir et de descendre à son gré la suite de ces groupements sans être exposée à se perdre parmi tant de disparités, va des groupes les plus circonscrits, composés d'êtres presque en tout pareils, aux groupes les plus étendus, qui rapprochent les êtres les plus dissemblables, et voit toujours clairement ce qu'à chaque degré la généralisation élimine de différences ou retient de similitudes.

2. IDÉES ABSTRAITES. COLLECTIONS D'ATTRIBUTS

Une élaboration analogue, mais plus subtile, transforme les idées concrètes en idées abstraites. La conception, s'exerçant sur les attributs des choses au lieu de s'exercer sur les choses mêmes, les dispose également par séries en raison de leurs ressemblances et de leurs dissemblances. La généralisation groupe les êtres en blocs sans spécifier en détail leurs attributs, si grande qu'en soit parfois la diversité. L'abstraction opère cette analyse instructive, sépare les caractères et montre pourquoi, dans le travail qui précède, les réalités sont tour à tour opposées et réunies. L'abstrac-

tion (de *abs trahere*, tirer hors) détache les qualités des choses et les coordonne. D'une collection de propriétés qui se ressemblent, elle fait une propriété unique. La métamorphose du concret en abstrait s'effectue sous les mêmes lois que celles du particulier en général. Elle résulte de ce que l'attention, se portant de préférence sur les aspects les plus apparents des êtres, retient le mieux ceux dont l'impression est le plus souvent répétée. La perception successive d'un même attribut en divers objets grave son souvenir en traits plus profonds que celui des attributs différents et tend par suite à se constituer en idée distincte.

L'abstraction se rapproche donc beaucoup de la généralisation et fait subir à une autre classe de données une élaboration analogue. Mais, comme elle pénètre plus avant dans la complexité des choses, sa tâche est plus vaste et moins aisée. Les attributs des êtres sont, en effet, bien plus nombreux que les êtres mêmes, puisque chacun de ceux-ci en possède des séries. En outre, leur analyse se prête aux modes de distribution les plus divers et l'esprit a toute latitude pour les dissocier, les unir ou les opposer à son gré, car si les êtres, pris dans leur intégrité, restent ce qu'ils sont dans les divers groupes où la généralisation les appelle à figurer, les attributs, une fois séparés par la pensée des réalités qui les supportent, lui appartiennent et se répartissent comme il lui plaît. Enfin, tandis que la carrière parcourue par la généralisation est limitée, celle de l'abstraction ne l'est pas. Le premier mode de conception, se bornant à réunir les êtres dans des cadres de plus en plus vastes, réduit progressivement le nombre de ses séries et la multitude des espèces confondues dans les genres se résume vite dans des ensembles dont l'unité finale contient la totalité des êtres. Le second suit une marche inverse et trouve à déterminer dans les séries, à mesure qu'elles deviennent plus générales, des quantités croissantes d'attributs. L'abstraction, qui a le plus de distinctions à opérer, marque

donc un degré supérieur dans la connaissance et ouvre à la spéculation des horizons indéfinis.

Mais abstraire était une opération difficile. Il fallait s'éloigner davantage de la condition naturelle des choses. L'idée générale laisse les êtres intacts et les unit sans les défaire dans un même groupe ou dans des groupes hiérarchiques en raison de leur parité supposée. L'idée abstraite, au contraire, les décompose, disjoints leurs attributs et conçoit chacune à part ces qualités qui, détachées des êtres, semblent ne plus tenir à rien. Là surgissait un obstacle que l'esprit humain a été longtemps hors d'état de surmonter. Si simple que nous paraisse maintenant l'acte par lequel la pensée convertit une qualité en sujet ou un adjectif en substantif, le fait de considérer l'attribut abstrait comme subsistant par lui-même exigeait un effort dont la raison n'est devenue capable qu'assez tard et qui pourrait le mieux servir à caractériser une phase de son développement. Les enfants conçoivent les idées générales bien avant les idées abstraites et les langues des sauvages, peuples enfants, sont toujours très pauvres en termes abstraits, alors que souvent leur vocabulaire est riche en expressions générales, au moins du premier degré. On cite même des populations qui n'ont pas encore réussi à franchir le seuil de l'abstraction. Tels seraient les Australiens, les Fuégiens, les Coroados du Brésil, etc. (Lubbock, *Origines de la civilisation*, p. 427).

Il importe de distinguer, parallèlement aux deux sortes de concepts généraux, deux sortes de concepts abstraits, relatives l'une aux attributs sensibles des espèces, l'autre, aux attributs idéaux des genres.

A. — Abstraction primaire, collections d'attributs sensibles.

Les idées abstraites les plus simples dérivent des données immédiates de la perception. Comme les notions

d'espèce auxquelles il convient de les rattacher, elles se forment sous l'impression des réalités concrètes et groupent leurs propriétés les plus apparentes. Dans le principe, l'esprit ne sépare pas l'idée d'attribut de celle d'objet déterminé. Chaque qualité perçue se rattache à un être et se confond avec lui. Mais la pensée ne tarde pas à s'apercevoir qu'une même chose possède divers attributs et que le même attribut se rencontre en diverses choses. Elle est alors amenée à considérer ces données, à les comparer et à les classer. Éliminant les aspects dissemblables des êtres, elle retient leurs aspects semblables et conçoit à part chacun d'eux comme doué d'une existence réelle. L'abstrait provient ainsi du concret et le représente, mais en omettant la connotation qui, à l'origine, liait l'attribut au sujet. « Blanc » a dû signifier d'abord « telle chose blanche » ; ensuite, la même qualification fut appliquée à une série de choses caractérisées par un attribut pareil ou peu différent ; enfin, il suffit d'écarter les diversités de ces choses qui, en raison de leur nombre, entraînaient la disparition des choses mêmes, pour rester en présence de la seule qualité qui leur fût commune et qui, n'appartenant plus à aucune en particulier, devint attribut de série, c'est-à-dire constitua l'idée abstraite de « blancheur ». Les mots abstraits sont pris de la sorte pour désigner elliptiquement la propriété semblable de divers groupes de choses. Ce sont des termes abrégatifs très utiles en ce qu'ils évitent des circonlocutions embarrassantes ou des énumérations sans fin<sup>1</sup>. — Il y aurait à distinguer deux degrés parmi les abstractions élémentaires, suivant qu'elles se rapportent directement à des attributs sensibles ou qu'elles se réfèrent à des modes de sensation.

*a.* — Le travail de l'abstraction débute par réunir dans

1. Les Tasmaniens, dépourvus de termes abstraits pour qualifier les choses, disaient : au lieu de « dur », « comme la pierre » ; au lieu de « rond », « comme la lune » ; au lieu de « haut », « avec des jambes », etc.

un même groupe les attributs sensibles des choses tels que la perception les livre, en tenant compte de leurs ressemblances les plus manifestes. L'analyse pourrait encore séparer les idées qui abstraient des sensations tout à fait particulières et celles qui abstraient des séries limitées de sensations de même ordre.

Le toucher, par exemple, discerne aisément les impressions que produisent sur lui une peau, une étoffe, une surface polie ou rugueuse, une brosse, une râpe, un corps gras, etc., et, pour peu qu'il ait été fréquemment en contact avec une de ces sortes d'objets, il suggérera l'idée abstraite de sa propriété caractéristique. Le goût démêlera de même les diverses saveurs douces du lait, du miel, du sucre, des fruits, etc. Dans une couleur donnée, la vue percevra une foule de nuances distinctes, propres à certains corps.

Après ces qualités spéciales, immédiatement perçues dans les choses, la pensée abstrait des attributs de série. Le toucher résume alors dans l'idée de « dureté » les impressions produites par les corps fermes ; le goût confond dans celle de « douceur » toutes les saveurs sucrées ; le nom de « blancheur » s'applique à une multitude de nuances claires, etc. Au terme de cette première élaboration, les sortes de sensations éprouvées par chaque sens se trouvent ainsi indiquées par groupes en raison de leur ressemblance.

*b.* — L'abstraction, s'exerçant ensuite sur ces groupes d'impressions élémentaires, en compose des classes qui rappellent les manières de sentir. Des sensations tactiles très diverses concourent à déterminer la notion de solidité ou de résistance ; les sensations du goût se répartissent en agréables et désagréables ; celles de l'odorat en suaves et fétides ; les sons en graves et aigus ; les couleurs en sombres et claires. — Un nouvel effort conduit l'esprit à réunir dans l'idée de « toucher » toutes les impressions tactiles ; dans celle de « goût » les gustatives ; dans celle « d'odeur » les olfactives ; dans celle de « son »

les auditives; enfin dans celle de « couleur » les visuelles.

Gravissons un degré de plus : au-dessus des classes de sensations et par leur rapprochement, l'abstraction arrive à constituer des ensembles. Le toucher, le goût, l'odorat, l'ouïe et la vue, composant un même groupe, viennent se confondre dans l'idée de « sensation externe », distincte du groupe auquel se réfère l'idée de « sensation interne ». Il suffit ensuite d'éliminer la différence qui les sépare pour s'élever à l'idée très abstraite de « sensation » ou de « perception » qui comprend tous les modes d'impression de la sensibilité.

Grâce à cette première analyse, l'esprit met en ordre les données de la sensation et se rend compte des attributs des choses qui leur correspondent. Les propriétés qui caractérisent les êtres se classent dans l'esprit en raison du degré de similitude des impressions qu'elles produisent.

#### B. Abstraction secondaire, collections d'attributs idéaux.

Durant une phase ultérieure, la conception, opérant sur ses propres données, abstrait les attributs de série qui ne tombent pas sous la prise des sens et constituent des caractères idéaux. À mesure, en effet, que la généralisation étendait ses cadres, l'abstraction avait à déterminer des qualités de moins en moins appréciables. Les traits qui servent à distinguer les espèces sont pris parmi les plus apparents et se rapportent à des différences de taille, de forme, de couleur, etc., sur lesquelles la sensation renseigne tout d'abord; mais ceux qui distinguent les genres sont vagues et difficiles à marquer avec précision. Les diverses espèces d'animaux, de plantes, de monnaies, etc., sont séparées par des disparités frappantes; l'attribut caractéristique de l'animal, de la plante, de la monnaie en général, échappe au

contraire à la perception et n'est plus appréciable que pour la pensée. Les notions de cet ordre sont à diviser en deux groupes d'après le degré d'extension qu'elles comportent.

*a.* — L'abstraction secondaire eut d'abord à spécifier les attributs soit des genres, soit des classes de réalités.

Ainsi, le caractère générique des ruminants fut la « rumination » ; celui des reptiles, la « reptation » ; celui des mammifères, la « lactation »... L'idée d'aliments conduisit de même à celle de « nutrition » ; l'idée de monnaie à celle de « valeur » ; etc.

L'établissement des séries les plus générales entraîna des abstractions plus idéales encore. Quand on eut réuni dans un même groupe tous les animaux, l'idée « d'animalité », c'est-à-dire la propriété de sentir et de se mouvoir, dut se faire jour. La « végétation » devint l'attribut des plantes ; la « vie » celui des êtres vivants ; « l'utilité », celui des choses propres à satisfaire nos besoins ; etc.

*b.* — L'esprit, une fois engagé dans cette voie de l'abstraction transcendante, en vint à concevoir les relations les plus générales des choses. L'idée de leur multiplicité trouva son expression dans le « nombre » ; celle de leur impénétrabilité dans « l'étendue » ; puis les deux se réunirent pour constituer le concept de « grandeur ». Les termes de « principe », de « rapport », de « force », de « espace », de « temps », de « cause », etc., marquent un très haut degré d'abstraction.

Enfin, la raison, spéculant sur ses propres attributs, abstrait les idées de « beauté », de « bonté », de « vérité », de « vertu », de « sagesse », de « justice », etc. L'idée d'« existence », la plus abstraite qui se puisse concevoir, exprime l'attribut de réalité commun à tous les êtres.

Ces gains de l'abstraction idéale ont été tardifs. Plus on remonte haut dans l'histoire des langues, moins elles abon-

dent en termes abstraits. Les Australiens n'ont pas de mots pour rendre les idées de vice, de vertu, de justice, de douceur, de cruauté, etc. La langue Algonquine, une des plus riches de l'Amérique du Nord, en manque pour indiquer le fait « d'aimer » (Lubbock, *Origines de la civilisation*, p. 425). Beaucoup de peuples, même parvenus à un certain degré de culture littéraire, seraient impuissants à formuler des séries de notions abstraites, et c'est là un obstacle à leur accession au progrès. Nous voyons les Japonais, épris de la civilisation européenne et désireux de s'instruire dans nos sciences, être obligés d'apprendre d'abord une de nos langues pour pouvoir s'assimiler nos idées. Faute de termes abstraits, il ne leur serait pas possible de traduire dans leur idiome les plus élémentaires de nos traités. Le développement de cette classe de concepts fut surtout l'œuvre de la recherche philosophique et scientifique; mais il s'est accompli avec une prodigieuse lenteur, comme le prouve l'origine, relativement récente, de quelques-uns des termes maintenant les plus usités. Les Grecs, ces initiateurs de la philosophie morale, n'avaient pas de mot pour exprimer l'idée de « conscience ». Le terme d'« humanité » a été créé par les Romains (Cicéron, *Tusculanes*, V, 37), et sa nouveauté, qui contraste avec l'immémoriale antiquité du mot « homme », commun à toutes les langues, montre assez combien il était plus difficile d'abstraire que de généraliser. Mentionnons enfin le terme de « civilisation », dont l'acquisition ne date guère de plus d'un siècle. Il ne figure pas dans l'*Histoire universelle* de Bossuet. Turgot, un des premiers, l'a mis en usage. L'Académie française, après l'avoir longtemps exclu de son Dictionnaire, à titre de néologisme dangereux, ne l'a reçu, par condescendance, qu'à partir de 1831. Heureusement, la chose pouvait se passer du mot et faire sans lui son chemin.

Ainsi les idées abstraites se sont, comme les idées géné-

rales, formées par une sorte d'évolution logique. L'abstraction, mettant au service de l'intelligence un pouvoir indéfini d'analyse, donne toute facilité pour classer les attributs soit sensibles, soit idéaux, des choses et qualifier par eux d'abord les espèces, puis les genres, en tenant compte, à chaque degré, des similitudes qui unissent les groupes et des différences qui les distinguent. Ce travail accompli, la pensée discerne clairement les qualités propres aux diverses séries d'êtres. L'acquisition des données de cette nature, continuée sans relâche durant toute une phase de civilisation supérieure, pourrait le mieux servir d'indice à la haute culture de l'esprit.

CONCLUSION

Tel a été le développement des idées subjectives. La conception, reprenant pour les mettre en ordre les données de la perception, les répartit en groupes qui se superposent hiérarchiquement. Elle sépare et réunit tour à tour les notions relatives, d'une part aux êtres, de l'autre aux attributs, et procure la claire compréhension d'un ensemble que la sensation livrait dans un état d'inextricable confusion.

L'esprit humain se caractérise par la faculté de généraliser et d'abstraire. Les animaux supérieurs, doués des mêmes sens que nous, ont, comme nous, une vive intelligence des réalités particulières et de leurs attributs concrets. Tous possèdent, relativement aux objets qui les ont impressionnés, des idées non moins exactes que les nôtres; mais ils se trouvent arrêtés à ce degré inférieur de la connaissance, l'intuition du détail, et aucun d'eux ne serait capable d'opérer l'analyse ou la synthèse des données de la perception. Si, du moins, on ne veut pas leur refuser ce pouvoir d'une manière absolue, il faut convenir que, chez

eux, il est extrêmement limité. Ils n'ont d'idées subjectives qu'à l'état naissant et, faute d'aptitude à les exprimer par le langage, ils ne peuvent ni les fixer, ni les étendre. Leurs notions ne sont pas susceptibles de devenir science, car il n'y a de science véritable que dans la conception d'un ordre universel et constant<sup>1</sup>. Ils connaissent seulement des réalités déterminées, des qualités concrètes, des faits locaux et transitoires. Le monde des notions générales et abstraites reste inaccessible pour eux. La capacité de transformer les idées objectives en idées subjectives est le privilège de la raison et le principe de sa supériorité. Nous lui devons l'inappréciable avantage de concevoir des séries là où les animaux ne peuvent que percevoir des singularités. Dès lors, nos spéculations, n'étant plus emprisonnées dans l'étroite sphère de la sensation, se répandent sans obstacle et prennent possession de la totalité des choses, quoique la perception n'en puisse atteindre qu'un petit nombre. Maîtres de grouper les notions acquises, nous parvenons à tout comprendre, malgré notre impuissance à tout sentir.

Les idées subjectives ne se bornent pas, en effet, à coordonner les idées objectives; elles les dépassent beaucoup en virtualité de développements. Les sensations durent peu; leur vivacité s'émousse vite et le souvenir n'en garde qu'une trace éphémère. Aussi les animaux et les enfants, tout entiers à l'impression actuelle, vivent-ils surtout dans le présent, oublieux du passé et insoucians de l'avenir. Les conceptions, au contraire, résumant des séries de perceptions antérieures, persistent et durent parce qu'elles sont ravivées par chaque perception nouvelle de même ordre. Par suite, leur netteté gagne sans cesse et leur extension est indéfinie. L'idée générale ou abstraite, ouverte et non plus fermée comme l'idée particulière ou concrète,

1. « Non est scientia nisi universalium; singularium non est scientia. » (V. Bacon; et Aristote, *Logique*, analytique, ch. XI.)

comprend dans un cadre idéal la totalité des choses semblables dans quelque lieu, en quelque temps qu'elles aient été, doivent être ou puissent être. Elle a le pouvoir d'accroissement d'une progression sans terme. Un homme, réduit aux données de la sensation, ne pourrait jamais connaître qu'un bien petit nombre d'êtres humains. Non seulement la plus grande partie de l'humanité vivante, mais encore toute l'humanité passée, toute l'humanité future sont en dehors des possibilités de la perception. Quand, au contraire, l'esprit a conçu l'idée générale d'homme ou l'idée abstraite d'humanité, il ne se contente pas d'y faire entrer tous les individus qu'il a pu effectivement connaître; en raison de la ressemblance présumée, il y rattache l'idée d'hommes quelconques, sans restriction d'époques ou de régions. Le concept embrasse donc, outre le réel connu, tout le possible ignoré qui est incomparablement le plus vaste. Aussi est-ce dans le champ de la subjectivité que la pensée étend le plus loin ses conquêtes. La meilleure part de nos connaissances consiste en idées générales ou abstraites.

Toutefois, cette latitude dont la conception dispose est pour elle une cause de faiblesse et de faillibilité. Les idées subjectives, moins sûres que les idées objectives, perdent en précision ce qu'elles gagnent en étendue. Le concept ne résulte plus d'un rapport immédiat entre l'objet perçu et le sujet connaissant; il se forme par additions successives d'impressions en partie conservées, en partie perdues par la mémoire, et admet par avance une part prédominante d'inconnu. L'idée, toujours inachevée, comporte des adjonctions éventuelles, des retouches fréquentes, des métamorphoses sans fin. Tout dépend des acquisitions préalables et du point de vue où l'esprit se trouve placé quand il groupe les choses ou leurs attributs. La connaissance est donc relative et propre à un état déterminé d'information. Les impressions que divers hommes éprouvent en présence des mêmes objets ne diffèrent guère dans le

plus grand nombre des cas, tandis que leurs conceptions des mêmes classes d'objets sont variables, parfois opposées, c'est-à-dire incomplètes et plus ou moins défectueuses. Sans doute, chacune d'elles, prise à part, résume très exactement la série des réalités perçues et, pour l'esprit qui en effectue la synthèse, elle est d'une justesse parfaite; mais elle n'est juste que pour lui. Le total qu'elle exprime peut être arrêté dans les conditions les plus inégales et sa valeur change avec celle des éléments qu'on y fait entrer. L'idée subjective est en outre plus ou moins vague par suite de la disparité que présentent les choses qui ont servi à la constituer. La conception assimile en effet des données qui, au lieu d'être identiques, sont simplement analogues. La perception, par exemple, distingue aisément, à l'état concret, une multitude de nuances claires qui représentent des blancs spéciaux (blanc de lait, de chaux, de marbre, de linge, de papier, etc.); mais lorsque ces diverses sortes de blancs se trouvent confondues dans l'idée abstraite de blancheur, la suppression des différences qui en caractérisaient les éléments laisse la notion indéterminée et moins nette. Le concept de couleur, qui groupe tous les modes d'impression visuelle, est plus indécis encore et se réfère seulement au fait de la sensation optique, sans rappeler à l'esprit ni une couleur séparée, ni toutes les couleurs réunies. Le terme de sensation, qui exprime collectivement les manifestations si diverses de la sensibilité sans en spécifier aucune, est peu explicite de soi. L'idée de vie se dérobe à toutes les formules des physiologistes. Enfin le concept d'existence, à force de généralité, reste indéfinissable pour la pensée.

La connaissance subjective, facile à étendre, mais pleine de lacunes et sans précision, n'est donc qu'une interprétation de la nature, une approximation de la vérité. Alors que les données de la perception sont adéquates et portent avec elles leur évidence, les produits de la conception n'ont qu'une exactitude relative et admettent une part d'er-

reur. Les idées soit générales, soit abstraites, ont pour condition d'être contingentes, toujours en métamorphose et souvent en contradiction. Nous verrons plus loin comment la raison peut, sinon supprimer entièrement, du moins atténuer et circonscrire ces graves inconvénients.

## II

### ONTOLOGIE SYNTHÉTIQUE

#### SCIENCE DES CORRÉLATIONS D'IDÉES

L'Ontologie analytique fait connaître comment se forment nos idées, élémentaires ou spéciales ; toutefois, le détail des choses que la perception constate et que la conception classe ne représente qu'une moitié de la science. Après avoir étudié séparément ces deux sortes de notions, nous devons scruter la manière dont l'esprit les combine et les concilie. Tel est l'objet de l'Ontologie synthétique.

Les corrélations des idées sont à examiner sous deux aspects inégalement complexes suivant qu'elles se produisent dans un même esprit ou dans des groupes d'esprits. Les premières associent d'après certaines lois les idées que le sujet trouve au dedans de lui-même et qui, en raison de leur provenance commune, arrivent sans trop de peine à la concordance logique ; les secondes établissent des échanges d'idées entre esprits différents qui se jugent et se contrôlent les uns les autres sous la loi de l'évidence et du sens commun. Nous diviserons conséquemment cette étude en deux sections dont l'une, l'Ontologie comparée ou Logique, cherche les conditions d'accord des idées dans chaque esprit, et l'autre, l'Ontologie générale, détermine les conditions d'accord dans l'ensemble des esprits.

## I. — ONTOLOGIE COMPARÉE OU LOGIQUE

### SCIENCE DE L'ASSOCIATION DES IDÉES

#### THÉORIE DE L'ASSOCIATION DES IDÉES

Les idées, qu'elles soient particulières ou concrètes, générales ou abstraites, ne restent point isolées dans l'esprit qui les a perçues ou conçues, car, s'il en était ainsi, nous n'aurions que des fragments de connaissance. Liées par des connexions naturelles, elles tendent à s'unir et à constituer un tout logique. L'Ontologie comparée, qui scrute ces rapports, spéculé ainsi sur les données de l'Ontologie élémentaire et de l'Ontologie spéciale; au lieu de les considérer chacune à part, elle les rapproche et les associe. Sa généralité n'est pas moindre que celle des sections précédentes, parce que chaque notion tient à une foule d'autres et motive des jugements. Le champ à explorer est même beaucoup plus étendu, l'esprit ayant le pouvoir de nouer avec un nombre limité d'idées un nombre infini de rapports.

Les relations dont nous abordons l'étude ne doivent pas être confondues avec celles que la conception établit quand elle classe les données de la perception. L'esprit se contente alors de grouper les choses en raison de leur ressemblance et de les séparer en raison de leurs différences, sans chercher autrement à se rendre compte de ces notions dans leurs rapports respectifs. Il ne sait donc que très imparfaitement les choses. Pour en acquérir l'entière connaissance, il faut ensuite les comparer dans toutes les conditions possibles de similitude et de disparité. C'est

là l'œuvre essentielle de l'esprit que Montesquieu fait justement consister à reconnaître la ressemblance des choses diverses et la différence des choses semblables. La science est tenue d'examiner les idées sous ce double aspect.

L'association occupe une place importante dans la théorie des idées, depuis que Hobbes, Locke et Hume en ont opéré l'analyse. Elle rattache les attributs aux êtres, subordonne les séries et fait concorder les notions. Ce travail se résout en affirmations ou négations de coexistence, en assertions de convenance ou de disconvenance de propriétés, en déclarations d'accord ou de contradiction entre les concepts. La loi qui dirige la raison dans l'appréciation de ces rapports est aux idées ce que la gravitation est aux masses, un principe de coordination et d'unité.

On appelle « induction » (de *in ducere*, conduire dans) l'opération par laquelle l'esprit compare les idées, les oppose ou les concilie. Elle introduit la connaissance dans la complexité de leurs rapports. Le langage philosophique limite d'ordinaire le sens du mot induction à l'expression des inférences que le raisonnement formule en propositions; mais il faudrait, croyons-nous, lui assigner une acception moins restreinte et désigner ainsi les corrélations quelconques des idées, alors même qu'elles restent à l'état de notions *inexprimées*. L'induction détermine les connexions élémentaires des données de la perception comme les associations plus complexes de celles de la conception. Elle relie, suivant des lois qu'il importe de connaître, toutes les idées qui se forment dans un même esprit. Comme il n'y a pas de réalités sans attributs, ni d'attributs sans réalités, ni de ressemblances ou de différences totales entre les séries, elle trouve partout des attributions à faire, des assimilations ou des distinctions à établir, des degrés à marquer. Elle s'élève du particulier au général, du concret à l'abstrait, descend ensuite du général au particulier, de l'abstrait au concret, et dispose en forme de chaîne une multitude d'anneaux. L'esprit met plus de

# ONTOLOGIE COMPARÉE

## SCIENCE DE L'ASSOCIATION DES IDÉES

### ONTOLOGIE COMPARÉE.

<p>a. Association des données du sens intime.</p>	<p>b. Association des données des sens internes.</p>	<p>a. Association des données des sens de besoin.</p>	<p>b. Association des données des sens d'information.</p>	<p>a. Association des idées d'espèce.</p>	<p>b. Association des idées de genre.</p>	<p>a. Association des idées d'attributs sensibles.</p>	<p>b. Association des idées d'attributs idéaux.</p>
<p>A. ASSOCIATION DES ÉLÉMENTS DU MOI.</p>		<p>B. ASSOCIATION DES ÉLÉMENTS DU NON-MOI.</p>		<p>A. ASSOCIATION DES IDÉES GÉNÉRALES.</p>		<p>B. ASSOCIATION DES IDÉES ABSTRAITES.</p>	
<p>1. ASSOCIATION DES IDÉES OBJECTIVES</p>				<p>2. ASSOCIATION DES IDÉES SUBJECTIVES</p>			

### ASSOCIATION DES IDÉES OBJECTIVES ET DES IDÉES SUBJECTIVES. LOGIQUE GÉNÉRALE

lui-même dans ce travail et, au lieu de subir passivement des impressions ou de les classer spontanément, il les combine avec réflexion. Des corrélations de ce genre unissent les idées objectives, les idées subjectives et leur ensemble.

#### 1. ASSOCIATION DES IDÉES OBJECTIVES

Les données de la perception proviennent de divers sens dont chacun se confine dans sa spécialité. Leurs impressions ne nous livrent donc que des aspects partiels des choses et, si elles restaient isolées, il y aurait en nous autant d'êtres que de sensations ou de mondes que d'objets. Ces notions avaient par conséquent besoin d'adhérer et de s'unir. L'induction primordiale qui les associe accomplit une œuvre de logique inconsciente et la réflexion, loin d'y prendre part, a peine à s'en expliquer le résultat. Étudions d'abord l'association des idées relatives au moi, puis celle des idées relatives au non-moi, enfin leur accord.

##### A. — Association des éléments de l'idée du moi.

L'idée du moi, qui nous paraît simple, se compose d'éléments divers, intimement associés, dont les rapports sont à examiner au point de vue des données du sens intime et de celles des sens internes.

*a.* — L'affirmation du moi par le sens intime, irréductible pour la conscience, est la synthèse d'une multitude de sensations indistinctes, transmises de toutes les parties de l'organisme à un même centre et simultanément perçues par lui. Comme elles se succèdent sans intermittence pendant la vie, elles empiètent les unes sur les autres

et ne laissent jamais la conscience inoccupée ou vide. L'idée permanente du moi absolu résume dans une impression unique une infinité d'impressions imperceptibles et l'unité de ce tout est si parfaite qu'on la tient pour indivisible. Néanmoins les degrés de conscience qui correspondent aux états d'attention, de rêverie, de rêve, de sommeil profond et de défaillance, prouvent la complexité de l'idée du moi. Ils composent une échelle de lucidité que nous gravissons et descendons tour à tour sans avoir, quand nous passons d'une condition à l'autre, conscience de plusieurs êtres, et l'intégrité du moi n'est pas compromise un seul instant, quoique la netteté de la perception varie sans cesse.

Les deux états généraux de la sensibilité, le plaisir et la peine, simples manières d'être du même moi, sont logiquement inséparables, malgré leur antagonisme apparent, et liés par des lois d'alternance ou de solidarité. Tantôt ils s'opposent et se neutralisent, tantôt ils s'ajoutent et se renforcent. La privation et l'effort, qui sont pénibles, préparent la jouissance, qui est agréable. Le besoin est l'appétition du plaisir, le plaisir la satisfaction du besoin, et qui poursuit des plaisirs sans peine n'a guère que des peines sans plaisir. Lucrèce a dit, en vers immortels, l'indissoluble union de la douleur et de la volupté :

« Medio de fonte leporum

Surgit amari aliquid quod in ipsis floribus angat. » (L., v. 1130.)

Les affections de la sensibilité se rattachent si directement au sens intime qu'elles se confondent avec lui. L'association du moi absolu et du moi relatif échappe à l'analyse, tant elle est naturelle et nécessaire. Il faut voir en elle moins le résultat d'une induction que le fondement même de l'induction.

*b.* — Les données des sens internes s'associent également en vertu de corrélations spontanées.

Certaines sensations, locales en apparence, comme la faim et la soif, mais subordonnées à un état général de l'organisme, représentent la synthèse d'une infinité de sensations imperceptibles qui ont leur siège dans les éléments des tissus. Les impressions organiques influent les unes sur les autres par des rapports analogues à ceux qui unissent les organes eux-mêmes ou leurs fonctions. Elles se répercutent, s'éveillent, se troublent, s'atténuent ou s'exaspèrent, soit par contraste, soit de concert.

Des connexions de même ordre relient les sensations thermiques ou musculaires. Les premières se propagent de proche en proche et les secondes associent presque toujours des séries de muscles dans un même mouvement. Elles subissent en outre la loi de réactions mutuelles. D'une part, en effet, l'activité musculaire dépend des conditions de température : le froid tonifie, la chaleur déprime; de l'autre, l'exercice modifie l'état thermique du corps : l'activité réchauffe, l'immobilité refroidit. L'influence du système nerveux s'étend sur tout et de sa condition résulte l'énergie ou la faiblesse de l'organisme.

Enfin les sensations des organes propres à la vie végétative et celles de l'appareil qui pourvoit à la vie de relation sont en rapport constant. Les besoins organiques sentis suscitent l'activité nervoso-musculaire, et celle-ci, en s'exerçant, satisfait d'abord, puis ravive les besoins. Le mécanisme de la sensibilité interne établit un enchaînement d'influences et le moi des états de conscience apprend à se connaître comme un tout consonnant dont les parties se tiennent et dont les fonctions concordent.

La relation qui, à l'idée permanente du moi, due au sens intime, unit l'idée de ses modes transitoires, due aux sensations internes, est encore si directe que le rôle de l'induction se borne à constater dans la dépendance du moi un prolongement de sa personnalité. Néanmoins on voit poindre ici, entre les éléments qui la constituent un principe de différence. Alors que, pour la conscience, le

moi, identique et un, est indivis et absolu, il reconnaît en lui, par les impressions de l'organisme, des distinctions de parties, des localisations d'organes, des états variables et relatifs. Le sentiment de l'unité du moi persiste à travers ces manières d'être, par suite même de leur connexion; mais, à la conscience d'une unité simple se joint celle d'une unité composée et la notion de la fixité de l'être se concilie avec celle de la mutabilité de ses conditions. Dès lors, ces deux idées, contradictoires en apparence, coexistent dans notre esprit et ne se séparent plus. Percevoir des états de conscience, c'est établir, par la plus élémentaire des inductions, l'identité du moi qui change et du moi qui ne change pas, inférence inévitable, puisque les deux sont perçus à la fois dans le même centre. L'accord s'effectue spontanément entre ces données et l'idée du moi se complète par une extension de la connaissance qui va du tout à ses parties et de l'ensemble au détail. C'est toujours la même conscience, mais d'abord sommaire, puis analysée. Le moi, combinant ces deux sortes d'indications, se connaît alors comme une réalité en même temps simple et complexe, absolue dans son essence et contingente dans ses modes, identique et muable, diverse et une.

B. — Association des éléments du non-moi.

Les données des sens externes ont aussi leurs corrélations. Il est rare qu'une sensation spéciale se produise isolément sans rien emprunter ou sans rien fournir aux autres. L'induction associe ces éléments dont l'accord s'établit par expérience et par habitude, en dehors de la réflexion.

Notons d'abord la concordance par l'effet de laquelle, lorsqu'un même sens s'exerce par plusieurs organes, leurs impressions multiples donnent lieu à une perception unique. Ainsi, les cinq doigts de la main, en contact avec

un corps, ne signalent pas cinq objets différents, mais un seul objet; le même son entendu par les deux oreilles, le même objet vu par les deux yeux, paraissent également simples. Toutefois, la pluralité des impressions redevient distincte quand on modifie les conditions ordinaires de leur production, comme lorsqu'on saisit un objet entre les extrémités surperposées de deux doigts, ou qu'on se bouche une oreille, ou qu'on dévie légèrement un des yeux de l'axe normal.

Les relations entre sens divers entraînent des inférences beaucoup plus étendues qui seraient à examiner dans les deux classes que nous avons distinguées.

*a.* — Les impressions du toucher, sens diffus et répandu sur toute la périphérie de l'organisme, ont pour caractère d'être locales et indépendantes. Elles ne se confondent que lorsqu'elles sont très rapprochées. Les Weber ont reconnu à la surface de la peau des « cercles de sensation » dont chacun a son filet nerveux, mais qui empiètent les uns sur les autres comme les cercles de rayonnement des phares. Chaque excitation produite sur un point détermine alentour des pressions corrélatives d'où résultent des « ondes accessoires » ou impressions auxiliaires qui s'ajoutent aux impressions directes. Le principe de coordination des données tactiles gît dans la continuité de l'organe qui, partout sensible, localise ses sensations en les rapportant à telle ou telle partie. Le toucher actif doit sa supériorité à ce que, enveloppant les objets, il confond plusieurs impressions simultanées dans une impression unique et procure ainsi, outre l'idée de résistance, celle de forme. — Le tact général et le tact spécial sont si étroitement unis que, d'ordinaire, on ne les sépare pas. Ils ne diffèrent en effet qu'en degré de délicatesse et s'entraident à tout moment. Le premier, grâce à son extension, nous avertit de tous les contacts; le second, plus explicite, vient à l'occasion compléter ces informations trop sommaires. Dès qu'un

corps mal déterminé ou incommode nous touche, la main se porte aussitôt vers lui pour le reconnaître et l'écartier au besoin.

Associés par une fonction commune de réfection le goût et l'odorat concourent aux mêmes satisfactions organiques, se prêtent mutuellement assistance et confondent en partie leurs impressions, complémentaires les unes des autres. La plupart des substances sapides deviennent insipides lorsque la muqueuse nasale n'est pas excitée par leurs émanations, et un homme assez enrhumé pour ne pas sentir les odeurs se repaît sans trop savoir ce qu'il mange. En général, les animaux sont dirigés par l'odorat dans la recherche, le choix ou la vérification de leurs aliments, et l'on voit les carnivores être aussi sensibles aux odeurs animales qu'ils le sont peu aux odeurs végétales, tandis que le contraire a lieu pour les herbivores. Une corrélation du goût et de l'odorat est même plus directement établie par l'organe, dit « de Jacobson », qui, chez certains mammifères, met la bouche en rapport avec l'appareil olfactif et sert d'intermédiaire entre les deux sens.

Ces quatre sens de contact offrent de grandes analogies de structure et collaborent par leurs fonctions, également appetitives. Ils consistent tous en surfaces cutanées et semblent être un même sens qui, modifié par places, atteint divers degrés de délicatesse. Le toucher spécial résulte d'un perfectionnement du toucher général dont la sensibilité, par suite d'un exercice facultatif, s'est accrue et affinée dans certaines parties mises plus fréquemment en action. Le goût et l'odorat, qui confinent au toucher et, anatomiquement, le continuent, sont pour ainsi dire un toucher plus subtil, adapté à la perception de parcelles impalpables. L'exemple de la langue, à la fois organe de tact et de gustation, aide par ce cumul de fonctions à concevoir comment le sens du toucher a pu, grâce à une appropriation particulière, se transformer en sens de goût. Certaines sensations d'odeurs piquantes paraissent

même se réduire à des actions de contact, car l'ammoniac en vapeur produit sur la conjonctive un effet de picotement comparable à celui que ressentent les nerfs olfactifs. De même, les saveurs âcres, irritantes ou astringentes se rapprochent des sensations tactiles autant que des gustatives. Quand le toucher actif ne suffit pas à reconnaître la nature des corps, il les soumet au contrôle de l'odorat, et les deux impressions réunies deviennent d'autant plus explicites. La supériorité si remarquable d'intelligence dont fait preuve l'éléphant tient en partie à ce que, unissant dans le même organe deux sens d'ordinaire séparés, il a, comme on pourrait dire, « le nez dans la main ».

*b.* — Par suite de leur activité très circonscrite, les sens de contact ne comportent que des relations bornées. Lorsqu'ils éprouvent à la fois un certain nombre d'impressions, ils sont exposés à les confondre et, si elles se succèdent rapidement, la fatigue les empêche vite de les distinguer. Trop fréquemment exercé, le toucher s'endurcit, et les sens réfectifs, pour retrouver toute leur délicatesse, ont besoin d'un intervalle de repos. Les sens à longue portée, au contraire, embrassent des ensembles plus ou moins complexes et fonctionnent sans fatigue, avec continuité, durant la veille. Leur avantage comme instruments de connaissance est dû au grand nombre des données, simultanées ou successives, qu'ils fournissent à l'esprit et qui l'obligent à les associer, à comparer et à juger.

Les deux sortes d'ouïes que nous avons distinguées, l'une générale et réduite à la perception des bruits, l'autre spéciale et capable d'interpréter le sens idéal des sons, se lient par un rapport si étroit que leur disjonction peut paraître arbitraire. Cependant l'homme possède seul la seconde, alors qu'il partage la première avec une foule d'animaux. Leur développement est successif chez l'enfant et chez l'homme même. L'éducation, qui nous fait passer de

l'une à l'autre manière d'entendre, est vraiment, en ce cas, créatrice d'un sens nouveau.

Comme sens de la lumière, la vue est active chez les enfants presque dès la naissance; mais, comme sens de l'ordre, elle n'est capable de s'exercer que plus tard. Ces deux impressions se confondent alors à tel point, qu'un effort de réflexion est nécessaire pour les séparer.

L'ouïe et la vue, liées par une connexité de fonctions, sont éveillées l'une par l'autre et confirment ou contrôlent réciproquement leurs indications. Le moindre bruit fait tourner les yeux du côté d'où il semble provenir et la vue aide à découvrir la cause qui le produit.

Des relations moins directes, mais fort étendues et très importantes unissent les sens du contact et les sens à longue portée. Sous les lois d'une logique inconsciente, ils associent leurs données, se rectifient ou se complètent et, à l'occasion, se suppléent. Les animaux les mieux doués d'aptitudes olfactives tirent de la perception des odeurs une foule d'inférences. L'odorat remplace la vue chez la taupe et la prime chez le chien. Les rapports les plus étroits s'établissent entre le tact et la vue, c'est-à-dire entre le plus limité des sens, mais le plus précis, et le plus synthétique, mais le moins exact. La vue qui, dans la plupart des cas, préjuge l'extériorité des choses, leur forme, leur grandeur, leur distance, leur solidité, ... ne le fait qu'en se référant aux impressions habituelles du toucher. L'exemple des aveugles-nés qui, opérés de la cataracte congénitale, sont de prime-abord incapables de se rendre compte des figures et des situations, de discerner, par exemple, un cube d'une sphère ou de reconnaître à la vue les objets les plus familiers à leur main, prouve que les sensations optiques ne cadrent pas d'elles-mêmes avec les sensations tactiles et nécessitent une adaptation qui résulte d'expériences répétées. Comme la vue perçoit, dans un espace donné, beaucoup plus de choses que le

toucher n'en peut saisir, elle agrandit les objets en raison du nombre des impressions éprouvées et, pour les aveugles, les corps sont plus petits que pour les voyants. Lorsque les premiers recouvrent la vue, ils sont tout d'abord stupéfaits de la grandeur des choses.

Pris dans leur ensemble, les sens externes, forment un groupe où, sous la diversité des aptitudes, l'unité fonctionnelle apparaît. L'anatomie comparée, confirmant une conjecture de Démocrite, regarde les sens spéciaux comme dérivés, par voie de différenciation progressive, du toucher, sens primordial et diffus, à la fois de besoin et d'information. L'embryogénie établit également que les organes de la sensation externe et le système nerveux, dont ils sont une dépendance, procèdent par évolution du même feuillet germinatif, le feuillet externe ou « cutané ». Les facultés sensitives par lesquelles l'organisme est mis en relation avec le dehors, devaient, en effet, résider dans les parties périphériques. Dès que le corps s'arrête et se circonscrit sous une forme déterminée, le toucher marque sa limite et constitue l'aire générale où se développent ensuite les autres sens. Les commencements de spécialisation que subit par places le tact font comprendre comment, par une transformation plus profonde, il a pu donner naissance à des organes distincts de sensation.

Au point de vue de la genèse des idées, l'accord s'effectue entre les données des divers sens, parce que, produites en même temps ou se succédant à court intervalle, elles adhèrent de telle sorte que l'esprit ne peut plus percevoir l'une sans évoquer les autres. Ces impressions, incessamment répétées, tantôt se correspondent, tantôt se corrigent et, finalement, s'unifient. Au début, l'enfant n'a que des sensations isolées et indépendantes. Peu à peu, il apprend à les associer, les contrôle les unes par les autres et les fait concourir à des constatations communes, de manière à saisir simultanément dans les choses une multitude de rapports. L'idée que nous avons d'un objet pris en

son entier, avec la connotation intégrale de ses attributs, s'obtient par le rapprochement d'une série de notions dont chacune ne nous livre qu'un aspect partiel et comme un fragment de connaissance. Pour faire un tout avec ces matériaux incohérents, une construction idéale est nécessaire. L'induction groupe les divers indices de résistance, de poids, de saveur, d'odeur, de sonorité, de couleur et de forme que les sens lui fournissent séparément. Réunissant comme au foyer d'une lentille les rayons épars de la perception, elle rattache à une réalité particulière une foule d'attributs et, par suite de cette synthèse mentale, les qualités sensibles des choses s'unissent et forment corps.

Enfin, les sensations internes et les sensations externes qui, pour la pensée, semblent se référer à deux mondes ontologiques différents, sont liées par des corrélations sans nombre et trouvent dans la conscience leur unité.

Ces deux sortes d'impressions se suscitent mutuellement, s'influencent, s'éclairent l'une l'autre et se combinent en idées complexes. Il y a une connexion naturelle entre les sensations de besoin et les sensations externes provoquées par les objets propres à les satisfaire. Ainsi, le goût et l'odorat s'exercent sous la dépendance de l'appareil digestif et leurs impressions varient suivant les cas de faim, d'inappétence, de réplétion ou de nausée. La condition du système nerveux, le degré d'activité de la circulation, l'état de bien-être ou de malaise, influent sur le ton des sensations et déterminent en elles des troubles accidentels. Les sensations thermiques, en connexité habituelle avec les sensations tactiles, contribuent à nous renseigner sur la nature des corps. Le sens musculaire collabore avec tous les autres et les met en action. Presque toujours le toucher s'exerce concurremment avec lui, parce que la peau recouvre partout des muscles, et une partie considérable de ses aptitudes vient d'eux. Les mains, appuyées sur une table, ne

jugent pas aussi bien des poids que quand elles sont libres. L'œil doit au concours de muscles spéciaux le pouvoir de mesurer les grandeurs et les distances. Cet accord de divers sens est surtout remarquable quand il s'agit de fixer les situations que nous assignons aux choses. Dans le principe, l'esprit doit localiser les objets des sensations externes à la périphérie du corps, dans l'organe même qui les perçoit. Pour les aveugles opérés de la cataracte et sans doute aussi pour les nouveau-nés, ce que l'œil voit fait d'abord partie de la tête. Il faut plusieurs mois d'expériences comparatives et une éducation des sens pour que ses corps soient exactement rapportés à leurs distances. Il l'effectue alors dans le cerveau de l'enfant comme une transcription des données de la sensation et chaque sens fournit aux autres ses interprétations particulières. La corrélation des indices musculaires, tactiles, olfactifs, auditifs et visuels conduit ainsi peu à peu à situer les objets à la place où d'habitude se rencontre la cause de la sensation.

Un enchaînement d'actions et de réactions rend donc solidaires, dans le mécanisme organique, tous les modes de la sensibilité. La philosophie anatomique les fait dériver d'une propriété commune, car, si les sens externes se ramènent à des modifications du toucher, le toucher lui-même se lie au sens musculaire, dont il paraît n'être qu'une modification superficielle, et tous les deux se rattachent à la propriété élémentaire d'irritabilité qui caractérise tous les tissus vivants. Ainsi les sens internes et les sens externes auraient la même origine et leurs aptitudes variées résulteraient d'une fonction générale spécialisée par degrés en séries de plus en plus complexes d'effets.

Mais c'est assez d'indiquer ces relations dont le détail nous entraînerait trop loin. Nous devons insister de préférence sur les rapports d'ensemble qui, dans la connaissance des choses, unissent l'idée du moi et celle du non-moi.

La conscience du moi, centre des sensations de tout

ordre, est indispensable à la notion du non-moi. La première condition de connaissance est un sujet connaissant. Pour être perçues les impressions produites sur nos organes par les objets extérieurs devaient arriver jusqu'au sens intime, le modifier et se rattacher au moi sous forme d'états de conscience. La connaissance du non-moi se réduit ainsi à interpréter les manières d'être du moi. Confinés dans notre personnalité, sans aucun moyen d'en franchir les limites, nous n'avons pas d'accès direct dans les réalités étrangères et nous sommes obligés d'en concevoir une idée d'après les impressions qu'elles déterminent en nous. Hume a montré, par une pénétrante analyse, comment l'esprit, dupe du mirage des sens, transporte par erreur dans l'ordre réel les données tout internes de la perception et objective des phénomènes entièrement subjectifs. Le monde, pris en soi, ne ressemble nullement à celui que nous imaginons sur la foi d'apparences qui nous trompent. Depuis Kant, on sait qu'un abîme infranchissable sépare les « phénomènes » et les « noumènes », c'est-à-dire ce que les choses paraissent être et ce qu'elles sont d'une manière absolue. Nous vivons, à cet égard, dans une illusion constante, sans pouvoir même présumer à quoi correspondent réellement ce que nous appelons résistance, saveur, odeur, son, lumière et les effets si variés de forces dont, à tout moment, les manifestations nous déçoivent. Inconnaissable dans son essence, la nature est pour nous pleine de ténèbres, mystère éternel. Les notions que nous croyons posséder des choses, simples données représentatives, interprètent les réalités au lieu de les reproduire et, si la vérité apparaissait un seul instant à nos regards, toute notre science, laborieuse construction de l'entendement, s'évanouirait comme un vain prestige. Schopenhauer répète sans cesse que « la matière est un mensonge vrai » (*ἡ ἀληθινὸν ψεῦδος*). Il faut considérer le moi comme un miroir inégal où, selon la disposition des surfaces et le jeu des lumières, les objets se réfléchissent et se déforment.

Nous n'avons du monde extérieur que des images confuses et notre science n'est pas adéquate à la réalité.

Néanmoins, le scepticisme ne doit pas triompher d'un tel aveu, car, si la nature véritable des choses est inconnue (comme du reste notre nature propre), leur existence peut être affirmée avec certitude et cela suffit à l'Ontologie. Chaque impression des sens externes atteste aussi clairement que la conscience de nous-même une réalité formelle. Par conséquent, sans rien préjuger des attributs sur lesquels la perception ne nous ouvre qu'un jour douteux, nous pouvons du moins affirmer l'existence de quelque chose, et là se borne le postulat ontologique. La réalité des corps n'est pas moins sûre que notre réalité personnelle, puisqu'elle repose sur le même fondement et s'autorise comme elle du témoignage de la conscience, direct dans un cas, médiat dans l'autre. La certitude de l'existence du non-moi condamne donc l'idéalisme transcendant qui tient le monde pour une création de la pensée ; mais la réalité n'est pas ce que nous supposons, d'après les données de la sensation, et cela condamne le sensualisme. Notre science est à la fois réelle, puisqu'elle se réfère à des existences positives, et idéale, quant à la manière de les concevoir.

La connaissance du non-moi ajoute beaucoup de clarté à celle du moi. Tant que nous sommes réduits aux indications du sens intime ou même des sens internes, la notion de notre existence reste indéterminée, vague et confuse. La caractériser nous est impossible : les termes de comparaison font entièrement défaut. Mais, lorsque les sens externes nous ont révélé avec précision les attributs variés des réalités dont le non-moi se compose, nous pouvons définir le moi, le circonscrire, l'assimiler à d'autres êtres, le différencier par des traits qui lui sont propres et, conséquemment, le mieux connaître. Il y a dans le sens intime accroissement de lumière à mesure que le sujet, impressionné de plus de façons, a des états de conscience plus divers. Pour

comprendre quels secours la notion du moi emprunte à celle du non-moi, il suffit de comparer l'idée que nous avons de nous-même, suivant que nous examinons du dedans ou du dehors, par les sens internes ou par les sens externes. Ce sont comme deux êtres différents, reconnus pourtant identiques et confondus dans l'idée totale du moi, sorte d'unité composite qui, sous un de ses aspects, ressemble au non-moi par des attributs communs et, sous l'autre, s'en distingue en ce qu'il constitue le domaine réservé du sens intime. Nous ne pourrions donc pas, sans ébranler la croyance en notre réalité propre, mettre en doute la réalité des choses étrangères, puisque les mêmes sensations les attestent toutes deux, et la certitude parfaite que le sens intime nous donne de la première ne permet pas de tenir pour problématique l'existence de la seconde.

Plus nécessaire encore est la notion du moi pour déterminer celle du non-moi. Par une induction hardie, le sujet transporte dans chaque objet perçu l'idée qu'il a de lui-même et convertit les choses en réalités semblables à celle que le sens intime lui a révélée. La sensation ne fournit que des indications d'attributs interprétés à titre d'états de conscience. Mais les états dont la cause est hors de nous ne sont pas confondus longtemps avec ceux dont la cause est en nous. Le moi reconnaît bien vite que les impressions externes, variables et transitoires, diffèrent en un point essentiel des impressions internes, plus constantes, et que les objets signalés par elles, au lieu de faire partie de lui-même, tiennent seulement à lui par un lien précaire et de circonstance. L'opération par laquelle nous affirmons des êtres là où nous ne percevons que des attributs implique une transposition de l'idée du moi. Il est en effet rationnel de croire que quelque chose existe en dehors de nous, quand nous constatons au-delà de nos frontières, et à l'aide des mêmes sens, des attributs pareils à ceux qui nous appartiennent, car la notion de ces attributs person-

nels, liée à celle de notre existence, nous autorise à présu-  
mer que, hors de nous, chaque attribut analogue est l'in-  
dlice et la preuve d'une entité qui le soutient. Notre être  
sert de type à tous les êtres, simples modes détachés du  
moi, qui s'individualisent à sa ressemblance et, dès lors,  
s'opposent à lui, quoiqu'ils ne fassent que le reproduire  
sous un autre aspect.

Ce travail de la pensée, construisant tous les êtres sur  
le modèle du moi, a laissé des traces sans nombre dans le  
développement des idées et dans les formes du langage.  
L'homme conçoit tout à son image et prête même aux  
objets inanimés ses sentiments, ses mobiles, sa volonté.  
Il personnifie les réalités de tout ordre et admet en elles  
un principe d'activité pareil à celui dont il a conscience.  
Cette propension est surtout manifeste chez les enfants.  
On les voit animer les corps bruts, leur parler, attendre  
ou simuler leurs réponses, les flatter, les craindre, s'ir-  
riter contre eux, les caresser en vue de leur plaire et les  
battre lorsque, par accident, ils croient avoir à s'en plain-  
dre. Les sauvages et les esprits peu cultivés ne diffèrent  
guère des enfants à cet égard. Toujours prêts à transformer  
en êtres les puissances de la nature, ils supposent vivants  
les objets de leur frayeur ou de leurs adorations. Pour  
eux, le vent sera le souffle d'un dieu ; le soleil, la roue d'un  
char céleste ; le croissant de la lune, l'arc d'une chasseresse.  
En cet état d'esprit, on regarde comme animé tout ce qui  
se meut, la flamme qui darde ses langues ardentes<sup>1</sup>, la  
source qui jaillit et murmure, le fleuve qui coule, l'océan  
qui s'agite sans repos<sup>2</sup>. La philologie témoigne de cette  
disposition mentale. Le genre des mots, auquel se ratta-  
che une idée de sexe et conséquemment de vie, montre  
combien l'illusion anthropomorphique a été générale et

1. On sait la formule des anciens Guèbres chargés d'« alimenter » le  
feu sacré : *πῦρ δεσπότα εσσι*, « tiens, seigneur feu, mange! »

2. Dans Hérodote, Xerxès fait battre de verges et marquer d'un fer  
rouge l'Hellespont, coupable d'avoir détruit son pont de bateaux.

persistante. Dans les langues primitives, il n'y a que deux genres : tout est masculin ou féminin. La distinction du neutre a été tardive et se trouve loin d'être aussi étendue qu'elle le devrait. De même, le sens actif des verbes s'est appliqué à une multitude de choses érigées en agents volontaires, comme lorsque nous disons qu'une flèche « vole », qu'un essieu « crie », qu'une rivière « court », que la mer « monte » ou « descend », qu'un astre « se lève » ou « se couche », etc. Le cycle des créations mythologiques atteste la tendance de l'esprit humain à voir partout des êtres qui lui ressemblent et à projeter dans le ciel son ombre agrandie. L'art vit de ces transfigurations. La poésie anime le monde de sentiments humains, prête nos larmes ou nos affections aux choses<sup>1</sup> et cherche dans l'impassible réalité le reflet de nos joies ou l'écho de nos douleurs. La philosophie a personnifié les grands aspects de la nature et la Nature elle-même. Son ordre devient Providence et son activité Dieu. Le mot de Protagoras sera éternellement vrai : « L'homme est la mesure des choses ». Nous ne voyons rien qu'au travers de nous-mêmes, et le moi, plus ou moins travesti mais toujours reconnaissable, se retrouve dans toutes les réalités de l'univers. « Le monde, dit Schopenhauer, est ma représentation. »

## 2. ASSOCIATION DES IDÉES SUBJECTIVES

Mieux encore que les idées objectives, les idées subjectives se prêtent à des enchaînements de rapports. Les relations qui unissent les données de la perception sont si directes et si simples qu'elles n'ont pas besoin d'être exprimées et s'établissent sans exiger le concours de la réflexion. Les lois qui règlent l'association de ces idées

1. Carlyle parle souvent du « cœur des choses » (*The heart of things*).

sont écrites dans leur mode même de formation. Mais l'induction se développe et se trouve investie de sa vraie fonction quand elle s'applique à relier des concepts. L'ordre variable des séries et la diversité des points de vue où l'esprit se place pour les comparer autorisent alors des inférences à l'infini. Marquer avec précision les limites des groupes institués par la généralisation et l'abstraction, scruter leurs rapports et les formuler en jugements, voilà la tâche nouvelle et plus vaste qui s'impose à la pensée.

A. — Association des idées générales.

Les corrélations des idées générales résultent des degrés de ressemblance ou de différence dont il a été tenu compte pour les établir. Comme la généralisation va du plus grand au moindre nombre de similitudes en supprimant à chaque degré quelque trait de différence, les groupes se subordonnent et forment une hiérarchie où les plus étendus comprennent les plus restreints. Ces séries peuvent donc s'inclure, si l'on se réfère aux degrés décroissants de la ressemblance, s'exclure si l'on n'a égard qu'à la dissemblance, et admettre un ordre variable si l'on tient compte des deux. Bornons-nous à indiquer les relations manifestes qui unissent, aux stades principaux de la généralisation, les idées d'espèce et celles de genre.

a. — Les groupes d'espèce, constitués de telle sorte que les ressemblances l'emportent sur les différences, ont entre eux les rapports les plus étroits.

Si l'on se reporte aux exemples que nous avons cités et qui peuvent le mieux donner idée d'une subordination régulière, on voit que, pour une espèce déterminée comme l'espèce humaine, les groupes partiels dont elle se compose (hommes, femmes, enfants, adultes, vieillards, groupes

ethniques, races...) sont tous compris dans le groupe spécifique « homme ».

L'homme figure à son tour dans le groupe supérieur (famille) qui comprend aussi les anthropoïdes et tous ensemble font partie de la nombreuse tribu des singes.

*b.* — Au-dessus des groupes d'espèce, les groupes de genre réunissent des choses qui diffèrent entre elles plus qu'elles ne se ressemblent. Leurs séries sont également subordonnées.

Ainsi la tribu des singes appartient au groupe plus général des mammifères et ce dernier rentre lui-même dans le groupe des vertébrés.

Enfin, le groupe des vertébrés fait partie d'un ensemble qui compose le règne animal, et le règne animal dépend d'un tout représenté par l'universalité des êtres.

Quelle que soit la nature de leur objet, les idées générales se distribuent de la sorte en groupes hiérarchiques qui correspondent aux degrés principaux de la ressemblance. Elles forment une progression, croissante dans un sens, décroissante dans l'autre, dont tous les termes s'enchaînent. Le rapport le plus intéressant à connaître est celui qui, pour une collection de choses, détermine l'espèce et le genre, parce qu'il marque sa place par celles qui lui ressemblent le plus et parmi celles qui lui ressemblent le moins, c'est-à-dire assigne son rang dans la série en tenant compte simultanément de ses traits les plus particuliers et des plus généraux.

**B. — Association des idées abstraites.**

Les idées abstraites sont unies par des relations de même ordre que les idées générales, mais plus complexes et plus variables. Elles se laissent également disposer en

groupes hiérarchiques dans les deux classes des abstractions élémentaires et des abstractions idéales.

*a.* — Ainsi, les diverses nuances de bleu sont comprises dans la couleur bleue et le bleu à son tour est impliqué dans l'idée plus abstraite de couleur.

Le concept de couleur est le produit d'un des modes de sensation externe; enfin les sensations externes, les sensations internes et le sens intime rentrent dans le groupe général des perceptions.

*b.* — Les degrés que nous avons distingués parmi les abstractions idéales se superposent de la même manière, en raison de l'étendue des groupes dont elles déterminent les attributs. Si, par exemple, la rumination constitue l'attribut distinctif du groupe limité des ruminants et la lactation celui du groupe moins restreint des mammifères, la nutrition, qui les comprend l'une et l'autre est une fonction vitale et la vie une des formes de l'existence.

Nos abstractions d'attributs généraux n'ont de limites que la capacité de l'esprit à les concevoir. Elles comportent des comparaisons sans nombre et des modes de groupement dont la pensée n'épuisera jamais la diversité. Les idées de grandeur, de force, de modalité, de composition, de structure et de fonction embrassent des corrélations si diverses et si complexes que des sciences spéciales doivent travailler sans fin à leur élucidation.

Malgré leur dissemblance apparente, les abstractions d'attributs sensibles et les abstractions d'attributs idéaux sont étroitement associées et la conception a passé des unes aux autres sans s'apercevoir qu'elle changeait de voie. L'histoire des langues montre comment l'esprit humain a transformé ses notions en attribuant à une foule de mots un sens figuré en place du sens propre qu'ils avaient d'abord. Le terme de « candeur » qui, à l'origine, avait la si-

gnification concrète de « blancheur », en a été détourné plus tard pour indiquer une condition d'esprit dont la relation avec la couleur blanche est fort indirecte et purement conventionnelle. « Idée » signifiait, dans le principe, image ; « pensée », l'action de soupeser ; « examen », pesée<sup>1</sup> « méditation », exercice ; « règle », l'outil à tracer des lignes droites ; « loi », lien ; « vertu », force ; « dieu », le ciel lumineux<sup>2</sup>. Le mot « souffle » avait indiqué d'abord l'acte essentiel de la respiration qui, ne souffrant pas d'intermittence, sous peine d'entraîner promptement la mort, pouvait le mieux servir à caractériser la vie ; ensuite, il a exprimé le principe de vie qui anime les êtres et, se transfigurant avec l'idée qu'on s'en faisait, il a fini par désigner une essence immatérielle (« âme », « esprit »). Ce double sens et la dérivation de l'acception métaphysique se retrouvent dans une foule de langues<sup>3</sup>. On a dit « voir » ou « entendre » pour comprendre (qui lui-même signifie saisir) ; « goûter » pour apprécier ; être « touché » pour être ému ; etc. A côté du monde réel et avec ses matériaux, l'abstraction a construit un monde idéal plus vaste, dont elle recule les limites à son gré. C'est surtout en opérant des déviations de ce genre que les langues ont réalisé d'immenses progrès et réussi à tout exprimer, même l'inexprimable. L'importance du langage figuré est très grande pour la spéculation transcendante. La poésie, l'art, la philosophie, le droit, la morale et la religion n'en emploient guère d'autre et l'expression des idées qui s'y rapportent consiste presque entièrement en métaphores. La science même, malgré ses scrupules et ses réserves, est obligée d'avoir recours à ces termes ambigus, en attendant qu'elle puisse leur substituer l'irréprochable précision du langage mathématique.

1. Au sens propre, en latin, l'aiguille indicatrice de la balance.

2. Deus, Θεός... se rattachent au sanscrit « Déva, » dérivé de « div, » le lumineux.

3. Confronter l'ἄνεμος et le πνεύμα des grecs, l' « anima » et le « spiritus » des latins, l' « atman » sanscrit, le « nephesch » et le « ruah » des sémites, etc.

Mais, en raffinant de la sorte ses concepts, en opérant pour ainsi dire des abstractions d'abstractions, l'esprit les rendait d'autant plus difficiles à saisir. Il fut alors contraint de donner un corps à ses idées et les incarna dans des personnifications imaginaires afin de leur communiquer par artifice un semblant de réalité. Le recours à des simulacres d'êtres chargés de fixer des attributs flottants fut le correctif nécessaire de l'abstraction idéale. Tel est, en effet, pour les conceptions de cet ordre, le besoin d'un support ontologique que, là où la pensée ne le voyait plus, elle le créa. Pendant une période très longue, l'esprit humain constitua des mythes, des allégories et des symboles, à l'unique fin d'y rattacher des attributs abstraits qu'il aurait eu trop de peine à concevoir isolés. Il se fit des dieux avec des mots : « *numina, nomina* ». « La mythologie, ce fléau de l'antiquité, est en réalité une maladie du langage. Un mythe signifie un mot, mais un mot qui n'était d'abord qu'un nom ou un attribut et auquel on a laissé prendre ensuite une existence plus substantielle. La plupart des divinités grecques, romaines, indiennes et autres ne sont que des noms poétiques auxquels on a laissé prendre graduellement une personnalité divine qui n'avait jamais été dans la pensée de leurs premiers inventeurs. » (Max Müller, *Leçons sur la science du langage*, LEÇ. I<sup>re</sup>.) Jusque dans les siècles d'incrédulité religieuse, on voit la poésie et l'art se plaire à personnifier des abstractions et Voltaire est encore à cet égard en pleine mythologie. Les histoires primitives représentent les peuples par des personnages éponymes, héros de légendes nationales. Les idéologues regardent volontiers comme doués d'une existence propre le beau, le vrai, le bien, le devoir, le droit, la liberté, la loi et en font des sortes de divinités métaphysiques. Enfin, les savants eux-mêmes n'ont pas échappé à la contagion. Il leur est arrivé de matérialiser l'espace, d'individualiser le temps et de réaliser la force, supposant des êtres véritables derrière de pures abstractions. Nous nous payons

ainsi de mots « dont le seul mérite, dit Fontenelle, est d'avoir longtemps passé pour des choses ». — « De là, conclut de même un philosophe de nos jours, cette multitude immense de riens qui passe pour être de la philosophie. » (S. Bailey, *Lettres sur la philosophie de l'esprit humain*).

Les idées générales et les idées abstraites sont naturellement disposées à se lier. L'analyse seule les sépare, et, comme l'esprit ne pourrait concevoir ni groupes de réalités sans attributs qui les caractérisent, ni séries d'attributs sans réalités qui les soutiennent, il est amené sans cesse à comparer ces deux sortes de notions, afin d'établir entre elles, dans l'ordre idéal, des connexions analogues à celles qui unissent les choses dans l'ordre réel. Les deux modes de la conception se suscitent l'un l'autre et se développent de concert. D'une part, en effet, le travail de la généralisation prépare celui de l'abstraction, parce que l'établissement de groupes d'êtres se fonde toujours sur la considération d'attributs communs dans une même série ou différents entre séries séparées, attributs qu'on est ensuite conduit à spécifier; de l'autre, les idées abstraites, à mesure qu'elles se dégagent, concourent à la netteté des idées générales en donnant le moyen de définir chaque groupe par les attributs qui lui appartiennent. Il y aurait même à noter une relation plus étroite entre les degrés correspondants de la généralisation et de l'abstraction, car les idées d'attributs sensibles sont le plus propres à caractériser les groupes d'espèce, tandis que les idées d'attributs idéaux se rattachent plutôt aux groupes de genre.

## CONCLUSION

Enfin les idées objectives et les idées subjectives, dont nous venons d'indiquer séparément les rapports, sont unies par des corrélations générales. Ces deux classes de notions montrent sous deux aspects distincts les mêmes réalités. Tout ce que la perception constate en détail, la conception le dispose par séries. Le point de vue seul diffère et les résultats concordent dans une synthèse finale. Les idées particulières et les idées concrètes constituent les éléments de nos concepts; les idées générales et les idées abstraites établissent les cadres où les matériaux recueillis par la sensation viennent se ranger et se classer. En conséquence, l'esprit doit à tout moment, soit colloquer des êtres ou des attributs dans les séries où leurs similitudes les appellent à prendre place, soit caractériser les réalités perçues par des attributs de série, afin d'en donner idée par les choses qui leur ressemblent. Le problème se pose et veut être résolu chaque fois qu'une impression se produit ou que la réflexion s'exerce sur elle, car il y a lieu de décider si tel objet déterminé rentre dans tel ou tel groupe, s'il possède tels ou tels attributs. L'idée intégrale d'un être résulte d'un ensemble de notions générales et abstraites qu'on y rattache en vue de faire brièvement connaître ses analogies principales. La pensée, allant d'abord du particulier au général, du concret à l'abstrait, puis du général au particulier, de l'abstrait au concret, unit par d'indissolubles liens le réel que la perception constate et l'idéal que l'intelligence conçoit.

La comparaison des idées de toute nature motive, dans le détail, des inductions à l'infini. L'esprit doit coordonner ses éléments de connaissance au fur et à mesure de leur acquisition, discerner les relations des choses, assigner à

chaque réalité sa place et ses attributs, en d'autres termes, raisonner et juger. La détermination de ces rapports comprend la « définition » et le « raisonnement ». Ces deux opérations exigent l'emploi du langage et relèvent de la Logique proprement dite.

La « définition » (de *definire*, marquer des limites), est le point de départ de la spéculation logique. Avant tout, il importe de définir aussi exactement que possible les mots dont on se sert et les choses dont on parle, car si l'on ne s'entendait pas sur ces données, il serait difficile de tomber d'accord sur des inférences. La plupart des malentendus qui se produisent entre les esprits tiennent à des termes dont le sens mal délimité prête à des interprétations diverses. Les logiciens de la scolastique faisaient de la définition le plus haut degré de la connaissance. Elle supposerait, en effet, une science parfaite des choses ; mais la définition commune cherche seulement à les distinguer. D'après Pascal, il n'y a de définitions exactes que les définitions de noms, parce qu'alors l'esprit embrasse en entier et limite avec précision les concepts dont il est l'auteur ; il n'y a pas de définitions de choses, parce qu'on ne les connaît jamais bien (*De l'esprit géométrique*). Néanmoins, si l'ordre géométrique comporte seul des définitions adéquates, d'une rigueur absolue, l'ordre réel admet des définitions relatives où il est tenu compte, non plus de tous les caractères résumés dans un caractère unique qui les contient implicitement, mais des caractères principaux suffisants pour différencier les groupes. Les définitions de ce genre, quoique imparfaites et simplement approximatives, sont utiles pour fixer les idées et doivent être établies méthodiquement.

La définition se rapporte à un classement de caractères et n'est applicable qu'à des choses coordonnées par séries. Les réalités particulières ne sont pas susceptibles d'être définies, par ce motif que chacune d'elles se compose d'un ensemble de traits dont le détail est infini et dont les

plus saillants ne sauraient suffire. Les généralités ultimes échappent également à toute entreprise de définition, puisque, formant un seul groupe de la totalité des choses, elles n'ont pas de caractères limitatifs. Elles possèdent tous les attributs et ne sont spécifiées par aucun. De là notre égale impuissance à définir soit une réalité isolée, soit toutes les réalités réunies, et à donner idée d'un être ou de l'être<sup>1</sup>. Mais entre l'extrême particularité des choses et leur extrême généralité, l'une et l'autre indéfinissables, il est possible de définir par à peu près tous les termes intermédiaires. La définition, sorte de description sommaire, marque la place d'un groupe dans une hiérarchie. Au lieu d'énumérer tous les attributs de ce groupe, ce qui n'aurait pas de fin, on se borne à les indiquer par la mention du groupe supérieur dont il fait partie et dans lequel on le caractérise par celle de son attribut distinctif. On sait alors à quelles choses il ressemble le plus et en quoi il diffère d'elles. On connaît le groupe auquel il se rattache et la qualité qui l'en sépare, la somme de ses ressemblances et son indice différentiel, ce que la scolastique appelait *definitio per commune genus et propriam differentiam*. Son rang est ainsi marqué dans l'ensemble et l'on a plus de confusion à redouter.

Lorsque, par exemple, on définit l'homme « un animal raisonnable », on fait rentrer l'idée générale d'homme dans l'idée plus générale d'animal qui implique une série de caractères communs et exclut tous les groupes qui ne les possèdent pas; mais, en même temps, on isole l'homme dans ce groupe en lui attribuant la raison, par laquelle il se distingue de tous les êtres animés. On constate le genre

1. Aristote, dans sa *Métaphysique*, a cru pouvoir définir la substance ou l'être : 1° ce qui n'est l'attribut de rien; 2° ce qui n'a pas de contraire; 3° ce qui n'a pas de plus ou de moins. — Mais tous ces caractères sont négatifs et ce n'est pas là une définition véritable. Il est d'ailleurs à noter qu'elle conviendrait aussi bien au néant qu'à l'être et cela montre sa parfaite inanité.

dont il fait partie et son attribut comme espèce. D'une part, on l'assimile, de l'autre on le différencie, et cette double indication donne de lui la définition la plus brève et la plus claire. On définirait de même l'animal « un organisme animé », l'organisme « une forme vivante, » etc. On voit poindre ici un principe de classification dont les sciences de la nature font des applications systématiques, mais qui, pour l'Ontologie, est purement intuitif. Le mode de nomenclature binaire ou par double dénomination, que Linné a introduit dans la Taxinomie des animaux et des plantes, utilise cet artifice logique et en fait l'emploi le plus étendu. Il donne en deux mots la définition d'un groupe d'êtres par la mention, 1° de sa ressemblance générale, 2° de sa différence spécifique.

Tandis que la définition marque les rangs dans les séries, le raisonnement établit, à travers des entrecroisements infinis d'idées, les relations des termes de toutes les séries, répartit entre la multitude des êtres la multitude des attributs et formule les inférences qu'autorise leur comparaison à tous les degrés, soit de ressemblance, soit de différence. Il y a, dans les données dont la perception et la conception enrichissent incessamment nos esprits, des connexions nécessaires, des convenances réciproques, et, par contre, des disconvenances formelles, des incompatibilités logiques. Il faut séparer les contraires, parfois les unir dans une certaine mesure, et tour à tour opérer des assimilations et des distinctions qui correspondent aux harmonies et aux désaccords des choses. Cela s'appelle raisonner, et ce genre d'induction se prête, sous forme de jugements, à des spéculations sans fin. Le raisonnement ne fait guère que recoordonner avec netteté des idées antérieurement coordonnées d'une manière vague et sommaire; néanmoins, par cela même qu'il rend explicites des rapports implicites, il montre les choses sous un meilleur jour et contribue efficacement à leur connaissance.

Les logiques distinguent plusieurs sortes de raisonne-

ments : l'inférence simple, qui va du particulier au particulier; l'induction proprement dite, qui va du particulier au général; enfin le syllogisme, qui conclut du général au particulier. Cette dernière forme, réputée la plus savante, a été, depuis Aristote, l'objet d'analyses minutieuses et d'exercices multipliés. Les dialecticiens acharnés de la scolastique en ont décomposé le mécanisme jusque dans le plus infime détail. Tant de subtilité n'était peut-être pas nécessaire. Il suffisait de constater, une fois pour toutes, que l'artifice du raisonnement syllogistique se fonde sur l'enveloppement des notions générales les unes par les autres. Le P. Buffier a montré, dans ses *Principes du raisonnement* (1725), que toutes les formes possibles de syllogisme se ramènent à cette formule : « Ce qui est dans le contenu est aussi dans le contenant. » Réduit à ces termes d'une vérité trop manifeste pour justifier une longue étude, le syllogisme ne pouvait plus faire autant d'illusion et il a perdu beaucoup de son prestige, malgré l'importance que lui attribuent encore les logiciens anglais. (V. les *Traité de Logique* de St. Mill et A. Bain.)

Nous devons plutôt insister sur l'aptitude de l'induction à tirer de la disposition des choses par séries un principe d'inférence universelle. Lorsque la pensée a groupé dans un type idéal une quantité d'êtres ou d'attributs qui se ressemblent, ce type représente, outre les réalités perçues qui ont servi à le constituer, toutes les réalités connaissables de même nature, car le lien de similitude qui unit les premières se prête à recevoir par avance les secondes, puisqu'elles sont censées n'en pas différer. En vertu de cette assimilation, ce que l'on sait appartenir à un groupe limité de choses peut être rationnellement préjugé de la série entière de ces choses. L'induction va ainsi du particulier au général, du concret à l'abstrait, du réel au possible, du relatif à l'absolu, du contingent au nécessaire, d'un lieu à tout l'univers, d'un moment à l'éternelle durée. De là résulte pour l'esprit le moyen d'étendre démesuré-

ment sa connaissance. La similitude des objets étant admise, chaque assertion particulière se transforme en assertion générale. On s'élève de la sorte à l'idée de loi, de vérité immuable. Sans cette manière hardie de spéculer sur ce qu'on ignore en partant de ce que l'on sait, la notion d'un ordre fixe et universel, sur laquelle toute science se fonde, n'aurait pas pu être établie.

Le droit que s'arroge l'induction d'affirmer de toute la série ce qui a été reconnu vrai de quelques éléments de cette série, présuppose sans doute que le cours de la nature est uniforme et constant, et c'est là une hypothèse; cependant l'ensemble des faits constatés offre déjà une base suffisante et, tant qu'aucun fait nouveau ne vient démentir la règle posée, il n'y a pas de raison pour en suspecter la justesse. Chacun des cas reconnus conformes à la loi ajoute à sa certitude et son autorité s'accroît en proportion de leur nombre. On doit donc la tenir pour exacte, du moins jusqu'à preuve contraire et sous la réserve d'une vérification permanente. Dès lors, on dispose d'une latitude indéfinie pour aller du connu à l'inconnu. Les notions acquises sur un ensemble de cas, dans un lieu et un temps donnés, s'appliquent à tous les cas pareils, dans tous les lieux et dans tous les temps. Ainsi placée hors de la relativité, de l'étendue et de la durée, affranchie de toute cause de dépendance et de toute condition de particularité, l'idée se transfigure et devient loi. Toutefois, les inférences de l'induction, qui anticipent sur la connaissance effective, portent en elles un principe d'erreur possible et d'éventuelle caducité. Ce qu'elles ont de conjectural nécessite le contrôle incessant de l'expérience et toutes les sciences de faits s'appliquent à conjurer par ce moyen les périls où leur faillibilité les expose.

## II. — ONTOLOGIE GÉNÉRALE

### SCIENCE DE L'IDENTIFICATION DES IDÉES

#### THÉORIE DES COMMUNICATIONS D'IDÉES — DU LANGAGE

L'Ontologie comparée scrute les rapports qui déterminent l'association des idées dans un même esprit. Chaque intelligence coordonne, en vertu de lois logiques, les données de la perception, les produits de la conception et les inférences de l'induction. Elle ramène ainsi de son mieux ses notions personnelles à la concordance et à l'unité. Mais ce n'est là encore qu'un travail préparatoire, un mode élémentaire d'association pour les idées. La science des choses serait singulièrement bornée si elle devait se réduire à ce que chacun peut acquérir par lui-même et tirer de son propre fonds. Nos perceptions sont, en effet, limitées en nombre, nos conceptions en étendue et nos inductions en certitude. Avec des ressources aussi restreintes d'information, nul ne pourrait arriver à tout percevoir, à tout concevoir et à tout juger sûrement. Pour avoir des choses une connaissance entière et exacte, il était nécessaire d'associer les gains des divers esprits et de soumettre chacun d'eux au contrôle de tous. La science doit être, non une propriété particulière, mais un patrimoine universel. Tant qu'elle consiste en notions individuelles qui s'ignorent l'une l'autre, elle n'existe pour ainsi dire pas. La vérité qu'un seul possède n'est la vérité que pour lui et disparaît avec lui. Elle n'est acquise au genre humain et certaine de durer que lorsqu'elle a été publiée, reconnue par le plus grand nombre et annexée au fonds des connais-

sances traditionnelles. Les idées avaient donc besoin de se répandre et de devenir bien commun pour constituer une science réelle et progressive. Il fallait unir les esprits, étendre le savoir de chacun par l'adjonction du savoir de tous et séparer dans ces apports l'erreur de la vérité. Cette tâche finale de vulgarisation et de contrôle donne à la science des êtres son complément, confirme la justesse des notions admises et assure leur perpétuité. Nous appelons « générale » la section de l'Ontologie qui traite de l'échange et de la vérification des idées. Leur communication suppose établie une théorie du langage et c'est par son étude qu'il convient de commencer.

Le langage traduit les idées en signes et rend ainsi leur transmission possible. La pensée, phénomène interne, prend corps en se rattachant à des manifestations sensibles et reçoit, avec une existence indépendante, une valeur d'échange, un pouvoir de circulation. Elle peut alors se répandre dans l'espace, persister dans la durée et constituer, au profit de l'espèce, un fonds de connaissances où chacun puise largement. L'expression des idées a donc une importance très grande. Elle représente la « Logique » dans le sens propre du mot (*λόγος* discours).

La correspondance entre les esprits s'effectue par deux sortes de langages : le langage d'action ou émotionnel, commun à tous les animaux, et le langage oral ou rationnel, propre à l'homme. Le premier interprète les idées objectives, le second les idées subjectives.

Le langage animal comprend : d'une part, le geste, en rapport avec les états de l'organisme, et l'émotion qui, déjà plus intime, signale les relations de ces états; de l'autre, le cri, par lequel les sentiments vifs se trahissent, et le chant dont les modulations révèlent les nuances plus délicates des affections. Ces moyens de communication résultent des conditions où la perception s'opère, des sentiments qu'elle réveille et des mouvements qu'elle provoque

La même activité qui procure des idées aux animaux leur donne le pouvoir de les traduire et la faculté de les saisir. Ce mode de langage ne peut exprimer il est vrai que des données particulières ou concrètes ; mais il le fait avec une force, une clarté, on pourrait dire une éloquence incomparables, au moment où la sensation les livre, à l'aide des effets qui les accompagnent ou les suivent immédiatement. Variable d'espèce à espèce, comme les besoins et les ressources de l'organisation, il est fixe pour chaque espèce, parce que les émotions, les sentiments et leur expression ne varient guère entre des êtres qui se ressemblent. Les congénères parlent d'instinct ce langage sans avoir besoin de l'apprendre, car, ayant la même manière de sentir en présence des mêmes choses, ils manifestent ce qu'ils éprouvent et l'interprètent chez les autres de la même façon. L'identité de leur nature commune fait qu'ils se comprennent tous. Ce sont des instruments d'accord qui vibrent à l'unisson.

Le langage d'action a des aptitudes très restreintes. Sa portée ne dépasse pas le rayon borné où les organismes sont en situation d'agir les uns sur les autres par l'intermédiaire de leurs divers sens, et le court intervalle où les impressions subies déterminent des actes corrélatifs. Par suite du rapport qui lie ses signes aux sensations, il est comme elles particulier, actuel et transitoire. Il se refuse à traduire les concepts qui, étant le résultat d'une opération mentale et non plus le produit immédiat de la perception, n'entraînent dans l'organisme aucune modification appréciable. Le sens vague, indéfini, des idées subjectives échappe à la gesticulation, et le mime le plus habile, le chanteur le plus expressif seraient impuissants à formuler un raisonnement sans le secours de la parole. Le langage d'action, trop arrêté pour se plier à l'expression d'idées flottantes, devait donc se transformer comme la pensée elle-même et se convertir en signes conventionnels pour devenir capable d'exprimer des conceptions générales ou abstraites. Ce langage

spécial que la nature n'enseignait pas, la raison a dû le créer, et la suite entière de ses développements a été la conséquence de ce premier progrès. « Sans la double convention qui attache les idées aux voix et les voix à des caractères, tout restait au dedans de l'homme et s'y éteignait. » (Diderot).

Une œuvre aussi importante, par laquelle l'homme s'est mis au-dessus de tous les animaux, caractérise le mieux la raison<sup>1</sup>, et la science est tenue d'en faire un examen attentif. Dans l'étude du langage, on doit distinguer la parole, qui s'adresse à l'ouïe, et l'écriture, qui parle aux yeux. L'âge où la première seule était connue et celui où les deux furent en usage constituent deux cycles distincts dans l'histoire de la civilisation.

La voix, simple modulation du cri, se prêtait mieux qu'aucun des autres signes du langage animal à traduire les conceptions de l'esprit. Facile à émettre et toujours facultative, elle allait frapper le seul sens qui soit impressionnable à distance dans toutes les directions sans subir, comme la vue, d'intermittence durant la nuit. La variété des inflexions qu'elle comporte offrait un ensemble de sons et d'articulations auxquels toutes les langues ont eu recours. Mais ici, la raison devait se joindre à l'instinct pour féconder la nature. L'état de mutisme dans lequel s'écoule le premier âge de l'homme (« enfance » de *infans*) montre que le genre humain a dû traverser de même une phase où le langage oral était inconnu. Si, en effet, l'humanité avait, dès sa naissance, reçu le don des langues, parler d'instinct serait un attribut de race, comme gesticuler ou crier, et l'enfant qui vient au monde dirait ce qu'il pense au lieu de vagir ce qu'il sent. Sa condition native et l'exemple des sourds-muets prouvent que la parole,

1. « Homo animal rationale quia orationale » (Hobbes). Pour Homère, la caractéristique de l'homme est l'usage de la parole (*μέροπος ἀνθρωποι*). La science n'a pas encore trouvé mieux pour le distinguer des animaux. « Separat hoc nos — a grege brutorum ».

loin d'être spontanée en nous, est chose apprise, transmise et conséquemment inventée. .

L'âge où l'enfant apprend à parler marque avec précision le stade de son développement où, devenu capable de généraliser et d'abstraire, il cherche le moyen d'exprimer des idées nouvelles auxquelles les gestes et les cris ne suffisent plus. Ce moment de l'évolution individuelle nous reporte par analogie aux temps inconnus où l'humanité, née stupide et sans voix, réalisa le double progrès de concevoir des idées subjectives et de les traduire par la parole. Quelque chose de l'effort que fait l'enfant pour communiquer sa pensée à l'aide de sons d'abord gazouillés, puis articulés, de la sagacité avec laquelle, guidé par le langage d'action, il devine le sens des mots prononcés autour de lui et de l'esprit d'imitation qui le porte à les reproduire, dut se rencontrer dans l'enfance du genre humain. Seulement, là où l'enfant apprend et répète, l'humanité, sans instituteur et sans mère, devait découvrir et créer.

L'établissement du langage parlé, produit commun de l'instinct et de la raison, s'effectua durant une phase immémoriale de la vie de l'espèce humaine. Son point de départ est le cri, c'est-à-dire une action réflexe liée à un état mental déterminé. Sans doute quelques voix très simples, dérivées par modulation du cri animal, furent affectées dans le principe, par exclamation ou onomatopée, à l'expression d'idées sommaires, analogues à celles que traduit le premier vocabulaire des enfants et que comprennent les plus intelligents des animaux domestiques lorsqu'ils obéissent à la voix. Les interjections étaient surtout propres à traduire les émotions et les onomatopées les sensations. L'imitation des bruits de la nature dut alors remplir, comme dans les essais vocaux des enfants, un rôle considérable, car il était naturel, quand on s'adressait à l'ouïe, de rappeler à ce sens ses impressions antérieures afin d'évoquer le souvenir des idées qui s'y rattachaient. Ainsi se formèrent des combinaisons de sons, mêlés d'abord à

titre accessoire à la gesticulation, et dont au besoin la mimique indiquait ou complétait le sens<sup>1</sup>. Avec le temps, des racines, peu nombreuses<sup>2</sup>, purent en procéder par voie de groupement de sons ou d'effacement phonétique. Lorsque, par suite de changements graduels, elles n'eurent plus de sens particulier et concret, elles durent prendre un sens arbitraire. L'origine du langage véritable date du moment où les idées, émises en bloc sous forme d'exclamations ou d'onomatopées, furent analysées et traduites en détail par des appropriations de voix. On passa peu à peu d'un vocabulaire restreint, où l'instinct dominait encore, à des articulations de plus en plus variées et de moins en moins explicites qui, s'éloignant toujours davantage de leur signification naturelle, finirent par n'avoir plus qu'une valeur d'usage où la convention prévalut. Ces rudiments de mots se multiplièrent en même temps que les idées, suivirent la loi de leur développement et donnèrent naissance à des mots composés pour exprimer des idées complexes. La parole, sans cesse en progrès, tandis que le langage d'action restait stationnaire, prit à la longue une prépondérance décisive et, au terme de cette genèse inconsciente, des langues furent constituées.

Pendant l'immense durée de l'âge préhistorique, le genre humain n'a connu que le langage parlé. Le besoin de suppléer à son insuffisance fit tardivement inventer le langage écrit. La parole, en effet, liant la pensée à des sons, la rendait comme eux circonscrite et passagère. La voix a peu de portée et s'évanouit sans laisser de traces. Les idées qu'elle exprime n'avaient donc ni

1. Certains peuples sauvages (Boschimans d'Afrique, Arapahos de l'Amérique du Nord, etc.), supplémentent leur langage de tant de gestes et de signes qu'ils cessent de s'entendre quand ils cessent de se voir et sont obligés, pour causer la nuit, de se réunir autour de grands feux. (Lubbock *Origines de la civilisation*, p. 409).

2. Le nombre des « racines » ou types phonétiques est très limité. Max Muller en compte à peine 500 pour l'hébreu, 450 pour le chinois et 500 pour le sanscrit; mais les dérivés sont innombrables.

puissance de diffusion dans l'espace, ni persistance dans la durée. Confiées à la mémoire, dépositaire infidèle, elles devaient se répandre de bouche en bouche, exposées, par ces transmissions successives, à de fréquentes altérations. Le langage écrit, complément du langage oral et non moins nécessaire à la civilisation supérieure que la parole à la civilisation primitive, a fait heureusement disparaître ces lacunes et ces périls. Matérialisant l'idée dans des signes plus durables que le son, moins précaires qu'un souvenir, il assure la perpétuité de la pensée et facilite sa transmission à toute distance. L'écriture fixe les documents et ne permet plus au temps de corrompre leur intégrité. Les plus éminents esprits peuvent parler à travers les siècles aux générations attentives et la vérité, une fois transcrite, ne court plus le danger de se perdre. Les gains de la raison se communiquent sans obstacle et se conservent sans dommage. Telles ont été les conséquences de ce mémorable artifice que, par le fait seul de sa vulgarisation, l'espèce humaine, sortant des ténèbres de la tradition orale, est entrée dans le grand jour de la période historique, c'est-à-dire dans une ère de souvenirs précis et de rapides progrès.

La création du langage écrit était plus difficile que celle du langage parlé, car elle s'éloignait davantage des données et des ressources du langage animal. Il fallait transposer le signe représentatif de l'idée, s'adresser à un autre sens et convertir des sons fugitifs en caractères visibles. Mais l'esprit n'était plus aidé dans cette tâche par un mécanisme d'actions réflexes et une sorte d'instinct jaseur. Il devait tout tirer de lui-même, choisir ses matériaux et leur assigner un sens. Aussi cette œuvre, qui appartient en propre à la raison, n'a-t-elle pu s'accomplir qu'à une date relativement récente. Le langage littéral, parcourant des phases analogues à celles du langage oral, fut d'abord figuratif et représenta les choses par des dessins idéographiques qu'on pourrait appeler des onomatopées pour les

yeux. Les signes, prenant ensuite une valeur symbolique, se transformèrent en hiéroglyphes analogues à nos « rébus ». Enfin l'écriture, s'appliquant à reproduire les voix, devint syllabique, puis alphabétique vers la fin de la haute antiquité. Ce mode d'expression des idées s'est développé, à travers les phases successives de l'épigraphie monumentale, qui procure aux textes le plus de durée, mais à grands frais et sur place; de l'écriture cursive, qui se prête mieux aux besoins de promptitude, d'économie et de transmissibilité; de l'imprimerie, qui évite les difficultés et les lenteurs de la transcription manuelle; enfin de la télégraphie qui, supprimant l'obstacle de l'étendue, donne à la pensée une sorte d'ubiquité. Au point où la civilisation est parvenue, la diffusion rapide, la perpétuité des idées sont assurées. Le langage littéral met en communication tous les esprits cultivés. Sa connaissance ouvre l'accès des sciences et l'on appelle à juste titre « ignorant » celui qui ne sait ni lire, ni écrire, car, incapable de s'approprier les idées émises par une élite de penseurs et de s'élever à leur niveau, il est réduit à des notions bornées, à de vagues oui-dire, dans un cercle étroit d'interlocuteurs, sans pouvoir s'affranchir des préjugés de son milieu et des erreurs de la tradition orale.

La fonction du langage, dans ses rapports avec l'Ontologie positive, apparaît clairement quand on considère les diverses sortes de mots que le progrès des langues a fait instituer avec le temps. A l'origine, le même terme devait désigner un objet particulier, son attribut concret et le prédicat qui les unit. Dans la majorité des langues que parlent les peuples sauvages, les verbes ne sont pas distincts des noms et des adjectifs, le même mot prenant, selon l'occurrence, l'un ou l'autre sens. Plus tard, les mots reçurent une signification spéciale. Le « nom » ou « substantif » désigna ce que les choses ont de substantiel, ce qu'on peut regarder comme existant, c'est-à-dire les

réalités soit particulières (noms propres), soit collectives (noms communs), ou les attributs des choses conçus abstractivement. Le « verbe » (*verbum*, le mot par excellence, l'âme du discours), indiqua l'attribut, la manière d'être, avec le concours obligé du verbe « être » qui, seul essentiel, se trouve implicitement contenu dans tous les autres, mais qui, en raison de son haut degré d'abstraction, a été tardivement constitué <sup>1</sup>. L'« adjectif » ad joint au sujet des qualifications accessoires. L'« adverbe » (*ad verbum*) précise le sens des adjectifs et des verbes. Les « pronoms » (*pro nomine*) tiennent la place des noms et en évitent la répétition trop fréquente. Les « prépositions » et « conjonctions », termes connectifs ou exposants de rapports, déterminent certaines relations et conditions. Enfin les « interjections » traduisent des émotions plus que des idées et rappellent, par leur émission instinctive comme par leur syncrétisme confus, le plus ancien fonds des langues humaines <sup>2</sup>.

Ceux de ces mots qui expriment des états ou des rapports fixes sont invariables; mais ceux qui se réfèrent à des relations changeantes admettent diverses modifications. La distinction du singulier et du pluriel signale l'unité ou la pluralité du sujet; le genre, sa nature; le cas, ses rapports. Les verbes, qui tous impliquent l'idée de durée à laquelle le nom reste étranger, ont des « temps » pour marquer si l'action se fait, est faite ou à faire; des voix pour caractériser l'état actif, passif, neutre ou réfléchi du sujet; des modes pour mentionner ses conditions d'action, des nuances de doute, de désir, etc. — La syntaxe coordonne ensuite les éléments du discours, assigne leur

1. Le verbe être est inconnu dans la plupart des idiomes sauvages et le chinois même ne le possède pas, il a modifié la voix passive des verbes, comme celui d'« avoir » leur voix active, et par là, simplifié considérablement la grammaire.

2. Dans les cas d'amnésie, la mémoire des interjections persiste alors que celle de tous les autres mots est entièrement perdue ( v. Ribot, *Maladies de la mémoire*, p. 132 et 136).

place, règle leur accord et fait de la proposition un corps où tout se tient.

Grâce au progrès des vocabulaires et des formes grammaticales, il n'est pas un développement de la pensée qui ne puisse se traduire. Nos répertoires de mots mettent à la disposition de chaque esprit un ensemble d'expressions où se peint l'ordre idéal des choses tel que la suite des générations l'a conçu. Pour savoir à quel degré de culture un peuple s'est élevé, le plus sûr indice est l'étude de sa langue. On y voit ce qu'il a connu de réalités, de classes et de rapports. Là se conserve le trésor de ses idées. Quiconque a parlé cette langue a possédé le meilleur de la philosophie courante de son pays et de son temps. Cela donne la mesure de ses connaissances ontologiques.

Le langage, éminemment favorable au rapprochement des idées, facilite beaucoup l'intelligence de leurs relations et la mise en train de l'appareil du raisonnement. Les éléments de la pensée, enveloppés d'abord dans une obscure synthèse, s'analysent et s'élucident à mesure que les vocabulaires s'enrichissent, puis se prêtent à des connexions sans fin. Les mots, véhicules d'idées, deviennent les signes d'une sorte d'algèbre intellectuelle. La raison spéculé sur les termes des langues comme le mathématicien sur les symboles de la valeur et, de même que de longs calculs ne seraient pas praticables sans chiffres, des enchaînements complexes d'idées seraient impossibles sans mots. Faute de cette ressource, les animaux et les enfants sont incapables de méditations suivies. Leurs idées, sans liaison et sans fixité, se perdent, à peine formées, dans un vague immense et se dissipent en stérile rêverie. C'est pourquoi, malgré l'incomparable vivacité des impressions du premier âge, aucun souvenir précis ne nous en reste. Tout devient facile, au contraire, avec l'expédient du langage. Les mots suggèrent les idées et, au besoin, en tiennent lieu. L'influence de la parole sur le développement de l'esprit est si grande, que l'art de penser se con-

fond avec celui de parler. La même logique les régit l'un et l'autre, car la Logique, prise dans le sens de l'étymologie du mot, est la science du discours. Elle apprend moins à raisonner doctement qu'à parler pertinemment. C'est ainsi que l'entendaient les anciens, et Leibnitz, à leur exemple, en fait la « science discursive », comprenant la théorie du langage et l'association des idées (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Liv. IV, ch. XXI).

La Logique, définie de la sorte, tient par un lien étroit à l'Ontologie générale. Elle est l'expression par le langage des rapports entre les idées, la science de l'existence des choses mise en formules ou « propositions ». L'analyse logique montre, en effet, que chaque proposition consiste à établir une relation entre un sujet et quelque attribut. Construire une phrase, énoncer un jugement, c'est poser une thèse ontologique. On déclare que tel sujet possède ou ne possède pas tel attribut, dans telles conditions déterminées. On affirme ou l'on nie que telle chose soit, de telle manière. Deux idées étant données, on les unit ou on les oppose par une assertion de convenance ou de disconvenance logique. C'est pourquoi la proposition se compose toujours de deux termes, un sujet et un attribut, liés par une copule exprimant l'idée d'existence. Les langues sont des méthodes analytiques, l'instrument logique par excellence et, comme on l'a dit, « la meilleure logique est une langue bien faite. » (Condillac, *Logique*.)

Ainsi mis en communication par le langage, les êtres humains, sortant de leur isolement et de leur faiblesse, s'unissent, malgré le double obstacle de la distance et de la durée, pour constituer un fonds commun de connaissances destiné à s'accroître toujours davantage avec le temps. Le but des échanges d'idées entre les esprits est l'établissement d'une science générale où les notions individuelles se déposent, se complètent et se rectifient. Les intelligences, confondues par une sorte de pénétration mutuelle,

vérifient réciproquement leurs inductions et convertissent les évidences particulières en évidence collective. Ce que le savoir d'un seul a nécessairement de borné, par suite de perceptions restreintes, de généralisations hâtives, d'abstractions insuffisantes, d'inférences hasardeuses et de jugements erronés, se corrige de lui-même dès qu'on le confronte avec le savoir de tous. Chaque « proposition » (de *pro ponere*), simple postulat ontologique, soumet à l'approbation d'autrui une appréciation personnelle, afin qu'on puisse reconnaître si les divers esprits entendent les mêmes choses de la même façon. Le jugement formulé est-il admis par tous, sans contestation ni restriction d'aucune sorte? Cette unanimité lui donne une autorité nouvelle et l'érige en loi. Les avis sont-ils, au contraire, partagés? Leur désaccord signale une erreur. Il faut alors déterminer qui se trompe, de quel côté se trouve la vérité.

La raison éprouve l'impérieux et constant besoin d'être d'accord avec elle-même. La contradiction qui, selon le mot de Pascal, est « une mauvaise marque de vérité » (*Pensées*, 1, 43), infirme et nie la connaissance, car l'esprit se refuse à concevoir que, dans le même temps, la même chose soit et ne soit pas. Il est donc nécessaire d'opérer la révision de nos idées et de nous assurer que leur concordance ne prête à la contradiction, ni en nous, ni hors de nous.

L'accord entre nos propres idées nous semble toujours parfait et, d'ordinaire, nous nous entendons assez bien tant que nous sommes seuls à raisonner. Ce n'est pas cependant que nous manquions de motifs d'être en défiance et la réflexion nous avertit après coup qu'en nombre d'occasions la liaison de nos idées a laissé à désirer. Sans cesse des données nouvelles viennent modifier nos conceptions, étendre nos connaissances et redresser nos jugements. Nous avons sur les mêmes sujets des idées successives, parfois difficiles à concilier, et il nous arrive de n'être pas tous les jours de notre opinion. Pour mesurer l'écart possible, il

suffit de comparer nos manières de voir sur quelque point important à deux dates de notre vie. Cela pourtant ne nous met pas en soupçon de nous-même et nous passons du blanc au noir sans que notre provision de certitude soit diminuée. Malgré de continuelles variations, nous évitons le désagrément de nous contredire par un artifice inconscient qui consiste à regarder notre opinion du moment comme mieux fondée que les précédentes et seule vraie, sauf à l'abandonner, à la première rencontre, pour une opinion différente, présumée meilleure et non moins précaire.

Un expédient de ce genre ne pouvait servir entre les esprits, parce que chacun d'eux se prévaut d'une compétence égale, sinon supérieure à celle de tous les autres et, de fait, ils représentent la raison au même titre. Cependant le désaccord de leurs idées éclate à tout propos, et cela est inévitable, puisque chacun généralise ses perceptions particulières, abstrait dans des conditions spéciales et convertit en jugements les résultats de son expérience bornée. Entre tant de juges d'avis différents, quel juge décidera? — La raison universelle. L'unique moyen de trancher ces conflits est de passer aux voix et de recourir à l'arbitrage de tous. Nos manifestations d'idées vont au devant de cet arrêt quoique nous ne l'acceptons pas toujours, quand il nous condamne. Exprimer nos opinions, les comparer à celles de nos semblables, constater s'il y a concordance ou dissentiment, c'est à quoi visent nos conversations, nos publications et nos lectures. Unis par le langage et entretenant un commerce continu d'idées, les hommes « frottent et liment », pour parler comme Montaigne, « leurs cervelles les unes contre les autres » (*Essais*, Liv. I, ch. 25), confrontent leurs jugements, se confirment dans la vérité par leur accord et parfois font jaillir la lumière du choc de leurs contradictions<sup>1</sup>. Lorsque l'entente se produit de

1. « De nos cailloux frottés il sort des étincelles. » (Voltaire).

M. Guizot dit aussi très bien : « ce que j'aime le mieux après la vérité, c'est la contradiction. »

prime-abord entre les esprits, la vérité paraît d'autant plus certaine, l'unanimité des adhésions ne laissant aucun doute se produire; quand, au contraire, il y a opposition et débat, il faut examiner de nouveau et plus attentivement les choses. Ce qui n'est pas évident pour tous doit être remis à l'étude, pourvu d'un supplément de preuve et ramené à l'évidence par voie de démonstration.

Quoique le terme d'évidence soit presque toujours employé dans un sens absolu, il convient, le plus souvent, de le prendre dans un sens relatif; et lorsqu'on entend quelqu'un déclarer avec assurance : « c'est évident! » on serait en droit de lui demander : évident pour qui? pour combien? dans quelle mesure? La plupart des hommes se méprennent sur les frontières de l'évidence et l'on voit les théologiens croire à des mythes, les philosophes à leurs systèmes, les savants mêmes à leurs théories, comme à des vérités de sens commun. Nous n'avons qu'à un très faible degré le sentiment de notre faillibilité personnelle. Notre manière de voir nous paraît seule plausible et nous l'érigons volontiers en dogme. Il nous échappe à tout moment de dire d'une façon générale : c'est vrai, c'est beau, c'est bien, c'est juste, et non comme le faisait prudemment Franklin : « cela me semble tel, quant à présent. » Nombre de choses, données pour manifestes, ne le sont guère et justifient à peine des présomptions; d'autres le sont davantage et arrivent à la vraisemblance; quelques-unes le sont plus encore et ne livrent prise qu'à de légers doutes; bien peu le sont tout à fait et forcent la conviction. Il y a donc une évidence particulière, admise par qui la proclame, mais n'existant que pour lui; une évidence collective, reçue par certains groupes, mais contestée par d'autres; une évidence à peu près générale, reconnue par la grande majorité, sauf quelques faibles réserves; enfin une évidence universelle, qui fait loi, s'impose et ne souffre pas d'exception. Examinons ces divers cas. Les degrés de relativité que nous venons d'indiquer dans l'évidence correspondent aux divisions établies

dans les idées et les conditions d'accord différent suivant qu'elles sont objectives ou subjectives.

#### 1. IDENTIFICATION DES IDÉES OBJECTIVES

L'échange et la vérification des idées dont l'objet est réel et déterminé ne peuvent s'opérer que dans le milieu même où les choses ont été perçues et entre les esprits qui se communiquent directement leurs impressions. Ces limites sont généralement très restreintes. La particularité est, en conséquence, la loi de cette classe de notions. Exclusive ou très circonscrite en ce qui concerne le moi, elle admet un certain contrôle à l'égard des éléments du non-moi.

##### A. — Identification des idées relatives au moi.

En raison de leur mode tout intrinsèque de formation, les idées qui se rapportent au moi restent personnelles ou du moins ne se communiquent que dans une mesure très bornée.

*a.* — Le moi constate seul sa réalité par la conscience et cette idée, la première acquise, reste la plus particulière de toutes. Maître d'un domaine qui lui appartient en propre et où nul que lui n'a d'accès, il ne saurait recevoir d'ailleurs un supplément de lumière. L'évidence qui s'attache aux informations du sens intime est si grande qu'elle se suffit pleinement à elle-même et n'admet pas de contrôle. Tous les hommes ensemble ne pourraient y rien ajouter en la confirmant, ni la diminuer en l'infirmité. La certitude d'exister que l'homme trouve au plus profond de son être est inébranlable, hors d'atteinte. Tout repose sur elle et,

# ONTOLOGIE GÉNÉRALE

## SCIENCE DE L'IDENTIFICATION DES IDÉES

a. Identification des idées dues au sens intime.	b. Identification des idées dues aux sens internes.	a. Identification des idées dues au sens besoin.	b. Identification des idées dues aux sens d'information.	a. Identification des idées d'attributs sensibles.	b. Identification des idées d'attributs idéaux.
A. IDENTIFICATION DES IDÉES RELATIVES AU MOI.	B. IDENTIFICATION DES IDÉES RELATIVES AU NON-MOI.	A. IDENTIFICATION DES IDÉES GÉNÉRALES.	B. IDENTIFICATION DES IDÉES ABSTRAITES.	2. IDENTIFICATION DES IDÉES SUBJECTIVES	
1. IDENTIFICATION DES IDÉES OBJECTIVES					

### IDENTIFICATION UNIVERSELLE DES IDÉES. DE L'ÉVIDENCE ET DU SENS COMMUN

seule, elle n'a pas besoin d'appui. Il y a dans le moi un principe d'exclusivisme qui constitue l'essence de la personnalité, comme elle irréductible, incommunicable, absolu. Chaque esprit, retranché dans ce for intérieur de la conscience (« *arx mentis* »), monde fermé à toute intrusion, y vit dans un isolement auguste et en quelque sorte divin. Son moi, mystérieux, invisible, est à lui-même son étude, sa science, son tout.

Tandis que le moi absolu se refuse à tout commerce, le moi relatif admet quelques échanges d'idées. Les affections intimes de la sensibilité composent encore un domaine réservé de la conscience, mais qui s'entr'ouvre par moments. Chacun a sa manière de sentir, d'apprécier, de juger, de vouloir et d'agir qui le distingue; cependant les êtres humains, quelle que soit la diversité de leurs goûts et de leurs humeurs, ont des conditions partielles d'accord. Malgré les disparités qui les séparent, un fond de nature commune établit entre eux des traits de similitude, des correspondances d'impressions et, conséquemment, des points de contact. Quoique chacun de nous ait incomparablement plus de confiance en lui-même qu'en personne, nous cherchons d'instinct à mettre nos sentiments, nos appréciations, nos idées et nos actes en harmonie avec ceux de nos semblables. Si bonne opinion que nous ayons de nous-même, de la valeur de nos attachements, de l'excellence de notre goût, de la supériorité de notre esprit et de la rectitude de notre sens moral, nous n'en sommes jamais aussi sûrs que nous le désirerions et rien ne nous plaît davantage que d'en recevoir d'autrui la confirmation. De là le prix que nous attachons à la sympathie, à l'admiration partagée, à la communion des croyances, à l'approbation publique. Nous aimons à nous reconnaître dans les autres, à faire et à recevoir des confidences, à répandre nos convictions, à louer quand l'occasion s'en présente et surtout à être loués en toute occasion. Les hommes se sentent plus forts et mieux dans le vrai quand ils sont en nombre. Réunis, ils subis-

sent plus facilement la contagion de l'enthousiasme, le prosélytisme de la foi, le prestige de l'éloquence, l'encouragement de l'exemple, l'empire du respect humain. Il faut pourtant éviter de se méprendre sur l'étendue de ces influences. Nous nous prêtons les uns aux autres, sans nous aliéner jamais. Notre moi ne sort de lui-même que par circonstance et, comme il a grand'peine à se quitter, il se retrouve toujours avec plaisir.

Le sens intime, individuel et fermé, échappe donc à tout contrôle et ne se livre que quand il lui plaît, dans la mesure qui lui convient. Là, comme le voulait David, chacun est « roi de soi-même ». Ainsi se justifieraient les théories sur la prééminence du moi (self-trust, self-reliance) dont Emerson a prétendu tirer un système de philosophie, mais qui, pour passer dans la pratique, n'avaient pas attendu d'être formulées.

*b.* — Les sensations internes, de si près qu'elles nous touchent, ne sont pas, au même titre que les précédentes, constitutives de la personnalité. Le moi ne les croit plus aussi sûres et tolère qu'elles soient rectifiées à l'occasion.

Les données relatives aux états de l'organisme dépendent de sa condition particulière et, pour en connaître, nous serions, semble-t-il, dispensés de consulter autrui. Cependant nous nous réglons en partie sur nos semblables et la comparaison de nos impressions avec les leurs nous donne le moyen de décider quand elles sont normales ou pathologiques. L'obligation de vivre en commun et de satisfaire ensemble les mêmes besoins fait que les sensations organiques finissent par s'accorder. En cas de trouble et de souffrance, nous cherchons autour de nous des consolations ou des conseils. Nous entretenons volontiers nos amis de nos maux, qu'ils ne sentent guère, et le plus grand plaisir des malades est de causer de leur état avec un médecin, tout disposés à se laisser alarmer ou rassurer par

lui, selon son humeur, et à croire ce qu'on leur dit de préférence à ce qu'ils éprouvent. Néanmoins, ces concessions ne s'étendent jamais bien loin et nos impressions, agréables ou pénibles, n'affectent que nous.

Ainsi l'exclusivisme domine dans la connaissance du moi. Le sens personnel a sa condition privée d'évidence. Là, tout est singularité, idiosyncrasie, fait individuel. Chacun vit confiné dans ce monde intérieur de la conscience et le moi, qui aspire à se faire centre de l'univers, se trouve arrêté à la limite de notre corps.

B. — Identification des idées relatives au non-moi.

Le contrôle des données de la perception externe, impliquant l'impression des mêmes choses éprouvée par divers sujets, ne peut se produire que dans des milieux restreints dont la grandeur se mesure à la portée de nos sens et à l'étendue de nos déplacements. L'accord de ces notions est, en général, possible, parce que l'analogie des organes et l'identité des choses perçues entraînent une certaine similitude d'idées. Pourtant, deux causes peuvent amener des divergences. D'une part, en effet, les sens diffèrent d'un sujet à l'autre en délicatesse ou en acuité; chez un sujet donné, ils diffèrent même d'âge en âge et de moment en moment; de l'autre, les choses ne se maintiennent pas dans un état fixe et leur condition est changeante comme la nôtre. De là résultent des notions plus ou moins variables qui, comparées, ne concordent pas toujours. L'expérience nous apprend dans quels cas nous devons ajouter foi aux perceptions de nos semblables plutôt qu'aux nôtres. Comme les impressions de ce genre n'intéressent plus aussi directement le moi, il nous en coûte moins de reconnaître une erreur et nous souffrons qu'on

nous redresse. Les conditions de contrôle diffèrent pour les deux classes de sens.

*a.* — L'identification des idées dues aux sens de contact est très limitée.

Les sensations tactiles, en raison même de ce qu'elles ont de précis et de borné, se correspondent communément assez bien. C'est peut-être dans cet ordre de notions que les divergences sont le plus rares et l'accord obtenu sur ce point aide à l'établir sur les autres.

Le goût et l'odorat, sens de réfection, participent davantage à ce que les besoins de l'organisme ont de personnel et d'inégal. Rien de plus divers que les goûts. Une même substance, « l'assa foetida », a reçu en Perse la qualification de « mets des dieux » et, en Europe, celle de « *stercus diaboli* ». Le petit nombre des mots consacrés dans nos langues à l'expression des saveurs et des odeurs forme un contraste frappant avec la multiplicité de nos sensations et témoigne d'une insurmontable difficulté à les identifier. On ne s'entend que sur quelques impressions tranchées auxquelles se rapportent des termes spéciaux.

*b.* — Les sens à longue portée, moins asservis aux nécessités organiques, procurent à l'esprit des informations désintéressées, plus faciles à mettre d'accord.

L'ouïe est un sens fidèle. Nous percevons en général les mêmes bruits de la même façon et nos sensations ne diffèrent qu'en degré. Le langage dit très bien « s'entendre » pour être d'un avis commun. Toutefois, le sens auditif est plutôt un intermédiaire qu'un générateur d'idées et il en transmet l'expression sans les contrôler.

Les impressions visuelles, qui embrassent des ensembles, se comparent et se rectifient aisément. La vue, comme sens des couleurs, a, il est vrai, ses anomalies ; mais, comme sens de l'ordre, elle admet peu de disparités et, quand des contradictions se produisent, c'est seulement à l'égard de

ce qui a été mal regardé. Il suffit alors d'un peu d'attention pour corriger l'erreur commise.

Ainsi, quoique nos sensations externes soient sujettes à varier, les idées qu'elles suggèrent cadrent dans une certaine mesure. La perception des mêmes objets est un lien entre les esprits et détermine parmi eux une notable uniformité de notions.

Par suite de ce que la nature humaine a de général et celle des choses de constant, un certain accord s'établit en matière d'idées objectives et suffit à fonder sur des évidences reconnues le commerce des relations privées. Dans un milieu déterminé, les hommes arrivent sans trop de peine à des manières de voir ou plutôt de sentir communes pour tout ce qui intéresse leurs besoins, leurs travaux, les satisfactions qu'ils poursuivent de concert. Si diverses que soient dans le détail les impressions personnelles, on obtient une sorte d'unité, grâce à des concessions réciproques et à des compromis continuels. Mais c'est là une harmonie imparfaite où les dissonances sont fréquentes et l'on ne s'entend que par à peu près. La particularité domine en fait de notions objectives. La perception confine chaque esprit dans l'étroite sphère de son moi et de son habitat. Les conditions variables où ces idées se produisent rendent les dissentiments inévitables et sans remède. Il faut se résigner sur ce point à un désaccord fatal.

## 2. IDENTIFICATION DES IDÉES SUBJECTIVES

Les idées qui représentent, non plus des êtres particuliers ou leurs attributs concrets, mais des séries d'êtres ou d'attributs, trouvent à se vérifier partout où une com-

munication s'établit entre les esprits qui les ont conçues. Il n'est plus nécessaire que l'idée provienne des mêmes choses; il suffit qu'elle se réfère à des choses de même ordre. L'évidence collective doit reposer alors sur une base d'adhésions d'autant plus large que l'idée est plus générale ou plus abstraite. La raison réussit à dégager la vérité par des moyennes successives qui forment comme une hiérarchie de juridictions. Deux conditions principales, difficiles à séparer par une limite précise, seraient à considérer : l'une où l'opinion, s'exerçant surtout sur les idées générales, établit des évidences partielles, propres à des groupes, à des régions et à des époques; l'autre, où le sens commun, spéculant de préférence sur les idées abstraites, formule des notions qui rallient la grande majorité ou même la totalité des esprits.

A. — Identification des idées générales. De l'opinion publique.

Les idées générales s'échangent et se contrôlent dans le milieu, d'étendue variable, où elles se sont constituées. La conception d'une série de réalités, résumant toutes les perceptions qui s'y rattachent, procure aux esprits des notions en partie pareilles et qui tendent à s'identifier dès qu'elles s'expriment. Les jugements individuels, sans cesse mêlés, se coordonnent et trouvent leur synthèse dans l'opinion. De là résulte un état mental commun dans l'étude duquel on aurait à distinguer deux degrés en rapport avec ceux de la généralisation.

a. — Les notions d'espèce ne peuvent guère concorder que dans les milieux circonscrits où leurs éléments se rencontrent.

Là où les hommes sont en contact avec une espèce donnée de choses, ils doivent, par suite même de la ressemblance qui unit ses éléments, concevoir d'eux des idées

analogues ou peu différentes et, moins le groupe a d'extension, plus l'accord est facile à établir.

Quand, au lieu d'espèces, on considère des groupes d'espèces, la disparité des choses, sur une aire déjà moins restreinte, entraîne des variations d'idées et rend de légers désaccords possibles.

*b.* — Le contrôle des idées relatives aux genres s'opère partout où leur série est représentée, c'est-à-dire sur de vastes espaces s'il s'agit de genres proprement dits ou dans le monde entier s'il s'agit d'ensembles.

Toutefois, comme ces notions sont d'autant moins précises qu'elles sont plus générales, la difficulté de s'entendre augmente vite à mesure que la somme des ressemblances décroît et les idées les plus étendues n'ont qu'une évidence sommaire, à condition d'éliminer toutes les diversités spécifiques.

Ainsi se forment, aux degrés successifs de la généralisation, des opinions locales et temporaires par lesquelles s'effectue la communauté d'idées propre à certains groupes sociaux. Les notions d'espèce, qui l'emportent par le nombre, sont régionales comme leur objet. Celles de genre ont plus d'extension, mais moins de justesse. Les premières manquent de diffusion et les secondes de netteté. Lorsque des esprits formés dans des milieux divers viennent à comparer leurs conceptions, ils sont surpris de les trouver si peu semblables. Supposez, par exemple, que l'on puisse mettre en présence et en relation un nègre du Soudan, un Peau-Rouge, un Esquimau, un Arabe du désert, un Chinois des provinces intérieures, un paysan russe, un ouvrier anglais... Rapprochez même, dans un pays comme la France, un campagnard et un citadin, un berger et un matelot, un commerçant et un artiste... Faute d'idées communes, il leur sera bien difficile de se comprendre. Ayant pour ainsi dire vécu dans des mondes distincts, ils

sont étrangers les uns aux autres et conçoivent la plupart des choses différemment. La relativité de nos concepts les fait dépendre de tout ce qui sert à les produire et la disparité des idées générales reflète la dissemblance des milieux. Les inférences qu'on en peut tirer ne sont donc justes qu'en partie et ont besoin d'être vérifiées. L'opinion publique, où toutes sont versées pêle-mêle, leur fait subir un premier triage et s'applique à séparer la vérité de l'erreur. Elle rejette aisément le détestable, mais elle accepte volontiers le médiocre et ne discerne pas toujours l'excellent. Le résultat est une moyenne qui fait loi pour la majorité des esprits.

Quelle est, au point de vue de la science des choses, la valeur de l'opinion ? La diffamer et en médire est un lieu commun philosophique, la plupart des philosophes ayant eu le malheur de vivre en querelle réglée avec elle, sans que, d'ordinaire, on voie bien clairement de quel côté furent les torts. Pascal l'appelle « une maîtresse d'erreur et de fausseté, d'autant plus fourbe qu'elle ne l'est pas toujours » (*Pensées*.) Quelques-uns pensent donner en la bravant un signe de force ; la foule, au rebours, suit aveuglément ses décisions. C'est là une double méprise. L'opinion ne mérite ni tant de dédain, ni tant de confiance. Elle ne représente ni l'erreur, ni la vérité, mais un composé des deux. Si les hommes éclairés, parfois en avance sur elle, ont le droit de la critiquer, le vulgaire trouve en elle un guide moins incertain que la plupart des jugements particuliers. Inférieure au sens commun, l'opinion publique est, en général, supérieure au sens individuel. Sa fonction consiste à recueillir toutes les idées et à exprimer leur moyenne probable. Ce n'est pas une maîtresse d'erreur, mais une ouvrière de vérité, ouvrière parfois malhabile quoique toujours bien intentionnée. Quand on l'accuse de tromper, c'est qu'on se trompe soi-même en lui attribuant plus d'autorité qu'elle n'en a. Loin d'édicter des lois, elle propose seulement des avis (« opinion » de *opi-*

*nari*). Ses arrêts, sujets à révision, formulent, non la vérité définitive, indubitable, mais la vérité en préparation, relative et provisoire. Ce mélange de faux et de vrai qui caractérise l'opinion, entraîne des débats sans fin entre les esprits, car les uns, ne voyant en elle que la part de vraisemblance, la préjugent vraie en tout et y croient à l'égal des choses les plus manifestes ; les autres, plus frappés de ce qu'elle renferme d'erreur, la déclarent fausse de tous points et la rejettent en entier ; quelques-uns enfin, démêlant à la fois en elle des motifs de croire et des motifs de douter, réservent leur adhésion en attendant que le jour se fasse.

Le mal, au surplus, n'est pas sans remède et l'opinion porte avec elle son correctif. Pour éviter ses méprises, il suffit de confronter des opinions diverses. Chacune d'elles, prise à part, se donne pour seule exacte ; mais, dès qu'on les oppose, leur crédit ne se soutient plus. Comme elles varient d'âge en âge et de place en place, c'est assez de changer de siècle ou de lieu pour être édifié sur leur certitude. La contradiction leur est salutaire et les achève. Selon la formule de la dialectique hégélienne, leur vérité n'est complète que lorsqu'on y a fait entrer son contraire. Le sage doit donc, autant que possible, sortir du milieu restreint où, isolées, elles font illusion, les comparer, s'affranchir ainsi des préjugés de classe, de nation ou de croyance, et viser en toutes choses à une opinion humaine, universelle et constante. Puisque l'évidence parfaite devrait rallier tous les esprits, la vraisemblance la plus grande sera celle qui réunira le plus d'adhérents. L'opinion publique procède ainsi par refontes successives et s'épure en se généralisant. Elle se rapproche par degrés du sens commun et finit, quand toute contradiction cesse, par se confondre avec lui.

## B. — Identification des idées abstraites. Du sens commun.

L'opinion, naturellement précaire, trahit sa faiblesse par la variabilité de ses jugements. Or, l'unique vérité capable de contenter la raison serait celle qui ne change pas. Il faudrait donc éliminer de la multitude des opinions ce qui est local, passager, objet de contestation, et retenir seulement ce qui est admis d'un commun accord. Les idées abstraites réalisent le mieux cette condition, parce que, nées de l'entendement et faisant pour ainsi dire partie de la constitution même de l'esprit humain, elles trouvent leur unité dans sa nature. Les notions de cet ordre sont formulées par ce qu'on nomme si bien « le bon sens », le sens supérieur de l'évidence. On a défini le bon sens « la moyenne rigoureuse de l'esprit humain dans l'univers et dans tous les temps » (Lamartine, *Entretiens de littérature*, Boileau); mais il est mieux qu'une moyenne, c'est-à-dire un milieu entre des extrêmes; il est une règle et ne souffre pas d'exception. Au rebours de l'opinion, qui exprime des vraisemblances sans exclure leur contradiction, il proclame l'évidence invariable.

Les vérités de sens commun, reconnaissables à ce trait que nul ne les met en doute, sont bien moins nombreuses que, d'ordinaire, on ne le croit. Chacun invoque le bon sens à l'appui de ses allégations, désireux d'avoir tout le monde de son côté, même en lui faisant un peu violence; mais, dès que surgit un contradicteur, il ne faut plus parler de sens commun, puisque l'unanimité serait sa loi. Dans les évidences qu'il confirme, on doit distinguer le cas où l'accord résulte d'une adhésion à peu près générale, mais non obligatoire, et celui où il est universel et forcé.

a. — Le sens commun, s'exerçant sur des données abstraites, formule une multitude de jugements qui circulent

de bouche en bouche et que la tradition perpétue sans qu'ils soient trop démentis.

Les plus simples de ces inférences seraient représentées par les proverbes ou adages populaires, monnaie de la sagesse courante qui compose un trésor de science pratique où il entre souvent beaucoup d'observation et d'esprit. Chacun les répète parce qu'il les trouve conformes à son expérience personnelle. Cependant il leur arrive d'être parfois en défaut dans l'application ou même de se contredire les uns les autres. Le consentement des esprits à leur égard cache bien les dissidences secrètes et l'on a pu prendre, d'une façon piquante, le contre-pied de certains proverbes sans sortir de la vérité.

Au-dessus des proverbes, œuvre anonyme de foules, se placeraient les aphorismes, sentences, préceptes, maximes, etc., qui, édictés par une sagesse supérieure, ont un caractère plus marqué de réflexion. Ils constituent le fonds commun des littératures morales et se trouvent exprimés chez la plupart des peuples parvenus à un certain niveau de civilisation.

Ces deux sortes de vérités sont encore relatives, et se rapprochent de l'évidence absolue sans pouvoir l'atteindre. Pour y parvenir et rencontrer l'unanimité véritable, il faut franchir un dernier degré.

*b.* — Les vérités les plus certaines sont celles qui rallient tous les suffrages. Néanmoins, ici même, il importe de faire une distinction, suivant que l'unanimité existe seulement en fait ou qu'elle s'impose à titre de loi. Dans le premier cas, on a une croyance universelle, et, dans le second, un axiome.

Certains ordres de phénomènes, d'une constance et d'une généralité remarquables, ont donné lieu à des conceptions longtemps admises par tous comme des vérités manifestes ; mais, par cela même qu'elles concernaient des faits ou des explications de faits, elles étaient contingentes.

Nous avons, par exemple, une confiance parfaite en la stabilité du sol qui nous porte et l'expérience de chaque jour la confirme. Elle se trouve pourtant démentie quand un tremblement de terre se produit, et le trouble qui s'empare alors de nous tient moins au danger couru qu'à l'incertitude brusquement révélée d'une notion fondamentale. La croyance à la fixité de la terre, tenue pour indubitable pendant tant de siècles, ne constituait pas davantage, quoique unanime, une vérité nécessaire, et la théorie de la rotation du globe, qui rend mieux compte de l'ensemble des mouvements célestes, a fini par prévaloir, malgré l'illusion contraire.

Les seules vérités absolues sont les axiomes, expression abstraite des lois de l'entendement. En tout le reste, on est exposé à des dissentiments, à des réserves, à la contradiction et à l'erreur ; ici, non. En matière d'axiomes, l'accord est universel et l'on ne concevrait pas qu'il pût être un instant troublé. Ce qui caractérise les axiomes, ce n'est plus un simple fait d'unanimité qui n'exclut pas forcément l'erreur ; c'est l'impossibilité d'admettre la négative. La raison se refuse à supposer le renversement d'une vérité de cet ordre. Elle voudrait douter qu'elle ne le peut ; l'évidence s'impose ; c'est une loi à l'encontre de laquelle on ne saurait aller.

La vraie nature des axiomes ne doit pourtant pas faire illusion. On les a pris quelquefois pour des vérités à priori que l'intelligence tirerait de son propre fonds. Ce sont des généralisations d'expérience qui, portant sur la totalité des faits connus, ne laissent place à aucune exception. La nécessité des axiomes résulte de l'invariabilité des inférences sur lesquelles ils sont fondés. Ces notions, constatées dans l'ordre intégral des faits, ne livrent pas prise au doute et nous n'avons même plus le pouvoir de penser le contraire.

Parmi les vérités axiomatiques ou principes rationnels, on distingue : 1° Les axiomes logiques, dont la généralité

comprend tout. Tels sont : le principe d'identité : « ce qui est, est » ; le principe de contradiction : « ce qui est ne peut pas en même temps ne pas être » ; et le principe d'alternative : « il faut qu'une chose soit ou ne soit pas ». Le principe de contradiction est surtout important par ses conséquences. Il domine l'ensemble de nos conceptions. Les choses sont ce qu'elles sont et ne sauraient être le contraire. La négation de cet axiome rendrait tout indéterminé. On ne pourrait plus dire qu'une chose est blanche ou noire, ceci ou cela ; elle serait l'un et l'autre à la fois, serait tout et ne représenterait plus rien de distinct pour la pensée. — 2° Des axiomes mathématiques, relatifs aux lois élémentaires des grandeurs. Ils procèdent de celui d'identité dont ils spécifient des cas. Mentionnons : le principe d'égalité : « le tout et la somme de ses parties sont égaux » ; « deux choses égales à une troisième sont égales entre elles » ; le principe de différence : « la partie est moindre que le tout » ; et le principe de subordination : « ce qui est composé de parties se compose des parties de ces parties », ou « ce qui est vrai d'une série d'objets est vrai de tous les objets de cette série ». C'est là une loi logique de premier ordre sur l'autorité de laquelle toutes les analyses se fondent. — 3° Enfin les axiomes qui concernent les connexions de faits, comme : le principe de causalité : « tout effet a sa cause » ; « toute cause est suivie d'un effet » ; « la cause cessant, l'effet disparaît... » ; et le principe d'uniformité : « le cours de la nature est uniforme et constant » ou « tout phénomène a sa loi... ». St. Mill appelle cette inférence « le pilier de la science inductive ». (*Logique*, t. I, p. 369).

Les axiomes, sortes de truismes transcendants, semblent au premier abord de peu de valeur ; néanmoins, comme ils résument ce que l'expérience universelle a trouvé de plus exact, leur importance est extrême. L'ordre entier des vérités démontrées repose sur ces notions générales sans lesquelles l'art même de raisonner manquerait de

fondement. La science, qui a besoin d'un point fixe de certitude pour y rattacher la chaîne de ses déductions logiques, le trouve dans les axiomes et ne le trouve que là. Toute la suite de nos connaissances positives dérive de ces sommets de l'évidence, comme les grands fleuves qui prennent leur source dans les plus hautes montagnes.

## CONCLUSION

Il resterait à établir, par une synthèse finale, l'unité de l'ensemble des notions ontologiques. Au terme de la généralisation et de l'abstraction, toutes les réalités se confondent dans l'idée d'une réalité suprême, expression de l'être infini et absolu. Si, en effet, on écarte les attributs qui distinguent les choses dans le détail, on est contraint de les toutes identifier par la considération, seule essentielle, de l'existence. Elles se ressemblent par cela même qu'elles sont, car il n'y a pas deux manières d'exister. Parvenue à ce faite, la pensée n'a plus de motifs pour opposer des catégories d'êtres, le moi et le non-moi, l'âme et le corps, l'esprit et la matière, Dieu et le monde. S'ils ont une réalité quelconque, ce sont des êtres au même titre, ou plutôt c'est el même être vu sous des aspects divers. Les antinomies de la Métaphysique tiennent à ce qu'elle érige indûment des attributs en entités. Il n'y a point d'essences différentes; l'être, pris en soi, est simple et ne se divise pas. Il n'est ni esprit, ni matière; il est. Cela comprend tout et la raison ne peut rien concevoir qui ne soit pas lui. Nous sommes sans doute libres d'appeler « esprit » l'être perçu par le sens intime et « corps » ce même être perçu par les sens externes, si cette disjonction nous aide à le mieux saisir dans la dualité de ses attributs; mais il ne faut pas oublier que ce sont là des attributs de l'être, non des êtres véritables, et que ces aspects de l'existence sont seulement séparés par un

mode de perception, presque par une distinction verbale.

La conclusion de l'Ontologie générale aboutit donc à faire concevoir tous les êtres comme constituant un être unique, sans limitation dans l'étendue, sans terme dans la durée, immuable à travers l'incessante mobilité des choses. Les individualités ou leurs séries, qui tour à tour, apparaissent et disparaissent, sont de simples phénomènes, des modes de l'existence qui marquent le passage ou l'écoulement de l'être. L'être, réduit à l'existence pure, est un, infini, absolu. Il possède virtuellement tous les attributs sans être déterminé par aucun. Il n'est pas en un lieu plus qu'en un autre; il remplit l'espace et rien ne le borne. Il n'arrive ni ne passe, mais dure éternellement. Par lui, les êtres se soutiennent ou plutôt il est le seul être, la réalité vraie dont les choses ne sont que l'ombre ou le reflet. Cet être, la raison l'affirme, sans pouvoir le définir ou le comprendre, et doit se borner à lui faire dire, comme l'inscription antique du temple de Saïs : « Je suis tout ce qui a été, tout ce qui est, tout ce qui sera, et nul n'a connu ma nature! »

## CHAPITRE III

### MÉTHODE DE L'ONTOLOGIE POSITIVE. DE L'INTUITION

Nous avons indiqué l'objet et tracé le programme de l'Ontologie positive, il nous reste à exposer sa méthode.

Quand on réfléchit à ce que les notions d'existence ont de primordial et de simple, on voit que le moyen de les obtenir devait n'exiger ni application ni étude. A. Comte s'est mépris lorsqu'il a présenté le système entier de nos connaissances comme le produit de méthodes investigatrices. La science première fait évidemment exception. La raison, en effet, ne possède pas, dès le début, assez de clairvoyance pour ordonner un plan de recherches, de sagacité pour reconnaître sa voie ni de force pour y marcher d'un pas assuré, car cela impliquerait beaucoup de savoir préalable et de réflexion. L'esprit, dans son état initial de dénûment et de faiblesse, traverse forcément une phase de passivité. Alors qu'il est incapable de chercher la vérité, il faut que la vérité vienne le chercher, l'arracher comme par contrainte à son sommeil et à sa torpeur. Le point de départ étant une ignorance absolue, nos premières notions ne peuvent consister qu'en impressions subies et en gains spontanément acquis. Une période de compréhension directe est nécessaire pour faire passer l'intelligence du régime de l'instinct aveugle à celui de l'attention réfléchie

et de l'imbécillité originelle à une curiosité raisonnée qui suppose un premier fonds et n'est que le désir de l'accroître. Avant d'entreprendre des investigations méthodiques, l'esprit doit donc exercer ses forces naissantes dans le champ de l'évidence immédiate; avant de déduire il faut poser des axiomes; avant d'observer, voir; avant de poursuivre des vérités cachées, constater les vérités manifestes. La méthode qui nous les livre et que la nature suggère s'appelle l'« intuition ».

Comme le sens du mot l'indique, l'intuition (de *in tueri* voir dans) est la vue directe de la vérité, le sens de l'évidence. Elle saisit les choses sans effort ou plutôt la connaissance des choses pénètre d'elle-même dans l'esprit dès qu'il s'ouvre à leur accès. Nous disons alors que l'évidence nous « frappe », que la vérité « saute aux yeux », métaphores énergiques par lesquelles le langage exprime à merveille ce qu'il y a d'actif en elles, de passif en nous. Cette manière de connaître, beaucoup plus étendue qu'on ne serait de prime abord tenté de le croire, suffit à déterminer la production, le classement, l'association et le contrôle des idées.

L'intuition la plus élémentaire s'exerce sur les données de la sensation. Comme l'idée résulte alors d'un rapport direct établi entre le sujet connaissant et l'objet connu, elle a une netteté, une exactitude parfaites. Le rôle de l'intelligence dans l'acte de la perception serait comparable à celui de la plaque sensibilisée qui fixe l'image des choses sous l'influence de la lumière. Par l'effet même de l'impression subie, une idée adéquate se forme dans l'esprit sans que son initiative y prenne part, idée qu'il ne pourrait ni provoquer en dehors des conditions requises ni supprimer ou modifier une fois perçue.

La plus directe et la plus claire des intuitions nous révèle notre existence par le témoignage du sens intime. Il n'y a même pas lieu de distinguer ici un sujet et un objet;

les deux se confondent. La notion du moi, qui précède toutes les autres, naît spontanément en nous, car il serait contradictoire de supposer qu'elle pût être cherchée. Le moment où elle apparaît marque l'éveil de la pensée. La « conscience » ou science de soi par soi (*cum scientia*) est moins le produit d'une perception que le point de départ de la perception. Ses données portent un cachet d'irrécusable évidence.

L'intuition du non-moi est déjà moins sûre. Elle préjuge du dehors la réalité des choses. Tandis que la connaissance du moi va de l'affirmation de son être par le sens intime à la constatation de ses attributs par les sens externes, la connaissance du non-moi va de la constatation des attributs, seuls apparents, à l'affirmation de réalités non certifiées par la conscience. Elle fait donc un détour pour arriver à son but et court le risque de s'égarer en chemin. Néanmoins, comme les divers sens se prêtent un mutuel appui, se confirment les uns les autres et, au besoin, se contrôlent, ils justifient la confiance que, d'instinct, nous leur accordons. L'évidence qui nous fait croire à l'existence des choses sur la foi de la perception est presque aussi grande que celle qui nous donne la certitude de notre propre existence. Toute tentative pour l'infirmier à l'aide du raisonnement serait vaine, car le raisonnement ne saurait prévaloir contre la raison, ni une évidence dérivée contre l'évidence directe.

La méthode intuitive se modifie dans le procédé par lequel la conception groupe les produits de la perception. En distribuant par classes les réalités et leurs attributs, l'esprit devient actif, de passif qu'il était d'abord, et met quelque chose de lui dans la connaissance. Cependant la spontanéité domine encore dans le travail de la généralisation et de l'abstraction. La genèse de nos concepts s'accomplit à notre insu et beaucoup de réflexion est nécessaire pour comprendre comment elle s'effectue.

Une autre mode d'intuition qui suppose un fonds d'idées

acquises, compare les notions dont l'esprit dispose, scrute leurs rapports et cherche à établir leur concordance logique. Le procédé de l'induction, où la raison intervient plus activement encore, est seul qualifié de « méthode ». Il atteint en effet la limite où l'œuvre de la réflexion commence. Pourtant, la tâche de l'induction dans la science première est plus intuitive que raisonnée. Nos idées s'associent d'elles-mêmes dans le rêve, la rêverie et l'inspiration. L'attention, qui les dirige en partie, résulte d'une contrainte imposée par la volonté à leur libre enchaînement, et c'est pourquoi l'intelligence se fatigue si vite de cet effort.

Enfin, une sorte d'intuition collective établit l'échange et l'accord des idées entre les esprits. Depuis Aristarque, les grammairiens s'appliquent à décomposer le mécanisme des langues et le résultat de leurs analyses a été de formuler les règles qui président à l'expression des idées ; mais ces règles, l'esprit humain les portait en lui et les appliquait d'instinct, comme le font les enfants lorsqu'ils s'essayaient à parler et les hommes mêmes dans les changements insensibles qu'ils apportent à leurs idiomes traditionnels. L'établissement et le progrès du langage sont dus à une intuition spontanée. Il n'y a pas jusqu'ici d'exemple d'une langue créée avec réflexion et adoptée par convention. Le langage, cet admirable instrument de la pensée, fut, selon l'expression de Turgot, « l'œuvre d'une raison qui n'était pas présente à elle-même. » L'esprit humain se rendait si peu compte de ce qu'il faisait en constituant les langues, qu'il a cru longtemps n'y avoir pris aucun part et attribué le mérite de son plus bel ouvrage à des dieux<sup>1</sup>. « L'homme primitif, dit Max Muller, possédait la faculté de donner une expression articulée aux conceptions naturelles de son esprit.

1. Platon croit que la création du langage dépasse le pouvoir de l'homme et l'attribue à la divinité. C'est encore l'opinion de Condillac, de Bonald, de Schlegel, etc.

Cette faculté n'était pas son ouvrage. C'était un instinct, un instinct de l'esprit, aussi irrésistible que tous les autres instincts. Le langage, en tant qu'il est une production de cet instinct, appartient au royaume de la nature. » (*Science du langage*, p. 386.)

Une dernière application de la méthode intuitive fait discerner, dans la multitude des jugements particuliers, ce qu'ils ont de vérité relative et en résume dans l'opinion la vraisemblance moyenne. L'empire de l'opinion s'établit de lui-même et la plupart des hommes le subissent avec une docilité d'autant plus grande qu'ils ont moins conscience de leur asservissement. Le bon sens même ne raisonne guère. Il n'en a pas besoin et n'est jamais plus infailible que lorsqu'il cède à ses lois sans savoir qu'il a des lois.

Ainsi l'intuition, bornée à la claire vue de l'évidence, a sur les méthodes d'investigation l'avantage d'arriver directement à la connaissance de la vérité. L'effort et la réflexion lui sont inutiles. Elle trouve les choses sans avoir à les chercher. Il nous suffit d'éprouver des impressions pour percevoir des idées, de les réunir pour les concevoir dans un certain ordre, de combiner ces notions pour établir des inférences et de les exprimer pour les soumettre à un contrôle universel. Nulle recherche suivie, nulle démonstration ne sont pour cela nécessaires. Elles ne seraient même pas praticables, parce que la recherche suppose un but, des moyens concertés d'action, et la démonstration, un point de départ certain. Les vérités de l'Ontologie constituent des principes qui, comme tous les principes, se constatent, mais ne se démontrent pas. Elles servent au contraire à démontrer tout le reste. La fonction de la science première ne consiste donc pas, ainsi que le croient communément les philosophes, à trancher des questions obscures, mais bien à recueillir des vérités manifestes. Voltaire accuse les métaphysiciens de méconnaître

deux fois l'évidence en faisant « profession de douter des choses les plus claires et de connaître les plus douteuses » (*Traité de métaphysique*, 1734). Le bon sens évite ces écueils parce qu'il ne va pas au delà des questions de réalité. Or, les faits d'existence sont tenus de porter avec eux leur certitude, car ils n'admettent pas d'autre preuve que leur évidence même, et nul artifice de logique ne réussirait soit à l'infirmier quand elle s'impose, soit à la suppléer quand elle manque.

Les vérités que l'intuition procure sont conséquemment les plus sûres, les mieux établies. L'esprit les saisit d'une prise immédiate et n'est pas exposé aux éventualités d'une recherche, aux hasards d'une poursuite, aux chances d'une découverte, c'est-à-dire aux lacunes ou aux méprises d'une démonstration presque toujours imparfaite. Tout se passe au grand jour, en pleine lumière. Aucune question de mesure, d'interprétation et d'explication ne complique le problème, ou plutôt il n'y a pas de problème, il n'y a que des solutions manifestes, éclatantes. Les choses sont ou ne sont pas, point de milieu. Leur réalité ou leur non-réalité se résout en affirmation ou en négation catégorique. Entre ces termes absolus et contradictoires, il n'y a pas lieu d'hésiter lorsque l'intuition prononce sous la garantie de l'évidence. La vérité est telle, on le voit, on le sent, on le sait; rien n'est plus certain.

Ainsi l'Ontologie a, dès l'origine, dans la mesure [de l'évidence, le privilège d'une entière certitude. Elle n'est pas, comme les sciences suivantes, obligée de se frayer, à travers des obstacles sans nombre, un chemin pénible vers la vérité. La théorie des trois états dont A. Comte a prétendu faire la loi de l'évolution intellectuelle, ne concerne pas la science première qui, positive dès le début, n'a pas eu à traverser de phases théologique et métaphysique. Ici même la loi supposée subirait plutôt une sorte de renversement, car les vérités initiales sont les plus certaines et

les inférences finales les plus suspectes. Tandis, en effet, que les données de la perception font connaître sûrement l'existence des réalités, leur conception abstraite conduit à la métaphysique et les métaphores du langage se changent en mythes. L'évidence n'est entière qu'au point de départ, dans la conscience du moi. A mesure que la pensée s'éloigne de ce centre, la lumière décroît, l'incertitude des notions augmente et, au sommet le plus élevé de la science, les vérités de sens commun se réduisent à quelques axiomes.

L'intuition n'a donc qu'une aptitude restreinte et notre savoir serait court s'il devait se réduire à constater des évidences. Au delà du champ étroitement circonscrit des vérités manifestes s'ouvre le domaine immense du problématique et de l'incertain. Lorsque la curiosité, mise en éveil par ses premiers gains, voulut porter de ce côté ses explorations, elle se vit exposée à de continuel égarments. Les anomalies de la perception, les lacunes de la conception, les témérités de l'induction, les malentendus du langage et les divergences de l'opinion multipliaient à l'infini les chances d'erreur.

Le sens intime est seul infaillible et, s'il ne nous apprend qu'une chose, l'existence du moi, il le fait avec une certitude absolue. Descartes a raison sur ce point. Nous connaissons l'esprit (ou le moi conscient) mieux que les corps, et la réalité du monde intérieur est plus manifeste pour la pensée que celle du monde extérieur. Les sens externes, déjà moins sûrs, sont sujets à l'illusion et aux méprises. Les appréciations du goût et de l'odorat sont extrêmement variables; l'ouïe a ses troubles; les jugements de la vue diffèrent sur les couleurs et les cas de daltonisme sont loin d'être rares<sup>1</sup>. De là résultent, dans

1. Les épreuves auxquelles les administrations des chemins de fer et de la marine soumettent leurs employés afin de vérifier s'ils sont aptes à discerner les signaux colorés, ont révélé ce fait imprévu qu'environ une personne

les données de la perception, des inégalités dont l'équation est difficile à établir.

Les disparités sont plus fréquentes encore et mieux accusées parmi les notions subjectives. La conception est sans doute un miroir fidèle où les réalités perçues se réfléchissent sans se fausser ; mais chaque esprit généralise ou abstrait dans des conditions qui lui sont propres et qui, même pour lui, changent selon le lieu, le temps et les circonstances. L'idée, générale ou abstraite, se modifie incessamment par l'adjonction de données nouvelles et, toujours inachevée, varie suivant l'état d'information. Il y a en elle une part d'erreur qui tient à la dissemblance partielle de ses éléments. La constitution des groupes suppose pareilles des choses qui ne sont pas identiques et dont on néglige les différences. De plus, comme la généralisation admet, outre le réel connu, tout le possible ignoré, elle anticipe sur la connaissance de l'ensemble, non sans péril pour la vérité. On sait combien sont sujets à se tromper ceux qui concluent trop précipitamment du particulier au général et jugent du tout par une de ses parties : « *dolus latet in generalibus.* » De son côté, l'abstraction crée, avec les attributs idéaux, des êtres fictifs. L'esprit humain, après avoir abstrait les réalités, réalise des abstractions et, dupe de ses propres artifices, prend de purs concepts pour des êtres véritables.

L'induction, si efficace pour étendre nos connaissances, est entachée de fâcheuses incertitudes. Ses inférences, plus ou moins conjecturales, préjugent la vérité. Marchant à l'aventure avec l'hypothèse pour guide, elle tente toutes les voies et s'égare le plus souvent, parce qu'une seule est la bonne. Le langage dit très bien « induire en erreur ». Les fausses analogies nous déçoivent continuellement et la plus forte part de nos méprises est imputable à cette cause. Parmi nos jugements de chaque jour, il en est bien peu

sur vingt est incapable de distinguer le vert du rouge (Bernstein, *Les sens*, p. 88).

d'exact. Le plus grand nombre consiste en simples postulats qui ne peuvent prétendre qu'à la vraisemblance, en « propositions » conjecturales soumises à l'approbation de nos semblables, mais rarement confirmées par eux.

Là encore, dans cette recherche de l'évidence collective, que de périls ! Les langues dont nous devons faire usage pour communiquer nos idées n'en sont pas les interprètes fidèles et nous font dire plus ou moins que nous ne pensons. Les termes du langage, au lieu d'avoir une valeur fixe, égale pour tous, n'ont qu'une acception moyenne et chacun reste libre de la modifier à son gré. On les a comparés à des boîtes où les esprits mettent ce qu'il leur plaît. S'agit-il d'échanger ces récipients avec leur contenu, on voit se produire des malentendus bizarres et des contestations sans fin. Nos discussions, dit Montaigne, sont surtout « grammairiennes » (*Essais*, liv. II, ch. XII). La multiplicité des sens et l'arbitraire des applications font que les hommes se comprennent mal tant qu'ils se contentent de parler. Ils ont beau converser sans cesse, dissenter, écrire, discuter et même se disputer, rien n'y fait. Ils ne se persuadent guère et tombent rarement d'accord. C'est qu'ils ne parlent pas la même langue quoiqu'ils se servent des mêmes mots. Les expressions ne sont pas adéquates aux idées et les trahissent à tout moment.

Enfin, l'opinion publique, arbitre insuffisant des opinions personnelles, consacre plus d'erreurs que de vérités. Ses contradictions en sont la preuve. Elle est trop souvent en faute pour mériter beaucoup de confiance et qui la prend pour règle de certitude se trompe à coup sûr.

Sans doute, pour ce qui est manifeste de soi, ces difficultés n'arrêtent pas et la vérité perce à travers tous les obstacles ; mais, là où l'évidence finit, la connaissance court bien des dangers. A moins d'impressions perçues dans des conditions pareilles, de conceptions relatives aux mêmes choses, d'inductions parfaitement légitimes, de mots employés dans le même sens et d'opinions con-

sacrées par l'adhésion universelle, il n'y a plus d'entente entre les esprits ni, par conséquent, de science certaine.

Le champ de l'évidence directe est donc fort restreint. L'intuition ne constate sûrement que la réalité des choses. Leurs rapports deviennent moins discernables à mesure qu'ils sont plus complexes. Dès qu'on aborde les questions de grandeur, de situation, de modalité, de composition, de structure ou de fonction, l'incertitude commence et les problèmes surgissent. Quand on affirme que le soleil existe, tous les clairvoyants tombent d'accord; un aveugle seul aurait le droit de douter; mais veut-on apprécier les dimensions ou la distance de l'astre, des dissentiments ne manqueront pas de se produire. Il faudra, pour y mettre un terme, recourir à des mesures précises en place de mots ambigus. Tel proclamera l'homme bon par nature; tel autre le déclarera pervers; un troisième conviendra qu'il est à la fois l'un et l'autre sans pouvoir dire au juste dans quelle proportion. Ces désaccords, qui éclatent sur tous les points où n'apparaît pas l'évidence, et ce sont les plus nombreux de beaucoup, font des opinions humaines un perpétuel conflit.

Si l'on était réduit aux lumières de l'intuition, le mal serait sans remède et tout ce qui n'est pas manifeste de soi resterait obscur. Mais heureusement nous pouvons arriver à la connaissance par un autre biais. Les sciences d'investigation, suppléant aux lacunes de la science première, s'appliquent à découvrir les vérités cachées et convertissent des inférences douteuses en notions indubitables. Elles parviennent à ce résultat en prolongeant les voies naturellement si courtes de l'évidence par divers procédés dont l'ensemble constitue la « démonstration ». Le moment où, dans un ordre quelconque de recherches, l'évidence cesse d'être intuitive ou directe pour devenir médiate et réfléchie, marque la création d'une méthode et l'institution d'une science.

L'Ontologie positive n'est donc qu'un point de départ

pour l'étude des choses. Sur la science première, restreinte aux vérités manifestes, s'élève une science seconde infiniment plus étendue, qui se compose de toutes les vérités démontrées. Sa fonction consiste à résoudre des problèmes, à dissiper les obscurités et à reculer de plus en plus les bornes de la certitude. Tout ce qui, faute de lumière, restait à l'état de notion confuse, objet de contradiction et de débat, va être repris à nouveau par elle, étudié méthodiquement sous divers aspects, traduit en formules exactes et ramené à l'évidence par le détour de la démonstration.

Comparées à la science initiale, les sciences dont nous allons maintenant nous occuper forment un groupe d'une réelle unité. Leur caractère commun est de chercher la vérité en s'aidant de méthodes raisonnées et d'étayer de preuves ce qu'elles veulent établir. Exposons, comme nous venons de le faire pour l'Ontologie, leurs objets, leurs programmes et leurs moyens d'investigation.



## LIVRE II

### MÉTROLOGIE OU MATHÉMATIQUE

SCIENCE DES GRANDEURS

---

### CHAPITRE PREMIER

#### DÉFINITION DE LA MATHÉMATIQUE

La seconde des sciences générales à constituer traite de la mesure des grandeurs. Voyons en quoi cette catégorie d'idées consiste et quel aspect elle fait connaître de l'universelle réalité.

La grandeur peut se définir « un rapport de coexistence ». Lorsque, en effet, l'esprit a constaté des êtres distincts, il est logiquement amené à les unir par deux sortes de relations nécessaires : la notion de nombre résulte du fait de leur réalité multiple et celle d'étendue de l'attribut d'impénétrabilité qui les particularise et permet de les percevoir séparément. Le nombre exprime les quotités d'êtres et l'étendue des dimensions qui les limitent. La grandeur les comprend l'un et l'autre.

L'idée de grandeur procède ainsi de celle d'existence. Elle fait l'analyse de ses données et spéculé sur leurs rapports. Répartissant le concept sommaire de l'être entre des séries d'êtres, elle établit, au double point de vue du

nombre et de l'étendue, des inégalités dont la pensée a besoin de se rendre compte afin de pouvoir apprécier l'importance relative des séries. Le progrès des connaissances ontologiques dut conduire à instituer en étude spéciale cette manière de considérer les choses qui se rattachait logiquement à la précédente.

Au début, quand le moi se trouve réduit à la conscience de lui-même, une notion aussi simple exclut toute idée de grandeur, car elle est unique, indéterminée et ne peut se comparer à rien. Mais lorsque des perceptions variées ont révélé, dans le moi, des états de conscience, des parties, des manières d'être; puis, dans le non-moi, une multitude croissante d'objets caractérisés par des attributs divers, cette pluralité de notions oblige l'esprit à concevoir les choses comme les manifestations partielles d'une réalité générale. La raison décompose alors l'idée de l'être en celle d'une quantité d'êtres susceptibles de dénombrement, de limitation et de mesure.

L'étude de cette donnée nouvelle importait beaucoup à la connaissance des choses. Si, en effet, toutes les réalités se ressemblent en ce qu'elles existent au même titre, leurs groupes peuvent beaucoup différer en nombre et en dimensions. La grandeur constitue même pour eux le principal trait de dissemblance, puisque ses inégalités peuvent aller de l'infiniment grand à l'infiniment petit, c'est-à-dire de presque tout à presque rien, sans néanmoins se confondre jamais avec l'un ni avec l'autre de ces extrêmes, parce que alors il n'y aurait plus de grandeur. Aucun autre caractère ne comporte une échelle de variations aussi étendue. Pour se faire une idée juste des choses et se rendre compte avec précision des existences il fallait donc les examiner sous cet aspect spécial.

La mesure théorique des grandeurs était, après la constatation des réalités, le problème le moins complexe et le plus facile à résoudre. Il suffisait pour cela d'un artifice logique et le procédé de la déduction, qui se lie à celui de

l'induction, se borne pour ainsi dire à le prolonger. Il n'y a pas, dans le système entier des sciences d'investigation, de vérités plus accessibles, mieux démontrées, aussi voisines de l'évidence, que celles auxquelles on arrive en spéculant sur les grandeurs.

La science de l'existence des choses une fois établie, l'étude des rapports de coexistence ne devait donc pas tarder à naître; mais elle n'aurait pas pu s'organiser seule et sans secours, comme A. Comte le suppose quand il lui attribue la priorité dans le système des connaissances humaines. Son institution impliquait des données préalables, des principes de raisonnement, un esprit déjà exercé. La Mathématique se fonda lorsque l'Ontologie fut en état de lui fournir les conceptions abstraites et les formes de langage au moyen desquelles les grandeurs se déterminent. La raison aborda ces recherches dès qu'elle devint capable de réflexion et nulle œuvre ne pourrait mieux servir à marquer le trait essentiel de ses aptitudes. Dans les langues germaniques, le nom de l'homme (*man*) signifie « le mesureur » (Max Müller).

Malgré le lien de dépendance qui unit la science des grandeurs à celle des existences, il est aisé d'assigner à chacune d'elles sa fonction.

L'Ontologie se borne à constater la réalité des choses; elle ne la perd jamais de vue. Toutes nos idées s'y réfèrent, qu'elles soient objectives ou subjectives, qu'elles consistent en inférences personnelles ou en évidences générales. La perception signale les êtres particuliers et leurs attributs concrets; la conception classe ensuite ces données; l'induction les associe et le sens commun en dégage des vérités universelles. A travers les phases de cette élaboration d'idées, la science première ne sort pas un instant de l'étude des réalités. C'est là son domaine propre et, dès qu'elle en passe les limites, l'évidence lui échappe. Ainsi réduite à certifier des existences, l'Ontologie n'a pas

à considérer les grandeurs, car, pour avoir le droit d'affirmer la réalité des choses, il n'est pas besoin de savoir si elles sont grandes ou petites; il suffit qu'elles soient. La détermination de leur grandeur n'ajouterait rien à la certitude. Le seul point important est de décider si les choses existent ou n'existent pas. La question se tranche par un oui ou par un non sans qu'il soit besoin de mesure et même sans que la réponse en admette, puisqu'elle doit être absolue dans les deux cas. Aussi, quoique la science initiale dispose les êtres par séries et tour à tour les groupe et les sépare dans le travail de la généralisation, elle n'a que faire de les dénombrer ou de figurer leurs dimensions. Cela n'est pas nécessaire pour la fin qu'elle se propose. Elle se contente d'établir les notions d'unité, de pluralité, de dimensions et de figure, posant ainsi le problème de la grandeur sans être apte à le résoudre parce que, faute d'évidence immédiate, l'intuition n'y suffit plus. Il faut une démonstration, et une démonstration exige du raisonnement, c'est-à-dire un changement de méthode.

Au rebours de l'Ontologie, la Mathématique, laissant de côté la réalité des choses, spéculer sur des idéalités pures, sur des concepts de l'entendement dont l'ordre, exclusivement logique, ne se prête qu'à une investigation rationnelle. Les recherches de la science ne pouvaient pas, en effet, porter sur des grandeurs concrètes, par ce motif que leur étude serait à la fois peu praticable et peu instructive. Le monde ne nous offre pas d'objets qui se ressemblent de tous points et puissent figurer dans des nombres à titre d'unités de même valeur. Pour ramener à des conditions de stricte similitude les éléments de la grandeur qui, dans les choses, se lient à d'inévitables disparités, il fallait supprimer par abstraction les différences qui les distinguent dans le détail et considérer seulement en elles le fait de l'existence, identique chez tous les êtres. Quant à la grandeur étendue, la mesure

des dimensions réelles par voie de confrontation directe rencontrait le plus souvent d'insurmontables difficultés. La plupart des corps se refusent à un rapprochement effectif et, même dans les cas où il est possible de l'obtenir, la puissance bornée de nos sens ne nous livre que des résultats d'une précision imparfaite. Enfin, à procéder de la sorte, on n'irait pas au delà de déterminations particulières, sans utilité pour la science qui aspire à des connaissances générales et prétend formuler des lois.

L'unique moyen d'établir une mesure théorique des grandeurs consiste à comparer des quantités ou des figurations abstraites et à scruter leurs rapports. Ces rapports, une fois connus dans l'ordre idéal, se plient, dans l'ordre réel, à des applications sans nombre; mais la mesure des choses n'est pas l'objet de la Mathématique qui se confine dans la théorie et abandonne la pratique aux sciences de faits. Si donc l'Ontologie est la science des réalités positives, la Mathématique est la science des idéalités logiques. La première procure la connaissance des êtres sous forme d'idées; la seconde raisonne sur les plus générales et les plus claires de ces idées. L'une part des données de la perception pour s'élever jusqu'aux axiomes; l'autre va des axiomes à leurs plus lointaines conséquences.

La grandeur se distingue en outre de l'existence en ce qu'au lieu d'être absolue et infinie, elle est relative et finie. L'idée de l'être, qui précède toutes les autres, ne s'explique par aucune autre et se soutient elle-même. On la dit, en conséquence, absolue. Elle est également infinie, car, prise à son point de départ, dans la conscience du moi, ou au terme de la généralisation, dans la conception de l'être universel, elle constitue un tout qui, dans le premier cas, ne se connaît pas de parties, et, dans le second, ne comporte pas de multiples. La notion de l'existence se trouve ainsi comprise entre l'affirmation d'un être indivis et celle

d'un être sans limites. Elle reste donc indéterminée et vague, insaisissable dans son essence pour la pensée. Nos idées particulières des choses semblent exclure, il est vrai, ce caractère d'infinité, puisqu'elles constatent une multitude de réalités qui se bornent réciproquement; mais, quand nous parlons d'êtres finis, c'est que nous associons, dans leur connaissance, l'idée de grandeur, en étendue ou en durée, à celle d'existence. L'existence, prise en soi, n'admet ni terme, ni mesure. Elle est hors des conditions de la grandeur.

La grandeur, au contraire, est relative et bornée. Elle n'existe point par elle-même; elle exprime simplement un rapport de coexistence, rapport qui varie selon les termes de comparaison. Rien n'est grand ou petit d'une manière absolue : tout est relatif. Telle chose, jugée grande par rapport à des choses moindres, paraît petite par rapport à des choses plus grandes. En outre, la grandeur est toujours finie et ne se concevrait pas infinie. Elle implique une limitation qui l'arrête et permet à l'esprit de la saisir. Un nombre, par cela même qu'on l'énonce, une dimension, par cela même qu'on la figure, se réfèrent nécessairement à une grandeur déterminée, exclusive de l'infini. « Le véritable infini, dit Leibnitz, ne se trouve point dans un tout composé de parties... Il n'y a point de nombre infini <sup>1</sup>, ni de ligne ou autre quantité infinie si on les prend pour des touts véritables... Le vrai infini, à la rigueur, n'est que dans l'absolu qui est antérieur à toute composition et n'est point borné par l'addition des parties. » (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, liv. II, ch. xvii.)

La grandeur sera donc le trait distinctif du fini, l'attribut de ce qui comporte du plus ou du moins. Infinie, elle serait incommensurable, incompréhensible. La pensée, incapable de faire entrer l'infini dans la notion de grandeur,

1. Cauchy en a donné cette preuve singulière : un nombre infini serait pair ou impair; dans les deux cas, il suffirait d'en retrancher une unité pour rendre l'infini fini, ce qui est absurde.

est obligée de l'admettre, à titre de concept ontologique, mais doit renoncer à le mesurer. Il serait en effet contradictoire pour la raison que « l'infini » pût être « défini » et qu'on réussît à marquer les limites de ce qui n'a pas de limites. Les termes usuels de « nombres infinis », d'« infiniment grand », d'« infiniment petit », ..... ne doivent pas faire illusion. Ce sont des fictions du langage servant à désigner des quantités plus grandes ou plus petites que toute quantité assignable, mais qu'il faut éviter de confondre soit avec l'infini, soit avec rien, car entre eux il y a un abîme que nulle grandeur ne peut combler. Le calcul infinitésimal, loin de spéculer sur l'infini et d'en fixer la valeur, se contente de l'éliminer en assimilant des quantités indéfiniment décroissantes à des quantités finies qui en diffèrent infiniment peu. Il est donc irrationnel d'appeler une grandeur infinie. Ces expressions sont logiquement inconciliables. L'infini n'a pas de grandeur. Il est ; on ne saurait en dire autre chose. De son côté, la grandeur est nécessairement finie. « Quelque nombre, dit Pascal, quelque espace que ce soit, il y en a toujours un plus grand et un moindre, de sorte qu'ils se soutiennent tous entre le néant et l'infini, étant toujours également éloignés de ces extrêmes. » (*De l'esprit géométrique.*) Galilée a montré de même qu'en devenant infinie la quantité s'évanouit et cesse d'être ; que le seul nombre vraiment infini est l'unité ; que la circonférence d'un cercle infini serait une ligne droite et que, par conséquent, il n'y aurait plus de cercle (*Dialogo sulle scienze nuove, giornata*). En un mot, l'infini est ce qu'une grandeur ne peut pas être, ce qui dépasse toute grandeur concevable.

Pour éviter la confusion d'idées où l'on est exposé à tomber par suite des divers sens que l'usage attribue au mot d'infini il importerait de distinguer l'infini métaphysique et l'infini mathématique. Pour les métaphysiciens, l'infini, qui caractérise l'existence pure, est, comme elle, simple, absolu, exclusif de toute limite, soit dans l'espace,

soit dans le temps. Il n'a ni point de départ, ni terme. En raisonner serait chimérique; on ne peut que constater sa nécessité logique <sup>1</sup>. L'infini des mathématiciens se conçoit dans des conditions différentes : sa valeur est relative; il désigne seulement ce qui est au delà de toute grandeur déterminée. Mais, comme la grandeur implique un point de départ, où sa détermination commence, et se caractérise par l'aptitude à croître ou à diminuer, elle se développe en deux sens contraires, suivant qu'elle se rapproche ou qu'elle s'éloigne de son terme initial. De là résultent pour elle deux sortes d'infinis qui semblent opérer le dédoublement de l'infini métaphysique et nous le montrent sous les aspects différents de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. On se contente d'ordinaire de les opposer l'un à l'autre comme termes corrélatifs qui se balancent; toutefois l'analogie se trouve dans les mots plutôt que dans les idées, et la dissemblance de ces deux infinis est telle que le premier peut être un objet de connaissance, tandis que le second échappe à toute compréhension.

L'infiniment petit indique l'état des grandeurs parvenues au dernier degré d'atténuation concevable, c'est-à-dire extrêmement rapprochées d'une limite qu'elles ne sauraient atteindre sans s'évanouir. Cette limite, pour les nombres, sera zéro; pour l'étendue, un point. Une condition pareille se réalise incessamment sous nos yeux dans tous les phénomènes qui commencent ou finissent, apparaissent ou disparaissent. L'infiniment petit se conçoit donc clairement et sa loi régit l'universalité des choses. On peut en raisonner, établir même sa mesure, car il est permis de l'assimiler à rien quand il ne s'en distingue plus, et l'erreur est d'autant moindre qu'ils sont alors plus voisins.

L'infiniment grand, au rebours, a plutôt les caractères de l'infini métaphysique et tend à se confondre avec lui.

1. « Nommer une chose infinie, c'est donner un nom qu'on n'entend pas à une chose qu'on n'entend pas davantage. » (Cassendi, *objections* 5<sup>e</sup> aux *Méditations de Descartes*.)

Comme il s'éloigne de plus en plus de la limite posée au début et qu'aucun terme n'est assigné à sa progression, il se dérobe à l'analyse. La grandeur infinie va se perdre dans le tout absolu. Elle est, par conséquent, hors de la condition possible ou du moins concevable des choses et des phénomènes. Un nombre infini, l'espace illimité dans tous les sens, ne représentent rien de net pour la pensée. Entre le moindre nombre et zéro, il y a si peu de chose qu'on peut négliger d'en tenir compte; mais entre le plus grand nombre et tout, il y a l'infini qu'on ne peut sonder. Un mouvement infiniment petit ou infiniment lent se conçoit sans peine; il confine à l'équilibre et les corps le réalisent quand ils passent de l'état de repos à celui de mouvement ou de l'état de mouvement à celui de repos; un mouvement infiniment grand ou infiniment rapide est au contraire une impossibilité dynamique et logique, puisqu'il impliquerait la présence du même corps en plusieurs lieux à la fois.

Cette disparité des deux infinis mathématiques, mise en évidence par des sophismes célèbres <sup>1</sup>, tient à ce que, dans un sens, la grandeur diminue sans cesse, tandis que, dans l'autre, elle augmente indéfiniment. D'un côté, on se rapproche d'un terme; de l'autre on s'en éloigne de plus en plus. Le véritable infini n'est donc pas l'infiniment petit, qui tend à s'évanouir; c'est l'infiniment grand qui est sans limites et, par suite, hors de prise.

Ainsi, la grandeur n'est connaissable qu'à condition d'être bornée. Notre science se réduit à « déterminer » des quantités ou des dimensions. Entre les deux extrêmes

1. Les arguments de Zénon (l'« Achille aux pieds légers et la tortue », etc.). Le sophisme consiste à prendre le mot d'infini dans les deux sens que nous venons de distinguer et à substituer un infiniment grand (jamais), qui n'a pas de limites, à un infiniment petit qui en a une, s'en rapproche de plus en plus et doit finir par la toucher. De là cette contradiction qui démonte la raison. L'argument a néanmoins un sens profond en ce qu'il montre la conciliation nécessaire de l'infini et du fini dans les choses.

de l'infiniment grand et de l'infiniment petit l'intelligence conçoit une infinité de grandeurs finies dont la mesure constitue le problème mathématique.

La généralité de la science des grandeurs ressort de la définition de son objet. L'étude des rapports de coexistence comprend toutes les réalités existantes, soit qu'on les évalue par des nombres, soit qu'on les figure par des dimensions. La Mathématique n'a donc pas moins d'extension que l'Ontologie et montre les mêmes choses sous un autre jour. A première vue, elle paraît beaucoup plus restreinte, puisqu'elle se borne à spéculer sur le fini, tandis que la science première constate l'infini même. Mais la différence, plus apparente que réelle, est moins dans la nature des choses que dans celle de nos concepts et la connaissance a, dans les deux cas, une latitude égale. En tant qu'infini, en effet, l'être est indéfinissable. Nous ne savons rien de lui, sinon qu'il est, et l'Ontologie n'est pas moins impuissante à le décrire que la Mathématique à le mesurer. La pensée ne saisit nettement que les réalités distinctes et différencie les êtres par leurs attributs particuliers. La Mathématique s'établit de même dans le domaine des grandeurs finies comprenant tout ce qu'il est possible de limiter avec précision.

La science des grandeurs, consacrée à des spéculations abstraites, semble il est vrai désertier le monde des choses et se confiner dans celui des idées pures; mais, si elle ne considère pas directement les réalités sensibles, elle se lie à leur ordre et ne peut pas être séparée. Nos conceptions de la grandeur sont des abstraits qui résument une multitude de concrets et en simplifient l'expression. Les données premières de la Mathématique, ses notions fondamentales, reposent sur ce que la science des réalités établit de plus général et de plus exact. Kant s'est mépris lorsqu'il a supposé que les axiomes d'où la science procède constituaient des principes antérieurs à l'observation des faits et

reconnus par une intuition transcendante. Ils représentent, non un à priori de l'entendement, mais un à posteriori de l'expérience universelle et, si nul n'y contredit, c'est que, dans aucun cas, leur vérité n'a été trouvée en défaut.

D'autre part, les lois des grandeurs s'appliquent à la totalité des choses et, sans viser directement les faits, les régissent avec une rigueur qui ne souffre pas d'exception. La généralité de la science résulte précisément du caractère idéal de ses données qui, ne se référant à aucune réalité particulière, les comprennent toutes implicitement. Les pythagoriciens regardaient les nombres comme les symboles de l'existence, la « représentation des choses » (*μίμησις*) dont les rapports et les changements se traduisent toujours en relations mathématiques.

La grandeur constitue ainsi le reflet de l'universelle réalité. Ces lois, que la raison semble tirer d'elle-même, sont formulées, mais non édictées par elle, et son rôle se réduit à les coordonner logiquement. Leur principe est dans la nature des choses. Loin de rester étrangères à l'ordre phénoménal, elles le dominent et la mesure des grandeurs concrètes ne présente plus guère de difficultés dans la pratique quand celle des grandeurs abstraites a été opérée par la théorie. Les nombres, expression de la multiplicité, se prêtent à supputer des êtres de toute espèce; l'étendue circonscrit les formes réelles par ses figurations imaginaires et la connaissance de leurs rapports sert à déterminer toutes les dimensions appréciables. Quoique les quantités de l'Arithmétique et les constructions de la Géométrie ne soient et ne puissent être réalisées nulle part; quoiqu'on ne rencontre ni unités équivalentes, ni points, ni lignes, ni surfaces, ni volumes conformes aux définitions de la science, toutes les choses qu'il nous est donné de percevoir ou de concevoir sont contenues dans ces cadres idéaux, régies par les mêmes lois et susceptibles d'être mesurées avec leurs secours. La détermination des nombres et des figures établit des formules absolues où les réalités

rentrent ensuite, mais sans coïncidence exacte, parce que les premières sont simples et les secondes toujours complexes. On les adapte les unes aux autres par des séries d'approximations, soit en simplifiant les choses de manière à les rapprocher des expressions de la pure grandeur, soit en modifiant les formules de manière à les plier par degrés à la complexité des choses.

L'idée de grandeur est donc générale à la fois par son origine et par ses applications. La Mathématique convertit en lois l'ordre de coexistence des êtres réfléchi dans l'entendement humain. L'exactitude avec laquelle ces lois s'appliquent aux faits prouve la fidélité objective d'une interprétation en apparence subjective. La science des grandeurs, d'où la réalité semble bannie, la reproduit sous un aspect idéal. Les nécessités logiques et les nécessités physiques se correspondent. L'accord s'établit entre l'abstrait et le concret, parce que c'est la même raison qui les conçoit tous les deux. Les vérités mathématiques ne flottent point dans le vide; on pourrait les comparer à une chaîne dont les deux bouts sont fixés en pleine réalité. Comme un pont jeté d'une rive à l'autre, elles font communiquer l'idée d'existence et celle de phénoménalité.

Partout où les choses sont examinées par groupes, on voit surgir des problèmes de grandeur. Chacun de ces groupes se compose de parties et peut figurer à titre de partie dans des groupes supérieurs. On a ainsi des quantités variables, des limitations réciproques, liées par des rapports qu'il importe de connaître. Les grandeurs, soit numériques, soit étendues, comparées à des grandeurs inégales de même ordre, se laissent ramener à des conditions d'égalité. C'est en cela que consiste leur mesure. Il n'y a rien qui ne soit à considérer sous cet aspect et qui ne relève des lois, logiquement nécessaires, assignées à ces relations.

En raison du caractère spécial et général de l'idée de

grandeur, son étude doit être l'objet d'une science distincte. Les Grecs, qui la constituèrent, lui ont donné le nom de « Mathématiques » (de *μαθήσις* science, *τα μαθήματα* les sciences et pour ainsi dire la science par excellence). Mais, si une dénomination pareille convenait à l'époque hellénique où, les autres sciences d'investigation n'étant pas encore établies, celle des grandeurs existait seule, elle est, de nos jours, manifestement impropre, en ce qu'elle induirait à prendre une partie pour le tout. Elle a, de plus, l'inconvénient de ne pas désigner d'une manière explicite l'objet des recherches. L'expression de Mathématique, dont le sens dit trop et n'indique rien, pourrait être remplacée avec avantage par celle de « Métrologie » (de *μέτρον*, mesure), dont il y aurait seulement à étendre l'acception, qui d'ordinaire se borne à désigner la science technique des poids et mesures. Néanmoins, comme en telle matière l'usage a force de loi, même quand il n'a pas la raison de son côté, nous emploierons avec tout le monde le terme traditionnel.

Toutefois, il serait bon de corriger en lui un autre défaut. La science des grandeurs, considérée dans son ensemble, a une parfaite unité que le mot de « Mathématiques » (au pluriel) paraît méconnaître, en faisant présumer un groupe de sciences plutôt qu'une science unique. Les différentes sections de l'étude des grandeurs ont en effet reçu des noms spéciaux (Arithmétique, Géométrie, Algèbre), qui semblent annoncer des sciences distinctes, vaguement reliées par le titre commun de Mathématiques. Il serait préférable, comme l'avait proposé Condorcet et comme A. Comte en donne l'exemple, de dire « la Mathématique », afin de mieux marquer l'unité générale de la science des grandeurs. Il est d'ailleurs à noter que cette réforme nous remet dans le vrai courant de la langue. Le terme « la Mathématique » était usité au xvii<sup>e</sup> siècle et se lit trois fois dans une page de la notice sur Pascal par M<sup>me</sup> Périer sa sœur.

Le sujet de la science des grandeurs est par lui-même assez vaste et l'on doit éviter d'y mêler des spéculations étrangères. A. Comte a méconnu la spécialité de la Mathématique quand il lui a rattaché la Mécanique rationnelle, qui traite de l'équilibre et du mouvement. L'idée génératrice de cette science implique des données de fait qui sortent de la conception mathématique et dont l'étude exige, comme nous le montrerons plus loin, le secours d'une autre méthode. C'est donc un sujet à éliminer de la science des grandeurs. Ce que la Mécanique utilise, dans ses recherches, de calcul, de géométrie et d'analyse, ne change pas sa nature, et son objet, distinct de celui de la Mathématique, est la connaissance des manifestations effectives de la force dans l'univers. Si loin que la déduction puisse aller en raisonnant sur des principes d'action, il s'agit là, non d'une extension de la théorie mathématique, mais d'une application de ses lois qui n'ajoute rien à leur développement. Nous en dirons autant, et à plus forte raison, de la théorie mathématique de la chaleur, que A. Comte regrette de ne pas annexer à la science des grandeurs (*Cours de philosophie positive*, t. I, p. 107 et 533). C'est confondre trois sciences qu'une classification raisonnée doit séparer avec soin, la Mathématique, la Dynamique et la Physique. Pour nous, la première se borne à spéculer sur les grandeurs abstraites. C'est une science de raisonnement qui se déduit d'axiomes sans rien emprunter, en dehors d'eux, à l'observation et à l'expérience. Le détail de ses applications lui est étranger; il rentre dans les voies et moyens des sciences suivantes, consacrées à l'exploration des faits.

## CHAPITRE II

### PROGRAMME DE LA MATHÉMATIQUE

Quoique la Mathématique soit la plus ancienne et la plus avancée des sciences d'investigation, son programme général n'est pas encore méthodiquement établi. Le mode de répartition adopté par A. Comte témoigne de la confusion qui règne à cet égard dans les esprits. L'auteur du *Cours de philosophie positive* partage la science des grandeurs en deux sections, savoir : 1° la Mathématique abstraite ou Calcul, qui comprend l'Algèbre et l'Arithmétique; et 2° la Mathématique concrète, subdivisée en Géométrie et Mécanique rationnelle (t. II, p. 86, 7). Nous venons d'écarter la Mécanique rationnelle que la spécialité de son objet et de sa méthode sépare de la Mathématique pure. Ce retranchement effectué, constatons que la distinction, en Mathématique, d'une partie abstraite et d'une partie concrète est absolument irrationnelle, car toutes les spéculations de la science sont abstraites au même titre. Les figures de la Géométrie ne diffèrent point en cela des nombres de l'Arithmétique ou des fonctions de l'Algèbre. Ce sont également des conceptions idéales. Les constructions de l'étendue paraissent il est vrai, la réaliser sous des sensibles images; mais c'est là un artifice graphique, un expédient pour parler aux yeux. Les figurations de la science n'existent que pour la pensée

et les raisonnements qui s'y rapportent doivent même, pour être exacts, viser des types imaginaires, irréalisables par définition, et non les formes concrètes qui en offrent un grossier dessin. Enfin, la division de la Mathématique abstraite en Algèbre et en Arithmétique range ces deux sciences dans un ordre contraire à toute raison. A. Comte s'autorise, pour attribuer la priorité à l'Algèbre, de la marche suivie dans la résolution des problèmes au moyen de l'analyse; mais il est peu philosophique de faire intervenir une considération de pratique dans une question de théorie; il l'est moins encore de faire prévaloir un détail d'application sur la nature des choses. L'antériorité de l'Arithmétique est manifeste au triple point de vue de la simplicité des conceptions, de l'évolution historique des connaissances et des exigences de la pédagogie. On aurait peut-être embarrassé A. Comte si on l'avait mis en demeure d'enseigner l'Algèbre à des élèves dépourvus de toutes notions d'Arithmétique. Assigner à ces deux sciences un rang aussi peu logique, c'est méconnaître ce que la première a d'élémentaire et la seconde de transcendant.

Conformément à la règle posée au début de ce travail, nous partagerons la Mathématique en deux sections principales, l'une analytique, chargée de constituer en détail les grandeurs, soit quantitatives, soit étendues; l'autre synthétique, dont l'objet sera de scruter les rapports, soit spéciaux, soit généraux, des grandeurs constituées.

# I

## MATHÉMATIQUE ANALYTIQUE

SCIENCE DE LA DÉTERMINATION DES GRANDEURS

Puisque l'esprit ne peut concevoir et mesurer que des grandeurs déterminées, les premiers problèmes à résoudre doivent concerner la manière de les établir. Il faut les examiner une à une dans les diverses conditions où il est possible de les limiter nettement. Ces données correspondent aux phénomènes des sciences de faits. La Mathématique analytique a pour fonction de les étudier.

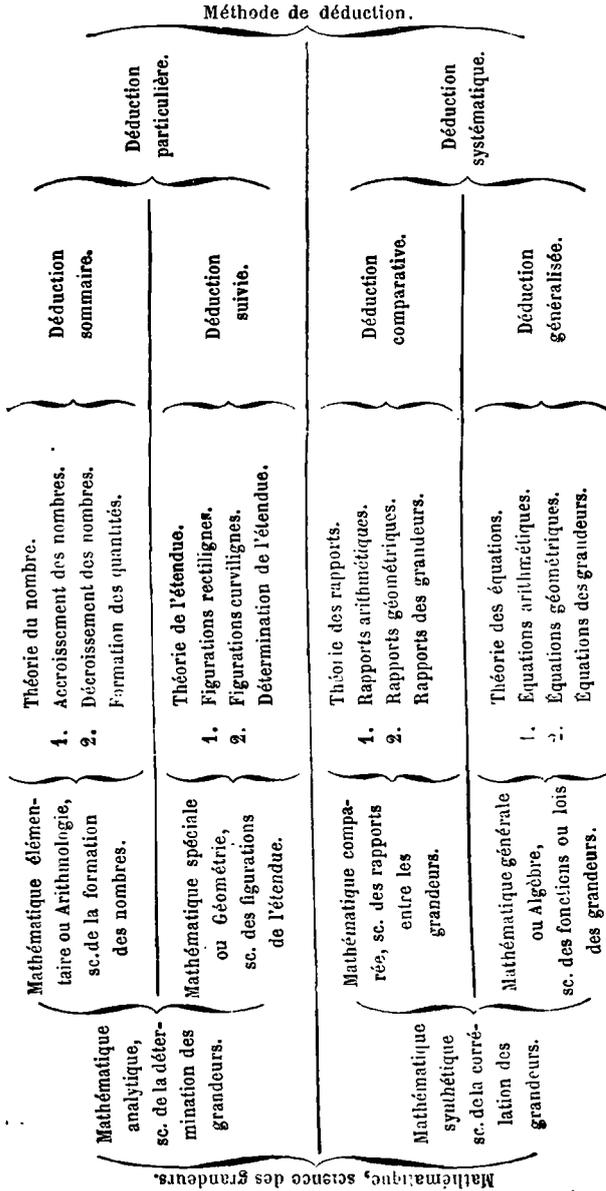
Les grandeurs sont de deux sortes, quantitatives ou étendues. Aristote a opposé, dans sa Logique, une grandeur « discrète », finie ou discontinue (*διωρισμένον*), qui se compose de parties tranchées et varie par degrés ; et une grandeur « concrète » ou continue (*συνεχές*), dont les parties se tiennent et varient insensiblement. La première est exprimée par les nombres et la seconde figurée par les dimensions (*Organon, des catégories, 4, 6, 20*). Le principe d'une distinction pareille s'impose en effet à la science, mais les raisons alléguées par Aristote sont d'ordre métaphysique plutôt que d'ordre positif. Une grandeur continue serait infinie et la Géométrie ne considère que des dimensions finies. Ses figurations ne diffèrent point à cet égard des quantités de l'Arithmétique. Il serait même facile de supprimer la cause de dissemblance qui, pour Aristote, sépare les nombres et les dimensions, puisque, d'une part, les degrés qui divisent les nombres peuvent être franchis par une infinité de

quantités intermédiaires, de plus en plus atténuées, qui rendent la transition presque continue; et que, de l'autre, les dimensions, pour être saisies et comparables, ont besoin d'être arrêtées par des bornes précises qui font d'elles comme les degrés de l'étendue. Enfin, la mathématique a des artifices pour convertir les figurations en nombres et les nombres en figurations. Ces deux sortes de données seraient mieux caractérisées par la distinction de grandeurs implicites ou enveloppées, que représentent les nombres, et de grandeurs explicites ou développées, auxquelles correspondent les constructions de l'étendue. La présence nécessaire de degrés parmi les uns et leur absence apparente parmi les autres tiennent à ce que les premiers expriment des quotités d'êtres dont chacun a son existence propre, et les secondes un même attribut, indéfiniment extensible. Mais, à quelque point de vue qu'on se place pour les définir, la distinction doit être faite et les grandeurs sont à constituer séparément sous les deux aspects du nombre et de l'étendue.

En conséquence, nous subdiviserons la Mathématique analytique en deux parties : la Mathématique élémentaire ou Arithmologie, qui traite de la formation des nombres ; et la Mathématique spéciale ou Géométrie, qui établit les modes de figuration de l'étendue. .

MÉTROLOGIE OU MATHÉMATIQUE

SCIENCE DES GRANDEURS



## I. — MATHÉMATIQUE ÉLÉMENTAIRE OU ARITHMOLOGIE

### SCIENCE DE LA FORMATION DES NOMBRES

#### THÉORIE DU NOMBRE. DE L'UNITÉ ET DE LA PLURALITÉ

L'Arithmétique, ou mieux l'Arithmologie, (de ἀριθμός, nombre), est la science du nombre, aussi appelée Numération ou Calcul. Elle enseigne comment les quantités se forment et se décomposent. C'est là le plus simple des aspects sous lesquels on puisse concevoir la grandeur, car le nombre, se bornant à exprimer un fait de coexistence, sans rien spécifier quant aux dimensions constitue la donnée première, l'élément irréductible. Ce mode de détermination, applicable à des réalités de tout ordre, montre, pour ainsi dire, la grandeur virtuelle ou en puissance. Les problèmes relatifs à la production des quantités sont les moins complexes de tous et leur solution se réduit à instituer quelques « règles » générales ou manières d'opérer.

En raison de son extrême simplicité, cette partie de la Mathématique a pu s'organiser la première et longtemps avant les autres. Son origine se perd dans la nuit des âges préhistoriques et semble remonter, comme le langage, dont les noms de nombre sont une création immémoriale, au point de départ même de la civilisation. Tous les peuples sauvages ont des rudiments de numération, et la plupart des nations barbares, encore étrangères à la culture des autres sciences, savent exécuter diverses opérations sur les nombres sans le secours desquelles tout commerce serait impossible. Enfin, les peuples policés, dès qu'ils ont connu l'écriture, en ont adapté les signes à l'expression

des valeurs. L'Arithmétique se rattache ainsi, par un lien étroit, au progrès des langues parlées ou écrites, et procède directement de l'Ontologie générale. C'est la première science que les enfants puissent apprendre, et son enseignement fait partie de l'instruction « primaire ».

A. Comte, loin d'attribuer à la science du nombre la place et le rang qui lui appartiennent dans l'ath'orie mathématique, a presque entièrement méconnu son importance. Il fait de l'Arithmétique une annexe de l'Algèbre, un instrument subalterne, dont le rôle se bornerait à résoudre le résidu des équations. « Le champ de l'Arithmétique, dit-il, est de sa nature infiniment restreint... Le calcul des valeurs ne sera jamais qu'un point, pour ainsi dire, en comparaison du calcul des fonctions dans laquelle la science consiste essentiellement... Le calcul des valeurs pourrait être conçu simplement comme un appendice et une application particulière du calcul des fonctions, de telle sorte que l'Arithmétique disparaîtrait, pour ainsi dire, dans l'ensemble de la Mathématique abstraite, comme section distincte. » (*Cours de philos. posit.* t. 1, p. 136 à 138.) Conséquemment, il subordonne l'Arithmétique à l'Algèbre et fait des équations analytiques le point de départ des spéculations sur les nombres.

Ce sont là, nous semble-t-il, de bien grosses erreurs. L'Arithmétique ne peut pas être annihilée de la sorte dans la théorie mathématique. Il faut voir en elle, non un appendice de l'Algèbre, mais le fondement même de la science des grandeurs, et, si l'on tentait de le supprimer, tout croulerait. Au lieu d'être accessoire et dépendante, la conception de l'idée de nombre est essentielle et primordiale. Son expression détermine le plus simple des rapports de coexistence, le fait de la multiplicité des choses conçues à la fois comme distinctes et comme groupées, donnée nécessaire dont l'ignorance empêcherait toute spéculation sur les grandeurs, puisque l'idée même de grandeur s'évanouirait avec elle.

La notion de nombre résulte dans nos esprits des modes de perception qui constatent les êtres séparément, et des modes de conception qui servent à les grouper. Les données de la sensation soit interne, soit externe, et les idées qui leur correspondent, nous apprennent à discerner les quantités. Les sens les plus intelligents, le toucher, l'ouïe et la vue, sens discriminatifs par excellence, saisissent le mieux les inégalités numériques des grandeurs. Ce que, grâce à eux, nous constatons de réalités, se résout en nombres à mesure qu'il est bien connu.

Ainsi posé, dès que l'Ontologie a recueilli quelques notions, le problème de l'Arithmétique comprend l'universalité des choses perceptibles ou concevables. La possibilité de tout étudier sous cet aspect fait de l'Arithmétique, qu'on prétend n'être qu'« un point », une science non moins étendue que l'Algèbre. Elle est même plus indispensable à la constitution de la Mathématique, parce qu'elle se suffit et supporte tout le reste, tandis que, sans elle, l'Algèbre n'aurait pas d'objet. Le calcul des fonctions suppose, en effet, celui des valeurs, et les opérations que l'analyse accomplit d'une manière générale, à l'aide de symboles abstraits, n'ont de sens que parce qu'elles se réfèrent aux opérations effectuées en détail, par l'Arithmétique, sur des quantités expresses.

L'idée de nombre se décompose en deux données élémentaires qui montrent la quantité sous deux faces différentes : l'unité et la pluralité (« *unum et plura* » des catégories pythagoriciennes). La première, absolue et fixe, exprime la simplicité de l'être isolé ; la seconde, relative et variable, exprime des collections d'êtres. Le nombre détermine leur rapport.

« L'un (ἓν) est le père des nombres », disait Philolaüs, disciple de Pythagore. Les Pythagoriciens le regardaient comme « le commencement de toutes choses, à la fois fini et infini ». L'unité est la base de la théorie mathéma-

tique. Il importe de la distinguer de l'unité ontologique, quoique elle en procède et que le langage les confonde.

La première idée de l'unité se lie à celle du moi qui révèle à l'être son identité persistante, son indivisibilité. Nous transportons ensuite dans les choses cette donnée initiale, mais le concept d'unité change alors de nature, et, de simple qu'il était d'abord, devient composé. Il excluait à l'origine l'idée de pluralité; il se concilie plus tard avec elle et ne retrouve son caractère d'infinité que dans la totalité des choses (« l'un-tout »), qui n'a pas de multiples, ou dans les éléments ultimes des corps, que la pensée se refuse à concevoir comme réductibles en parties (« atomes »). Ces deux sortes d'unités échappent comme le moi à toute mensuration et sont hors de la grandeur.

L'unité mathématique se conçoit différemment. Composée de parties (fractions), et admettant des multiples (nombres entiers), elle se prête à divers modes de partage ou de groupement. Elle représente une collection de choses qu'on peut toujours réduire en parties moindres ou rattacher à des collections plus grandes. Tandis que l'être, pris en lui-même, n'est susceptible ni d'augmenter, ni de diminuer, les groupes d'êtres peuvent croître ou décroître et marquer ainsi des degrés dans la grandeur. L'étalon qui leur sert de mesure s'appelle l'unité.

L'esprit passe de la valeur absolue qu'a l'unité ontologique à la valeur relative de l'unité mathématique, lorsque, cessant de considérer l'existence comme un tout simple, il la regarde comme un lien de série. L'unité, infinie tant qu'elle est unique, devient finie en se multipliant, car la raison se refuse à concevoir la coexistence de plusieurs infinis. Par là s'effectue la transition, mystérieuse pour la pensée, naturelle en fait, de l'idée d'infini à celle de fini, c'est-à-dire du concept de l'être à celui du nombre.

Alors que la notion d'unité a son point de départ dans la conscience du moi, la notion de pluralité résulte de la diversité des perceptions. A mesure que la connaissance

se développe, l'esprit va de l'idée simple et permanente du moi à l'idée complexe et variable des états du moi, puis à la constatation du non-moi, impliquant une dualité formelle de l'être, enfin à l'analyse de la multiplicité des objets dont le non-moi se compose. L'acquisition de ces données par la perception, leur classement par la conception et leur expression par le langage, devaient conduire à une étude abstraite de la quantité. La sensation signalait à tout moment des réalités distinctes; la généralisation, supprimant leurs différences, les distribuait par séries; l'induction établissait entre elles des rapports; enfin le sens commun formulait en axiomes les relations les plus manifestes du tout et de ses parties. Dès lors, la pensée pouvait spéculer sur les nombres. Elle disposait d'existences idéales, identiques, dont les modes de groupement pouvaient se déduire les uns des autres, tandis que les êtres réels, toujours dissemblables, auraient rendu les appréciations inexactes. Les êtres humains, par exemple, examinés en détail, diffèrent de bien des façons et, dans la foule de ceux que nous appelons nos semblables, on ne trouverait le semblable d'aucun de nous. Ce ne sont pas des valeurs comparables. Chacun est unique en soi. Mais, considérés comme êtres, tous sont égaux. Ils représentent des quantités équivalentes, des unités d'existence. Il en est de même de choses quelconques. Ainsi conçues, les quantités de l'Arithmétique expriment des collections d'êtres abstraits, indéterminés quant aux attributs, sans forme et sans dimensions, susceptibles par conséquent de prendre toutes les valeurs lorsqu'on leur adjoint la mention de caractères particuliers; mais, quelles que soient les grandeurs effectives auxquelles s'appliquent les nombres, leurs relations ne changent pas, et, que le calcul opère sur des mondes ou sur des atomes, pourvu que les unités soient de même ordre, le résultat reste invariable.

Une fois en possession des deux idées d'unité et de pluralité, l'esprit, forcé de les unir puisqu'il les a simul-

tanément l'une et l'autre et qu'elles représentent deux aspects des mêmes choses, conçoit les nombres comme des valeurs susceptibles de varier en plus ou en moins, et s'applique à mesurer leur écart à l'aide des relations qui les lient. Le problème général de l'Arithmétique consiste à développer la série des nombres, à montrer comment ils se composent ou se décomposent, et à instituer des « règles » au moyen desquelles on puisse se diriger méthodiquement à travers les inégalités des valeurs.

Si restreint que soit ce programme, nous ne voyons pas qu'il ait encore été établi d'une façon pleinement satisfaisante. Les traités usuels exposent la numération, les quatre règles (addition, soustraction, multiplication et division), les fractions, les puissances, l'extraction des racines, enfin les rapports, proportions, progressions et logarithmes, sans qu'on saisisse bien clairement les raisons d'un pareil ordre et la manière dont ces opérations dérivent les unes des autres. A. Comte a préféré les disposer par couples de fonctions inverses et corrélatives qui se correspondent et se servent réciproquement de preuve. Il réunit de la sorte, en les opposant, l'addition et la soustraction, — la multiplication et la division, — l'élevation aux puissances et l'extraction des racines, — les rapports et les logarithmes. Ce mode de répartition offre l'avantage de marquer, dans la suite des opérations, des degrés de complexité ; mais il a l'inconvénient de rompre la continuité logique des problèmes, d'en rapprocher de divers et d'en séparer qui s'enchaînent.

Nous croyons préférable de procéder autrement. Comme nous réduisons l'Arithmétique à l'étude de la formation des nombres, nous devons en retrancher d'abord ce qui concerne les relations des nombres une fois constitués, car les problèmes de ce genre relèvent de la Mathématique comparée et seront à examiner ultérieurement. Nous n'avons à considérer ici que la genèse des

quantités, leurs modes de détermination. Or, quand on se borne à cette recherche, on doit consulter avant tout la manière dont les valeurs se modifient. Si, avec Aristote, on définit la quantité « ce qui comporte du plus ou du moins » (*Logique, des catégories*), on voit aussitôt que ses modes essentiels de mutation se réduisent à deux. Elle ne varie que par accroissement ou décroissement. Tous les changements éventuels qu'une valeur peut subir ont pour effet de la rendre supérieure ou inférieure à elle-même, et ses inégalités se compensent par des diminutions ou des augmentations accomplies dans un certain ordre, ce qui donne leur mesure. Le problème se réduit alors à chercher de combien de manières et par quels procédés les valeurs se modifient dans l'un et dans l'autre sens, c'est-à-dire dans les deux classes principales de fonctions arithmétiques. Grâce à cette distinction fondamentale, nous allons voir les opérations se coordonner et des lois apparaître.

#### 1. FORMATION DES NOMBRES PAR ACCROISSEMENT

Les modes d'accroissement des quantités sont plus simples que les modes de décroissement et, quand A. Comte les unit par couples dont les termes sont présumés également complexes, il méconnaît leur disparité naturelle. Il y a, dans les premiers, quelque chose d'antérieur et de primordial. C'est par eux que l'esprit débute. Ils montrent, en effet, comment les nombres se constituent. Les seconds, au rebours, prennent les nombres déjà constitués et s'appliquent à les défaire. En outre, les procédés par lesquels une valeur augmente se suffisent et peuvent s'effectuer à part, tandis que les procédés d'atténuation doivent recourir aux précédents. Enfin, dans une classe d'opérations, les résultats se déterminent toujours avec précision, au lieu que, dans l'autre, ils restent souvent imparfaits. Ces diverses causes compliquent les problèmes de

MATHÉMATIQUE ÉLÉMENTAIRE OU ARITHMOLOGIE

SCIENCE DE LA FORMATION DES NOMBRES

1. ACCROISSEMENT DES NOMBRES		2. DÉCROISSEMENT DES NOMBRES	
ADJONCTION DES QUANTITÉS		DISJONCTION DES QUANTITÉS	
A. OPÉRATIONS ADDITIVES, PAR ADJONCTIONS SIMPLES.		A. OPÉRATIONS SOUS-TRACTIVES, PAR DISJONCTIONS SIMPLES	
a. Numération ascendante, adjonction de groupes d'unités.	b. Addition, adjonction de groupes d'unités.	a. Numération descendante, disjonction d'unités.	b. Soustraction, disjonction de groupes d'unités.
B. OPÉRATIONS MULTIPLICATIVES, PAR ADJONCTIONS RÉPÉTÉES		B. OPÉRATIONS DIVISIVES, PAR DISJONCTIONS RÉPÉTÉES	
a. Multiplication, adjonction de séries de groupes.	b. Puissances, adjonction de séries de séries.	a. Division, disjonction de séries de groupes.	b. Racines, disjonction de séries de séries.

décroissement, et rendent leur solution moins aisée. C'est donc par l'étude de ceux d'accroissement qu'il convient de commencer.

L'augmentation d'une quantité donnée se mesure à l'importance des adjonctions opérées. Deux cas principaux sont à considérer, suivant que l'adjonction se fait une fois pour toutes, ou que l'on procède par adjonctions répétées. Dans le premier, on a des opérations additives, et, dans le second, des opérations multiplicatives.

A. — Opérations additives ou par adjonctions simples.

La manière d'accroître une quantité en lui adjoignant une seule fois une quantité déterminée se décompose en deux autres : on peut, en effet, ajouter les unités une à une ou par groupes. Ces deux opérations constituent la numération ascendante et l'addition.

a. — La « numération » (de *numerare*, compter) est l'opération fondamentale de l'Arithmétique. On ne lui accorde pas, dans les traités, l'attention qu'elle mérite. Aucune des théories de la science des nombres n'est aussi digne d'étude, parce que, si simple que soit sa manière de procéder, tout le reste dépend des règles qu'elle établit. La numération, prenant l'unité pour point de départ, l'ajoute d'abord à elle-même, puis l'ajoute encore au nombre produit, et continue ainsi sans terme, de sorte qu'à chaque degré franchi le nombre se trouve augmenté d'une unité. Ce mode élémentaire d'accroissement rend manifeste, par son uniformité constante, le développement régulier de la valeur. Telle est l'importance de cet artifice que le nom même d'« Arithmétique » en provient (le radical d'*ἀριθμός*, nombre, est *ἄρω*, je distribue, j'arrange). Si simple que paraisse le mécanisme de la numération ascendante, puisqu'elle se borne à

des adjonctions successives d'unités, il y aurait lieu de distinguer en elle deux opérations dont l'une a eu pour effet de constituer les premiers nombres, et l'autre de systématiser les séries.

Avant tout, il fallait composer les nombres dits de premier ordre qui unissent directement les unités par groupes élémentaires et servent de types aux groupes composés.

Les fondateurs de la numération eurent à surmonter d'abord une difficulté qui les arrêta longtemps, la création de termes spéciaux pour désigner les quantités. Elle exigeait en effet un notable effort d'abstraction et peut-être conviendrait-il de chercher le point de départ de l'abstraction elle-même dans la conversion décisive des nombres concrets en nombres abstraits, car les peuples les plus sauvages ne laissent pas de posséder quelques termes de ce genre, alors même qu'ils sont dépourvus de toutes autres expressions abstraites. L'esprit humain réalisa ce grand progrès en s'habituant à distinguer, dans le langage, les degrés les plus apparents de la multiplicité des choses. A l'origine, le radical indicatif de la quantité devait faire corps avec le radical dénominatif des objets et l'on avait commencé sans doute par dire « unhomme » « deuxhommes », « troishommes »... « unbœuf » deuxbœufs », « troisbœufs », etc. Le premier qui, séparant dans ces mots complexes l'élément quantitatif, qui ne changeait pas et constituait une racine fixe, de l'élément qualificatif, qui variait selon la nature des choses, réussit à dire « un », « deux », « trois »..., fut l'inventeur de la numération. Ces termes initiaux de la série des nombres ainsi constitués, il suffisait d'en prolonger la suite pour accroître indéfiniment les valeurs. Cette donnée verbale qui assigne un sens précis à des conceptions idéales de la grandeur est le trait d'union par lequel la Mathématique se rattache à l'Ontologie.

Les premiers nombres, le plus fréquemment employés,

reçurent des noms distincts ; mais on ne pouvait pas appliquer le même système de désignation particulière à tous les nombres, car si chacun d'eux avait dû être exprimé par un terme propre, la vie aurait été trop courte pour les tous apprendre, et l'on se serait vite perdu dans leur confusion. Un merveilleux instinct fit adopter la disposition par séries qui se répètent, ce qui n'oblige à dénommer qu'un petit nombre de séries de valeur croissante.

Le point important était la constitution des premiers groupes. On cite des peuples dont la numération s'arrête à trois et qui, dans l'impuissance d'exprimer les quantités supérieures, portent, pour les indiquer, la main à leurs cheveux, en signe d'infinité. Dans quelques langues anciennes, telles que le sanscrit et le grec, les trois formes grammaticales du singulier, du duel et du pluriel semblent rappeler un âge où l'on comptait seulement « un », « deux », et « beaucoup ». L'histoire des éléments de la numération est, du reste, écrite dans l'étymologie des noms de nombre. Le point de départ étant un et deux, trois signifie « dépassant » ; quatre, « trois plus un » ; dix, (même radical que deux) « deux fois cinq » (v. Bopp, *Grammaire comparée*, édit. Bréal, 2, 221). Le cycle de cinq paraît avoir été le produit de la combinaison de deux cycles antérieurs, l'un binaire, l'autre ternaire, encore usités en Australie et qui marquent le plus bas degré de la numération.

Le cycle de dix a généralement prévalu, à cause de la facilité que trouvent les commençants à calculer sur leurs doigts. Il était naturel de compter d'abord les doigts d'une main avec l'index de l'autre, et le système quinaire a été très anciennement en usage. Homère en fait mention (« Protée, dit-il, comptait par cinq ses troupeaux de phoques ». *Odyssée*, ch. IV, v. 414), et les chiffres romains en laissent reconnaître clairement l'indice<sup>1</sup>. D'après Bentlow,

1. I, II, III, IIII, figurent des doigts étendus ; V une main ; X (pour  $\lambda$ ) les deux mains réunies. L, D, rentrent aussi dans le système quinaire.

L'étymologie du mot « cinq » dans les langues aryennes est un radical qui a la signification de « main »<sup>1</sup>. On passa du système quinaire au système décimal en comptant successivement les doigts des deux mains. Les Comanches expriment le nombre « cinq » en élevant une main, « dix » en montrant les deux mains et les dizaines en frappant les mains l'une contre l'autre autant de fois qu'ils veulent indiquer de décimales. Des calculateurs plus hardis, profitant de l'attitude généralement accroupie des sauvages au repos, supputèrent les doigts des pieds après ceux des mains et cela conduisit à un système vicésimal usité chez divers peuples qui comptent par « hommes ». Quelques-uns de nos noms de nombre (« quatre-vingt » et jadis « six-vingt », « quinze-vingt ») sont le vestige d'une coutume analogue. En Amérique, les Caraïbes du continent ont systématisé ce mode de numération. Dans leur langue, un signifie « doigt »; cinq, « main »; dix, « deux mains »; quinze, « deux mains et pied »; seize, « deux mains, pied et doigt »; vingt, « homme »; vingt-cinq, « homme et main »; trente-cinq, « homme, deux mains et pied »; quarante, « deux hommes », etc. Mais on ne saurait aller loin ainsi et les millions seraient embarrassants à exprimer. La manière de compter par les deux mains, étant le plus commode dans la pratique, a fini par l'emporter et la numération s'est constituée sur le cycle de dix, quoiqu'il eût été préférable qu'elle s'établît sur celui de douze.

Les nombres du premier ordre une fois dénommés et le cycle arrêté à dix, on n'eut qu'à recommencer la série. On compta « dix-un » (*un-decim*, onze); « dix-deux » (*duo-decim*, douze); « dix-trois » (*tre-decim*, treize);... et ainsi de suite jusqu'à « dix-neuf ». « Vingt, » qui rentre

1. « Cinq » se lie au grec πέντε, lequel se rattache au persan « pendji, voisin de « pentcha », main. Le mot « dix » a aussi le sens étymologique de « main » (comparez le sanscrit « daçan » dix et « daksha » main; le grec δέξω et δεξιός; le latin « decem » et « dextra », etc.).

L. BOURDEAU.

dans la série des dizaines, signifie « deux dix »<sup>1</sup>; « trente », « trois dix ».... On continua de la sorte jusqu'à « cent » (sanskrit *çata*) qui signifie « dix dix ». Dix centaines forment un mille. Ces unités d'ordre supérieur, de valeur décuple les unes des autres, se succèdent périodiquement sans terme assignable (mille, dizaines de mille, centaines de mille; millions, dizaines de millions, centaines de millions; milliards ou billions...; trillions...; quadrillions...; etc.). Les termes de billions, trillions, etc., ont été créés au xv<sup>e</sup> siècle, pour désigner des tranches de six en six chiffres, comme les millions; mais, au milieu du xvii<sup>e</sup> siècle, on convint qu'ils exprimeraient seulement des tranches de trois chiffres à partir des millions. Avec une quantité restreinte de mots (trente à peine chez les modernes) il est aisé d'exprimer toutes les valeurs imaginables.

La conception et la coordination des grands nombres ont été un gain tardif de l'esprit humain. La philologie comparée montre qu'à l'époque la plus ancienne où nous reportent les radicaux des langues aryennes, la numération s'arrêtait à « cent », car ce terme appartient au fonds primitif et se retrouve chez tous les peuples de souche indo-européenne, tandis que le mot « mille » (qui signifie « beaucoup », Bopp, *Grammaire comparée*), varie d'un peuple à l'autre, et doit, conséquemment, être postérieur à leur dispersion. Le grec avait une expression pour « dix mille » (« μυριάς »); mais il n'allait pas au delà et le sens indéfini de ce terme s'est conservé dans son dérivé « myriade ». La numération peu avancée des anciens ne leur permettait pas de spéculer sur de grands nombres, et l'on sait qu'Archimède composa son « *Arénaire* » pour en procurer le moyen<sup>2</sup>. Les langues et surtout les budgets modernes

1. Le latin « viginti » se lie au sanscrit « vinçati » pour « dvi-daçati, » deux fois dix.

2. L'*Arénaire* (ψαμμίτης) indiquait la marche à suivre pour pouvoir supporter les grains de sable que l'univers serait susceptible de contenir.

ont mis en usage et rendu familiers les termes de millions et de milliards.

La numération écrite, qui traduit les quantités en signes, a peut-être eu, pour les progrès de l'Arithmétique, plus d'importance encore que la numération parlée, parce qu'elle rend promptes et sûres des opérations qu'il serait difficile d'exécuter de tête sur des nombres élevés. Partout où l'écriture était connue, ses caractères furent employés comme symboles des valeurs; mais cet artifice, utile pour représenter les nombres, n'aidait guère à opérer sur eux et l'embarras ou la lenteur des supputations suffirait à expliquer le développement si limité de l'Arithmétique chez les anciens. Pour ouvrir de nouveaux horizons à la science du calcul, il fallait disposer les signes de la numération écrite dans le même ordre que les termes de la numération parlée. C'est à quoi l'on est arrivé par la découverte des chiffres. L'art de chiffrer, réduisant à dix les symboles de la valeur (de 1 à 9 et 0), s'en sert d'abord pour désigner d'une manière absolue les nombres du premier ordre; mais elle leur assigne en outre une valeur relative de position et leur communique ainsi le pouvoir d'exprimer les unités de tout ordre, moyennant la convention qu'un chiffre placé à gauche d'un autre indique des unités de l'ordre immédiatement supérieur. L'origine assez obscure de la numération chiffrée ne paraît pas remonter au delà des premiers siècles du moyen âge. On en a fait honneur à Mohammed-ben-Mousa, qui l'aurait organisée ou peut-être imitée des Indiens, vers 820 de l'ère chrétienne. L'étymologie du mot « chiffre » est en effet arabe et rappelle

La numération par séries arrive vite à exprimer des quantités impossibles à concevoir. Ainsi un septillion dépasse tout ce que l'imagination peut saisir clairement. On a calculé (M. Crookes) que si les unités dont ce nombre se compose défilaient à raison de cent millions par seconde, le passage de l'effroyable multitude exigerait 408, 501, 731 années, c'est-à-dire plus de temps qui n'a probablement duré, depuis son origine, notre système solaire.

le nom du zéro<sup>1</sup>, dont l'introduction comme signe négatif de la valeur est caractéristique de ce mode d'expression des quantités. L'abstraction d'un symbole qui n'exprime rien le rendait difficile à concevoir et c'est pourquoi son invention a été tardive. L'emploi des chiffres arabes se répandit en Europe à partir XII<sup>e</sup> siècle; toutefois, il ne devint vraiment usuel que durant le XVI<sup>e</sup>, car jusque-là, les monuments et les manuscrits indiquent généralement les dates en chiffres romains. Les opérations sur les nombres sont depuis lors devenues aussi faciles et exactes qu'avant elles étaient pénibles et incertaines, ce qui a permis aux sciences de prendre un rapide essor.

Nous avons un peu insisté sur la numération, d'abord parce que les théories arithmétiques n'en tiennent pas assez compte; ensuite, parce qu'en toutes choses les commencements importent le plus. Ce point de départ acquis, les autres modes d'augmentation des quantités se succèdent logiquement et il nous suffira d'en présenter un exposé sommaire.

*b.* — La numération pourrait à la rigueur suffire pour constituer tous les nombres et les conduire au plus haut degré concevable d'accroissement; mais cette manière de procéder entraîne de prodigieuses lenteurs et n'est réellement utile que pour des séries très bornées. Il était donc nécessaire d'établir des modes plus expéditifs d'augmentation des valeurs. Le plus simple après la numération consiste à adjoindre les unités, non plus une à une, mais par groupes. L'« addition » (de *addere*, ajouter), sorte de numération abrégée, ajoute les unes aux autres des col-

1. Du même radical « cifron » (vide), dérivent, d'une part l'espagnol « cifra » d'où provient notre mot « chiffre »; et, de l'autre, l'italien « zefiro » qui a donné naissance à notre « zéro » (Littré, *Dictionn. de la lang. franç.*). En sanscrit, « cūnya » a de même les deux sens de vide et de zéro.

lections d'unités. Plusieurs nombres étant donnés, elle en forme un nombre unique appelé « somme » ou « total », qui doit contenir à lui seul autant d'unités que les quantités qu'on veut réunir en contiennent séparément.

L'addition est simple ou complexe, suivant qu'elle porte sur l'une ou sur l'autre des deux sortes de nombres que produit la numération, c'est-à-dire sur des nombres du premier ordre ou sur des nombres composés. Dans le premier cas, chaque nombre s'ajoute à son tour en entier à la somme des nombres qui précèdent, sans que l'adjonction présente de difficultés, puisque les quantités sur lesquelles on opère sont toujours inférieures à dix. Dans le second cas, au contraire, la composition des nombres oblige de recourir à un artifice, car il serait souvent malaisé de les annexer en bloc. Il faut alors décomposer leurs éléments et additionner successivement par colonnes les séries d'unités de même ordre, en ayant soin de reporter à leur rang les unités d'ordre supérieur qui proviennent de la réunion des unités d'ordre inférieur. L'opération totale complexe se résout ainsi en opérations partielles plus simples.

La numération et l'addition ont une puissance d'accroissement très bornée, parce que l'augmentation soit d'unités, soit de groupes d'unités, se fait une fois pour toutes. Les opérations suivantes procèdent avec plus de rapidité.

B. — Opérations multiplicatives ou par adjonctions répétées.

Après la manière d'augmenter les quantités par adjonctions simples, considérons celle qui opère des adjonctions répétées. Deux cas sont à distinguer selon que l'accroissement se fait par séries de nombres ou par

séries de séries. Ils correspondent à la multiplication et à l'élévation aux puissances.

*a.* — La multiplication, au lieu d'accroître, comme l'addition, une quantité par collections simples d'unités, l'augmente par collections de collections. Elle répète un nombre appelé « multiplicande » autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre appelé « multiplicateur ». Le résultat porte le nom de « produit ».

Une multiplication élémentaire s'effectue directement entre les nombres du premier ordre et l'on apprend à la faire au moyen de la table dite de Pythagore. La multiplication des nombres composés est plus complexe et veut être méthodiquement dirigée. Il faut multiplier alors chacun des ordres d'unités du multiplicande par chacun des ordres d'unités du multiplicateur, en prenant soin de reporter aux colonnes qui leur correspondent les divers ordres d'unités provenant de chaque produit. L'addition de tous les produits partiels donne ensuite le produit total.

*b.* — Le mode d'accroissement le plus prompt consiste à multiplier un nombre par ce même nombre, non plus une fois seulement, comme dans l'opération qui précède, mais une série de fois. C'est ce qu'on appelle « élever aux puissances ». Un nombre étant donné, on le multiplie d'abord par lui-même, puis on multiplie son produit par ce même nombre et l'on continue de la sorte autant de fois que l'on veut atteindre de puissances. Cette manière de procéder diffère de la multiplication en ce qu'elle opère avec un multiplicateur fixe sur un multiplicande croissant. Elle conduit vite à de très grands nombres, et le terme de « puissance » indique son pouvoir illimité d'accroissement. La multiplication est bornée par la valeur de ses facteurs, qui ne servent qu'une fois; l'élévation aux puissances ne l'est que par le chiffre de l'expo-

sant. Elle donne le moyen de constituer des quantités qu'il serait difficile d'exprimer autrement sans confusion.

Les puissances se classent par degrés. La plus simple est le « carré » (...)², qu'on obtient en multipliant un nombre par lui-même. Elle se confond avec la multiplication et obéit à sa règle. La troisième puissance ou « cube » (...)³ est le produit de deux multiplications successives par le même nombre. Les puissances supérieures se succèdent sans fin; mais, d'ordinaire, on se contente de les indiquer sans prendre la peine de les réaliser, à cause de la difficulté qu'on éprouve à spéculer sur leurs éléments.

Les divers moyens d'accroître les nombres, disposés dans l'ordre où nous venons de les présenter, se suivent logiquement et constituent un ensemble d'opérations établies en vue de rendre de plus en plus efficace l'augmentation des valeurs. La numération ascendante, partant de l'unité, l'ajoute constamment aux nombres déjà obtenus. Sa marche est sûre, mais d'une désespérante lenteur. L'addition ajoute les uns aux autres les nombres que la numération a produits. La multiplication répète ces adjonctions par séries et opère conséquemment une suite d'additions. Enfin, l'élévation aux puissances procède par séries de séries ou par multiplications répétées. Si l'on voulait traduire en images ces manières d'opérer, on pourrait dire que la numération avance pas à pas, l'addition par enjambées, la multiplication par bonds et la puissance par une sorte de vol.

Chacune de ces opérations s'autorise de la précédente, applique ses procédés et ajoute à sa latitude d'accroissement. L'addition suppose la numération connue et abrège ses lenteurs; la multiplication implique l'addition et arrive plus brièvement à ses fins; l'élévation aux puissances est une multiplication systématique dont l'accélération pro-

gresse rapidement. Chaque mode d'accroissement serait à lui seul capable de constituer la suite entière des nombres; mais, dans l'usage, le rôle des opérations se spécialise en raison de la rapidité avec laquelle on veut accroître la valeur. A ce titre, elles représentent en Arithmétique des « fonctions » distinctes. La numération n'est réellement utile que pour des nombres peu élevés et le seul obstacle de la durée s'opposerait à ce qu'elle pût en déterminer de très grands<sup>1</sup>. L'addition trouve surtout son emploi dans les quantités moyennes. La multiplication se prête mieux à la formation de grands nombres. Enfin l'élévation aux puissances exprime des quantités illimitées. Grâce à ces diverses façons de procéder, le champ de la spéculation arithmétique est susceptible de se restreindre ou de s'étendre à la mesure de tous les besoins. Les calculateurs peuvent atteindre, d'une allure à leur gré lente ou rapide, des valeurs quelconques, et aller de l'unité aux plus grands nombres, sans être arrêtés par la difficulté de les concevoir ou de les formuler.

## 2. FORMATION DES NOMBRES PAR DÉCROISSEMENT

Quoique le décroissement des quantités semble être l'exacte contre-partie de leur accroissement, sa théorie est plus complexe et sa pratique moins aisée. L'opération qui vise à décomposer un nombre n'est pas, en effet, aussi simple que celle qui consiste à le composer. Pour constituer les nombres en partant de leurs éléments, on suit une voie directe, indiquée par la nature de l'opération; mais pour défaire des nombres formés et revenir à leurs éléments, on est exposé à tenter diverses voies dont une seule aboutit. Si l'on emploie pour atténuer

1. Un homme qui consacrerait sa vie entière à énoncer ou à écrire la suite des nombres, atteindrait à peine un milliard. Le temps lui manquerait pour aller plus loin.

la valeur des moyens autres que ceux qui ont servi à la produire, l'opération peut se trouver empêchée et le problème ne comporter qu'une solution imparfaite. La multiplication, l'élevation aux puissances réussissent toujours et donnent un résultat précis; la division, au contraire, trouve fréquemment des restes, et l'extraction des racines ne les évite que par exception. Plus le mode de formation des nombres est complexe, moins on a chance, quand on les décompose, d'arriver à une détermination rigoureuse. Enfin, tandis que l'emploi des artifices d'accroissement se suffit et n'emprunte rien (sauf pour la preuve, qui est extrinsèque) aux artifices de décroissement, la théorie des seconds exige la connaissance et le concours des premiers. De là résultent des difficultés spéciales. On sait qu'il est plus embarrassant, en numération, de descendre d'un nombre à l'unité que de monter de l'unité jusqu'à lui; il est de même moins aisé de soustraire que d'ajouter; de diviser que de multiplier; et surtout d'extraire des racines que d'élever aux puissances. Pour ces motifs, les opérations de décroissement doivent être étudiées après celles d'accroissement. Nous les subdiviserons aussi en deux classes suivant qu'elles effectuent des disjonctions simples ou des disjonctions répétées.

A. — Opérations soustractives ou par disjonctions simples.

Ici, encore, deux cas sont à distinguer, car on peut disjoindre les unités une à une ou les détacher par groupes. Le premier correspond à la numération descendante et le second à la soustraction.

*a.* — Un nombre quelconque, constituant un groupe d'unités, peut d'abord se laisser défaire par une atténuation graduelle de valeur qui, chaque fois, retient une unité et permet ainsi de descendre jusqu'à l'unité première.

Cette opération n'offre aucune difficulté pour les nombres simples; pour les nombres composés, il faut suivre méthodiquement l'ordre des séries décroissantes d'unités.

*b.* — La « soustraction » (de *subtrahere*, retrancher), réduit les nombres par collections d'unités. On considère un nombre comme la somme de plusieurs autres et, l'une de ces parties étant donnée, on la soustrait du total pour avoir le « reste » ou « différence » qui représente l'excès du plus grand nombre sur le plus petit.

Cette opération est simple et directe lorsqu'elle porte sur les nombres du premier ordre; — pour l'exécuter sûrement sur des nombres composés, il faut procéder avec méthode et pratiquer des disjonctions successives. On retranche alors les uns des autres les divers ordres d'unités qui se correspondent, sauf à faire un emprunt aux séries plus élevées lorsque le chiffre inférieur à soustraire dépasse le supérieur, et à tenir compte de cet emprunt en élevant d'une quantité égale le chiffre suivant. Le procédé de l'addition se combine donc ici avec celui de la soustraction.

**B. — Opérations divisives, par disjonctions répétées.**

Les opérations soustractives, se bornant à effectuer un retranchement unique, d'unités dans un cas, de groupes d'unités dans l'autre, ont un pouvoir très restreint de décroissement. L'atténuation de la valeur est rendue plus rapide par des opérations qui retranchent soit des séries de groupes (division), soit des séries de séries (extraction de racine.)

*a.* — La « division » (de *dividere*, partager), regarde un nombre comme le produit de deux facteurs et, l'un

d'eux étant connu, se propose de trouver l'autre. Cela revient à chercher combien de fois le « diviseur » est contenu dans le « dividende ». Le résultat porte le nom de « quotient » (*quoties*).

La division des nombres simples les uns par les autres est aisée et s'apprend, comme leur multiplication, par un exercice de mémoire au moyen de la table de Pythagore. — Mais celle des nombres composés exige du raisonnement. Les séries d'unités dont le dividende se compose doivent être successivement divisées par les séries d'unités comprises dans le diviseur. Cette opération complexe nécessite le concours de la multiplication, de la soustraction et de l'addition.

*b.* — « L'extraction de racine », inverse de l'élévation aux puissances, accomplit des disjonctions systématiques, par séries de séries. Un nombre étant donné comme puissance, on cherche un autre nombre, appelé « racine », qui, multiplié par lui-même un certain nombre de fois, reproduise le premier. On procède alors par divisions successives sur un dividende décroissant.

L'extraction des racines carrées s'effectue sans trop de peine; celle des racines cubiques est déjà plus ardue et, comme la difficulté de l'opération augmente très vite avec le degré de puissance, on s'applique rarement à extraire les racines des puissances supérieures.

Les modes de décroissement, ainsi distribués, forment un ensemble logique d'opérations dont les termes, de plus en plus complexes, marquent les degrés d'accélération dans la décroissance. La numération descendante réduit les nombres par unités; la soustraction, par groupes d'unités; la division, par séries de groupes; l'extraction de racine, par séries de séries. Ces manières de procéder se lient les unes aux autres. La soustraction implique la numération et la continue; la division est une soustraction

répétée; l'extraction de racine, une division périodique, opérée d'abord sur le dividende, puis sur le quotient. Ces divers artifices se surajoutent en vue de rendre toujours plus prompte l'atténuation des valeurs et, grâce à eux, le calcul peut redescendre sans peine des plus grands nombres à l'unité.

#### CONCLUSION

Tels sont les procédés en usage pour déterminer les nombres. L'extrême simplicité des conceptions arithmétiques et la disposition des quantités en séries inverses, limitent les variations éventuelles de la valeur en plus ou en moins à un petit nombre d'opérations fixes ou règles applicables à tous les cas. Les adjonctions qui augmentent les nombres et les disjonctions qui les diminuent ne pouvaient en effet s'opérer que de quatre manières et porter sur des unités, ou sur des collections d'unités, ou sur des séries de collections, ou sur des séries de séries. On avait ainsi, d'une part, la numération ascendante, l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances; de l'autre, la numération descendante, la soustraction, la division et l'extraction des racines. Ces systèmes coordonnés de composition et de réduction permettent de faire subir aux quantités toutes les modifications que l'on désire, et de passer à volonté des moindres nombres aux plus grands, comme des plus grands aux moindres.

Toutefois, dans le détail des opérations les plus complexes, on pourrait concevoir d'autres développements. Il serait par exemple facile d'imaginer des puissances composées et supérieures où, au lieu d'opérer avec un multiplicateur invariable sur un multiplicande croissant, on ferait progresser simultanément les deux facteurs, ce qui procurerait une double accélération de vitesse. Une autre manière d'opérer serait suggérée par la progression que

suit le pouvoir de combinaison des nombres en série continue. Ainsi, tandis que deux objets ne comportent l'un par rapport à l'autre que 2 modes d'arrangement, trois en admettent 6; — quatre, 24; — cinq, 120; — six, 720; — sept, 5040 — huit, 40.320 etc. On n'a pas encore assigné de lois à ce mode de production des nombres; mais peut être faudra-t-il y recourir quelque jour pour résoudre les problèmes relatifs à l'ordre de collocation des particules des corps. La difficulté des opérations, qui augmente vite avec leur complexité, a jusqu'ici empêché les recherches de s'étendre au-delà des quatre modes d'accroissement et de décroissement que nous avons exposés. Au reste, les règles usuelles se prêtent à des applications indéfinies et suffisent présentement à tous les besoins.

L'apparente simplicité des procédés arithmétiques ne doit donc pas faire méconnaître leur importance. Ces artifices sont de continuel emploi et, sans eux, toute spéculation mathématique serait impossible. La comparaison de grandeurs quelconques se ramène en effet toujours à nombrer ou dénombrer, ajouter ou retrancher, multiplier ou diviser, élever aux puissances ou extraire des racines. Les opérations de ce genre, les moins complexes, mais les plus générales qui se puissent concevoir, déterminent les éléments de la grandeur et donnent la mesure de ses inégalités les plus appréciables. Nous les retrouverons partout nécessaires, en Géométrie, dans l'étude des rapports, en Algèbre et dans tous les ordres de faits.

Les théories de l'Arithmétique établissent ainsi le fondement de la science des grandeurs. Le problème de la formation des nombres devait être résolu avant aucun autre et, si l'esprit humain n'y avait pas réussi, rien n'aurait été accessible à son investigation. Avec le secours de ces artifices, tout, au contraire, devenait aisé. L'organisation d'un système raisonné de numération, l'art de chiffrer, les règles instituées pour opérer sur les nombres, sont des instru-

ments de recherche d'une merveilleuse efficacité. Nous leur devons la facilité, la promptitude et la précision des mesures de quantité qui portent sur l'universalité des choses. Par eux, nous avons toute latitude pour nous élever de l'unité aux plus grands nombres, décomposer ceux-ci en leurs moindres éléments et gravir ou redescendre les degrés assignables de la grandeur, sans jamais risquer de nous perdre dans les complexités du calcul.

## II. — MATHÉMATIQUE SPÉCIALE OU GÉOMÉTRIE

### SCIENCE DE LA DÉTERMINATION DE L'ÉTENDUE

#### THÉORIE DE L'ÉTENDUE. DU POINT ET DES DIMENSIONS

Après la grandeur quantitative, considérons la grandeur étendue. Comme l'idée de nombre est l'expression abstraite de la coexistence ou de la multiplicité des choses, l'idée d'étendue résulte d'une abstraction opérée sur l'attribut essentiel d'impénétrabilité ou de résistance qui fait que les êtres sont perceptibles pour les sens et concevables pour la pensée à titre de réalités distinctes. Il ne serait pas possible, en effet, d'affirmer leur pluralité, si des sensations particulières, les opposant les uns aux autres, n'attestaient en eux des limites qui les séparent, des dimensions qui leur sont propres et empêchent de les confondre.

A l'origine de la connaissance et tant que le moi, réduit aux informations du sens intime, se borne à percevoir sa réalité personnelle, il n'a aucune idée de l'étendue. Son être, unique, incommensurable, infini, remplit à lui seul l'espace, et la pensée ne lui assigne pas de bornes parce qu'elle n'en connaît pas. La notion d'étendue apparaît, d'abord indécise, avec la détermination des parties du moi par les sensations internes. Il conviendrait d'en chercher le point de départ dans l'impression de résistance qu'éprouve le sens musculaire lorsqu'il réagit contre lui-même ou contre les corps extérieurs. Suivant qu'alors le mouvement est libre ou empêché, nous avons l'idée de l'espace vide ou de l'espace occupé. L'idée d'étendue de-

vient ensuite plus claire par la distinction du moi et du non-moi qui se délimitent l'un l'autre. Enfin, l'analyse des éléments du non-moi à l'aide de sens externes la rend tout à fait explicite. Le concept d'espace se rattache donc, comme celui de nombre, aux premières sensations perçues d'une manière distincte. Sa genèse résulte des tentatives que fait l'esprit, d'abord pour opérer des localisations dans l'organisme, au moyen du sens musculaire, et plus tard pour extérioriser, avec le concours du toucher, de l'ouïe et de la vue, les causes des sensations. Les impressions de cet ordre, sans cesse renouvelées, composent un ensemble de données qui, généralisées et abstraites, aboutissent au concept d'espace (Helmholtz, *Les axiomes de la Géométrie et Optique physiologique*). Cette idée, à la fois vague et claire, comme celle d'existence, se retrouve dans toutes les notions de réalité et devient leur condition commune.

L'étendue est l'attribut nécessaire des choses qui coexistent, puisque, sans limites qui les déterminent, sans dimensions qui permettent de les saisir, elles cesseraient de constituer des réalités discernables, et, perçues toutes ensemble, se confondraient dans l'unité d'un être indivis et indistinct. Nous ne pouvons donc nous représenter des réalités multiples que comme existant les unes en dehors des autres, chacune d'elles occupant une portion déterminée de l'étendue et possédant, avec une existence propre, des dimensions qui la circonscrivent. Partout où la sensation constate et où la pensée conçoit une pluralité de choses, il y a des frontières à poser, une étendue à définir, un ordre de grandeurs à mesurer.

Pour s'élever des données concrètes que la perception procure à la conception abstraite de l'étendue, il suffit d'éliminer dans les choses tous les autres attributs, variables et contingents, de retenir celui d'impenétrabilité, seul général et nécessaire, et de le regarder comme existant par lui-même. L'espace constitue alors un milieu

indéfini, sorte de réceptacle idéal où toutes les réalités sont contenues. Mais ce milieu n'a pas de réalité véritable; il représente une généralisation d'expérience, une abstraction matérialisée. L'esprit, déçu par le symbolisme du langage, a cru longtemps à l'existence effective de l'espace et Newton lui-même a partagé cette illusion. Kant n'a osé s'en affranchir qu'à demi, tenant l'espace pour une forme nécessaire de nos concepts, pour une catégorie de la pensée (*Critique de la raison pure*, 1<sup>re</sup> partie, § 1), ce qui est lui attribuer encore une sorte d'existence métaphysique. L'espace est simplement un aspect de la réalité, l'expression mentale d'un fait de coexistence. Si rien n'existait ou si une seule chose était connue, sans distinction de parties, il n'y aurait pas d'espace. Leibniz le définit : « L'ordre des choses qui coexistent. » (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, liv. II, ch. XIII.) Le concept d'espace résulte ainsi des deux données d'existence et de nombre : « Non seulement, dit H. Spencer, l'idée d'espace implique celle de coexistence, mais l'idée de coexistence implique aussi celle d'espace. Au fond, l'espace et la coexistence sont les deux aspects de la même connaissance. D'une part, on ne peut penser l'espace sans penser des positions coexistantes; d'autre part, on ne peut penser la coexistence sans penser au moins deux points dans l'espace... Deux choses quelconques ne peuvent occuper absolument le même point dans l'espace. Par suite, la coexistence implique l'espace. » (*Principes de Psychologie*, t. II, p. 205.)

Considéré comme la condition générale de la multiplicité des êtres, l'espace, qui les contient tous, est infini et par conséquent hors de la grandeur. Mais lorsque, dans cette immensité nue, la pensée trace des limitations, l'espace, perdant son caractère d'infinité, se détermine et se scinde en intervalles finis dont les dimensions sont susceptibles de comparaison et de mesure. Ces parties limitées de l'espace illimité portent le nom d'« étendue » (de

*ex tendere*). Le sens relatif de ce terme diffère du sens absolu de celui d'espace en ce qu'il admet du plus et du moins, des inégalités et des variations dont la Mathématique fait un sujet d'étude. Cet ordre de recherches constitue « la science des propriétés de l'étendue figurée » (d'Alembert, *Éléments de philosophie*).

A. Comte l'a qualifiée à tort de « concrète ». Les déterminations de l'étendue ne sont pas moins abstraites que les nombres et leurs figurations qui semblent les réaliser aux yeux, doivent être tenues pour de simples artifices destinés à faire mieux concevoir des constructions entièrement idéales. Une science n'aurait pas pu prendre pour objet la comparaison de dimensions réelles, à cause de la diversité qu'affectent les formes des choses, de la difficulté de leurs confrontations, de l'impuissance où nous sommes d'arriver, avec des sens imparfaits, à des résultats rigoureux, enfin du défaut de valeur générale inhérent à la mesure des grandeurs concrètes. L'étude des limitations abstraites de l'étendue n'avait au contraire que des avantages : elle permettait d'aborder le problème par ses côtés les plus simples ; de compliquer par degrés les recherches ; de mesurer les figures avec précision ; enfin de formuler en lois ou théorèmes des rapports communs à toutes les constructions de même nature. Pour cela, les représentations graphiques dont la science fait usage devaient n'avoir rien de concret. Nos conceptions de l'étendue, pures conventions d'esprit, ne sont réalisées nulle part dans la nature ni ne pourraient l'être. La définition même du point, des lignes, des surfaces et des volumes exclut toute idée d'apparence sensible. Ces données n'existent que pour la raison, et c'est justement pour cela qu'il suffit de raisonner pour en connaître.

En somme, nos déterminations de l'étendue figurée ne sont pas tirées du monde réel par la perception ; mais elles ne sont pas davantage créées *à priori* par l'entendement. Leurs éléments, dérivés de la sensation, ne devien-

enent objet de connaissance qu'après avoir été abstraits et comme tranfigurés par la conception. L'idée que nous avons de l'étendue sous trois dimensions résulte d'un accord entre des sens spéciaux et serait différente si notre organisation était autre. Reid a montré qu'un homme privé du sens musculaire et du tact, c'est-à-dire réduit à la vue, ne connaîtrait l'étendue que sous deux dimensions et rapporterait les choses à la surface d'une sphère de rayon indéfini. Ses axiomes ne ressembleraient plus aux nôtres notamment en ce qui concerne la ligne la plus courte entre deux points, les lignes parallèles, la somme des angles d'un triangle, etc. D'ingénieux géomètres (Gauss, Riemann...) ont exercé leur sagacité sur ces hypothèses et cherché quels nouveaux axiomes pourraient provenir des conditions modifiées de la perception. Il y a donc, dans notre science de l'étendue, une part de relativité qui tient à la nature de nos sensations et une part d'idéalité qui tient à celle de nos conceptions.

La notion de grandeur étendue est plus complexe que celle de grandeur quantitative. Les nombres, se référant à des groupes de choses quelconques, expriment la grandeur indéterminée, virtuelle et comme en puissance; les figurations de l'étendue, au contraire, montrent la grandeur déterminée, circonscrite et définie. Leur étude pénètre ainsi plus avant dans le problème de la coexistence des choses. Elle achève la connaissance en ajoutant l'idée d'attribut à celle d'être, c'est-à-dire la mesure des dimensions à celle des quantités. Elle ne se contente plus de supputer des existences; elle veut scruter l'ordre idéal de leurs limitations respectives et construire l'étendue d'après des lois rationnelles. L'Arithmétique, science élémentaire, établit ce que la théorie des grandeurs a de simple et d'uniforme. Comme les quantités ne changent que d'un petit nombre de manières qui correspondent aux degrés d'accélération dans l'accroissement ou la décroissance elle se

borne à instituer quelques règles ou systèmes d'opérations dont le mécanisme s'applique à toutes les valeurs. Les figurations de l'étendue combinent au rebours des éléments susceptibles de se modifier peu à peu. Par suite, leur étude représente ce que la théorie des grandeurs a de variable. La détermination de l'espace sous trois dimensions permet en effet de produire un nombre indéfini de figures dont chacune a son mode de construction, sa dérivation, ses propriétés, ses lois, et réclame conséquemment une démonstration à part. Au lieu de procéder par séries de cas, il faut entrer dans un détail que les plus actives recherches n'ont pas chance d'épuiser. La spécialité des théorèmes est donc, en Géométrie, le caractère dominant, comme, en Arithmétique, la généralité des règles. C'est pourquoi nous appelons « spéciale » la partie de la Mathématique qui traite de l'étendue. Nous détournons ainsi ce terme du sens que la pédagogie lui assigne, car d'ordinaire on appelle « Mathématiques spéciales » l'étude de l'Algèbre et de la Géométrie analytique. Mais ce sont plutôt là des sections transcendantes de la science des grandeurs, et nous réserverons pour les désigner le nom mieux approprié de « Mathématique générale ». L'épithète de spéciale ne convient réellement qu'à la Géométrie figurative dont chaque détail de construction constitue un problème distinct, un cas particulier, et nécessite un examen séparé.

La science de l'étendue, en raison de sa complexité plus grande, n'a réussi à se constituer que bien après celle du nombre. L'Arithmétique formait par elle-même un tout complet, parce que les quantités ont une valeur propre dont la détermination s'opère sans qu'on ait à tenir compte d'aucune autre donnée; mais l'étude de l'étendue figurée impliquait la connaissance des nombres, car, pour déterminer des dimensions, il faut supputer des longueurs, des aires et des volumes. Sans le secours des procédés arithmétiques, la grandeur étendue ne pourrait pas être mesurée.

Plus récente que l'Arithmétique, dont l'origine immémoriale dut être contemporaine du plus ancien commerce, la science de l'étendue a pris naissance dans les premières écoles de philosophie chez les Hellènes. Quoique l'Égypte paraisse avoir eu des notions de Géométrie dès l'époque de la construction des Pyramides, puisque les architectes qui les élevèrent, plus de quarante siècles avant notre ère, savaient tracer des lignes, mesurer des surfaces et cuber des volumes, les recherches ne se dégagèrent d'expédients empiriques et ne furent systématisées en théories rationnelles que vers l'époque de Thalès. On doit à cet initiateur de la philosophie grecque les théorèmes élémentaires, mais très importants comme point de départ, sur la valeur des trois angles d'un triangle et sur la proportionnalité des côtés homologues des triangles équiangles. Ces deux propositions pourraient marquer le moment où la Géométrie, jusqu'alors réduite à des mesurages technologiques, devint une science abstraite, spécula sur les rapports de figurations idéales et formula des relations fixes exprimant l'idée de loi, de vérité démontrée.

Le nom de « Géométrie », qui nous est venu des Grecs, rappelle les humbles commencements d'une science sortie des pratiques de l'arpentage (*γεωμετρία*, mesure de la terre)<sup>1</sup>. Ce terme, legs de la tradition, est maintenant fort inexact et semble perpétuer la confusion de la science générale de l'étendue avec une de ses applications particulières. On souhaiterait une dénomination moins défecueuse. Celle de « Mégéthologie » (de *μέγεθος*, grandeur dans l'espace), proposée par Ampère, mais assignée par lui à une section de l'Algèbre (*Philosophie des sciences*, t. I, p. 38, 9), pourrait convenir à la science qui nous occupe et satisferait aux exigences d'une terminologie rationnelle.

A. Comte n'a pas mieux traité la science de l'étendue

1. Dans les *Nuées* d'Aristophane, Strepsiade demande au disciple de Socrate : « Qu'est-ce que cela ? — La géométrie. — A quoi sert-elle, la géométrie ? — A mesurer la terre. »

que celle du nombre. Cédant à des prédilections exclusives d'algébriste, il tient la géométrie figurative ou, comme il l'appelle dédaigneusement, la « géométrie des anciens », pour une science rudimentaire, arriérée et transitoire, qu'il se borne à mentionner en passant, et n'attache d'importance qu'à la « géométrie analytique » ou « moderne », que Descartes a créée, mais qui rentre plutôt dans la Mathématique générale. Pour l'auteur du *Cours de philosophie positive*, la première n'aurait été qu'une introduction à la seconde, qui constituerait seule une science vraiment rationnelle (t. I, p. 281 à 285). C'est méconnaître ce que le rôle de la Géométrie commune a d'essentiel dans la théorie des grandeurs. Non moins indispensable que l'Arithmétique, elle a de même un objet déterminé, une méthode appropriée et des résultats nécessaires dont l'ignorance rendrait impossible toute recherche de Géométrie analytique. Elle arrive même, dans une foule de cas, à des solutions plus simples et plus rapides. Sa fonction consiste à concevoir et à définir en détail les modes de construction dont l'analyse dégage ensuite les lois par séries. Aussi la Géométrie figurative a-t-elle pu se constituer bien avant la Géométrie analytique et sans son secours, tandis que celle-ci n'aurait pas eu de problèmes à poser si les notions acquises par la précédente lui avaient manqué. Pour ces motifs, nous croyons devoir maintenir la Géométrie ordinaire à l'état de section distincte dans l'ensemble de la Mathématique et spécifier d'abord les systèmes de construction des figures, sauf à généraliser ensuite leurs lois.

Avant d'aborder le détail des théorèmes de la Géométrie considérons ses éléments. — L'étendue se détermine au moyen de points, de lignes, de surfaces et de volumes. Ces données résultent du travail d'abstraction par lequel l'esprit élimine graduellement les dimensions perceptibles des choses pour les réduire à leur condition la plus simple.

L'idée de volume qui, unissant les trois dimensions, se rapproche le plus de la réalité sensible, s'obtient en retranchant la masse interne des corps pour retenir seulement l'espace circonscrit par leur contour extérieur, unique indication que, dans la plupart des cas, le toucher et la vue puissent fournir. La notion de surface s'acquiert en éliminant du volume la profondeur, c'est-à-dire en supposant la superficie des choses réduite à une épaisseur si petite qu'on n'ait plus à en tenir compte. La ligne provient de la réduction de la largeur à une incomparable ténuité ne laissant plus subsister qu'une dimension, la longueur. Enfin, le point se conçoit comme un fragment de ligne réduit à la plus grande petitesse et n'ayant plus de longueur. Avec ces données abstraites, la raison établit dans l'étendue des divisions facultatives, les combine et construit les figures les plus diverses sous une, deux et trois dimensions.

Le point est la moindre portion de l'étendue qui se puisse concevoir. Euclide le définit « ce qui n'a pas de parties » (*Éléments, définitions*). Dépourvu de longueur, de largeur et de profondeur, il semble être la négation de l'étendue. Il a pourtant une valeur réelle, essentielle même, et sa détermination est le principe de tout système de figuration. Élément irréductible de localisation dans l'espace, il marque le point de départ, d'arrivée ou d'entrecroisement des lignes, les engendre par ses modes de mouvement, les répartit en intervalles finis, constitue des centres de figures, etc. C'est la donnée primordiale de laquelle toutes les autres procèdent.

La ligne, élément dérivé, se définit la trace d'un point qui se meut suivant une loi déterminée. Deux cas peuvent alors se produire : ou le point en mouvement se dirige invariablement vers un autre point censé fixe, et l'on a une ligne droite ; ou il suit une direction variable autour d'un ou de plusieurs points, et l'on a une ligne courbe. Une ligne quelconque, même tracée au hasard, repro-

duit toujours l'un ou l'autre de ces éléments. La ligne représente la plus simple des dimensions, la longueur, abstraction faite de la largeur et de la profondeur. Son étude constitue le fondement de la Géométrie. Comme l'étendue linéaire est celle des dimensions figurées dont la mesure directe s'obtient le plus aisément et avec le plus d'exactitude, parce qu'elle se prête le mieux à une juxtaposition qui met en évidence ses conditions d'égalité, la science cherche toujours à déterminer cette donnée et la solution des problèmes les plus complexes se réduit finalement à des évaluations de longueurs.

Les aires, moins simples que les lignes, varient à la fois dans deux dimensions et se déploient en longueur et en largeur, abstraction faite de la profondeur. Les surfaces sont réparties en planes et en courbes, suivant qu'il est ou non possible d'y appliquer une ligne droite dans tous les sens.

Enfin, le volume résulte d'un système de surfaces qui se coupent ou se développent de manière à circonscire entièrement une portion de l'étendue. Une troisième dimension, la profondeur, s'ajoutant à la largeur et à la longueur, achève de déterminer la figure. On distingue les volumes à faces planes ou « polyèdres » et les volumes à surfaces courbes. Les uns et les autres peuvent affecter les formes les plus diverses. Leur mesure se ramène à celle des surfaces comme la mesure des surfaces à celle des lignes. La notion de volume, la plus complexe que la Géométrie puisse établir, confine à l'idée de corps et, quoique incapable de l'exprimer, permet d'en aborder l'étude par un changement de méthode qui, substituant l'observation à la déduction, fait passer la recherche de l'abstrait au concret et de la conception idéale aux phénomènes réels.

Telles sont les données sur lesquelles spéculé la science de l'étendue. Examinons comment il convient de distribuer

ses problèmes. La Géométrie n'a pas encore de programme méthodique et les questions si nombreuses qu'elle agite manquent de coordination dans leur ensemble. Nous commencerons par séparer les modes de construction des figures et les rapports des figures une fois contruites. Ce sont là deux séries de problèmes qui gagneraient à être scrutées chacune à part. Comme nous avons limité l'Arithmétique à l'étude de la formation des nombres, nous limiterons la Géométrie à celle des systèmes de figuration de l'étendue et nous renverrons à la Mathématique comparée la recherche moins simple de leurs corrélations. La théorie des constructions géométriques forme par elle-même un tout logique et il y aurait avantage à ne pas rompre, en l'exposant, l'enchaînement des idées.

Cette disjonction opérée, nous n'aurons plus à considérer que les modes de détermination de l'étendue figurée. Même en cette matière, les géomètres n'ont pas de plan arrêté. Ils divisent la science en une multitude de sections particulières sans se préoccuper de les toutes classer rationnellement. Chacun suit une méthode plus ou moins arbitraire de répartition et l'on ne trouverait pas deux traités où les mêmes théorèmes soient distribués dans le même ordre. D'ordinaire, on distingue la géométrie plane, qui traite des figures à deux dimensions, soit rectilignes, soit curvilignes, et la géométrie à trois dimensions, où les deux systèmes de figures sont également rapprochés. A. Comte propose d'établir trois groupes de problèmes et d'examiner successivement : 1° les lignes ; 2° les surfaces ; et 3° les volumes (*Cours de philos. posit.* t. I, p. 267, 8). Ces divisions correspondraient en effet aux fonctions des nombres et procureraient de même l'avantage de réunir dans chaque couple des problèmes de complexité à peu près égale ; néanmoins, ce mode de classement soulève ici des objections analogues à celles qui nous l'ont fait écarter en Arithmétique. Il prend pour motif principal une considération secondaire et non la considération essentielle,

la condition initiale de l'élément générateur. Enfin, à étudier ainsi d'une part les lignes, de l'autre les surfaces et en dernier lieu les volumes, on entremêle des modes de construction qui diffèrent et l'on en sépare qui se continuent.

Les pythagoriciens avaient eu l'intuition d'un principe plus rationnel de classement quand ils opposaient, dans une de leurs catégories, « le droit » et « le courbe ». Ce sont en effet là les deux conceptions fondamentales de la grandeur étendue et tous les systèmes de figuration rentrent dans l'une ou dans l'autre. Leur dissemblance est nettement accusée dès que se détermine la première des dimensions, la longueur, et le développement des deux autres en dérive par voie de conséquence. Comme l'étude des surfaces implique la connaissance des propriétés des lignes, et l'étude des volumes la connaissance des propriétés des surfaces, tout se trouve ainsi dépendre de la nature de l'élément linéaire. Suivant qu'il est rectiligne ou curviligne, on a deux genres de figures qui dès le début obéissent à des lois distinctes. La spécialité des lignes est donc le trait principal, le caractère dominateur qu'il faut consulter avant aucun autre et sa considération doit motiver le sectionnement général des problèmes. A voir les choses de haut et dans leur ensemble, il n'y a que deux systèmes de construction dont les éléments sont représentés par deux sortes de lignes ou plutôt par deux sortes de mouvement du point. Ces éléments une fois donnés, les figurations de l'étendue sous deux et trois dimensions s'opèrent logiquement, mais chacune à part, dans l'une et dans l'autre série. Elles offrent ainsi un parallélisme exact avec les modes de variation des quantités qui se résolvent en accroissements ou en décroissements de valeur.

Conséquemment, nous partagerons la Géométrie en deux sections comprenant, l'une l'étude des figurations rectilignes, l'autre celle des figurations curvilignes. Ce mode de classement a l'avantage de coordonner les problèmes et de lier les solutions au lieu de les entrecroiser en

# MATHÉMATIQUE SPÉCIALE OU GÉOMETRIE

## SCIENCE DES FIGURATIONS DE L'ÉTENDUE

1. FIGURATION RECTILIGNE DE L'ÉTENDUE		2. FIGURATION CURVILIGNE DE L'ÉTENDUE	
A. ÉLÉMENTS DE FIGURATION RECTILIGNE		A. ÉLÉMENTS DE FIGURATION CURVILIGNE	
a. Points.	b. Lignes droites	a. Points.	b. Lignes courbes.
B. SYSTÈMES DE FIGURATION RECTILIGNE		B. SYSTÈMES DE FIGURATION CURVILIGNE	
a. Surfaces planes.	b. Volumes polyédriques.	a. Surfaces courbes.	b. Volumes à surfaces courbes.

désordre. Nous verrons même, dans les sciences suivantes, ce motif de répartition confirmé par les diverses catégories de faits où la distinction d'éléments rectilignes et d'éléments curvilignes est non moins nécessaire, car, puisque les phénomènes se produisent dans l'étendue, ils doivent suivre les lois de sa détermination. La Dynamique, la Physique, la Chimie, la science des formes et celle même des fonctions nous apporteront à tour de rôle la vérification du principe que nous venons de poser.

Cette division principale une fois admise, il faut sans doute, afin de subdiviser avec méthode les deux classes de figures, tenir compte des degrés de complexité à mesure que l'étendue se limite sous une, deux ou trois dimensions; mais ce n'est plus là qu'une considération secondaire et, chaque série étant examinée séparément, on n'aura plus à redouter le pêle-mêle des questions. En vue de simplifier l'analyse et pour nous conformer aux exigences de la méthode dichotomique, nous répartirons en deux groupes les problèmes relatifs à chaque système de construction. Les points et les lignes, qui ébauchent les figures et en tracent le linéament initial, seront pour nous les « éléments de figuration »; les surfaces et les volumes, qui développent et achèvent la construction de l'étendue, représenteront les « modes composés de figuration ». Nos cadres ainsi établis, indiquons sommairement les problèmes que la science aurait à résoudre.

#### 1. — FIGURATION RECTILIGNE DE L'ÉTENDUE

Les figurations rectilignes constituent le type le plus simple de construction de l'étendue. La constance de la direction suivie par le point dans la génération de la ligne droite, par la ligne droite dans la génération des plans, enfin la régularité des combinaisons de plans d'où résultent les polyèdres, rendent les recherches relativement aisées

et donnent le moyen de mesurer ces grandeurs les unes par les autres. L'étendue se construit ainsi dans le système rectiligne sans rien emprunter au système curviligne. Les figurations curvilignes sont, au contraire, variées et complexes. De plus, leur détermination exige l'emploi de données rectilignes. C'est donc par l'étude de celles-ci qu'il convient de commencer. Non seulement elle fait connaître une classe importante de figures ; mais encore elle fournit l'étalon indispensable auquel se ramène la mesure toujours indirecte des figures curvilignes. Examinons d'abord les éléments, puis les modes composés de la construction rectiligne.

#### A. — Éléments de figuration rectiligne.

Les éléments des figures rectilignes comprennent, d'une part, les points ; de l'autre, les lignes droites et les combinaisons qu'elles sont susceptibles de produire dans un plan.

*a.* — L'étude des points se réduit à très peu de chose ; mais ce peu est essentiel et constitue le principe des spéculations sur l'étendue. Les points, invariables par nature, se ressemblent tous par la nullité de leurs dimensions. On ne peut donc les distinguer que par leurs positions respectives et leurs conditions de fixité ou de mouvement.

Fixes, les points déterminent la donnée première d'une localisation dans l'espace. Ils marquent les têtes et les fins des lignes, leurs divisions et intersections.

Mobiles, ils engendrent les lignes elles-mêmes qu'on définit la trace laissée par un point en mouvement.

Des points fixes et des points en mouvement, tels sont les éléments générateurs de l'étendue figurée. Il suffit de poser un point dans l'espace pour introduire l'idée du fini dans le sein de l'infini. L'impuissance où nous sommes de

concevoir l'infinité de l'espace dans tous les sens tient à ce que nous partons de nous-mêmes comme d'un point qui fait centre et autour duquel l'infini rayonne dans toutes les directions. Mais supprimons l'idée limite de centre, concevons l'espace comme uniforme et continu, il paraîtra logiquement infini, sans bornes en aucun sens.

*b.*—Les points, dépourvus de dimensions par eux-mêmes, servent à développer la première des dimensions, la longueur.

La ligne droite, en raison de sa simplicité même, est malaisée à spécifier. Selon d'Alembert, sa définition et ses propriétés sont « l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie » (*Mélanges*, t. V, p. 207). La formule usuelle qui la définit « le plus court chemin d'un point à un autre » impliquerait en effet la comparaison préalable de tous les chemins et la détermination du moins long. Or, tant qu'on ignore ce qu'est une ligne, on ne peut guère mesurer leurs différences. Euclide, mieux inspiré, ne mentionne cette propriété de la ligne droite que dans un théorème ultérieur, relatif aux côtés du triangle. On a proposé de définir la ligne droite, la seule ligne immobile entre deux points fixes dans un ensemble qui tourne sur eux ; mais c'est supposer la ligne droite déjà constituée, tandis que la définition véritable devrait faire assister à sa formation. La seule formule rationnelle consiste à définir la ligne droite : la trace d'un point qui se meut invariablement vers un autre point censé fixe.

Les lignes droites sont toutes pareilles par définition et l'esprit n'en peut concevoir que d'une sorte ; mais plusieurs de ces lignes sont susceptibles d'occuper, les unes par rapport aux autres, des positions diverses. Situées dans un même plan, elles sont parallèles ou obliques. Dans le premier cas, elles conservent entre elles un écartement constant ; dans le second, elles s'éloignent ou se rapprochent de plus en plus. Quand elles viennent à se couper,

elles forment des angles, la plus simple des figures élémentaires, dont l'étude a pour la science un intérêt capital.

Les angles sont appelés « droits » quand ils ont leurs côtés perpendiculaires l'un sur l'autre ; « aigus » ou « obtus » quand ces côtés se coupent en formant des angles inférieurs ou supérieurs à l'angle droit. L'intersection de deux lignes perpendiculaires l'une sur l'autre donne quatre angles droits. Celle de lignes obliques, des angles « adjacents », l'un aigu, l'autre obtus, dont la somme est égale à deux angles droits, et des angles « opposés » égaux. Lorsqu'une ligne transversale coupe des parallèles, les angles « alternes » sont égaux.

L'étude des angles conduit à celle des « triangles », la plus importante des figurations planes, parce qu'elle sert d'étalon à toutes les autres. Un triangle est dit « équilatéral » quand ses trois côtés sont égaux ; « isocèle » si deux seulement sont égaux ; « scalène » s'ils sont tous trois inégaux. Les triangles se classent, par la considération de leurs angles, en « équiangles », dont les trois angles sont égaux ; « rectangles », quand un des angles est droit ; « obtusangles », qui ont un des angles obtus ; et « acutangles », si tous les angles sont aigus.

Les figures plus complexes qui se construisent avec des lignes droites dans un plan, portent le nom de « polygones ». On les répartit en raison du nombre de leurs côtés et de la nature de leurs angles. Le groupe des « quadrilatères » comprend : le « carré », dont les côtés et les angles sont égaux ; le « rectangle », dont les angles sont égaux mais dont les côtés qui se coupent sont inégaux ; le « losange », dont les côtés sont égaux et les angles opposés égaux ; enfin, le « trapèze », dont deux côtés sont parallèles et inégaux. Après les quadrilatères, viennent les « pentagones », construits avec cinq côtés ; les « hexagones », avec six ; les « octogones », avec huit ; les « décagones », avec dix ; les « dodécagones », avec

douze; etc. On distingue encore les polygones « simples », dont tous les angles sont saillants, et les polygones « étoilés », dont les angles sont alternativement saillants et rentrants. La série des polygones est indéfinie; mais la science ne s'occupe que des « réguliers »; les irréguliers n'ont pas d'intérêt général à cause de la difficulté de les définir et d'établir entre leurs éléments des relations précises.

#### B. — Figurations rectilignes composées.

Les modes composés de construction rectiligne déterminent l'étendue sous deux ou sous trois dimensions et produisent, dans le premier cas, des surfaces planes, dans le second, des volumes polyédriques.

*a.* — La ligne, qui développe une dimension unique, la longueur, ne construit pas à proprement parler l'étendue et la limite seulement. La surface, moins bornée, se mesure sous deux dimensions et s'étend à la fois en longueur et en largeur. Il y aurait à examiner, d'abord le mode de production des surfaces planes, ensuite les combinaisons formées par divers plans.

Le plan se définit la trace que laisse une ligne glissant sur deux autres lignes droites parallèles ou tournant autour d'une ligne droite fixe qui lui est perpendiculaire. Le plan procède ainsi de la ligne droite comme la ligne droite du point. La simplicité de ces éléments et l'uniformité du mode de génération ne permet de concevoir qu'une sorte de plan.

Mais divers plans peuvent occuper les uns par rapport aux autres des positions différentes. On doit considérer, comme pour les lignes droites, les deux cas de parallélisme et d'intersection. Les plans parallèles, séparés par un écartement constant, n'arrivent pas à se couper, si loin qu'on

les prolonge. Lorsque les plans obliques se coupent, ils forment des angles « dièdres ». On appelle « polyèdre » l'angle produit par la rencontre de plusieurs plans en un même point. Les positions respectives des plans dans l'espace sont unies par des relations analogues à celles des lignes dans un plan et régies par les mêmes lois.

**b.** — Le volume polyédrique résulte d'une combinaison de plans assez complète pour enclore dans tous les sens une portion de l'étendue. Il achève la construction et la délimite sous trois dimensions. Mais le nombre des éléments qu'il combine rend son étude beaucoup plus complexe. Si, par exemple, on regarde le cube comme un volume dérivé du carré, on voit que celui-ci se détermine entièrement par quatre côtés et quatre angles, tandis que le cube a six faces, huit angles dièdres, huit angles polyèdres et douze arêtes. Les volumes à faces planes se classent en « réguliers » et en « irréguliers ».

Dans l'immense série des polyèdres, cinq seulement sont réguliers, c'est-à-dire terminés par des faces égales qui se coupent sous des angles égaux. Ce sont : le « tétraèdre », l'« octaèdre », l'« icosaèdre », l'« hexaèdre » ou cube et le « dodécaèdre », qui comptent, le premier quatre, le second huit, le troisième vingt faces triangulaires, le quatrième six faces carrées et le cinquième douze faces pentagonales.

Les polyèdres irréguliers composent des familles très nombreuses, « prismes », « parallélépipèdes », « pyramides », etc., dont le détail comporte une grande diversité de figurations spéciales. Ces formes se lient les unes aux autres et les plus complexes se laissent ramener sans difficulté à la mesure des plus simples.

Ainsi, les modes de construction rectiligne composent une série dont les termes se continuent et suivent la même loi. Un point fixe étant donné, la ligne

droite est produite par un autre point, mobile, qui se dirige vers le premier sans dévier; le plan est engendré par une ligne droite qui se déplace en gardant de même une direction invariable; enfin, les polyèdres se forment par une combinaison de plans qui s'entrecoupent et circonscrivent l'étendue dans tous les sens. Les figures de cette classe sont déterminées les unes par les autres, à mesure que les dimensions se réalisent, et leur ensemble forme un tout dont il est irrationnel de scinder l'unité en mêlant à son étude, comme on le fait d'ordinaire, celle des figures construites d'après un système différent.

## 2. — FIGURATION CURVILIGNE DE L'ÉTENDUE

Les figurations curvilignes représentent ce que l'ordre des constructions de l'étendue a de complexe et de variable. Autant le système rectiligne est simple et uniforme, autant celui dont nous abordons maintenant l'étude est plein de diversité. L'esprit ne peut concevoir qu'une sorte de ligne droite, qu'une sorte de plan, on pourrait même dire qu'une sorte de volume, puisque tous les polyèdres se laissent décomposer en tétraèdres comme les polygones en triangles. Au contraire, les lignes courbes, les surfaces courbes et les volumes à surfaces courbes comportent des modifications indéfinies. Leur détermination soulève des problèmes sans nombre. Cette étude, plus vaste et plus difficile que la précédente, n'a pu se constituer qu'après elle et avec son secours. Elle comprend, d'une part, les éléments de figuration curviligne, de l'autre, les modes composés de construction.

### A. — Éléments de figuration curviligne.

Nous avons à examiner, d'abord les points, ensuite

les lignes courbes et les combinaisons de ces lignes dans un plan.

*a.* — Le point, dont le rôle est essentiel et primordial dans le système curviligne comme dans le système rectiligne, se trouve de même, selon son état de fixité ou de mouvement, investi de deux fonctions distinctes.

Fixes, les points marquent, non plus seulement des têtes, des fins ou des intersections de lignes, mais surtout des centres de figure (« centres », « foyers ») autour desquels tourne, suivant certaines lois, le point générateur de la courbe.

Mobiles, les points décrivent les courbes en raison de leurs conditions de mouvement qui, au lieu d'être uniformes comme dans la génération de la ligne droite, admettent les combinaisons les plus variées.

La théorie des figurations curvilignes et leur mutabilité caractéristique sont la conséquence de ces fonctions du point.

*b.* — Les lignes courbes diffèrent des lignes droites en ce que leur direction varie continuellement. Alors que la ligne droite, qui suit une direction constante, ne pourrait s'en écarter qu'à condition de se briser, c'est-à-dire en cessant d'être une ligne droite, les courbes, qui tournent autour d'un ou de plusieurs centres, changent de direction à chaque point de leurs parcours. Si, en effet, cette condition des courbes se trouvait suspendue un seul instant, on aurait une ligne droite. Par suite de leur incessante déviation, les courbes se développent dans deux dimensions à la fois et ne peuvent être figurées que dans un plan ou dans l'espace. Leur nombre est illimité, car le point qui les décrit est susceptible d'obéir à des lois de mouvement d'une diversité infinie. Il peut en effet, soit se maintenir à une distance constamment égale de son centre, soit s'en éloigner ou s'en rapprocher par une marche ré-

gulière ou progressive, soit enfin s'en éloigner et s'en rapprocher alternativement. En outre, ce centre lui-même peut être animé de mouvements propres avec lesquels le précédent se coordonne; il peut encore être simple ou multiple, admettre des foyers qui obéissent à des lois différentes... De là résultent des courbes sans nombre. Leur classement devrait tenir compte du mode de génération, de l'unité ou de la multiplicité des centres, de l'égalité ou de l'inégalité des rayons, de la régularité ou de l'irrégularité des courbures, etc.

La « *circonférence* » est la plus simple et la plus importante des courbes, la seule dont la régularité soit parfaite en toutes ses parties. Elle a un centre unique et tous ses rayons sont égaux. Sa courbure est par conséquent invariable. La circonférence constitue la courbe type à laquelle toutes les autres se comparent. On la définit : la trace d'un point qui se meut sur un plan à distance toujours égale d'un autre point, stationnaire, appelé « *centre* ». Mais, comme cette égale distance correspond à une longueur déterminée, il faudrait plutôt considérer la circonférence comme produite par le mouvement d'une ligne droite appelée « *rayon* » qui pivoterait sur un plan autour d'une de ses extrémités fixe. La génération de cette courbe, déjà bien complexe en comparaison de celle de la ligne droite, exige ainsi, outre un point de départ et un point en mouvement qui servent à tracer la ligne, un centre de courbure, une ligne droite formant rayon et un plan où elle évolue. L'étude de la circonférence et de ses propriétés sert de base à toute la géométrie curviligne.

Après la circonférence, courbe à centre unique, à rayons égaux et à courbure uniforme, viennent les courbes, dites aussi du second degré, qui ont plusieurs « *foyers* », des rayons inégaux et des courbures variables aux divers points de leur développement. Elles comprennent : l'« *ellipse* » formée par un point dirigé de manière que la somme de ses distances à deux points fixes appelés « *foyers* » reste con-

stante. Les deux rayons qui, de chaque point de cette courbe, aboutissent à ses foyers, sont complémentaires. L'un de l'autre et représentent en quelque sorte le rayon brisé du cercle qui se partage en sections variables sans que sa longueur totale varie. L'ellipse, figure non plus régulière, mais symétrique, se détermine par la longueur de ses deux axes et a pour « centre » leur point d'intersection. L'« hyperbole » est décrite par un point qui se déplace de telle sorte que la différence de ses distances à deux foyers ne change pas. On obtiendrait des courbes spéciales, mais peu usitées, si, au lieu de prendre la somme ou la différence des distances focales, on prenait leur produit ou leur quotient<sup>1</sup>. La « parabole » résulte du mouvement d'un point dirigé de manière à s'écarter également d'un point fixe ou foyer et d'une ligne droite fixe appelée « directrice ». La famille des paraboles comprend des lignes dont les unes sont fermées, les autres ouvertes, à deux ou à quatre branches infinies.

Diverses sortes de « spirales » sont décrites par un point qui se meut le long d'une ligne droite pendant que celle-ci tourne sur une de ses extrémités autour d'un point fixe appelé « pôle ». Les spirales se développent en séries de tours ou « spires ». On peut tracer autant de genres de spirales que l'on suppose de relations particulières entre le mouvement de rotation de la ligne sur son pôle et celui de translation du point générateur le long de cette ligne. Quand le mouvement est uniforme, les spires sont équidistantes; s'il admet des degrés d'accélération ou de ralentissement, les spires s'écartent ou se rapprochent de plus en plus.

D'autres espèces de courbes sont produites par des points pris sur des courbes qui roulent sur des lignes

1. La courbe dont les deux rayons, multipliés l'un par l'autre, donnent un produit constant, porte le nom de « cassinoïde » en souvenir d'une erreur de Cassini qui eut l'idée malencontreuse de proposer la substitution de cette ligne à l'ellipse de Kepler comme expression des orbites planétaires.

droites ou sur d'autres lignes courbes. La « cycloïde » est engendrée par un point d'une circonférence qui roule le long d'une ligne droite sur un plan. Cette courbe intéressante, signalée par le cardinal de Cusa, fut étudiée par Wallis et Pascal. Quand, au lieu d'un point pris sur la circonférence, on considère un point quelconque soumis à la même loi de mouvement, la courbe décrite porte le nom de « trochoïde ». L'« épicycloïde », imaginée par Desargues, s'obtient en faisant rouler une circonférence sur la partie concave ou convexe d'une autre circonférence. On pourrait encore supposer la circonférence mise en mouvement le long d'une ellipse, remplacer la circonférence elle-même par une ellipse, etc., et produire ainsi des séries de courbes dérivées.

L'esprit conçoit des modes plus complexes encore de génération pour les courbes. La « chaînette » est la ligne que décrit un fil homogène, inextensible et parfaitement flexible, quand on le suspend à deux points fixes et qu'il prend sa position d'équilibre sous l'influence de la pesanteur. Cette courbe jouit de propriétés remarquables et ses applications sont fréquentes en architecture. — Les « développées », découvertes par Huyghens, unissent les centres de courbure de courbes variables en leurs différents points et produisent, par dérivation, d'autres courbes dites « développantes ». — Les « caustiques », dont la construction est due à Tschirnaüs (1682) et la théorie à Jacques Bernouilli, sont produites par des intersections de lignes droites infiniment voisines, telles que des rayons de lumière partis d'un foyer très éloigné qui viendraient se réfléchir ou se réfracter à la surface d'une courbe. Chaque courbe a ainsi deux caustiques, l'une par réflexion (« catacaustique »), l'autre par réfraction (« diacaustique »). — La courbe dite « logarithmique », usitée pour la construction des logarithmes et l'exposition de leur théorie, est conformée de manière que les abscisses et les ordonnées correspondantes soient entre elles dans

le rapport des nombres à leurs logarithmes. Jacques Bernouilli a signalé une propriété curieuse de cette courbe qui consiste en ce que sa développée et sa caustique, soit par réflexion, soit par réfraction, la reproduisent. C'est une courbe « renaissante ».

Mentionnons encore la « cissoïde », dont la forme rappelle le tracé d'une feuille de lierre ( $\kappaισσοειδης$ ) et qui se rapproche indéfiniment de l'asymptote sans pouvoir la joindre. Elle a été imaginée par Dioclès pour trouver les moyennes proportionnelles entre deux lignes données. — La « conchoïde », dont l'invention est due à Nicomède, se construit en prolongeant les rayons d'une circonférence d'une quantité égale au dessus d'une ligne droite qui les coupe, et en reliant leurs nouvelles extrémités. Cette courbe sert à résoudre le problème de la trisection de l'angle et celui de la duplication du cube. Newton en a fait usage pour représenter graphiquement des équations du quatrième degré. — La « lemniscate » (de  $\lambdaεμνισκος$ , ruban), est une courbe du quatrième degré repliée sur elle-même en forme de 8, etc.

On peut juger, par ces exemples, de la variété possible des courbes. Il y en a d'autant de sortes que la pensée conçoit, pour les éléments qui les produisent, de situations et de modes ou de combinaisons de mouvements. Leur nombre n'est donc limité que par notre puissance de compréhension, et les recherches des géomètres n'en épuiseront pas la diversité. La nature même suggère l'idée de courbes dont la complexité défie l'analyse, comme celles que décrivent les étoiles doubles, triples, quadruples..., qui tournent les unes autour des autres dans des orbites continuellement modifiées, ou celles moins imaginables encore que font supposer les mouvements collectifs des amas d'étoiles et des nébuleuses.

Après les courbes considérées chacune à part, on aurait à examiner les figurations qui résultent de leurs positions respectives dans un même plan. Les circonférences

sont « concentriques », lorsqu'avec un même centre elles ont des rayons inégaux. L'intervalle qui les sépare forme alors une « couronne ». Elles sont « tangentes » quand elles se touchent par un seul point, « sécantes » si elles se coupent en deux. L'étude des angles qu'elles produisent alors et de leurs combinaisons rentre dans la trigonométrie sphérique. On constitue, avec ces éléments, des figures variées dont les arts décoratifs ont su tirer meilleur parti que la science. Les autres courbes donnent lieu à des considérations analogues ; mais la difficulté des comparaisons arrête vite les recherches à ce sujet.

#### B. — Figurations curvilignes composées.

Les constructions complexes de l'étendue dans le système curviligne comprennent, d'une part, les surfaces courbes, de l'autre, les volumes à surface courbes.

*a.* — Toutes les surfaces planes sont pareilles, car il n'y a pour elles qu'un seul mode de production. Au contraire, les surfaces courbes se forment dans les conditions les plus variées et chacune a sa loi particulière.

Les plus simples résultent de la révolution d'une figure autour d'un axe de symétrie. Elles sont dites « réglées » quand leur génératrice est une ligne droite. On les subdivise en « développables » et « gauches » suivant qu'elles se laissent ou non déployer sur un plan sans déchirure ni duplicature. Les premières sont produites par la révolution d'une ligne droite tournant autour d'un axe fixe. On distingue les surfaces « coniques », obtenues par la révolution d'un triangle autour d'un de ses côtés, et les surfaces « cylindriques », engendrées par celle d'un rectangle. Ces surfaces, qu'on peut développer sur un plan sans dénaturer leurs dimensions, sont intermédiaires entre les

surfaces planes, auxquelles il est toujours possible de les ramener, et les surfaces courbes non développables.

Parmi les surfaces réglées, mais gauches, citons : « l'hyperboloïde à une nappe », produit par le mouvement d'une ligne droite en rapport avec trois droites non parallèles à un même plan ; le « paraboloïde hyperbolique », dont la génératrice est une droite qui se meut sur deux autres droites en restant parallèle à un plan ; le « cylindre gauche », dû à la révolution d'une droite appuyée sur deux courbes et restant parallèle à un même plan ; le « conoïde », qui résulte du mouvement d'une droite glissant sur une ligne droite et sur une courbe en restant parallèle à un plan ; l'« hélicoïde », engendré par une ligne droite horizontale qui s'appuie sur une hélice et sur l'axe vertical d'un cylindre, etc.

Les surfaces courbes produites par la révolution de lignes courbes tournant sur un axe, forment autant d'espèces qu'il y a de sortes de génératrices. On les dit alors « circulaires », « elliptiques », « paraboliques », « hyperboliques »...

Enfin, des formes « obliques » dérivent des formes « droites » par une inclinaison égale et dans le même sens de toutes les ordonnées parallèles à l'axe de rotation sur un plan fixe perpendiculaire à cet axe.

On doit à Monge une classification naturelle des surfaces courbes fondées sur les propriétés qui résultent pour elles de leurs rapports avec le plan tangent. Les surfaces développables le touchent suivant une génératrice entière. Pour les surfaces coniques, cette ligne passe par le sommet du cône et, pour les surfaces cylindriques, est parallèle à l'axe de rotation. A l'égard des surfaces de révolution, le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien qui passe par ce point et par l'axe de la surface.

Les surfaces courbes se combinent entre elles et déterminent des constructions variées dont la trigonométrie sphérique se borne à spécifier les plus simples,

sla complication des autres échappant vite à des recherches suivies.

*b.* — Le mode de formation des volumes à surface courbe se lie à celui des surfaces de même ordre dont le développement arrive à circonscrire l'étendue sous trois dimensions. La différence des deux sortes de figures tient à ce que, dans un cas, on considère seulement la superficie, et, dans l'autre, l'étendue enclose. Les volumes à surface courbe ont les mêmes lois de construction que leurs surfaces et leur classement est analogue.

Parmi les volumes engendrés par un mouvement de révolution, les plus importants à connaître sont le « cône », contenu sous une surface conique ; le « cylindre », dont la surface est cylindrique ; la « sphère », qui, seul volume curviligne d'une régularité parfaite, se construit par la révolution d'un demi-grand cercle autour de son diamètre. L'« ellipsoïde » est formé par la révolution d'une demi-ellipse autour d'un de ses axes. Comme l'ellipse a deux axes, l'ellipsoïde est « allongé », si la rotation s'opère sur le grand axe, et « aplati », si elle s'effectue sur le petit. L'« hyperboloïde » s'obtient en faisant tourner une hyperbole autour d'un de ses axes. Si la révolution s'accomplit sur l'axe non transverse, on a un « hyperboloïde à une nappe », en forme de tuyau évasé à ses deux extrémités ; si, au contraire, elle s'accomplit sur l'axe transverse, on a un « hyperboloïde à deux nappes », composé de deux calottes séparées dont les ouvertures sont tournées en sens inverse. Le « paraboloïde » est produit par la révolution d'une parabole autour de son axe, etc.

Les volumes à surfaces courbes comportent une diversité illimitée de modes de construction ; mais les plus complexes sont peu étudiés à cause de la difficulté d'établir avec précision les rapports de leurs éléments.

Considérées dans leur ensemble, les figurations curvi-

lignes composent un système rationnel, plus varié que le système rectiligne, où l'étendue se détermine de même, suivant des lois propres, sous une, deux et trois dimensions. Les points, éléments générateurs, produisent les courbes par leurs conditions de mouvement. Les surfaces courbes procèdent ensuite des lignes courbes. Enfin les volumes résultent du développement des surfaces courbes. Ces classes de figures ont un principe commun de dérivation et sont hiérarchiquement subordonnées. Il y aurait donc avantage à les étudier avec suite, dans l'ordre de leur connexion logique, au lieu de les exposer, comme il est d'usage, pêle-mêle avec les figurations rectilignes, ce qui rompt, dans les deux séries, l'enchaînement des théorèmes.

#### CONCLUSION. CONSTRUCTION GÉNÉRALE DE L'ÉTENDUE

La Géométrie donne ainsi le moyen de construire l'étendue dans les deux systèmes rectiligne et curviligne, sous une, deux et trois dimensions. On peut alors comparer ces figures, scruter leurs rapports et déterminer la mesure de leurs inégalités. Moins bornée que la spéculation sur les nombres, cette étude soulève des multitudes de problèmes dont chacun exige une solution particulière. Malgré des investigations continuées pendant des siècles, les géomètres sont loin d'avoir épuisé le sujet. Leur attention s'est portée d'abord, comme il était naturel, sur les figurations les plus simples; mais elle devrait s'étendre progressivement à toutes celles dont il est possible de donner une définition précise. Descartes assigne pour tâche à la science d'étudier toutes les formes que la nature réalise ou que la raison peut concevoir. Néanmoins, on est assez vite arrêté dans cette recherche par une telle complication d'éléments que l'esprit s'égaré à les combiner. A cette difficulté s'en

ajoute une autre. Non seulement les géomètres seraient tenus de considérer tous les modes imaginables de construction, mais encore ils devraient examiner chacun d'eux sous la totalité de ses aspects. Or, on sait qu'une ligne donnée, comme le cercle ou l'ellipse, comporte des définitions très nombreuses, c'est-à-dire peut être obtenue d'une foule de manières dont chacune entraîne des séries de théorèmes. L'achèvement de la science impliquerait donc la connaissance de toutes les sortes de figures et de toutes les propriétés de chaque figure. Leur diversité, sans limites dans les deux sens, ouvre à la science de l'étendue une carrière infinie à parcourir.

## II

### MATHÉMATIQUE SYNTHÉTIQUE

#### SCIENCE DES RAPPORTS ENTRE LES GRANDEURS

La Mathématique analytique détermine, d'une part, les modes de formation des quantités, de l'autre, les modes de construction des figures. La grandeur se trouve ainsi constituée sous le double aspect du nombre et des dimensions. Toutefois, la science resterait incomplète si elle se bornait à établir en détail ces deux sortes de données, car elle laisserait ignorer leurs relations et leurs lois. Cette seconde étude constitue l'objet de la Mathématique synthétique.

Les rapports entre les grandeurs sont à examiner sous deux points de vue, l'un spécial, l'autre général. Nous devons scruter, d'abord les relations limitées et simples qui lient par groupes restreints les grandeurs déterminées; ensuite les relations étendues et complexes qui unissent les séries de grandeurs. Conséquemment, la Mathématique synthétique sera divisée en deux sections savoir : 1° la « Mathématique comparée » qui établit les rapports des grandeurs spécifiées; et. 2° la « Mathématique générale » qui, spéculant sur les fonctions des grandeurs, traduit leurs lois en formules d'équation.

## I. — MATHÉMATIQUE COMPARÉE

### SCIENCE DES RAPPORTS SPÉCIAUX ENTRE LES GRANDEURS

#### THÉORIE DES RAPPORTS MATHÉMATIQUES

La grandeur, chose relative, exprime toujours un rapport; mais il y aurait à distinguer en Mathématique deux sortes de rapports. Les uns, intrinsèques et nécessaires, unissent les éléments dont se composent les nombres ou les figures. Inséparables de la production des grandeurs, ils font partie de son ordre et le déterminent. Nous les avons indiqués dans les deux parties qui précèdent. Les autres, extrinsèques et facultatifs, relient indirectement les grandeurs ainsi formées, alors même que, par leur mode de dérivation, elles appartiennent à des systèmes différents. Des inégalités les séparent et la science doit en donner la mesure. Tels sont les rapports que nous avons maintenant à considérer. Leur étude a pour objet la comparaison des grandeurs quelconques constituées en détail par l'Arithmétique et par la Géométrie.

Quand on limite, comme nous avons fait, la première de ces sciences à l'analyse des modes de formation des nombres et la seconde à celle des modes de construction de l'étendue, la recherche des rapports entre les nombres d'une part, entre les figurations de l'autre, enfin entre ces deux aspects de la grandeur, doit être érigée en section distincte de la Mathématique. Il faut alors comparer les quantités et les figures, et les mesurer les unes par les autres. Cette étude, postérieure à l'Arithmétique et à la

Géométrie, puisqu'elle spéculé sur leurs résultats, n'a pas une généralité moindre, car chaque grandeur se rattache aux autres par des conditions d'égalité. La science des rapports est même plus étendue que les précédentes, parce que chaque terme admet des multitudes de relations et soulève des séries de problèmes.

La section que nous proposons d'établir n'a pas été jusqu'à présent systématisée dans son ensemble et manque d'unité logique. Elle est encore innommée, alors que les autres branches de la Mathématique ont reçu des désignations particulières, signe d'existence indépendante et de constitution normale. De là résultent, dans la théorie des grandeurs, une lacune et une cause de confusion. Sans doute un sujet si important ne pouvait pas rester inexploré. Les rapports des nombres et ceux des figures n'ont point échappé aux recherches, et les calculateurs ainsi que les géomètres se sont appliqués de bonne heure à les découvrir; mais ils ont confondu les problèmes qu'aurait à résoudre la comparaison des grandeurs avec ceux qui concernent les modes de formation des grandeurs, et les notions de rapport, au lieu de se suivre et de se coordonner, se trouvent dispersées parmi les opérations de l'Arithmétique et les constructions de la Géométrie dont elles troublent l'ordre sans en recevoir de lumière. Dans un intérêt de méthode, il y aurait avantage à examiner séparément ces deux classes de problèmes. C'est pourquoi nous croyons devoir instituer en corps de science l'étude des relations des grandeurs, et, puisqu'il n'existe pas de terme usuel pour la désigner, nous l'appellerons « Mathématique comparée. »

Son programme comprend, d'abord les relations des quantités, puis celles des figurations de l'étendue, enfin les relations générales des nombres et des figures.

## MATHÉMATIQUE COMPARÉE

## SCIENCE DES RAPPORTS DES GRANDEURS

a. Rapport numératif.	b. Rapport additif.	a. Rapport multiplicatif.	b. Rapport potentiel.	a. Rapports des points.	b. Rapports des lignes.	a. Rapports des surfaces.	b. Rapports des volumes.
A. RAPPORTS PAR DIFFÉRENCE		B. RAPPORTS PAR QUOTIENT		A. RAPPORTS DES ÉLÉMENTS DE L'ÉTENDUE.		B. RAPPORTS DES CONSTRUCTIONS DE L'ÉTENDUE	
1. RAPPORTS ARITHMÉTIQUES				2. RAPPORTS GÉOMÉTRIQUES			

## RAPPORTS DES NOMBRES ET DES FIGURES

## 1. — RAPPORTS ARITHMÉTIQUES

Des quantités quelconques sont égales ou inégales. Égales, on n'a pas à les comparer, car cela n'apprendrait rien qu'on ne sache; mais, inégales, un problème se pose : il faut trouver la mesure de leur inégalité, c'est-à-dire la manière de les rendre égales par les divers artifices connus d'accroissement ou de décroissement. C'est ce qu'on appelle établir leur rapport.

L'Arithmétique, quand elle opère sur les nombres, détermine bien le rapport direct qui unit chacun d'eux soit avec ceux dont il provient par voie de composition, soit avec ceux qu'il est susceptible de produire par voie de décomposition; mais elle ne vise ainsi qu'à des résultats particuliers et ne cherche pas à lier, par des relations médiatees, les quantités de tout ordre. Chaque genre d'opérations tente une voie unique tracée par la loi de dérivation. L'étude des rapports étend plus loin ses recherches et veut pouvoir suivre toutes les voies capables de conduire d'une quantité à une autre. Mettant à profit les règles instituées par l'Arithmétique, elle établit une balance des résultats dans les différents systèmes d'opérations, et, spéculant sur des nombres quelconques donnés, vise à déterminer leurs conditions d'égalité.

Les nombres sont unis par diverses sortes de rapports selon la manière d'opérer pour les rendre égaux. Notons d'abord qu'on a le choix d'accroître le moindre nombre pour l'élever à la valeur du plus grand ou de diminuer le plus grand pour réduire sa valeur à celle du moindre, car le rapport fixe qui exprime leur écart est manifestement le même dans les deux cas. Les rapports doivent donc être classés par la considération du mode spécial d'accroissement ou de décroissement que l'on se propose d'appliquer. Nous avons distingué, dans chaque série d'opérations deux

degrés principaux, suivant que l'on effectue des adjonctions ou des disjonctions simples de valeur (numération ascendante et numération descendante, addition et soustraction); ou que l'on procède par adjonctions ou disjonctions répétées (multiplication et division, élévation aux puissances et extraction de racines). Nous devons, en conséquence, admettre deux classes de rapports : l'une, où l'on cherche à déterminer le nombre qui, ajouté à l'inférieur, l'égalerait au supérieur ou qui, retranché du supérieur, l'égalerait à l'inférieur (rapport par complément ou par différence); l'autre, où l'on se propose de connaître le nombre qui, multiplié par l'inférieur, reproduirait le supérieur, ou qui, divisant le supérieur, donnerait l'inférieur (rapport par produit ou par quotient). On qualifie communément le premier d' « arithmétique » et le second de « géométrique »; mais ce sont là des désignations impropres puisque tous les deux concernent des nombres et sont arithmétiques au même titre. Le rapport par quotient trouve il est vrai des applications fréquentes en Géométrie et la mesure des surfaces y a nécessairement recours; néanmoins, sa théorie relève de la science du nombre et son nom ne devrait pas laisser supposer qu'il lui est étranger. Il serait donc préférable d'appeler le premier rapport « additif » ou « par différence », et le second « multiplicatif » ou « par quotient ».

En outre, dans chacune de ces classes, on aurait à distinguer des degrés de complexité suivant le nombre des termes que l'on compare. « Le rapport » simple unit les quantités par couples; la « proportion » relie deux de ces couples; enfin la « progression » les dispose par séries.

Tels sont les éléments de la théorie des rapports arithmétiques. D'ordinaire, on expose séparément, en premier lieu les rapports simples, ensuite les proportions et les progressions, sauf à séparer dans chaque groupe, la relation par différence et la relation par quotient. Ce

mode de classement nous paraît défectueux en ce qu'il tient compte du nombre des termes, motif accessoire, plutôt que de la nature des opérations, considération qui, au contraire, devrait prévaloir. A procéder de la sorte, on rompt la continuité logique des problèmes et l'on brouille l'ordre de leurs connexions naturelles. Nous croyons préférable d'établir d'abord deux groupes de rapports, les uns additifs, les autres multiplicatifs, puis, d'examiner successivement dans chaque groupe les rapports simples, les proportions et les progressions.

A. — Rapports additifs ou par différence.

Le rapport additif détermine, entre des nombres donnés, le complément ou la différence, c'est-à-dire la quantité qu'il faudrait ajouter au plus petit pour avoir le plus grand ou retrancher du plus grand pour avoir le plus petit. Deux cas sont à considérer suivant que l'on opère sur des unités, comme dans la numération, ou sur des groupes d'unités, comme dans l'addition et la soustraction.

*a.* — On ne fait pas figurer communément la numération dans l'exposé [des rapports; elle rentre pourtant dans leur théorie, mais avec une simplicité si grande qu'elle ne suscite pas de problèmes, parce qu'elle assigne à tous une solution uniforme.

Dans l'ordre qu'établit la numération, un nombre quelconque est toujours séparé de celui qui le précède et de celui qui le suit par la valeur d'une unité;

Par la même raison, les couples de nombres qui se suivent sont en proportion;

Enfin, la suite des nombres forme une progression continue.

Dans ces divers cas, aucune opération n'est nécessaire. Le rapport constant est l'unité.

*b.* — Quand on compare des nombres dont l'inégalité ne peut être comblée que par un groupe d'unités, le rapport devient problématique. Il faut alors opérer une addition ou une soustraction. Le résultat, appelé « raison », donne l'écart entre les deux nombres. Ce rapport ne change pas si l'on augmente ou si l'on diminue les termes de la même quantité.

Lorsque, au lieu de deux nombres, on considère deux couples de nombres unis par le même rapport, on a une proportion dont les termes, qui se correspondent, comprennent deux antécédents et deux conséquents, deux extrêmes et deux moyens. Dans une proportion additive, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, d'où il résulte qu'avec trois de ces termes il est facile de trouver le quatrième. Le dernier terme est égal à la somme des moyens diminuée du premier terme. La moyenne entre deux nombres est la moitié de leur somme, etc.

Enfin, les séries de rapports en proportion continue forment des « progressions » (de *progrēdi*, marcher, parce qu'elles se développent sans terme assignable). On peut ainsi donner à l'enchaînement des rapports une puissance indéfinie d'extension. Dans une progression additive, chaque terme est moyen proportionnel entre celui qui le précède et celui qui le suit. La somme des termes d'une progression s'obtient en ajoutant le dernier terme au premier, en multipliant leur somme par le nombre des termes, et en prenant la moitié du produit.

Les rapports, proportions et progressions par différence, composent une classe de relations arithmétiques où la même raison unit d'abord deux nombres par un rapport direct, puis deux couples de nombres par une proportion,

enfin une suite indéfinie de nombres par une progression. On peut donc égaler, au moyen d'additions ou de soustractions, des quantités de tout ordre, et suivre les connexions de leurs rapports aussi loin qu'elles se prolongent.

B. — Rapports multiplicatifs ou par quotient.

Une autre classe de relations s'établit entre les nombres quand, au lieu de chercher à les rendre égaux par une adjonction ou un retranchement unique, on procède par séries d'adjonctions ou de retranchements. Le rapport est dit, en ce cas, multiplicatif ou par quotient. La manière de le déterminer diffère suivant que l'on effectue une seule série d'opérations (multiplication, division), ou qu'on en opère des séries de séries (élévation aux puissances, extraction des racines).

*a.* — Le rapport multiplicatif ou par quotient détermine le multiplicateur ou le quotient, comme le rapport additif le complément ou la différence. Deux nombres étant donnés, on se propose d'en trouver un troisième par lequel il faudrait multiplier le plus petit pour avoir le plus grand, ou diviser le plus grand pour avoir le plus petit. La valeur de ce rapport ne change pas quand on multiplie ou quand on divise les deux termes par la même quantité.

Si, en place de deux nombres unis par un rapport simple, on considère deux couples de nombres unis par le même rapport, on a une proportion par quotient. Les relations de ces termes sont très importantes et leur connaissance facilite la solution d'une multitude de problèmes (règles « de trois », « d'intérêt », « de société », « d'arbitrage », etc.) Dans une proportion multiplicative, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Il est donc facile, avec trois de ces termes, de trouver le

quatrième; il suffit pour cela de multiplier l'un par l'autre les termes connexes connus et de diviser le produit par le terme alterne donné. Le rapport des termes d'une proportion n'est pas dénaturé quand on transpose les moyens et les extrêmes, ou quand on divise un extrême et un moyen par le même nombre, etc. De là résultent des relations très étendues.

Enfin, si l'on dispose une série de rapports par quotient de manière à former une proportion continue, on a une progression dont chaque terme, divisé par celui qui précède, donne un nombre constant. Pour obtenir la somme des termes d'une progression multiplicative, on multiplie le dernier terme par la raison, on retranche le premier terme du produit, et l'on divise le reste par la raison diminuée d'une unité.

*a.* — Le rapport le plus complexe unit les puissances des nombres et leurs racines. Il est établi par la théorie des « logarithmes » (de λόγος, raison, dans le sens de rapport, et ἀριθμός, nombre). Les logarithmes sont les raisons des nombres, l'expression de leurs rapports potentiels. Ils servent à déterminer un compte de proportion où des nombres en progression additive correspondent terme pour terme à des nombres en progression multiplicative. Si, en effet, on superpose deux progressions, l'une par différence, partant de 0, l'autre par quotient, commençant par 1, comme ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccccc} \div \div & 1 & : & 10 & : & 100 & : & 1000 & : & 10,000 & : & 100,000 & : & 1,000,000 & : & \dots \\ \div & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 & . & \dots \end{array}$$

On voit que les termes de la seconde représentent les exposants de la puissance à laquelle doit être élevé le chiffre qui sert de base pour avoir les termes de la première. Ces exposants portent le nom de logarithmes. Leur théorie permet de regarder tous les nombres comme des puissances assignables d'un nombre constant (« base ») et réduit les opérations

tions complexes qu'il faudrait exécuter sur ces nombres à des combinaisons élémentaires de leurs exposants. Dès qu'une relation fixe lie les deux sortes de rapports, par différence et par quotient, on peut les substituer l'un à l'autre. On remplace ainsi les multiplications par des additions, les divisions par des soustractions, les extractions de racines par des divisions, c'est-à-dire des opérations pénibles et lentes, quand elles portent sur de grands nombres, par des opérations simples et rapides, où les erreurs sont moins à craindre et plus faciles à corriger. La découverte ou plutôt la codification des logarithmes est due à l'Écossais Napier, qui la fit connaître au commencement du xvii<sup>e</sup> siècle (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614). Cette admirable invention, qui élève à la puissance l'expression des rapports, a rendu prompts et sûrs les calculs les plus compliqués. Grâce à elle, la vie et la capacité de travail des calculateurs modernes ont été démesurément accrues.

La détermination des deux sortes de rapports, par différence et par quotient, donne le moyen d'unir tous les nombres, directement par couples, puis par couples de couples, enfin par séries, et de les égaliser à l'aide des divers systèmes d'opérations usités pour accroître ou pour atténuer les quantités. Chaque manière d'établir les rapports a ses applications et ses avantages. Leur emploi procure toute facilité pour mesurer les inégalités des valeurs et suivre leurs relations dans l'ordre entier des nombres.

## 2. — RELATIONS GÉOMÉTRIQUES

Les figurations de l'étendue sont aussi à comparer, car il importe de savoir comment elles se relient et se coordonnent en dehors des lois particulières qui les font dériver les unes des autres. Cette partie de la science n'a pas été

jusqu'ici l'objet d'un examen séparé. Tandis qu'en Arithmétique les rapports étaient mis à la suite des opérations usuelles, en Géométrie les relations des figures sont exposées simultanément avec les modes de construction et à leur détriment commun, parce que, dans cet entrecroisement de théorèmes qui visent deux sortes de rapports, les uns de dérivation directe, les autres de connexion médiate, l'ordre des vérités n'apparaît plus clairement. Il nous semble donc préférable de systématiser ces deux études et de scruter à part les rapports, après avoir analysé les modes de construction.

Laissant de côté la recherche des relations qui unissent les figures dans le cas où elles procèdent les unes des autres, relations qui relèvent de la Géométrie ordinaire et sont mises en évidence par l'étude des modes de construction, nous avons maintenant à considérer les rapports plus complexes et plus étendus qui unissent des figurations quelconques. Leur théorie comprend tous les cas possibles. La Géométrie comparée établit les rapports qui lient, dans les deux systèmes rectiligne et curviligne, d'une part les éléments, de l'autre les constructions composées de l'étendue.

#### A. — Relations des éléments de l'étendue.

Les relations des éléments de l'étendue sont très simples, mais d'une grande importance, parce qu'elles déterminent le trait initial et caractéristique des figures. Examinons d'abord les rapports des points, puis ceux des lignes et de leurs combinaisons dans un plan.

*a.* — Le rôle des points est si limité qu'il ne se prête guère à des comparaisons suivies. Néanmoins, comme ces éléments posent dans l'espace la borne première, le rapport qui résulte de leurs situations respectives est au fond le plus

essentiel. Nous avons vu qu'ils pouvaient être fixes, ou mobiles et animés de diverses sortes de mouvements. De là résulte pour eux un principe de coordination dont les conséquences dominent la genèse des lignes.

Étant donnés deux points, l'un fixe, l'autre mobile et invariablement dirigé vers le premier, la trace du second décrit une ligne droite.

Dès que le rapport ou la fonction de ces points se modifie, un autre élément linéaire est constitué. Si, par exemple, le point fixe, au lieu de servir de but, devient centre, et si le point mobile, au lieu de se diriger vers lui, tourne autour de lui dans un plan, à une distance constante, il décrit une circonférence. En place d'un centre unique, supposons deux centres ou foyers dont le point mobile se rapproche et s'éloigne tour à tour : nous aurons une ellipse si la somme de ses distances focales reste constante, et une hyperbole si c'est leur différence. La parabole n'a qu'un foyer fixe; l'autre est situé à l'infini sur l'axe. Le point qui décrit les spirales, est animé de deux mouvements simultanés, l'un autour du centre, l'autre le long du rayon. Dans les cycloïdes, le centre lui-même se déplace. La condition des points générateurs et recteurs se complique par degré dans la série des courbes. Les positions, les distances, et les modes de mouvement des points sont la considération principale à consulter en vue d'un classement rationnel et des corrélations à établir, car la nature, les propriétés et les rapports des lignes dépendent de cette première donnée.

*b.* — Des relations déjà moins bornées dont l'étude constitue la Géométrie plane, unissent les lignes et les combinaisons qu'elles forment dans un plan.

Les lignes droites, toutes semblables par définition, ne sont pas à comparer en tant que lignes; mais, comme éléments de figures, elles sont unies par des rapports qui résultent de leur assemblage. Dans un triangle, la plus

simple des figurations rectilignes, les angles et les côtés sont corrélatifs. Hipparque est le fondateur de la science qui apprend à mesurer les uns par les autres les éléments des triangles, et qui porte en conséquence le nom de « Trigonométrie » (de *τριγωνος*, triangle). La somme des angles d'un triangle est constamment égale à deux angles droits, ce qui établit entre eux un rapport d'interdépendance. On ne peut donc ouvrir l'un d'eux sans réduire d'autant un des autres ou les deux autres. Les côtés ont aussi leur corrélation. Un côté et les deux angles qu'il limite étant donnés, les autres côtés se déduisent. De même, les angles, lorsque l'un d'eux et ses côtés sont connus. Dans le triangle rectangle, les côtés de l'angle droit possèdent une propriété remarquable : la somme de leurs carrés est égale au carré construit sur le troisième côté (hypothénuse). On attribue à Pythagore la découverte de ce théorème célèbre. L'aire du triangle s'obtient en multipliant sa base par la moitié de sa hauteur, ce qui met en rapport la hauteur et les côtés. La connaissance de ces relations élémentaires est extrêmement importante, parce qu'on y ramène la mesure de toutes les figurations. Les éléments de certaines figures rectilignes ont leurs rapports particuliers. Celui de la diagonale aux côtés du carré n'est pas exprimable en nombres. Le carré tient à la fois du rectangle, puisqu'il a comme lui quatre angles droits, et du losange, puisque ses côtés sont égaux. Aussi cumule-t-il les propriétés de ces deux figures en ce sens que ses diagonales sont égales comme dans le rectangle, et se coupent à angle droit comme dans le losange. La mesure des polygones se détermine par leur décomposition en triangles.

Les courbes ont leurs relations par séries qui tiennent à la manière dont se modifie la condition du point générateur. Celles qu'on appelle « de second ordre » (la circonférence, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole) ont une loi commune de production et composent une famille naturelle bien caractérisée. Elles sont souvent désignées sous le nom

de « sections coniques », parce qu'on peut les figurer à l'aide de sections opérées par un plan dans un cône. La section perpendiculaire à l'axe du cône donne une circonférence; oblique, une ellipse; parallèle à l'axe, une hyperbole; enfin, parallèle à un des côtés, une parabole. Les courbes de ce groupe présentent des analogies générales. Leur centre a la propriété de diviser en deux parties égales tous les diamètres qui passent par lui. La différence fondamentale de ces lignes provient de la distinction du centre et des foyers qui, pour la circonférence, se confondent, alors que l'ellipse a un centre et deux foyers situés à l'intérieur de la figure, et que le point focal est, pour l'hyperbole, en dehors, enfin, pour la parabole, à une distance infinie. Malgré la dissemblance de ces conditions, on passe insensiblement d'une courbe à l'autre : ainsi, tandis que le plan sécant, perpendiculaire à l'axe, produit une circonférence, il suffit de le déplacer d'une quantité infiniment petite pour avoir une ellipse à foyers si rapprochés et, par conséquent, si voisine d'une circonférence, qu'aucun instrument de précision ne pourrait l'en faire distinguer. Si, ensuite, on écarte de plus en plus le plan sécant de la perpendiculaire à l'axe, les ellipses s'allongent toujours davantage et finissent par se confondre avec la parabole. La parabole à son tour, si le plan continue à s'incliner, se change en hyperbole. Enfin, si l'on opère sur un cône très obtus, l'hyperbole elle-même se rapproche de la ligne droite. Des sections coniques méthodiquement effectuées transforment donc par degrés la circonférence en ellipse, l'ellipse en parabole, la parabole en hyperbole, et l'hyperbole en ligne droite. Quoique chacune de ces lignes ait sa définition et ses propriétés, elles se lient comme les termes d'une même série, et procèdent l'une de l'autre par un développement continu.

Les autres familles de courbes sont unies par des relations analogues, mais moins directes. Pour mesurer leur courbure, on la compare à celle de la circonférence qui,

seule régulière, sert de type à toutes les autres. La théorie du « cercle osculateur », due à Huyghens, décompose une courbe quelconque en arcs d'une petitesse infinie. On peut donc considérer les diverses courbes comme dérivant de la circonférence par une modification graduelle de courbure, c'est-à-dire, par une variation de longueur du rayon.

L'étendue que circonscrivent les courbes se détermine au moyen du rapport de leurs parties. L'aire du cercle se décompose en triangles dont la somme est le produit de la circonférence par la moitié du rayon. Celle de l'ellipse est égale à l'aire d'un cercle dont le rayon serait proportionnel entre les demi-axes de l'ellipse. L'aire de la cycloïde est le triple du cercle générateur, comme Galilée l'avait reconnu par la méthode empirique des pesées et comme le démontrèrent rationnellement Pascal et Wallis.

Le problème le plus intéressant qu'ait à résoudre l'étude comparée des éléments de l'étendue consiste à déterminer le rapport des lignes droites et des lignes courbes. Comme les premières, en raison de leur uniformité, sont seules susceptibles d'être mesurées avec précision, parce qu'elles se laissent appliquer les unes sur les autres dans des conditions de coïncidence exacte, elles constituent l'étalon universel et l'appréciation de la longueur des courbes revient à les convertir en longueurs rectilignes équivalentes. L'analyse assimile les courbes à des lignes droites en les supposant formées d'une infinité de fragments rectilignes infiniment petits. Elles correspondent ainsi à des lignes droites brisées en une infinité de points, ou, pour mieux dire, à chaque point. Les courbes commencent donc là où les droites finissent, et la transformation de l'élément linéaire s'effectue par une simple déviation du point générateur. Si même, au lieu de concevoir les courbes comme produites par des points isolés en mouvement, on les suppose, ce qui est plus rationnel, tracées par des lignes droites pivotant sur une de leurs extrémités fixes, l'élément curviligne se lie plus directement encore à l'élément rectiligne.

La régularité de la circonférence résulte alors de la constante égalité du rayon. Les autres courbes suivent la loi des variations de leurs rayons et de l'écartement de leurs foyers. Enfin, tandis que la conception de la ligne droite est antérieure à celle du plan et sert à sa détermination, celle des courbes, au contraire, lui est postérieure, et le mode de construction des plus simples exige qu'elles soient tracées dans un plan.

Les corrélations des deux sortes de lignes s'étendent fort loin dans le détail. Une des plus importantes établit le rapport de la circonférence au diamètre, rapport que l'Arithmétique est impuissante à exprimer en nombre précis. Cela même résulte d'une sorte de nécessité logique, car, s'il en était autrement, une fraction de ligne droite serait l'équivalent exact d'une fraction de circonférence et les éléments se confondraient, ce qui ne peut avoir lieu qu'au terme inaccessible de l'infiniment petit. La grandeur de l'ellipse se détermine par la longueur de ses axes. La cycloïde a pour mesure le rayon du cercle générateur, etc. Enfin, pour chaque espèce de courbe, on considère les rapports des rayons vecteurs avec la tangente et la normale. A la question des tangentes se rattache celle des « asymptotes » assimilées à des tangentes dont le point de contact s'éloignerait à l'infini. L'introduction des tangentes et des sécantes en Géométrie est due à l'Arabe Aboul-Vêfa (milieu du x<sup>e</sup> siècle), qui les fit servir à la théorie des ombres.

On applique des procédés analogues à l'étude des figures planes auxquelles donnent lieu les combinaisons des courbes. La « trigonométrie sphérique » résout ses difficultés en substituant aux triangles sphériques des triangles rectilignes correspondants. La mesure du cercle s'obtient, non avec une exactitude rigoureuse, mais avec une approximation aussi grande que possible, par celle de deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, dont le nombre des côtés s'accroît progressivement. L'aire du cercle est égale à celle d'un triangle rectangle qui aurait la

circonférence pour base et le rayon pour hauteur, ou, ce qui revient au même, à la moitié du rectangle formé par deux de ces triangles. Les Grecs connaissaient déjà ce théorème qu'il ne faut pas confondre avec l'insoluble question de la quadrature du cercle.

Un enchaînement de rapports unit ainsi les éléments de l'étendue figurée. Les points, coordonnés dans des conditions variables de fixité et de mouvement, déterminent les lignes, droites ou courbes, qui, se liant à leur tour, entraînent, pour leurs figurations respectives, des corrélations par séries. Ces rapports une fois connus, on peut assigner une commune mesure aux deux sortes d'éléments et les remplacer à l'occasion les uns par les autres, substituer par exemple, dans les problèmes de trigonométrie, les arcs correspondants à des angles, les cordes et les sinus aux arcs, etc.

B. — Relations des constructions composées de l'étendue.

Des relations consécutives aux précédentes, mais plus complexes, unissent les constructions de l'étendue sous deux ou trois dimensions, dans les deux systèmes rectiligne et curviligne.

*a.* — Les rapports très simples des surfaces planes se laissent ramener sans peine aux lois de connexité qui régissent les éléments dont elles dérivent.

Les relations qu'ont entre elles les surfaces courbes ne sont pas appréciables directement, à cause de leur dissemblance qui ne permet pas de les comparer. On arrive à les mesurer par une voie indirecte en les assimilant à des surfaces planes équivalentes, opération qui porte le nom de « quadrature ». On regarde alors les surfaces courbes comme composées d'une infinité d'éléments plans infini-

ment petits dans tous les sens. Une transition est d'ailleurs ménagée entre les surfaces planes et les surfaces courbes par les surfaces dites « développables », qui tiennent des deux et reproduisent à volonté l'un ou l'autre type. Dans un cône droit, la surface convexe est égale à la moitié du produit de la circonférence de la base par le côté. La surface convexe d'un cylindre droit est égale au produit de la circonférence de sa base par sa hauteur, etc. Archimède a donné la démonstration du théorème d'après lequel la surface d'une sphère est égale à celle de quatre plans limités par ses grands cercles. On lui doit aussi le rapport de la sphère au cylindre. Il a montré que les surfaces et les volumes de la sphère inscrite et du cylindre sont unis par un même rapport égal à  $2/3$ . Il voulut que cette figure fût inscrite sur sa tombe, épithaphe digne d'un grand géomètre. — La comparaison des plans et des surfaces courbes comprend la théorie des plans tangents, dont Monge a tiré parti pour classer les surfaces courbes. On étudie ensuite les surfaces de courbure, puis les surfaces à double courbure.

*b.* — La mesure comparative des volumes polyédriques ne soulève pas de difficultés particulières, parce qu'il est toujours loisible de les décomposer en cubes ou en tétraèdres.

Celle des volumes à surfaces courbes est, au contraire, complexe et ne peut pas être obtenue directement. Les volumes de ce genre ne sauraient fournir d'étalon, à cause de leur impuissance à remplir uniformément l'étendue, et il faut nécessairement recourir, pour les mesurer, à des volumes rectilignes. On les présume alors composés d'une infinité de très petits polyèdres. Le cube est surtout employé pour les évaluations volumétriques, en raison de sa régularité. La détermination des volumes à surface courbe consiste donc à opérer ce qu'on appelle leur « cubature ». Le volume du cône est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur. Le volume du cylindre a pour

mesure le produit de sa base par sa hauteur. Les volumes des cônes « semblables » c'est-à-dire, dont les axes et les diamètres ont le même rapport, sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs ou les diamètres de leurs bases. Pour avoir le volume de la sphère, il faut multiplier la surface par le tiers du rayon. Les volumes de sphères inégales sont entre eux comme les cubes de leurs rayons, etc.

Parmi les sections de la Géométrie comparée, mentionnons la « géométrie descriptive » dont Monge a été l'initiateur (an III et 1813), et qui représente sur un plan, à l'aide de projections graphiques, les volumes susceptibles d'être exactement définis. La théorie de cet artifice serait à certains égards analogue à celle des logarithmes, car de même que celle-ci établit une relation entre les rapports additifs et les rapports multiplicatifs, ce qui permet de remplacer les opérations longues et compliquées par des opérations rapides et simples, la géométrie descriptive substitue des figurations planes à des constructions de l'étendue sous trois dimensions. C'est un expédient commode qui, sans introduire dans la science un nouveau moyen de recherche, facilite l'étude des figures en relief dont l'exécution serait parfois malaisée ou même impossible.

La « géométrie de position », indiquée par Leibnitz sous le nom de « *geometria situs* », a été étudiée par Euler (1759) et surtout par Carnot (1803). Réalisant pour ainsi dire les données idéales de la Géométrie figurative, elle traite, non plus de la grandeur et de la mesure, mais de l'ordre et de la situation. Cette étude nouvelle vise, au lieu de certaines figures considérées isolément et d'une manière abstraite, des collections de figures envisagées dans leurs rapports respectifs. Enfin, sous le nom de « géométrie cinématique », M. Mannheim a récemment publié un ensemble de recherches sur les conditions géométriques du mouvement étudié indépendamment des

forces et du temps. De telles investigations conduisent la Géométrie jusqu'au seuil des problèmes de collocation effective, objet de la science suivante, et servent de transition entre la Mathématique et la Dynamique.

La connaissance des rapports qui lient les modes de construction de l'étendue dans les deux systèmes rectiligne et curviligne, sous une, deux et trois dimensions, donne le moyen d'établir les conditions de correspondance des figures à tous les degrés de complexité. La Géométrie comparée fait dériver les lignes des rapports des points, puis les surfaces des rapports des lignes, enfin les volumes des rapports des surfaces. Rapprochant ensuite ces données, elle opère la rectification des courbes, la quadrature des surfaces courbes et la cubature des volumes à surfaces courbes. Dès lors, il devient facile de passer d'un mode de construction à l'autre, de ramener la détermination des figures les plus complexes à celle des éléments les plus simples, de suivre dans le détail entier des cas l'ordre de ces relations et de pressentir l'unité finale des fonctions de l'étendue dont la Mathématique générale sera chargée d'exprimer les lois en formules d'équations.

#### CONCLUSION. — RELATIONS DES NOMBRES ET DES FIGURES

Une étude complète des rapports mathématiques devrait enfin comparer les quantités et les dimensions que, jusqu'ici, nous avons examinées séparément. Ces deux ordres de grandeurs, si dissemblables en apparence, se trouvent unis par des relations générales qui résultent de la nature, au fond commune, de nos concepts. La différence, signalée par Aristote et admise par A. Comte, entre la grandeur discrète ou discontinue (le nombre), et la grandeur concrète ou continue (l'étendue), est moins d'ordre positif

que d'ordre métaphysique. Le nombre et l'étendue montrent deux aspects d'une même chose, la grandeur, indéterminée, virtuelle dans un cas, déterminée, précise dans l'autre. Mais ces deux manières de concevoir l'idée de coexistence, loin d'être, comme on l'imagine, étrangères l'une à l'autre, se relient de toute façon et la seconde procède de la première. La Géométrie achève la notion ébauchée par l'Arithmétique. Elle est, pour ainsi dire, une Arithmétique figurée et ses constructions pourraient être définies « les fonctions arithmétiques de l'étendue »<sup>1</sup>. Les dimensions, en effet, sont toujours réductibles en nombres et l'unique moyen d'établir la mesure de leurs inégalités consiste à supputer des quantités d'intervalles. De même, les nombres sont convertibles en figures. On traduit fréquemment ainsi en courbes, déterminées dans des diagrammes, les changements que subissent les quantités, et ce mode tout géométrique d'expression des valeurs tend à prévaloir dans les sciences de faits parce que, parlant plus clairement aux yeux que des pages de chiffres, il suffit souvent à mettre en lumière, par le seul tracé d'une ligne, la loi de la variation étudiée. Il y a donc des rapports entre les grandeurs quantitatives et les grandeurs étendues. Leur théorie, trop longtemps négligée, offre un intérêt général et devrait être le complément de la Mathématique comparée.

Les modes de figuration de l'étendue ont avec les modes de formation des nombres de frappantes analogies. Leur correspondance se retrouve à tous les degrés. Dès le début les fonctions des éléments se ressemblent dans les deux séries. Le point de la Géométrie est en effet l'équivalent, non du zéro comme le suppose à tort Pascal quand il l'appelle « un zéro de l'étendue » (*De l'esprit géométrique*), mais bien plutôt de l'unité. S'il paraît assimilable au zéro,

1. « La Géométrie est une application de l'Arithmologie à une grandeur spéciale, l'étendue. » (Ampère, *Essai sur la philosophie des sciences*, t. II, page 45.)

eu égard à la nullité de ses dimensions, il a une valeur propre, positive et même essentielle en ce qui concerne la conception initiale de l'étendue figurée. Il y aurait encore une Arithmétique sans zéro, et l'invention de ce signe négatif, usité seulement dans la numération écrite, a été tardive; il n'y aurait pas, au contraire, de Géométrie sans point. Cet élément constitue le principe de toute limitation de l'espace, comme l'unité le principe de la détermination de la valeur. Le point est l'unité de position qui marque un lieu précis, une tête ou une fin de ligne, une direction fixe, un centre de figure, un sommet d'angle, etc.; en un mot, il représente la condition primordiale de toute construction de l'étendue. La Géométrie se fonde sur la considération des points, et, sans cette donnée, aucune figuration ne serait possible. Un point opère la transformation de l'infini en fini, de l'espace illimité en espace qui se limite. Il pose une borne première dans le sein de l'immensité. A ce titre on pourrait lui attribuer, comme à l'unité, une sorte d'universalité potentielle, et faire de lui, suivant l'image traditionnelle que le génie de Pascal a rendue célèbre, le centre partout présent d'une sphère dont la circonférence n'est nulle part. (V. Pascal, *Pensées*, I, 1; et Havet, *note*, t. I, p. 17, 19.)

La ligne correspond à l'idée de pluralité ou de série comme le point à celle d'unité. Si, en effet, on suppose la ligne produite par un point en mouvement, on voit se déterminer la première des dimensions, la longueur, par un artifice tout à fait comparable à celui de la numération soit ascendante si la ligne se prolonge, soit descendante si elle décroît. Dans les deux cas, la ligne résulte d'une succession de points, comme le nombre d'une accumulation d'unités.

Lorsque, dans des lignes ainsi constituées, on prend des intervalles donnés, il est loisible de les ajouter les uns aux autres ou de les retrancher les uns des autres de la même manière que l'addition et la soustraction opèrent

sur les nombres. La longueur, en effet se conçoit comme composée d'une quantité d'intervalles finis qu'on peut ajouter ou disjoindre. Certaines courbes (l'ellipse et l'hyperbole) résultent plus directement d'un rapport soit par complément, soit par différence, de leurs distances focales.

Les surfaces, engendrées par un mouvement de lignes, correspondent au troisième mode de formation des nombres, par multiplication ou division. Lorsque, au lieu d'une dimension unique, la longueur, on en développe deux à la fois, la longueur et la largeur, elles deviennent facteur l'une de l'autre et se multiplient ou se divisent l'une par l'autre suivant que la surface croît ou décroît. Chacune de leurs variations en plus représente un produit et, en moins, un quotient. C'est pourquoi le rapport multiplicatif a pris dans l'usage le nom de « géométrique », son évaluation étant inévitable dans le calcul des surfaces. Cette qualification, impropre en Arithmétique, trouve ici sa raison d'être et signale un trait d'analogie entre les deux ordres de grandeurs.

Enfin, la construction des volumes rappelle le dernier mode de formation des nombres, par élévation aux puissances ou par extraction de racines. Le cube, la plus simple et la plus régulière des figures volumétriques, celle qui, en conséquence, sert d'étalon à toutes les autres, s'obtient en multipliant deux fois par lui-même le côté du carré. La valeur du cube étant donnée, on a une des faces par une extraction de racine carrée et le côté par une extraction de racine cubique.

Les rapports entre les quantités et les constructions de l'étendue pourraient être suivis très loin dans le détail. Il existe de curieuses relations entre certaines propriétés des nombres et certaines propriétés des figures. On sait, par exemple, que les sommes de nombres en série continue de laissent régulièrement disposer en forme de polyèdres s'un nombre croissant de côtés (trigones, tétragones, pen-

tagones, hexagones, etc.) les quantités et les figures paraissant alors se développer en vertu de lois identiques. Ainsi, la somme des nombres 1, 2, 3, 4, 5, ... qui donne 1, 3, 6, 10, 15, ... est trigone et peut se représenter de la sorte :



La somme des nombres 1, 3, 5, 7, 9, ..., qui équivaut à 1, 4, 9, 16, 25, ..., est tétragone et se figure comme il suit :



Les nombres 1, 4, 7, 10, 13, ..., qui, additionnés, donnent 1, 5, 12, 22, 35, ..., produisent des pentagones ; avec la somme des nombres 1, 5, 9, 13, 17, ..., qui vaut 1, 6, 15, 28, 45, etc., on construit des hexagones ; etc. D'après un théorème célèbre de Fermat, « un nombre quelconque est la somme de trois trigones ou de quatre carrés, ou de cinq pentagones, ou de six hexagones ; etc., zéro pouvant entrer une ou plusieurs fois dans la somme. » Une proposition de Fermat sur les puissances des nombres avait été de sa part l'objet d'une démonstration qui, non publiée par lui, n'a plus pu depuis être retrouvée. Elle consiste en cela que, au-dessus du carré, aucune puissance n'est décomposable en deux autres puissances de même degré qu'elle. Ainsi, aucun cube ne peut être la somme de deux cubes, etc.

Les recherches de ce genre n'ont pas été méthodiquement poursuivies et systématisées dans l'ensemble. Depuis Pythagore, l'esprit humain a le pressentiment des grandes lois par lesquelles s'établira quelque jour l'accord

des nombres et des dimensions; mais il n'a pas, jusqu'à présent, su convertir en connaissances précises ces vagues intuitions. Il y aurait à effectuer une brillante synthèse entre les lois encore isolées de la grandeur quantitative et de la grandeur étendue.

## II. — MATHÉMATIQUE GÉNÉRALE OU ALGÈBRE

SCIENCE DES FONCTIONS DES GRANDEURS

### THÉORIE DES FONCTIONS MATHÉMATIQUES

La Mathématique comparée établit les relations spéciales des grandeurs, mais elle laisse ignorer leurs relations générales. Il reste donc à instituer une dernière section de la science qui, spéculant sur les modes de formation des nombres et sur les modes de construction de l'étendue, coordonne les fonctions des grandeurs et montre les conditions d'égalité de leurs séries.

Lorsque, en effet, on cesse de considérer des quantités exprimées, des figurations définies et leurs rapports directs pour examiner d'une manière abstraite les modes de détermination soit des quantités, soit des figures, on voit qu'il est possible de les lier par des relations d'équivalence et de constituer ainsi une science qui, sans se référer à aucune grandeur explicite, assigne implicitement des lois à tous les ordres de grandeurs. Le problème consiste alors à chercher, non plus comment se forme tel nombre ou se construit telle figure, mais comment se correspondent et se balancent les modes de variation des nombres et des figures. Il faut, pour cela, décomposer d'une part le mécanisme des opérations arithmétiques, de l'autre le système des constructions géométriques, mettre leurs corrélations en lumière et les formuler en lois d'« équation » (*de æquare, équaler*).

L'Arithmétique, la Géométrie et la Mathématique comparée s'appliquent bien aussi à déterminer des conditions

d'égalité entre les grandeurs ; mais, explorant le détail des problèmes, elles ne visent et n'arrivent qu'à des résultats particuliers. Au-dessus d'elles, la Mathématique générale édicte des lois dont l'ordre régit des quantités ou des figurations quelconques, par cela même qu'elles sont assujetties à certaines règles de formation. Il lui suffit d'abstraire les « fonctions » des grandeurs, c'est-à-dire de considérer, au lieu de nombres, les opérations sur les nombres, au lieu de figures, les modes de figuration, et de raisonner sur ces données d'après leurs relations nécessaires. Elle peut établir de la sorte des formules d'équation applicables à tous les cas susceptibles de se produire dans un même ordre de variations des grandeurs et les problèmes se trouvent résolus, non plus un à un, mais par séries. Cet artifice expéditif procure d'incomparables facilités pour trancher de haut, et sans entrer dans le détail, les questions que posent l'Arithmétique, la Géométrie et la Mathématique comparée. Comme il effectue la synthèse des rapports entre les grandeurs, il donne à la Mathématique la plus haute perfection qu'elle puisse atteindre au double point de vue de la coordination des conceptions et de la généralité des applications. On n'est même plus arrêté, dans cette recherche des égalités de série, par des difficultés que les sections précédentes sont impuissantes à surmonter. Ainsi les opérations sur les nombres, les mesures des dimensions et l'étude des rapports n'aboutissent pas toujours à des résultats rigoureux, parce que certaines grandeurs n'ont pas d'étalon commun. Il y a des nombres irréductibles l'un à l'autre, des lignes incommensurables, des rapports dont la détermination ne peut être qu'approximative. La Mathématique générale, écartant cet obstacle, établit théoriquement des rapports normaux, d'une précision absolue. La science des grandeurs n'a donc pas d'expédient plus exact, plus prompt et plus sûr. L'art de formuler en équations subordonne toutes les connaissances antérieures à ses méthodes expéditives et constitue le cou-

ronnement de la Mathématique, dont il exprime les lois.

Cette partie de la science est appelée « Analyse » ou « Algèbre ». Le mot d'analyse vient de l'école platonicienne et fut donné par Théon à une méthode, dont Platon était l'inventeur, pour résoudre les problèmes en partant de la solution cherchée comme si elle était donnée et en démontrant sa justesse par ses conséquences. L'analyse (de ἀναλυσις, résolution) est, depuis Viète (*L'analyse mathématique restaurée*, 1591), entendue en ce sens que l'on décompose la théorie des grandeurs pour dégager la loi de leurs fonctions. Toutefois, ce terme est assez impropre, car on opère alors moins une analyse qu'une synthèse, puisqu'on spéculé sur des séries de cas. En outre, le nom d'analyse, employé avec des acceptions différentes en philosophie, en chimie et en grammaire, prête à des confusions d'idées. Le terme d'« algèbre » (de *al djabroun* science des restitutions, ou de la réunion des parties au tout, de *djabara*, il a réuni) conviendrait mieux, en ce qu'il indique une réunion de rapports; mais sa signification est limitée par l'usage aux équations des quantités. Lagrange a donné à son traité d'Algèbre le titre plus rationnel de « Calcul des fonctions » qui pourtant ne comprend encore que les fonctions arithmétiques. Le nom de « Mathématique générale » nous semble mieux désigner dans son ensemble l'étude des fonctions soit arithmétiques, soit géométriques, et marquer nettement sa place dans la théorie des grandeurs.

En raison du degré supérieur d'abstraction où elle s'élève, la Mathématique générale devait se constituer historiquement la dernière. Tandis que les origines de l'Arithmétique sont immémoriales et que la Géométrie, comme l'étude des rapports, remonte encore à une antiquité reculée, la science des fonctions mathématiques est presque une création des temps modernes. Diophante et les Brahmanes passent pour avoir été les initiateurs de l'Algèbre chez les anciens; mais à peine en ébauchèrent-

ils les premiers éléments, et ils n'en surent tirer qu'une utilité des plus bornées. Pendant le moyen âge, les Arabes s'essayèrent au maniement de l'analyse; néanmoins, la science n'a été établie dans la pleine généralité de son objet, avec son système de notation et sa méthode, que durant l'époque féconde où parurent Viète, Fermat, Descartes, Newton, Leibniz et Lagrange. L'esprit humain a, depuis lors, disposé d'un moyen puissant d'investigation qui lui livre, avec les lois des grandeurs, le détail entier de leur application aux choses.

On ne saurait, sans injustice, reprocher à A. Comte d'avoir méconnu l'importance de l'Algèbre dans la théorie mathématique. Par une méprise en sens contraire, il l'a exagérée au point de ne plus voir qu'elle et de lui sacrifier les autres sections de la science, oubliant que, selon le précepte de Pindare « il ne faut pas lancer son javelot au delà du but, » car le dépasser est encore une manière de ne pas l'atteindre. A ses yeux, l'Analyse constitue toute la science des grandeurs, et l'Arithmétique d'une part, la Géométrie de l'autre, n'en sont que des appendices subalternes, des préliminaires insignifiants dont, l'art de formuler une fois connu, on peut négliger de tenir compte. Lui-même en donne l'exemple en bornant l'Arithmétique à résoudre le résidu des équations comme la Géométrie à figurer des dimensions. Nous avons déjà signalé ce qu'a d'inadmissible une prépotence pareille attribuée à l'Algèbre. L'institution de la Mathématique générale ne peut pas avoir pour effet de supprimer les théories élémentaires relatives à la formation des nombres et les modes spéciaux de détermination de l'étendue, puisqu'elle a précisément pour objet de spéculer sur ces données. Loin de les exclure elle les implique, et sa mission consiste à systématiser leurs rapports. Sans opérations sur les quantités et sans constructions de figures, on ne voit pas sur quoi porteraient les équations de l'algèbre. La connaissance des lois présuppose celle des faits, et, pour raisonner sur

les fonctions des grandeurs, il faut avoir préalablement assigné aux grandeurs les modes de détermination qui constituent ces fonctions. A. Comte, plus préoccupé des applications de l'Analyse que de sa nature, l'a placée en tête des sections de la Mathématique, sans avoir égard à l'ordre logique, ni à l'ordre historique, ni à l'ordre pédagogique manifestement intervertis. L'Arithmétique résout, quoique avec lenteur, les problèmes de quantité sans le secours de l'Algèbre, et tout le monde sait compter alors que les algébristes sont rares. La position des problèmes d'Analyse exigeait au contraire des notions arithmétiques, des règles admises pour accroître ou diminuer la valeur, car c'est justement à ces règles que correspondent les symboles de l'Algèbre. De même, la Géométrie poursuit ses recherches avec une indépendance relative, préparant ainsi des matériaux à mettre en œuvre, c'est-à-dire les systèmes de construction dont la géométrie analytique dégage ensuite les lois. La Mathématique générale, qui spéculait sur les variations des séries, devait donc être la conclusion de la science. Son rôle est de clore, non d'inaugurer la théorie des grandeurs, et A. Comte la colloque d'une manière absolument irrationnelle quand il lui donne la priorité comme à une science initiale. C'est prendre le faite pour le fondement d'un édifice, et pareille erreur n'est pas, d'ordinaire, permise à un architecte.

Le programme de la Mathématique générale se trouve indiqué par les sections admises dans l'étude des grandeurs. Nous avons à examiner d'abord les fonctions des nombres, puis les fonctions de l'étendue, enfin la loi d'égalité qui permet de relier toutes les grandeurs.

MATHÉMATIQUE GÉNÉRALE

SCIENCE DES FONCTIONS DES GRANDEURS

a. Equations élémentaires,	b. Équations supérieures	a. Analyse transcendante,	b. Analyse hypertranscendante	a. Coordination des points,	b. Équation des lignes,	a. Equation des surfaces,	b. Équation des volumes.
A. ÉQUATIONS DIRECTES		B. ÉQUATIONS INDIRECTES		A. ÉQUATIONS DES ÉLÉMENTS DE L'ÉTENDUE		B. ÉQUATIONS DES CONSTRUCTIONS DE L'ÉTENDUE	
1. ÉQUATION DES QUANTITÉS				2. ÉQUATION DES FIGURES			

ÉQUATION UNIVERSELLE DES GRANDEURS

1. — FONCTIONS DES NOMBRES. ÉQUATIONS  
ARITHMÉTIQUES.

La partie de la Mathématique générale qui traite des fonctions arithmétiques s'est constituée la première en raison de la moindre difficulté de ses problèmes, car elle se borne à spéculer sur un petit nombre d'opérations dont les rapports peuvent être établis séparément. Elle porte le nom d'Algèbre ou d'Analyse. Au rebours de l'Arithmétique qui cherche par voie de composition la valeur des expressions dont les éléments sont connus, elle décompose ces expressions, dont les relations sont indiquées, pour arriver à déterminer la valeur des éléments inconnus. Les équations s'établissent donc, non plus entre les valeurs exprimées, mais entre les opérations que ces valeurs doivent subir et dans les relations desquelles se trouvent enveloppées les inconnues à dégager. Newton a présenté de la manière suivante la théorie générale des équations : « lorsqu'un problème est proposé, il faut le regarder comme résolu et comparer entre elles toutes les quantités qu'il renferme, sans aucune distinction entre celles qui sont connues et celles qui sont inconnues ; examiner ensuite comment elles dépendent les unes des autres, afin de reconnaître celles qui, étant données, pourraient conduire à la détermination des autres. Alors il est facile de mettre le problème en équation. » Cela revient à chercher les relations générales des divers ordres de grandeurs. Leur équivalence une fois fixée on peut supposer des termes inconnus et tirer une valeur de leur comparaison avec les termes connus.

L'Algèbre spéculer sur les opérations de l'Arithmétique et, sans les exécuter, détermine leur résultat par avance, en partant de leurs relations nécessaires. Opérant sur de purs symboles, elle remplace les nombres, dont la mention lui

est inutile, par des lettres, qui représentent des nombres quelconques, et les opérations par des signes. Analysant ensuite ces données, elle les transpose, les balance, et, sans sortir du raisonnement abstrait, met en équations les rapports des quantités en fonction, c'est-à-dire exprime dans une formule idéale leur condition d'égalité. Des corrélations unissent en effet les opérations au moyen desquelles s'effectue l'accroissement ou l'atténuation des quantités, de sorte que si l'on est obligé d'exécuter successivement des additions et des soustractions, des multiplications et des divisions, des élévations aux puissances et des extractions de racines, ces opérations se neutralisent l'une l'autre et peuvent être supprimées ou modifiées dans la mesure où les variations qu'elles font subir à la valeur se compensent. On abrège ainsi beaucoup le travail, et l'on va par la plus droite voie vers l'égalité cherchée en remplaçant les opérations effectives par de simples changements ou déplacements de symboles. Lorsque la complexité des problèmes nécessiterait des opérations multipliées et pénibles, l'algèbre, qui les réduit à leur expression la plus sommaire, simplifie la solution et arrive directement à son but par une seule opération finale qui dispense de toutes les autres.

L'organisation d'un système de signes pour formuler les équations a rendu à l'Algèbre un service analogue à celui dont l'Arithmétique est redevable à l'invention des chiffres. Elle a remplacé la confusion par la netteté. Aux xv<sup>e</sup> et xvi<sup>e</sup> siècles, le maniement des équations, même élémentaires, présentait encore de telles difficultés qu'au lieu de résoudre les problèmes par des méthodes directes, on cherchait leur solution par des méthodes indirectes, au moyen d'essais graduellement corrigés ou de « fausses positions » (*regula falsi*, seule exposée dans les traités du temps). Pour trouver un quotient, par exemple, on prenait un nombre approximatif qu'on multipliait par le diviseur. Le résultat, inférieur ou supérieur au dividende, indiquait

s'il fallait élever ou abaisser le nombre hypothétique, ce qu'exprimaient à l'origine les signes  $+$  et  $-$ , dont le sens était alors indéterminé (ils ont encore cette signification vague dans les manuscrits de Léonard de Vinci). Ils prirent plus tard un sens précis et indiquèrent une addition ou une soustraction à opérer. Les signes  $\times$ ,  $\div$ , servirent à désigner une multiplication ou une division. Le signe  $\sqrt{\quad}$ , employé comme indice de racine, est dû à Rudolph et date de 1524; Stifel a généralisé l'usage des exposants. Enfin, le signe  $=$ , expression de l'égalité, a été imaginé le dernier et se rencontre dans un traité de l'anglais Record (1557). Un demi-siècle a donc vu se constituer les signes essentiels du langage algébrique (*Annuaire de l'observatoire de Bruxelles*, 1880).

Quoique des essais de recherches analytiques remontent jusqu'aux temps anciens, l'institution de l'Algèbre comme science est moderne et Viète doit en être tenu pour le principal initiateur. Ses traités (*De æquationum recognitione et emendatione*, et *Isagoge in artem analyticam, Opera*, 1646) assignèrent à l'analyse son but général, ses symboles et sa notation. Substituant des lettres aux chiffres, il apprit à dégager méthodiquement l'inconnue en l'assimilant aux données connues, à faire subir aux termes de l'équation des transformations propres à faciliter sa résolution, à spéculer sur les racines comme sur les nombres, à réduire les équations de degré supérieur en équations de degré inférieur, enfin, à extraire par approximation la racine des équations de divers degrés.

L'Algèbre s'applique à résoudre deux classes de problèmes. L'une concerne la mise en équation des fonctions de valeurs déterminées ou constantes et raisonne sur les rapports fixes qui unissent les fonctions des grandeurs données. L'autre considère des quantités indéterminées ou variables, c'est à dire susceptibles de croître ou de diminuer suivant certaines lois. On doit alors tenir compte de leurs conditions de for-

mation ou d'évanouissement. Mais, comme ces valeurs changeantes et, pour ainsi dire, insaisissables, ne se prêtent plus à une analyse directe, il faut faire intervenir des données auxiliaires qui se lient avec elles et rendent leur mise en équation possible. Les problèmes de la première classe relèvent de l'Analyse ordinaire qu'on peut appeler avec A. Comte « calcul des fonctions directes » ; ceux de la seconde sont résolus par l'Analyse transcendante ou « calcul des fonctions indirectes ».

A. — Analyse ordinaire, calcul des fonctions directes.

L'analyse ordinaire se borne à formuler en équation les relations directes de grandeurs déterminées ou invariables. Elle n'a donc à considérer que les fonctions d'éléments donnés. Le classement de ses problèmes se réfère aux puissances de l'inconnue à dégager. On distingue d'ordinaire quatre degrés d'équations ; mais il est facile de les répartir en deux groupes, car les équations des deux premiers degrés sont relativement simples et d'une résolution aisée ; celles des deux derniers, au contraire, sont complexes et ardues.

*a.* — Les équations élémentaires spéculent sur les opérations les plus usuelles de l'Arithmétique.

Celles du premier degré visent les fonctions des nombres simples et sont dites « linéaires ».

Celles du second degré visent les carrés ou les racines carrées de ces nombres et sont appelées « quadratiques ».

Ces deux sortes d'équations, par suite de la précision de leurs termes et de la simplicité des rapports cherchés, ne présentent pas de difficultés particulières et, dès les temps anciens, Diophante (du I<sup>er</sup> au III<sup>e</sup> siècle de

l'ère chrétienne) avait trouvé le moyen de les résoudre.

b. — Les équations supérieures, qui spéculent sur des puissances composées, étaient moins faciles à établir, à cause de complexité des données et des rapports qu'elles admettent. Leur résolution n'a pu être obtenue que dans l'âge moderne.

Les équations du troisième degré portent sur des quantités élevées à la troisième puissance et sont qualifiées de « cubiques ». Les Arabes, au moyen âge, avaient abordé leur étude; toutefois, la manière de les résoudre rationnellement ne fut trouvée qu'au xvi<sup>e</sup> siècle par Tartaglia. Cardan la fit connaître, en 1545, par la publication de son *Ars magna seu de regulis algebræ*.

Les équations du quatrième degré concernent des quantités élevées à la quatrième puissance. Ferrari, au xvi<sup>e</sup> siècle, découvrit la manière de les résoudre.

Là s'arrête, du moins actuellement, l'analyse des fonctions directes. Les spéculations de l'Algèbre, comme les modes de formation des nombres, ne dépassent pas quelques degrés en rapport avec la puissance de nos conceptions. Ces degrés se superposent et forment une hiérarchie où les supérieurs dominent les inférieurs. Mais les difficultés augmentent vite d'une classe à l'autre. Les formules des équations cubiques sont déjà d'un maniement malaisé; celles du quatrième degré offrent de telles complications qu'on en fait rarement usage. On n'est pas encore parvenu à prolonger plus loin les recherches, et les équations du cinquième degré, même à une seule inconnue, ont, jusqu'à présent, résisté à tous les efforts des algébristes. Si donc on assignait pour but à la science de résoudre successivement les équations de tous les degrés, ou mieux encore de résoudre d'une manière générale les équations d'un degré quelconque, on voit qu'elle serait fort éloignée de son terme. Il est douteux que l'esprit humain soit jamais en état d'obtenir des solutions de ce

genre qui sont absolues ; mais, sans trop présumer de ses forces, on souhaiterait le voir étendre au delà de quatre degrés sa capacité d'établir des équations directes.

B. — Analyse transcendante, calcul des fonctions indirectes.

L'analyse ordinaire met en équation des valeurs déterminées ou fixes dont les unes sont connues, les autres inconnues, et cherche, par une balance d'opérations, à faire sortir les secondes de leurs relations directes avec les premières. Cette façon de procéder n'était pas applicable aux valeurs indéterminées ou variables qui dépendent les unes des autres et dont le rapport ne peut pas être mesuré directement, car un problème nouveau se pose par suite de la condition des données. Il faut alors recourir à des artifices auxiliaires, considérer les grandeurs dans leurs moindres éléments, au moment où elles se forment ou quand elles s'évanouissent et suivre leurs variations aussi loin qu'il est possible de les saisir. Tel est l'objet de l'analyse transcendante, admirable création de la seconde moitié du xvii<sup>e</sup> siècle. Les grands mathématiciens de la première n'avaient conçu qu'une analyse bornée à la recherche des rapports entre les grandeurs finies. Ils n'avaient pas osé aborder le problème de la génération ou de l'extinction des grandeurs qui se modifient insensiblement, de leurs variations corrélatives, de leurs séries, etc., problème dont la solution permet de spéculer sur le principe même de la grandeur et embrasse dans ses développements une suite indéfinie de transformations analytiques.

Les recherches de la Mathématique conduisaient par diverses voies à ce problème de la mesure indirecte des grandeurs incommensurables qui, à la longue, dut s'imposer et qu'il fallait résoudre sous peine de laisser de graves chances d'erreur s'introduire dans les calculs. L'Arithmétique rencontrait souvent dans ses opérations les

plus complexes, dans les divisions et surtout dans les extractions de racines, des valeurs inexprimables en nombres. La Géométrie avait aussi ses dimensions irréductibles et sans rapport exactement déterminé, comme le diamètre et les côtés du carré, la circonférence et le diamètre, le cercle et un carré équivalent, en sont un exemple. L'impossibilité d'atteindre dans les cas de ce genre une précision rigoureuse laissait subsister dans la détermination des grandeurs une part fâcheuse d'incertitude. Pour les sciences qui s'appliquent à résoudre les problèmes en détail, l'inconvénient était peu sensible, parce qu'à défaut de solutions absolues, que ces données ne comportent pas, il était loisible d'en obtenir d'approximatives et de conduire l'approximation jusqu'au point où l'on n'était plus séparé de la vérité stricte que par une quantité insignifiante et par conséquent négligeable. Cela suffisait pour les cas particuliers. Mais, quand on entreprit de résoudre les problèmes par séries et de raisonner sur des systèmes d'opérations, il ne fut plus permis de négliger ces grandeurs infinitésimales, car les sommes d'infiniment petits arrivent à représenter de grands nombres. La Mathématique générale devait donc en tenir compte, et compléter ses théories par des méthodes propres à donner la mesure de cet élément de valeur. Le besoin de surmonter la difficulté devint plus impérieux encore lorsqu'on voulut étudier l'action des forces variables dans leurs effets, car à moins de soumettre à des lois mathématiques le principe de ces variations, l'explication des phénomènes n'aurait pas été possible.

La mesure des grandeurs incommensurables par elles-mêmes s'obtient indirectement en faisant intervenir des quantités auxiliaires qui se lient aux données en question, mais avec lesquelles il est plus facile d'établir des équations, de manière à en déduire le rapport cherché entre les grandeurs que l'on considère. Ce mode d'analyse se rattache à l'analyse ordinaire et ne s'en distingue que par

un artifice accessoire, capable il est vrai d'ajouter beaucoup à son efficacité, puisqu'il donne le moyen d'arriver par une voie détournée à un but dont l'accès direct était interdit. On franchit alors l'obstacle en le transposant.

On trouve dans les œuvres d'Archimède une première indication des méthodes qu'emploie l'analyse infinitésimale, car cet illustre géomètre, pour déterminer la mesure de la circonférence, avait eu l'idée de considérer sa grandeur comme intermédiaire entre celles de deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, d'autant plus voisins de la circonférence qu'ils ont un plus grand nombre de côtés, sans néanmoins se confondre jamais avec elle. Il faisait donc intervenir, pour évaluer une grandeur inconnue et directement incommensurable, des grandeurs auxiliaires, d'une détermination aisée, qu'il modifiait peu à peu de manière à se rapprocher par degrés de l'inconnue, jusqu'à ce que, le résultat n'en différant plus que d'une quantité infiniment petite, il pût négliger la différentielle et déclarer le nombre trouvé égal au résultat cherché. Ce procédé, qui fut également appliqué par Archimède à la mesure de la parabole, du cône, de la sphère et du cylindre, porte le nom de « méthode d'exhaustion ». Les géomètres en font un emploi systématique et cherchent généralement la mesure des figurations curvilignes de l'étendue, qui n'ont pas entre elles de rapport direct, en les comparant à des figurations rectilignes dont la mesure est aisée. Ils regardent les courbes comme composées d'une infinité de lignes droites infiniment petites; les surfaces courbes, comme composées d'une infinité d'éléments plans infiniment réduits; enfin, les volumes à surface courbe, comme l'assemblage d'une infinité de très petits polyèdres. Grâce à cette assimilation, les équations qu'il n'aurait pas été possible d'établir directement deviennent faciles et si, l'approximation est portée assez loin, la solution ne diffère du résultat vrai que d'une quantité infinitésimale, c'est-à-dire moindre que toute quantité assignable. Toutefois, dans

cette manière d'aplanir l'obstacle, il y avait plutôt le sentiment d'une méthode que la constitution de cette méthode, et les procédés de l'analyse transcendante sont entièrement dus aux modernes.

« Un calcul nouveau enseigne, dit Condorcet, à trouver les rapports des accroissements ou des décroissements successifs d'une quantité variable, ou à retrouver la quantité elle-même d'après la connaissance de ce rapport, soit que l'on suppose à ces accroissements une valeur fixe, soit qu'on n'en cherche le rapport que pour l'instant où ils s'évanouissent; méthode qui, s'étendant à toutes les combinaisons des grandeurs variables, à toutes les hypothèses de leurs variations, conduit également à déterminer pour toutes les choses dont les changements sont susceptibles d'une mesure précise, soit les rapports de leurs éléments, soit les rapports des choses d'après la connaissance de ceux qu'elles ont entre elles-mêmes, lorsque ceux de leurs éléments sont seulement connus. » (*Esquisse des progrès de l'esprit humain*, 1822, p. 224.)

Dans la mise en équation des grandeurs variables, il y aurait à distinguer deux conditions inégalement complexes, suivant que les variations obéissent à une seule loi ou sont soumises à plusieurs lois qui influent les unes sur les autres. Le premier problème est résolu par le calcul infinitésimal et le second par l'analyse hypertranscendante.

a. — Quand on considère divers ordres de grandeur qui dépendent les uns des autres, comme l'espace parcouru par un mobile dépend de la vitesse avec laquelle il se meut, et cette vitesse elle-même de la force qui agit, on voit que la détermination de leurs rapports se ramène à un double problème : étant données les relations variables de ces quantités, trouver les relations de ces quantités elles-mêmes et les limites de leurs accroissements respectifs; ou bien, étant données ces dernières relations, remonter à celles des variables primitives. (Ampère, *Essai sur la philosophie des*

*sciences*, t. I, p. 36, 7.) Le calcul différentiel et le calcul intégral procurent la résolution de ces deux cas. Au point de vue analytique, le calcul différentiel, qui cherche à déterminer les relations entre les grandeurs auxiliaires d'après celles des grandeurs données qui leur correspondent, est au calcul intégral qui, au rebours, cherche à résoudre les équations directes par la considération des équations indirectes auxquelles se prêtent les grandeurs auxiliaires, ce que l'élévation aux puissances est à l'extraction des racines. (A. Comte, *Cours de philosophie positive*, t. I, p. 200, 6.) Leibniz et Newton, appliquant chacun de son côté l'instrument créé par Descartes pour résoudre le problème des tangentes, s'engagèrent dans des voies nouvelles et constituèrent l'analyse infinitésimale qu'un peu avant eux Fermat avait pressentie.

La théorie du calcul infinitésimal ou différentiel a été fondée par Leibniz sur la considération de quantités infiniment petites et sur l'assimilation des quantités qui ne sont séparées que par des différentielles de ce genre. On détermine ainsi une grandeur par l'atténuation indéfinie des erreurs d'évaluation. Il est vrai qu'alors l'équation devrait être tenue pour imparfaite, puisque les quantités ne sont mesurées que par approximation; mais Carnot a montré, dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797), qu'elle devient parfaite par l'élimination ultérieure des éléments infinitésimaux, ce qui établit la justesse du procédé sur le principe de la compensation nécessaire des erreurs. Lorsque, par exemple, pour mesurer la circonférence, on l'assimile à deux polygones, l'un inscrit l'autre circonscrit, on commet une double erreur, puisque le premier est trop petit et le second trop grand; mais ces deux erreurs se compensent, et la moyenne, qui les écarte l'une et l'autre, approche infiniment de la vérité.

Tandis que la méthode de Leibniz procède d'une conception abstraite, celle de Newton se rattache à l'observation des faits. Elle comporte deux points de vue différents.

Tantôt elle considère, non plus les accroissements des quantités proposées, mais les limites des rapports de ces accroissements, ce que Newton appelle « les premières et les dernières raisons »; — (les courbes, par exemple, seront les limites d'une série de polygones à nombre croissant de côtés; une tangente sera la limite vers laquelle tend une sécante lorsque ses points d'intersection se rapprochent de plus en plus; le mouvement varié sera la limite de mouvements uniformes infiniment courts, etc.); — et tantôt elle se réfère à des vitesses, regarde les quantités comme produites par un mouvement ou « flux » qui fait d'elles une fonction du temps, et cherche à déterminer le rapport entre les vitesses variables ou « fluxions », d'où le nom de « calcul des fluxions » donné à la mesure des grandeurs (« fluentes ») susceptibles d'augmenter indéfiniment dans une direction et de diminuer dans l'autre.

Une troisième méthode d'analyse infinitésimale, due à Lagrange, fait intervenir dans les équations des « dérivées » ou coefficients des termes de ces accroissements respectifs.

La conception de Leibniz offre dans la pratique des avantages qui lui ont assuré les développements les plus étendus; mais sa rigueur logique laisse à désirer. Celle de Lagrange, au contraire, est admirable de simplicité et d'unité, mais d'une application malaisée. La méthode de Newton, intermédiaire entre les deux autres, est supérieure en rationalité à celle de Leibniz, inférieure à celle de Lagrange, et, moins maniable que la première, elle l'est plus que la seconde (A. Comte, id. t. I, p. 143, 4).

b. — L'analyse transcendante établit ses équations entre divers ordres de variables dont le rapport est déterminé par une loi simple. L'analyse hypertranscendante étudie l'hypothèse plus complexe où ce rapport, au lieu d'être fixe, éprouverait lui-même une variation quelconque par suite de la modification subie par un ou plusieurs de ces termes. Deux cas peuvent encore se produire, suivant que

les variations obéissent à des lois corrélatives ou qu'elles s'opèrent sous des influences sans lois. Ces deux sortes de problèmes sont résolus par le « calcul des variations » et par le « calcul des probabilités ».

Le premier, dû à Lagrange, résulte d'une extension de l'analyse transcendante comme l'analyse transcendante elle-même résulte d'une extension de l'analyse ordinaire. Il établit les *maxima* et *minima* de certaines formules intégrales indéterminées. Sa théorie admet des interpolations successives de variables désignées sous le nom de « fonctions génératrices. » On résout par cette méthode, mieux que par le calcul différentiel, un grand nombre de problèmes *de maximis et minimis*.

Enfin, le calcul des probabilités dont l'idée première est due à Pascal et la théorie à Laplace, considère la certitude comme un tout et les probabilités comme des parties de ce tout, parties qu'il est possible de dénombrer et d'évaluer pour des occurrences variables. Il trouve des applications dans tous les ordres de faits où interviennent des causes indépendantes les unes des autres et dont les rencontres sans règle échappent à la prévision, ce qui est le cas particulier d'une multitude d'accidents dont la vie humaine est exposée à subir l'atteinte (tels que ceux sur lesquels spéculent les assurances de toute espèce, les contrats de rentes viagères, les caisses de retraite, de secours, etc.), et même la condition générale des phénomènes complexes soumis à des contingences éventuelles. Ce mode d'analyse, qui démêle dans l'interprétation de leurs causes la part des influences constantes et celle des irrégularités fortuites, assigne au hasard même des lois.

Grâce à ces divers artifices, la haute analyse va beaucoup plus loin que l'analyse ordinaire dans la mise en équation des fonctions arithmétiques. Les rapports fixes et directs entre des valeurs données sont toujours restreints; les rapports variables et indirects ne le sont

pas. Les relations qu'ils déterminent entre les ordres de grandeurs et leurs variations par séries s'étendent à tout. La mesure d'accroissements et de décroissements infinitésimaux fait assister à la génération même ou à la disparition des grandeurs, et permet de les saisir dans leurs moindres éléments. Ces lois d'équation se trouvent régir également, en dépit de la distinction d'Aristote, les grandeurs quantitatives et les grandeurs étendues. Enfin, le même mode d'analyse est applicable à l'étude de la plupart des effets produits par des forces dont la puissance est variable et dont les actions s'entrecroisent, régulièrement ou fortuitement. De telles recherches ne sont limitées que par la capacité de l'esprit humain à se maintenir dans des voies logiques, malgré la complexité croissante des formules. Les méthodes de l'analyse transcendante, qui datent à peine de deux siècles, sont encore loin, sans doute, d'avoir atteint le terme de leurs perfectionnements possibles. L'avenir, il faut l'espérer, saura découvrir des extensions et des simplifications de procédés, de manière à obtenir de plus grands résultats avec moins de peine. Parmi les procédés récents d'analyse dont il est permis de beaucoup attendre, mentionnons le « calcul des quaternions », créé par Hamilton vers 1843, et dont la Dynamique a déjà tiré d'utiles secours.

Ainsi l'Arithmétique générale, spéculant sur les modes de formation des quantités et sur leurs rapports, établit ses équations, d'abord entre des valeurs déterminées et constantes, comparables directement; puis entre des valeurs indéterminées et variables, incommensurables par elles-mêmes, et dont la mesure indirecte est obtenue à l'aide de valeurs auxiliaires en corrélation avec les premières, mais d'une appréciation plus aisée; enfin, entre des éléments divers qui concourent à un résultat commun et l'affectent dans de certaines limites. L'analyse

subordonne à des lois d'équivalence les fonctions des nombres, suit leurs relations de proche en proche, substitue les uns aux autres les termes engagés dans ces équations et détermine les valeurs inconnues d'après leurs rapports nécessaires avec des valeurs connues. Comme des connexions de ce genre relient tous les ordres de grandeurs quantitatives le champ ouvert aux spéculations de l'Algèbre est réellement infini.

## 2. — FONCTIONS DE L'ÉTENDUE. ÉQUATIONS GÉOMÉTRIQUES

Après les fonctions des nombres, il convient d'examiner les fonctions de l'étendue. Elles comportent aussi des lois d'équation, mais dans des conditions spéciales qui nécessitent une étude à part connue sous le nom de « Géométrie analytique. » Cette section de la Mathématique générale est postérieure à l'Algèbre comme la Géométrie proprement dite à l'Arithmétique, et pour la même raison. De même en effet que la Géométrie ordinaire détermine l'étendue à l'aide de données numériques, la Géométrie analytique doit mettre en œuvre les procédés et les formules de l'Algèbre, appliquer les équations au tracé des courbes ou à la mesure soit des surfaces, soit des volumes, et faire servir les lois du nombre à la découverte des propriétés de l'étendue. Cela explique la date relativement récente de son institution. Alors que des essais d'analyse quantitative remontent jusqu'aux temps anciens, l'analyse figurative appartient à l'âge moderne. Descartes est à juste titre regardé comme l'initiateur de ce genre de recherches. Cependant on en trouve une première indication dans les œuvres de Viète qui, en enseignant à « construire » des expressions du premier et du second degré, avait fait entrevoir des lois de rapport entre les nombres et les figures et, conséquemment, la

possibilité d'étendre à la Géométrie les procédés de l'Analyse.

Nous avons vu comment la Géométrie ordinaire établit en détail les figurations de l'étendue dans les deux systèmes rectiligne et curviligne, sous une, deux ou trois dimensions. La Géométrie comparée scrute ensuite les relations des figures. Mais, dans l'une et l'autre étude, on se réfère toujours à des constructions particulières dont on spécifie les rapports de dérivation ou de connexion. La Géométrie analytique, se plaçant à un point de vue plus élevé, spéculé sur les systèmes de construction comme l'Algèbre sur les modes de formation des quantités et, sans plus tenir compte des figures que celle-ci des nombres, résout les problèmes par séries, en raisonnant d'après les relations logiques des modes de figuration.

Les déterminations de l'étendue obéissent dans leurs développements à des lois que l'on peut abstraire et traduire en équations. Un point qui se meut par rapport à d'autres points pour tracer une ligne, une ligne qui se déplace pour engendrer une surface, une surface qui se déploie pour circonscrire un volume, conservent à travers leurs changements de position des relations auxquelles l'analyse est applicable. On veut alors établir comment s'opèrent les variations simultanées des divers ordres de grandeurs, variations dont le principe assigne des propriétés collectives à des groupes de figures. La Géométrie générale, plus synthétique et plus prompte que la Géométrie spéciale, fait rentrer dans une même formule toutes les limitations de l'étendue construites d'après un système déterminé. Négligeant les propriétés particulières qui, les propriétés collectives une fois connues, ne présentent plus guère de difficultés, elle considère seulement le mode de construction qui entraîne des similitudes pour tout un ordre de figures. Tandis que la Géométrie ordinaire serait tenue d'examiner une à une les différentes sortes de figuration et d'en épuiser le détail sans fin, la

connaissance de l'une d'elles n'étant, sauf le cas de dérivation directe, d'aucun secours pour la connaissance des autres, la Géométrie analytique, considérant les figures par classes, établit les ressemblances génériques et caractérise ensuite les différences spécifiques par de simples modifications de formules. Plus libre dans ses inductions, elle obtient des solutions d'ensembles et tranche du même coup une multitude de problèmes.

Les recherches de la Géométrie analytique comprennent, d'une part, les équations relatives aux éléments de l'étendue; de l'autre, celles qui concernent ses constructions composées.

#### A. — Équations des éléments de l'étendue.

Les éléments de l'étendue, points et lignes, ont les corrélations les plus simples et les plus bornées. Voyons comment il est possible de les mettre en équation.

*a.* — Les fonctions des points sont si restreintes que leur analyse se réduit à poser le principe de leur coordination. Descartes a montré qu'à chaque changement de situation d'un point, correspond un rapport entre des lignes qui se coordonnent, et que, ce rapport étant connu, on peut déduire des variations de ses éléments un ensemble de propriétés. Le problème initial de la Géométrie analytique consiste à établir un système de « coordonnées » qui permette de fixer des positions de points, soit dans un plan, soit dans l'espace, parce qu'avec cet artifice il devient possible de marquer avec précision un lieu géométrique, de le soumettre à l'analyse et d'en faire un objet d'équations.

La situation d'un point est déterminée dans un plan par l'intersection de deux lignes; mais il faut que ces lignes soient en corrélation avec d'autres dont le rapport est

connu. On emploie pour cela diverses sortes de « diagrammes » dont le système peut être rectiligne ou curviligne. Dans le premier cas, on se sert de « coordonnées rectangulaires » ou « orthogonales », c'est-à-dire de lignes droites qui se coupent à angle droit, chacune d'elles restant parallèle à un axe fixe. Le tracé de la ligne qui marque les positions successives du point se détermine alors par les intervalles où elle vient couper les abscisses et les ordonnées. Ce système trouve dans la science des faits d'importantes applications pour représenter les variations des phénomènes, leurs rapports et leurs lois. Quand il s'agit d'exprimer les valeurs d'une fonction, une courbe, qui parle aux yeux, a l'avantage sur des colonnes de chiffres, qui ne leur disent rien. Aussi ce mode clair et précis d'exposition graphique tend-il à prévaloir sur les relevés numériques. Outre les diagrammes à coordonnées rectilignes, on construit des « diagrammes à coordonnées polaires », où les ordonnées, au lieu d'être parallèles entre elles et perpendiculaires aux abscisses, convergent vers un centre commun (pôle). La situation du point est alors indiquée par sa distance à ce centre fixe et par l'angle que fait le rayon avec une droite fixe sur le même plan. La géographie utilise un expédient analogue pour la détermination des lieux terrestres (« longitudes » et « latitudes »), comme l'astronomie pour celle des astres (« ascensions droites », qui correspondent aux longitudes, et « déclinaisons », aux latitudes).

Les points se déterminent dans l'espace au moyen de trois plans qui se coupent et se coordonnent. On pourrait arriver à un résultat pareil par des intersections de surfaces courbes ; mais la simplicité des éléments rectilignes les fait généralement préférer.

b. — Les équations des lignes donnent lieu à des considérations plus complexes. On les établit surtout, non entre lignes droites, dont l'uniformité se refuse à des

comparaisons suivies, non entre lignes courbes, trop spéciales pour pouvoir être utilement confrontées, mais entre ces deux sortes d'éléments. Le problème consiste alors à traduire en coordonnées rectilignes le développement et les fonctions des courbes. Pour cela, il faut en concevoir le tracé autrement que ne le fait la Géométrie figurative. Une courbe peut être, en effet, obtenue de deux façons, soit directement, par un point générateur qui se meut sur un plan suivant une loi donnée; soit indirectement par une série de lignes droites qui se coupent et se coordonnent. La Géométrie ordinaire se borne à étudier le premier mode de production qui est le plus simple; considérons maintenant le second qui implique des suites de rapports et permet d'établir des équations linéaires. Si, parmi les définitions sans nombre que comporte la circonférence, on s'arrête à celle-ci : la circonférence est une courbe jouissant de cette propriété que tous les triangles inscrits, ayant le diamètre pour base et un point quelconque de la circonférence pour sommet, sont rectangles, — on voit que la perpendiculaire abaissée du sommet sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les segments de celui-ci, c'est-à-dire que son carré est égal au produit rectangulaire des deux segments. Ces lignes sont par conséquent corrélatives, ou, comme on dit, « coordonnées ». Quoique variables, elles conservent entre elles un rapport constant, et, l'une d'elles étant connue, on peut établir des équations, puisque la seconde est fonction de la première. Dans le cas dont nous venons de parler, la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence constitue « l'ordonnée », le diamètre « l'axe », et ses segments les « abscisses ». Avec ces éléments, on a le moyen de déterminer successivement les divers points de la ligne, d'analyser ses propriétés et de constater ses rapports. Cet artifice, applicable à toutes les courbes, et qui fait dépendre leur développement de variations subies par des lignes droites coordonnées, procure à la Géométrie

analytique, pour définir et mesurer les diverses sortes de courbes, des facilités dont la Géométrie figurative était dépourvue. Celle-ci, en effet, ne parvient à tracer des lignes déterminées qu'à condition d'imaginer pour chacune d'elles un mode particulier de production, c'est-à-dire d'assigner certaines lois de mouvement au point qui est censé les produire. Celle-là, au contraire, n'a besoin, pour exprimer toutes les courbes d'une série, que de modifier les fonctions des termes admis dans ses équations. Ses formules générales subordonnent à des lois communes les différentes courbes de même ordre et montrent les relations de leurs séries. Il s'ensuit que le procédé de figuration directe n'est efficace que pour les lignes les plus simples, dont le mode de génération peut être conçu clairement, tandis que le système des coordonnées rend aisée la détermination des lignes les plus complexes. On a découvert ainsi, sans le secours des figures, des propriétés que les anciens n'avaient pas soupçonnées dans les courbes étudiées par eux avec le plus de soin, mais avec les ressources bornées de la Géométrie ordinaire.

La difficulté des équations linéaires varie selon la nature des lignes et les fait classer en « algébriques » et en « transcendantes ».

Les premières se répartissent, comme les degrés de l'algèbre, par la considération des puissances engagées dans les formules auxquelles leur étude donne lieu. On distingue les lignes « de premier ordre » ou droites, dont les puissances se réduisent à des nombres simples ; les lignes « de second ordre » dont la puissance est carrée, (circonférence, ellipse, parabole et hyperbole) ; enfin des courbes de « troisième » ou de « quatrième » degré, d'une construction plus complexe.

Les équations relatives aux lignes transcendantes soulèvent des problèmes dont la solution exige le secours de la haute analyse.

## B. — Équations des constructions composées de l'étendue.

Les rapports des éléments de figuration une fois connus, la science aborde, à l'aide d'artifices dont la complication va croissant, l'étude des figures à deux et à trois dimensions. Descartes n'avait appliqué l'instrument, créé par lui, de la Géométrie analytique, qu'à la détermination des courbes planes, au moyen d'équations à deux variables; mais c'était là un simple point de départ et les géomètres qui lui succédèrent furent logiquement amenés par les développements de l'analyse transcendante à spéculer de la même manière sur les surfaces et sur les volumes. Leurs travaux ont ainsi complété le programme de la Géométrie générale.

*a.* — Au xvii<sup>e</sup> siècle, Parent et Clairaut étendirent l'application de l'analyse à l'étude des surfaces. De même qu'un point est déterminé dans un plan par l'intersection de deux lignes dont les relations sont indiquées, il peut être déterminé dans l'espace par l'intersection de trois plans qui se coordonnent et entre lesquels les équations s'établissent. La représentation analytique des surfaces s'effectue alors par des équations à trois variables en corrélation les unes avec les autres. La mesure des surfaces courbes exige conséquemment des formules plus complexes que celle des lignes courbes et la solution des problèmes nécessite l'emploi de la haute analyse.

*b.* — Enfin, à raison de la connexité naturelle des surfaces et des volumes, on passe des unes aux autres par une complication de formules. Les équations relatives aux figures à trois dimensions ont principalement pour objet la recherche des rapports entre les volumes à surfaces courbes et les polyèdres; mais ces problèmes, les plus

difficiles de tous, ne se laissent résoudre que par le calcul intégral.

Ainsi, la Géométrie analytique assigne des lois de correspondance aux modes de construction de l'étendue, dans les deux systèmes rectiligne et curviligne. Ses formules abstraites, éliminant les figures et ne tenant compte que des fonctions, coordonnent les points, déterminent les lignes, enfin opèrent la rectification des courbes, la quadrature des surfaces courbes et la cubature des volumes à surfaces courbes. Tous les cas possibles de figuration peuvent donc être mis en équation et liés par des rapports dont l'ensemble ramène à l'unité les conceptions de l'étendue.

#### CONCLUSION

Après avoir établi, par l'Algèbre, les corrélations entre les fonctions de nombres et, par la Géométrie analytique, les corrélations entre les fonctions de l'étendue, la Mathématique générale aurait à mettre en lumière leurs rapports communs. La science a le pressentiment de leur accord, mais n'a pas encore entrepris de le formuler. Il resterait à instituer un mode d'analyse qui, par la synthèse des deux autres, concilierait ce qu'ils ont de distinct pour la pensée et déterminerait la loi suprême de tous les ordres de grandeurs.

Le principe d'égalité domine le système entier des spéculations mathématiques. L'égalité correspond, en matière de grandeur, à l'identité en fait d'existence. On pourrait même dire qu'elle la représente sous un autre aspect et qu'égaliser des grandeurs revient à montrer leur identité logique. Toutes les grandeurs déterminées ou déterminables peuvent être mises en équation, c'est-à-dire ramenées à des conditions d'égalité. Aristote a signalé comme un trait caractéristique des grandeurs que seules

on les déclare « égales » ou « inégales », les autres choses étant dites identiques ou distinctes, semblables ou différentes (*Organon, des catégories, 4*). La mesure des grandeurs se réduit à les rendre égales. Le signe  $=$ , expression de l'égalité cherchée, est le lien qui unit les termes de tout problème mathématique et la Mathématique même pourrait être définie la recherche de l'égalité dans les inégalités.

L'objet essentiel de la science des grandeurs est donc d'établir entre elles des modes d'équation, par accroissement ou par réduction de valeur s'il s'agit de nombres, par extension ou décroissement de dimensions à l'égard de l'étendue, enfin, par enchaînement de rapports ou corrélation de fonctions. Grâce aux méthodes instituées, l'esprit évalue, figure, compare et formule toutes sortes de grandeurs, mesure leur écart, les substitue les unes aux autres dans des conditions données d'équivalence, et les fait évoluer à travers des analyses sans fin. Il n'est rien qui ne relève des lois assignées à ces déterminations, sauf l'infini qui, n'ayant pas de limites, est incommensurable. Mais entre les deux extrêmes, également inaccessibles, de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, la théorie mathématique subordonne à des conditions d'égalité tout ce que l'intelligence peut concevoir et saisir en fait de grandeurs finies.

## CHAPITRE III

### MÉTHODE DE LA MATHÉMATIQUE. DE LA DÉDUCTION

Nous devons, pour terminer cette étude, exposer la méthode dont la science des grandeurs fait usage dans ses recherches. Un procédé spécial d'investigation lui était en effet nécessaire, car l'intuition, si efficace et si sûre pour la connaissance des êtres, ne suffisait plus à l'étude de grandeurs dont la détermination est rarement évidentes. Au lieu de constater simplement des réalités manifestes, on avait à mesurer des inégalités problématiques, ce qui exigeait l'emploi d'un artifice nouveau.

Le sens intime et les sens externes, qui nous révèlent si clairement l'existence des choses, étaient de peu de secours pour nous renseigner sur les grandeurs. Ils signalent bien des égalités ou des inégalités apparentes; mais leurs indications, sommaires ou défectueuses, n'en donnent pas la mesure avec précision. Le moi rapporte tout à lui et, dupe d'illusions qui lui sont propres, ne se doute pas qu'il est un étalon variable et trompeur. Les mêmes lieux qui nous semblaient grands lorsque nous étions petits, nous paraissent petits quand nous les re-voyons après être devenus grands. Leurs dimensions n'ont pas changé, mais les nôtres se sont accrues et c'est assez pour que nos appréciations diffèrent. Les organes des sens

ont une exactitude très restreinte comme instruments d'exploration mathématique. Le toucher, réputé le moins trompeur, ne tranche pas toujours sûrement les questions les plus élémentaires de nombre et d'étendue. Les deux pointes d'un compas, mises en contact avec la peau, tantôt se discernent et tantôt se confondent, selon leur degré d'écartement ou la région du corps. Il suffit même de modifier légèrement les conditions ordinaires où le tact s'exerce, de presser par exemple un corps de peu de volume entre l'extrémité inférieure d'un doigt et l'extrémité supérieure d'un autre, pour que l'objet, qui est unique, paraisse double. L'ouïe et la vue se méprennent fréquemment sur les distances, et la perspective aérienne, suivant le plus ou le moins de transparence de l'atmosphère, occasionne d'étranges illusions. Nos sens sont donc mauvais juges de la grandeur et aucune science rigoureuse n'aurait été possible si, pour l'établir, nous avions été réduits à ces moyens naturels d'information.

Il est aisé de marquer jusqu'où s'étend l'aptitude de l'intuition à percevoir nettement les grandeurs concrètes et le moment où, son emploi se trouvant fautif, une autre méthode devenait indispensable. Cette limite est toute tracée lorsqu'on sépare, dans les notions mathématiques, ce qui est d'évidence directe et ce qui est d'évidence dérivée. Malgré les analyses continues de la perception, la pensée ne peut aller loin quand il s'agit de dénombrer les choses à l'aide de ce seul indice et se voit bientôt arrêtée par la difficulté d'évaluer l'importance des groupes. Ainsi le regard saisit parfaitement la différence entre un objet et deux objets. Celle entre deux et trois, trois et quatre, quatre et cinq se laisse encore reconnaître sans trop de peine, mais commence néanmoins à devenir malaisée, et là finit la numération de certains peuples. La distinction entre cinq et six, six et sept, sept et huit, réclame de plus en plus d'attention pour n'être pas incertaine. A mesure, en effet, que les unités s'accroissent dans

le total, chacune d'elles en représente une fraction décroissante de moins en moins appréciable. De là résulte une cause de confusion et, dès qu'on dépasse les premiers nombres, toute évidence s'évanouit. Le regard, même attentif, ne distinguerait pas sûrement neuf objets de dix, moins encore dix-neuf de vingt et nullement quatre-vingt-dix-neuf de cent. Pour tenir compte d'inégalités pareilles, que la sensation était impuissante à constater, il fallait recourir à des artifices numératifs. De même en ce qui concerne les opérations sur les nombres. Nous disons proverbialement : « cela est clair comme deux et deux font quatre ». Il n'y a rien en effet de plus évident; mais prenez de grands nombres, le résultat ne sera plus manifeste et, pour l'établir avec certitude, il sera nécessaire d'employer des procédés méthodiques. Ainsi encore, les relations des figures élémentaires de la Géométrie, comme l'égalité des angles opposés ou la somme des angles adjacents égale à deux angles droits, nous frappent de prime abord; mais la plupart des propositions relatives aux constructions de l'étendue, n'ont rien d'évident et chaque théorème a besoin d'être démontré pour se faire admettre.

Il y a donc, dans nos conceptions de la grandeur, des vérités d'évidence immédiate et des vérités d'évidence réfléchie. Les premières, très simples mais extrêmement limitées, relèvent de l'intuition et rentrent dans la science initiale; les secondes, complexes mais susceptibles de prendre une extension indéfinie, sont le produit d'artifices de démonstration et constituent la Mathématique. Les êtres qui, comme les animaux, les enfants et les sauvages ne raisonnent pas ou raisonnent peu, sont réduits à des données intuitives et ignorent les lois des grandeurs. Les distinctions qu'ils sont capables d'opérer dans l'ordre concret, au point de vue soit du nombre, soit des dimensions, se réduisent à des notions particulières et ne composent pas une science. Pour que

la Mathématique pût s'établir, il fallait changer de méthode.

Sortons du monde des réalités où l'intuition des grandeurs concrètes rencontre si vite la borne de l'évidence; considérons les idées de nombre et d'étendue. La raison sera seule apte à spéculer sur ces données abstraites, parce que c'est elle qui les crée ou du moins les conçoit. Raisonner constituera donc l'unique moyen d'investigation en Mathématique et la science des grandeurs pourra se définir une logique chiffrée ou figurée. L'esprit, abordant un champ de recherches où l'évidence n'apparaît plus d'elle-même, devra la poursuivre, la contraindre à se montrer, et, comme l'exprime si bien le langage, la « démontrer ». Tel est le but auquel tend la méthode « déductive », spéciale à la détermination des grandeurs. La « déduction » (de *deducere*, tirer hors), fait sortir les notions les unes des autres dans l'ordre où elles s'impliquent. Ajoutant le pouvoir de démonstration aux ressources de l'intuition, elle prolonge l'évidence et développe des vérités successives à l'aide de la réflexion.

Raisonner, c'est lier des idées, tirer des conséquences, coordonner des rapports. Cela suppose un point de départ certain, des principes solidement établis. On ne pourrait en effet rien prouver si tout devait être prouvé, parce qu'alors la pensée serait tenue de remonter de preuve en preuve à l'infini et s'y perdrait. Un point fixe est indispensable pour y rattacher la chaîne des connexions logiques. La démonstration doit partir de vérités manifestes et tellement nécessaires que l'impossibilité de les nier dispense de les démontrer. Ces vérités essentielles qui se soutiennent par elles-mêmes et dont l'évidence s'impose ne pouvaient pas être établies par la déduction puisque la déduction les présuppose; la science des grandeurs les emprunte à la science première dont elles constituent les axiomes.

Nous avons vu l'intuition s'élever par degrés de la percep-

tion des réalités isolées à leur conception par séries, associer ensuite, au moyen de l'induction, les idées soit objectives, soit subjectives, et formuler, grâce à l'artifice du langage, des inférences ou propositions soumises au contrôle du sens commun. Mais, dans l'infinie multiplicité des jugements particuliers, très peu ont une évidence réelle. La plupart provoquent des contradictions et restent douteux. Quelques-uns à peine sont reçus de tous et possèdent une autorité si grande que leur négation même ne peut pas se concevoir. Parvenu à ce sommet de l'Ontologie où l'évidence, très nette dans les données de la perception, puis de moins en moins discernable, se réduit finalement à quelques axiomes, l'esprit devait imaginer un expédient pour étendre ses connaissances et engager les recherches dans une autre voie. Il eut alors recours au raisonnement déductif, seul moyen d'exploration dont la réflexion pût disposer et qui fût applicable à des idées pures. Il suffisait, pour instituer une méthode nouvelle, de raisonner sur les vérités manifestes au lieu de se borner à les constater.

L'artifice de la démonstration consiste à décomposer, au moyen du raisonnement, une évidence totale, claire dans l'ensemble, mais confuse dans le détail, en une suite d'évidences partielles qui dérivent les unes des autres. On amène ainsi successivement à la lumière des vérités enveloppées et comme cachées dans d'autres dont la certitude est absolue. La déduction, prenant pour prémisses les vérités indiscutables du sens commun, développe leurs conséquences en séries logiquement liées. Les axiomes, aboutissant d'une science et point de départ d'une autre, sont le trait d'union des deux, une sorte de carrefour où l'intelligence change de but, de voie et de méthode.

Les axiomes d'où la Mathématique procède expriment les conditions les plus générales de l'égalité ou de l'inégalité des grandeurs. Le nombre de ces vérités premières

est très restreint, et peut-être les géomètres l'ont-ils encore exagéré. Si, en effet, on entend par axiomes, non de simples définitions, mais des propositions véritables, on voit que, sur les douze axiomes énumérés en tête des *Éléments* d'Euclide, deux seulement méritent ce titre, savoir : « les choses égales à une même chose sont égales » ; et « les sommes de quantité égales sont égales ». On pourrait y joindre les axiomes relatifs aux conditions d'inégalité : « les sommes de quantités égales et de quantités inégales sont inégales » ; « les différences de choses égales et de choses inégales sont inégales. » Quant aux autres vérités qualifiées à tort d'axiomatiques, telles que : « le tout est plus grand que la partie » ; « le contenu est moindre que le contenant », etc., ce sont plutôt des définitions ou des propositions dérivées.

L'esprit s'étonne que des données aussi simples, qui se présentent comme d'inutiles truismes, soient si fertiles en conséquences qu'une science en puisse tirer les déductions les plus étendues, sans espoir d'épuiser jamais leur fécondité. Ces vérités générales expriment ce que la raison a trouvé de plus exact dans ses rapports avec la réalité des choses. Comme elles ressortent invariablement de tous les cas observés, elles s'appliquent à tous les cas possibles, et leur ordre est si rigoureux, si universellement constaté, qu'il ne nous est pas donné de concevoir le contraire, même par hypothèse. Les axiomes, qui concentrent pour ainsi dire sur un seul point toutes les lumières de l'intuition, résument une infinité d'évidences particulières. Là se retrouvent, condensées et abstraites, les notions sans nombre acquises en détail sur les relations entre les grandeurs dans l'ordre concret. La déduction, en développant leurs conséquences, ne fait donc que distribuer logiquement les indications livrées en bloc par un empirisme confus. La science des grandeurs n'est point une création de l'entendement; elle préexiste en puissance dans les axiomes, mais en quelque sorte à

l'état latent. La démonstration présente dans un meilleur jour, en les appelant une à une à l'évidence, les vérités enveloppées dans ces formules synthétiques. Elle rend explicite et formel ce qui, dans les axiomes, est implicite et sommaire.

L'Ontologie et la Mathématique procèdent ainsi en sens inverse l'une de l'autre, et leurs méthodes se correspondent comme les versants d'une montagne qu'on doit alternativement gravir et descendre. Tandis que l'intuition va du particulier au général, des données de la sensation aux inférences de l'induction, et finit par résumer en axiomes les lois qui régissent l'ordre intégral des choses, la déduction, prenant ces vérités pour point de départ, va du général au particulier, des prémisses à leurs conséquences. Les définitions et les axiomes constituent pour elle des majeures dont, par une application très étendue du procédé syllogistique, elle fait sortir des séries de mineures et de conclusions. Là où l'intuition se borne à tirer d'une vérité manifeste sa conséquence immédiate, également manifeste, la déduction se caractérise par la suite continue des raisonnements, l'enchaînement sans terme de conséquences dérivées les unes des autres. Le principe du raisonnement est donc tout intuitif, puisque c'est l'intuition qui établit les axiomes, reconnaît la légitimité de chaque conséquence et rattache ainsi un à un tous les termes de la série; mais la série elle-même, dans son prolongement sans fin, est l'œuvre de la déduction. La condition d'évidence, commune aux deux méthodes, fait de la seconde la continuation de la première. Seulement, en place d'évidences spontanées et sans lien, elle constate des évidences réfléchies et connexes.

Le problème général de la Mathématique consiste à égaliser rationnellement des grandeurs. Pour déterminer, sans sortir de l'évidence, la mesure de leurs inégalités, il fallait d'abord formuler en axiomes leurs lois les plus

générales, puis en suivre, de conséquence en conséquence, les relations logiques à travers une complication croissante. C'est ainsi que la déduction opère. Partant des vérités les plus certaines, elle en fait découler des séries de vérités subordonnées dont aucune, prise à part, n'est manifeste de soi, mais qui, rangées dans un certain ordre et se soutenant l'une l'autre, s'imposent toutes ensemble à la raison. Le point d'attache une fois fixé en pleine évidence, la déduction forme, anneau par anneau, une chaîne d'évidences médiates si étroitement liées qu'elles ne se laissent plus rompre.

Les égalités se disposent naturellement par couples, et comme d'après l'axiome fondamental de la Mathématique, deux choses égales à une troisième sont égales entre elles, quand un rapport est défini avec précision, chacun de ses termes se rattache à d'autres; qui eux-mêmes en appellent de nouveaux. Dans la variété des modes de formation des nombres et des modes de construction de l'étendue, il suffisait donc de connaître quelques relations certaines, et les plus simples sont évidentes par elles-mêmes, pour en découvrir de proche en proche une foule d'autres. Maître de relier toutes les grandeurs, le mathématicien va des égalités connues aux égalités ignorées et des vérités établies à des problèmes sans nombre. Son pouvoir d'investigation augmente même en proportion de ce qu'il sait, parce que chaque solution acquise ouvre un jour sur des suites de rapports. La science qui, au début, se trouvait réduite à quelques axiomes, multiplie suivant une progression rapide le nombre de ses déductions. C'est une source grossie d'affluents successifs et qui finit par devenir fleuve.

L'artifice déductif n'aurait pas trouvé d'emploi dans la science première, puisque les notions d'existence sont tenues d'être manifestes. La certitude des vérités ontologiques n'est pas un objet de démonstration; elle doit être établie par la seule intuition, et là où ni le sens

intime, ni le sens commun ne fournissent de lumière, on aurait beau argumenter en forme, nul raisonnement n'amènerait l'évidence, car l'évidence ferait défaut au point de départ du raisonnement. La longue illusion de la Philosophie a été de croire que la méthode logique suffisait à tout et qu'à force de raisonner sur un sujet quelconque, on devait arriver à la vérité. On n'arrive ainsi d'ordinaire qu'à de spécieuses erreurs. La Mathématique seule fait du raisonnement abstrait une application systématique, un moyen assuré de découverte. Cela tient d'abord à ce que, ses recherches portant sur des conceptions entièrement idéales, son mode d'investigation devait être exclusivement rationnel. Comme ensuite elle part de vérités indiscutables et en tire des séries de conséquences liées les unes aux autres par un fil continu de nécessité logique, elle ne sort pas un instant des conditions de l'évidence. Dans tous les autres ordres d'idées, la méthode déductive est trompeuse par ce double motif que les prémisses ne sont pas absolument manifestes et que les conséquences ne s'enchaînent pas avec une constante rigueur. Ces deux causes d'incertitude rendent précaires toutes les séries de raisonnements relatives à d'autres sujets que la grandeur. Le système des vérités Mathématiques est le seul où le procédé logique ait sa pleine efficacité et soit infaillible.

Selon Pascal, la meilleure méthode scientifique consiste « à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions » (*De l'esprit géométrique*). La Mathématique réalise cet idéal. Elle a le privilège unique de pouvoir définir exactement tous ses termes et de démontrer chacune de ses propositions en partant de principes incontestés. La nature de son objet lui assure cet avantage. Définir, en effet, c'est assigner des limites, fixer la valeur des mots, et la précision n'est possible qu'en fait de grandeurs. Kant a montré, dans sa *Critique de la raison pure*, que les concepts mathématiques comportent seuls des définitions justes parce que, pour eux, la définition se confond avec

l'idée, et ne contient ni plus ni moins qu'elle. C'est une simple proposition verbale dont l'énoncé reproduit la même donnée sous une autre face. Les concepts dérivés de l'observation ou de l'expérience ne sont pas susceptibles d'être définis d'une manière rigoureuse, parce qu'on ne connaît jamais les choses en leur entier. On se borne alors à les caractériser par quelque attribut partiel dont la mention exclusive laisse tous les autres indéterminés. Une ligne droite, un triangle, une circonférence, un rapport, se définissent clairement; il n'en est pas ainsi de la chaleur, de la lumière, de la force, de la substance, de la vie, de la pensée, d'un phénomène quelconque, où viennent s'entrecroiser des multitudes d'effets. La définition est stricte, adéquate dans un cas, incomplète, approximative dans l'autre.

Avec des définitions précises et des axiomes certains, la Mathématique établit des déductions sûres tant que le raisonnement se maintient dans les voies de l'évidence logique. C'est pourquoi la science des grandeurs porte, à l'exclusion de toute autre, le titre glorieux d'« exacte ». Non sans doute que la certitude y soit plus grande qu'ailleurs; rien n'égale sous ce rapport les clartés de l'Ontologie. La science qui formule les axiomes est plus voisine de la suprême évidence que celle qui leur rattache de problématiques déductions. Quand on appelle exacte la science des grandeurs, cela signifie surtout que, moins qu'aucune autre, elle est sujette à l'erreur. La perception a ses méprises, la conception ses lacunes, l'induction ses témérités, l'opinion ses dissidences, l'observation ses mécomptes, l'expérience ses égarements. Seule, la déduction ne se trompe point, tant qu'elle suit la loi du raisonnement. La science qu'elle établit progresse avec plus ou moins de lenteur; mais ses vérités, une fois démontrées, sont parfaites, définitives, et ne changent plus. Aussi la Mathématique a-t-elle été positive dès le début. A aucune époque, ses conceptions n'ont eu le caractère

théologique et les rêveries même d'un Pythagore n'ont pas pu l'empreindre d'un cachet métaphysique. Comme l'Ontologie, elle ne rentre pas dans la loi des trois états, qu'A. Comte a prétendu imposer à l'évolution de toutes les sciences, et ces deux exceptions suffisent à l'infirmier ou obligent à la restreindre. La théorie des grandeurs est l'unique exemple d'une construction scientifique ne laissant rien à désirer pour ce qui est démontré. A ce titre, elle méritait le nom de « science par excellence » (*μαθησις*), que les Grecs lui avaient donné. Elle est la science type, l'idéal de connaissance certaine proposé pour modèle à toutes les sciences de faits, mais dont celles-ci ne se rapprochent qu'en lui empruntant sa méthode et en subordonnant leurs mensurations à ses lois.

Ainsi, la Mathématique n'avait besoin, pour se constituer, que d'axiomes et de déduction. Libre de toute dépendance à l'égard des phénomènes, dispensée d'observer, d'expérimenter, d'analyser des substances, de comparer des formes ou de scruter des fonctions, elle se renferme dans un monde d'idéalités abstraites, et, pour y faire d'admirables découvertes, n'a besoin que de raisonner. Les relations des grandeurs représentent ce que l'universelle réalité, reflétée dans l'esprit humain, a de logiquement nécessaire. Nulle contingence ne les atteint, nulle cause de variabilité ne les trouble. Ce sont les lois mêmes de l'entendement traduites en formules, et qui, une fois établies, le sont pour toujours. La pensée plane ici dans la région sereine de l'immuable et de l'absolu. Loin d'être asservie aux faits, elle leur commande, et cette science, qui paraît étrangère aux choses, les régit avec une rigueur que, dans la pratique, on ne trouve jamais en défaut. « Les mathématiques offrent ce caractère particulier et bien remarquable que tout s'y démontre par le raisonnement seul, sans qu'on ait besoin de faire aucun emprunt à l'expérience et que néanmoins tous les résultats obtenus sont susceptibles d'être confirmés par l'expérience dans

les limites d'exactitude que l'expérience comporte. Par là, les mathématiques réunissent au caractère de sciences rationnelles celui de sciences positives, dans le sens que le langage moderne donne à ce mot. » (Cournot, *Théorie des idées fondamentales*, t. I, p. 7.)

L'organisation de la déduction comme méthode spéciale date de la phase où l'esprit humain fut en état d'exprimer les idées abstraites de nombre et d'étendue, de formuler des axiomes et de raisonner sur leurs conséquences. L'application d'abord très restreinte de ce procédé de recherche dut s'étendre et se perfectionner à mesure que s'agrandit le champ de la spéculation mathématique, car chaque série de problèmes rendait nécessaires de nouveaux progrès. Il y aurait lieu de distinguer dans le développement historique de la méthode quatre stades principaux en rapport avec les sections instituées dans la science des grandeurs.

Un mode élémentaire de déduction, le raisonnement simple ou sommaire, suffisait à l'Arithmétique. La numération, qui fait croître ou décroître uniformément les quantités, semble relever encore de l'intuition, tant sa marche est régulière et le résultat manifeste. Mais, lorsqu'on aborde l'étude des variations plus actives de la valeur, les opérations se compliquent et réclament du raisonnement. Néanmoins, en ce qui concerne les modes de formation des nombres, la théorie se réduit à instituer des « règles » ou systèmes d'opérations dont le mécanisme invariable s'applique à tous les cas. Comme, dans l'exécution des calculs, des erreurs sont toujours possibles, la preuve des résultats obtenus se fait par une opération inverse. On revient alors par une autre voie aux données initiales en partant de la solution trouvée. L'addition sert ainsi de preuve à la soustraction et lui emprunte la sienne. De même pour la multiplication et la division, pour l'élévation aux puissances et l'extraction des racines.

La Géométrie avait besoin d'artifices de déduction plus étendus et mieux liés. Au rebours du raisonnement arithmétique qui se borne à ériger en règles des manières générales d'opérer, le raisonnement géométrique doit s'exercer sur chaque figuration de l'étendue en particulier. Spécial et consécutif, il se plie à des conditions de construction susceptibles de modifications infinies. Là, tout se tient et les théorèmes s'enchaînent. La démonstration suit les complications graduelles des figures. Quoique chaque proposition exige un examen séparé, elle se réfère à des propositions antérieures et en prépare de subséquentes. On avance ainsi pas à pas vers l'inconnu et, lorsque cent théorèmes sont acquis, le cent-unième ne saurait tarder à l'être. Le raisonnement devait donc s'adapter à tous les cas imaginables et se composer par degrés pour déterminer les figurations sans nombre de l'étendue sous une, deux et trois dimensions, dans les deux systèmes rectiligne et curviligne. Les recherches des géomètres ont donné à la déduction une souplesse, une fertilité de ressources et une latitude d'application incomparables. En Géométrie, le moyen de preuve se tire de la concordance des démonstrations qui s'étaient l'une l'autre et parfois peuvent être obtenues par diverses manières de procéder. On utilise aussi le principe de contradiction en réduisant à l'absurde la proposition contraire à celle que l'on veut établir. L'absurde est l'évidence du faux. Prouver qu'on y tombe en prenant le contre-pied d'une vérité constitue donc un moyen de démontrer sa justesse. Euclide a souvent recours à cet artifice. Supposant faux les résultats établis, il suit les conséquences de cette hypothèse et, quand il arrive à une conclusion manifestement irrationnelle, il regarde comme deux fois sûres les solutions trouvées, car on ne peut alors ni éviter de les affirmer, ni admettre leur négation.

L'étude des rapports, soit entre les nombres, d'une part, soit entre les figures, de l'autre, soit enfin entre ces

deux sortes de grandeurs, devait employer des modes de déduction plus complexes, parce qu'au lieu de considérer simplement comment elles dérivent les unes des autres, il faut les comparer dans les conditions les plus diverses, et appliquer, en les combinant par couples ou par séries, les règles assignées à leur détermination. La théorie des rapports, proportions et progressions établit la balance des opérations de l'Arithmétique. La Géométrie comparée coordonne des groupes de théorèmes et unit par des corrélogions logiques les systèmes de construction.

Enfin la Mathématique générale, pour établir des équations analytiques et formuler les lois d'égalité des grandeurs, a dû constituer un mode transcendant de déduction, capable d'embrasser l'ensemble des variations fonctionnelles des nombres et des figures. Cette méthode abstraite, qui spéculait non plus sur des grandeurs déterminées, mais sur la manière de les déterminer, effectue la synthèse finale des connaissances mathématiques.

Tels ont été les progrès de la déduction. Grâce à son puissant secours et à sa discipline sévère, l'esprit humain n'a pas seulement institué une science des grandeurs; il s'est trouvé suffisamment exercé dans l'art de raisonner, et instruit dans celui d'obtenir des mesures exactes, pour pouvoir aborder l'étude des différents ordres de faits dont nous allons maintenant nous occuper.

# LIVRE III

## THÉOLOGIE OU DYNAMIQUE

SCIENCE DES SITUATIONS

---

### CHAPITRE PREMIER

#### DÉFINITION DE LA DYNAMIQUE

tologie constate la réalité des êtres et la Mathématique détermine la mesure des grandeurs. Unissons ces concepts qu'un artifice d'analyse peut bien séparer d'un autre esprit, mais dont l'association dans les choses est naturelle et forcée : nous aurons l'idée de réalités plus nombreuses et diversement étendues. C'est en ce sens que se constitue la notion de corps ou de masses. Or, dès que l'esprit conçoit les choses comme perceptibles et mesurables, sous les deux attributs de l'étendue et de la mesure, l'univers se révèle sous un nouvel aspect auquel correspond une troisième catégorie de faits et d'idées.

Cela seul, en effet, que l'on considère, non plus des réalités, comme la science première, mais des réalités multiples et figurées ; non plus des grandeurs simples, comme la Mathématique, mais des grandeurs complexes, on est obligé de tenir compte d'un rapport entre l'une ni l'autre de ces sciences ne s'occupe, celui

de collocation, de distribution dans l'espace. Voyons à quoi correspond cette manière de comprendre les choses et quel problème général se trouve posé par elle à nos recherches.

L'idée de collocation résulte de la notion d'existence associée à celle de grandeur. Lorsque des réalités perçues ont été déterminées quant à leur nombre et quant à leurs dimensions, il n'est plus possible de se les représenter que comme occupant les unes par rapport aux autres des situations dans l'espace. Il suffit ainsi d'appliquer aux choses une mesure mathématique pour voir l'universelle réalité se résoudre en grandeurs effectives unies par des rapports de collocation. L'intelligence se refuse à concevoir que diverses choses puissent exister dans le même lieu et que la même chose puisse exister en divers lieux. La notion d'impénétrabilité, due aux impressions tactiles et musculaires, oblige d'admettre que chaque corps occupe une portion de l'étendue qui lui appartient en propre et d'où sa présence exclut toute autre réalité. Cet attribut essentiel nous induit à concevoir une idée générale de l'espace, à y transporter comme dans un milieu commun tous les êtres connus et à leur assigner des positions respectives.

Ici doivent intervenir, pour rendre compte des faits, deux sortes de concepts dont les sciences qui précèdent n'opèrent pas l'analyse, celui de force et celui de temps. Quoique ces idées fondamentales se lient à celle d'existence, l'Ontologie les laisse indéterminées et confuses. Si, en effet, la perception du moi et celle des mouvements volontaires signalent en nous une force active, la conscience se borne à la constater et ce qu'elle a de manifeste dispense de toute investigation. L'étude de l'idée de puissance n'est pas moins inutile à la science des grandeurs. L'Arithmétique, lorsqu'elle constitue les nombres et la Géométrie, quand elle figure l'étendue, suppose bien une sorte de mouvement idéal en

vertu duquel les quantités croissent ou décroissent et les dimensions se développent par des déplacements de points, de lignes ou de surfaces exécutés suivant certaines lois ; mais ce sont là de simples conceptions de l'entendement et non des mouvements véritables. Il n'est pas besoin de force pour les produire et leur mesure n'astreint pas à calculer des intensités ou des vitesses. Les variations des grandeurs s'accomplissent en dehors de toute donnée concrète, dans le monde de l'abstraction pure, et c'est précisément pour cela qu'il suffit de raisonner pour en connaître.

La collocation des choses, au contraire, ne peut être conçue que comme l'effet d'une force ou cause d'action capable de contraindre les corps soit à rester en place quand ils gardent un ordre fixe, soit à changer de lieu quand leurs positions varient. L'idée de puissance a pour point de départ la conscience de l'action motrice que la volonté détermine dans le système musculaire. L'effort en est la manifestation sensible et un mouvement le résultat effectif. Comme cette force est la seule dont nous ayons directement connaissance, nous concevons toutes les autres sur son modèle. La notion de force se fait ainsi jour dans nos esprits en même temps que celle de corps et ne s'en sépare pas, car si le corps est « ce qui résiste », la force est « ce qui déplace les corps ». Nous acquérons simultanément l'idée de notre réalité matérielle et celle de notre pouvoir dynamique.

La « force », dans l'acception la plus générale de ce mot, doit être définie « toute cause susceptible d'empêcher, de produire ou de modifier le mouvement. » L'étude des divers ordres de phénomènes a fait spécifier autant de forces distinctes que l'on connaissait de modes caractérisés d'action. Les sciences ont successivement admis : une force de gravité qui régit les masses ; une force physique qui s'exerce sur les molécules et dont les modalités sont l'effet ; une force chimique ou affinité qui produit les

combinaisons entre les éléments des corps; il conviendrait même, comme nous le verrons, d'y joindre une force plastique nécessaire pour expliquer la production des formes; enfin, une force d'activité qui préside au fonctionnement des êtres. Ces différents modes d'action se ramènent à des conditions plus ou moins complexes d'équilibre ou de mouvement et paraissent dépendre d'une loi commune. Mais nous n'avons à considérer pour le moment que les effets relatifs aux masses, effets qui sont les moins complexes de tous et peuvent être observés directement.

La notion de durée se rattache, comme celle de force, à l'idée de permanence et mieux à celle de changement. La continuité des choses l'affirme et leurs mutations servent à la mesurer. Le concept de temps résulte pour la pensée d'une suite d'impressions distinctes dont chacune persiste encore dans la conscience lorsque la suivante y fait son entrée, le sentiment fixe de l'identité du moi leur servant à toutes de lien. Cette idée, transportée dans l'ordre phénoménal, devient particulièrement claire quand elle s'applique à l'étude du mouvement. Puisque la raison refuse d'admettre que le même corps puisse se trouver en divers lieux à la fois, son passage d'un lieu dans un autre est nécessairement consécutif. Tout mouvement s'exécute dans le temps et la science doit tenir compte de cette donnée.

Les notions de réalité, de nombre, d'étendue, de force et de temps suffisent pour concevoir et pour expliquer l'ordre de collocation des choses. Indiquons ce que cette catégorie de faits a de spécial par sa nature et de général par son extension.

L'idée de collocation est distincte de celle d'existence et de celle de grandeur, quoiqu'elle procède des deux. Elle en diffère par cela même qu'elle les unit. Leur association constitue un concept nouveau.

L'Ontologie, uniquement attentive à la réalité des choses, reste indifférente à leur situation comme à leur grandeur. C'est assez pour elle que les choses soient, n'importe où, n'importe comment. Elle se contente de certifier leur existence, seul fait qui l'intéresse et dont l'évidence apparaisse d'elle-même. Bien que les choses puissent exister sous les dimensions les plus inégales et dans les positions les plus diverses, la science première néglige ces données problématiques dont la détermination n'ajouterait rien à la certitude des vérités qu'elle constate. La Mathématique, science abstraite, n'a pas davantage à s'enquérir de l'état des choses, parce que, se bornant à spéculer sur de purs concepts, elle reste étrangère à toute question de réalité sensible.

Mais le point de vue change lorsque, dans les choses, on considère à la fois l'existence et la grandeur. Il faut alors combiner dans leur étude des données ontologiques et des mesures mathématiques. Au rebours de la notion d'existence qui, prise en soi, est absolue et nécessaire, celle de collocation est relative et contingente. Elle implique la coexistence de réalités distinctes et une cause dont leurs situations respectives sont l'effet. Au rebours de la notion de grandeur, objet abstrait de spéculations logiques, la collocation des corps est un fait concret, expression d'un état conditionnel qu'il faut percevoir avant d'en raisonner. Nous rentrons ainsi, pour n'en plus sortir, dans la réalité des choses que la Mathématique semblait avoir perdue de vue, mais qu'elle montre plutôt sous un aspect idéal. Après la constatation des existences et la mesure des grandeurs, il y a donc à scruter une catégorie de faits dont ces deux études ne procurent pas la connaissance et qui a pour résultat d'assigner aux corps un ordre fixe ou changeant de collocation.

Insistons sur la différence qui, dans une classification méthodique, oblige à séparer la science des situations et celle des grandeurs, car la confusion est fréquente sur ce

point. A. Comte fait de la mécanique rationnelle une section de la Mathématique et la range à la suite de la Géométrie dans ce qu'il appelle « Mathématique concrète » (*Cours de philosophie positive*, Leçons 15 à 18). Ampère comprend aussi la cinématique parmi les sciences mathématiques (*Essai sur la philosophie des sciences*, t. I, p, 68). Herbert Spencer tient également la mécanique pour une science abstraite (*Classification des sciences*, p. 19). Newton lui-même a donné à ses « *Principes* » la qualification de « *mathématiques* » et consacré le premier livre de son immortel ouvrage à l'exposition des éléments de la mécanique rationnelle. Aller à l'encontre de pareilles autorités pourra sembler bien téméraire; cependant, sans contester la méthode ni les vérités de la cinématique, nous croyons qu'une erreur est commise sur la véritable place qu'elle devrait occuper et il nous paraît possible d'établir une barrière précise entre les deux sciences à tort confondues.

La Mathématique a pour caractère essentiel de spéculer sur des conceptions abstraites de la grandeur, en partant d'axiomes ou de définitions manifestes, d'en déduire des enchaînements de rapports et de formuler des lois sans jamais recourir à l'observation des faits. La mécanique rationnelle présente des traits différents. Elle vise à déterminer, non les relations idéales des nombres ou des constructions de l'étendue, mais les modes d'action de la force, l'ordre de phénomènes concrets. Elle prend son point de départ dans l'observation des faits et donne au raisonnement, pour principe et pour but, des constatations formelles. Enfin, au lieu de découvrir des vérités nouvelles qui étendent la théorie des grandeurs, elle applique leurs lois connues à l'étude de la collocation des choses.

La disparité des « axiomes », d'où la Mathématique procède, et des « principes » sur lesquels la mécanique se fonde, est capitale et décide la question de frontière entre les deux sciences. Toutes les déductions de la mécanique

rationnelle dérivent de quelques lois de mouvement admises à titre de données premières, telles que l'uniformité du mouvement direct, l'égalité entre l'action et la réaction, enfin l'indépendance des mouvements simultanés. Mais ces notions n'ont rien de la nature des axiomes, et c'est avec raison que la langue scientifique évite de les désigner par le même mot. Les axiomes sont des vérités d'intuition admises par tous dès qu'on les exprime et dont l'irrécusable évidence ne laisse même pas concevoir la possibilité d'une négation. Les principes, au contraire, sont des vérités d'observation, dont l'évidence n'est ni spontanée, ni nécessaire, et que le sens commun n'aurait pas été capable de reconnaître directement. Pour les mettre en lumière et les formuler, il a fallu des hommes d'un rare génie. Ces lois s'imposaient si peu à la raison, qu'elles ont été tardivement signalées et très débattues à l'origine, car elles semblaient démentir les indications de l'expérience commune. Ainsi, le principe d'inertie, dû à Kepler et à Descartes, contredisait en apparence le fait si souvent observable de corps qui, immobiles, entrent d'eux-mêmes en mouvement, ou qui, mobiles, ralentissent leur course et finissent par s'arrêter. Ainsi encore, l'égalité, proclamée par Newton, entre l'action et la réaction, n'était nullement manifeste. Elle n'est même pas rigoureusement exacte, du moins si l'on se borne à considérer l'ordre des effets dynamiques, puisque, dans les cas de choc, une partie de la force se transforme en effets physiques. Enfin, la troisième loi, découverte par Galilée et relative à l'indépendance des mouvements, paraissait si peu vraisemblable que son énoncé souleva de nombreuses objections tendant à démontrer l'irrationalité du principe. On n'a donc plus dans ces inférences, des axiomes évidents pour tous, absolus et indubitables, mais des faits généraux devinés et vérifiés, des données d'observation qui sont reçues parce que la preuve est acquise, quoique la raison eût pu, *a priori*, les concevoir autrement. La science les admet, non

à titre de vérités manifestes, mais comme faits constants, expression relative et contingente d'un ordre déterminé.

La cause de la confusion entre la Mathématique et la cinématique tient à l'emploi, regardé à tort comme prédominant, de la déduction dans la seconde. Quand on veut classer une science par la considération de sa méthode, il faudrait ne pas commencer par se tromper de méthode. Une science n'est pas mathématique par cela qu'elle emploie les procédés de la déduction, car, s'il en était ainsi, toutes les sciences de faits seraient également mathématiques ou tendraient à le devenir. Ce n'est même pas une question de plus ou de moins, c'est une question d'usage exclusif. Or, la Mathématique seule, partant d'axiomes, n'a recours qu'à la déduction pour en développer les conséquences. Toute science obligée de mettre en œuvre d'autres moyens d'investigation sort de la Mathématique et ne doit pas être confondue avec elle. Tel est le cas de la mécanique rationnelle. Nous venons de voir que l'observation était nécessaire pour établir ses principes ; nous verrons plus loin qu'elle l'est encore pour compléter les notions abstraites que la science en tire et plier ses indications théoriques à la complexité des phénomènes réels. Enfin, la mécanique rationnelle est plutôt de la mathématique appliquée que de la mathématique pure et utilise les lois des grandeurs sans ajouter à leur connaissance. Là est, au double point de vue des méthodes et des résultats, la limite de séparation des deux sciences.

L'étude de la collocation des choses est donc distincte de la constatation des existences et de la mesure des grandeurs. L'Ontologie ne pouvait pas en connaître parce que, pour déterminer des situations, il faut apprécier des grandeurs, ce qui excède la compétence de l'intuition. La Mathématique n'était pas moins impuissante à s'acquitter de cette tâche parce que les questions de fait lui échappent. La science de la collocation des corps impliquait à la fois des données intuitives sur l'existence des masses et des

procédés déductifs applicables à la mesure des grandeurs. Elle diffère ainsi de l'Ontologie en ce qu'elle suppose des connaissances mathématiques et de la Mathématique en ce qu'elle exige des constatations de faits. Au lieu d'affirmer simplement, comme la première, la réalité des choses, elle doit évaluer des nombres, figurer des dimensions, calculer des poids, supputer des temps, et rendre ainsi compte de l'action des forces. Au lieu de spéculer comme la seconde sur des quantités abstraites et des constructions imaginaires, elle doit observer les réalités et appliquer à leur ordre les lois des grandeurs. Elle a, conséquemment, besoin d'être à la fois effective et rationnelle, de percevoir et de déduire. Ce double trait ne permet de la confondre ni avec l'une, ni avec l'autre des sciences déjà classées.

La généralité des faits de situation est manifeste et comprend le même ensemble de choses que l'Ontologie. L'idée de corps ou de masse s'applique en effet à toutes les réalités connaissables. Elle résulte, en nous, des sensations organiques et musculaires; hors de nous, des informations du toucher et de la vue. La concordance de ces données avec celles des autres sens nous apprend que chaque impression de saveur, d'odeur ou de bruit est l'indice de quelque existence positive. Nous ne pouvons donc rien percevoir qui ne suggère l'idée de corps, c'est-à-dire de réalité susceptible d'influencer nos organes et d'être déterminée sous des dimensions appréciables.

Mais, par cela même que les choses se laissent percevoir et mesurer, elles ont un ordre de collocation. Il faut les répartir dans l'étendue, constater leurs situations respectives. Cette étude n'a pour limites que la portée de nos sens et la perfection de nos métriques. Les seules masses inaccessibles à l'observation sont celles qui, en raison de leur petitesse ou de leur éloignement, se déroberont à la perception et au calcul. Toutefois, les bornes assignées

aux recherches de la science par notre capacité restreinte d'impression ou d'évaluation, peuvent être reculées au moyen d'artifices qui nous font voir l'invisible et presque mesurer l'infini. Sans doute, il y a toujours une limite; mais, en la touchant, la science n'éprouve pas de préjudice appréciable, car les choses, réduites à ce degré d'atténuation où elles cessent d'être perceptibles comme masses et mesurables comme grandeurs, n'exercent plus sur nous ou sur ce qui nous entoure qu'une action infinitésimale et pour ainsi dire nulle, du moins quant aux effets dynamiques. Leur étude, d'ailleurs, n'est pas impossible; seulement, elle doit être abordée par d'autres sciences, avec le secours d'autres méthodes. Il nous suffit en ce moment d'établir que toute masse qui tombe sous la prise de nos sens fait nécessairement partie d'un ordre de collocation et qu'ainsi la Dynamique spéculé sur tout ce que l'Ontologie constate de réalités.

Diverses parties de la science des situations ont été systématisées sous les noms de Mécanique rationnelle, de Statique, d'Hydrostatique, de Dynamique, d'Hydrodynamique, de Barologie, de Mécanique céleste... Mais la coordination de l'ensemble n'est pas encore établie. On n'a même pas, pour le désigner, d'expression collective qui atteste son unité. Leibniz avait proposé de réunir tous les effets de la force dans une même étude qui se serait appelée Dynamique (de *δυναμικός*, dérivé de *δύναμις*, puissance. V. *Sur une réforme de la philosophie première*). L'usage de cette dénomination rationnelle n'a pas prévalu et le terme de dynamique est resté spécial à la science du mouvement, par opposition à celui de statique, donné à la science de l'équilibre. Il serait, croyons-nous, utile de reprendre la conception de Leibniz, et d'étendre, conformément à l'étymologie, le sens du mot dynamique aux effets quelconques de la force, qu'ils consistent en phénomènes d'équilibre ou en phénomènes de mouvement, car

la même puissance agit dans tous. Le terme de « mécanique », employé par Laplace et adopté par A. Comte, est impropre en ce que, au lieu d'indiquer une étude générale de la collocation des corps, il rappelle (*μηχανική*, sous-entendu *τέχνη*, art de construire les machines), des applications technologiques dont le détail est étranger à la science. C'est pourquoi nous préférons lui donner le nom de « Théséologie » (de *θέσις*, situation), ou admettre celui de Dynamique pris dans l'acception la plus large. Le premier se réfère aux effets produits, le second à la cause qui les détermine.

A. Comte n'a su reconnaître ni la spécialité de la Dynamique, ni sa généralité, ni son unité. A la place qu'elle devrait occuper dans la théorie des sciences, il met l'astronomie, qui est une science particulière. L'astronomie, en effet, étudie les astres ou corps célestes à l'exclusion des corps terrestres et les examine sous divers aspects. Sans doute, elle traite principalement des révolutions des masses cosmiques et rentre par ce côté dans la science des situations, mais, d'une part, elle ne scrute pas toutes les conditions soit de l'équilibre, soit du mouvement dans la nature, puisqu'elle néglige les corps de peu de volume, parcelles insignifiantes des astres, mais le mieux à notre mesure et à notre portée; de l'autre, elle mêle à l'observation des mondes, considérés comme systèmes dynamiques, des recherches de tout ordre, sans rapport avec la science des situations et dont l'assemblage forme un composé disparate de notions hétérogènes. L'astronomie confine à la Physique par les données qu'elle recueille sur la chaleur et la lumière qui rayonnent des astres, sur leurs influences électriques et magnétiques, etc.; elle fait en outre des incursions dans le domaine de la Chimie, depuis que l'analyse spectrale a fourni le moyen de constater la nature et le degré de composition des substances cosmiques; enfin, la biologie même l'autorise à émettre des conjectures sur les conditions d'habitabilité

des mondes. L'astronomie ou cosmographie, qui amalgame toutes ces données, est donc une science composite, analogue à la géographie et de même ordre. Inégalement étendues quant à leur objet, mais également particulières, elles s'appliquent à décrire, l'une, le monde céleste, l'autre, le monde terrestre, et juxtaposent dans ces cadres connus des connaissances de toute espèce.

Une science générale est tenue de se constituer autrement. Il faut qu'elle étudie la totalité des choses sous un seul aspect bien déterminé. Supprimons les barrières indûment posées par la limitation astronomique et, à l'idée concrète d'astres, substituons l'idée abstraite de masses. Dès lors, nous ne serons plus restreints à un groupe arbitraire de réalités, et nos recherches comprendront tous les corps perceptibles, depuis les moindres particules observables jusqu'aux mondes qui gravitent dans l'espace. La Dynamique, il est vrai, doit beaucoup s'occuper des astres, à raison de leur importance comme masses et de la grandeur des effets par lesquels se manifeste en eux la puissance de la force; mais, quand elle étudie leurs situations, c'est moins pour en procurer la connaissance particulière, qu'à titre d'exemple et, pour ainsi dire, comme illustration de ses lois dont l'ordre est toujours général. La science de la collocation des choses se trouve donc mise, par la conception de l'idée de masses, en possession de l'intégralité de son objet. En outre, elle n'a plus à y mêler des recherches étrangères parce que les faits de situation des masses sont nettement définis et seuls à considérer.

Par suite de l'erreur qui lui faisait ériger l'astronomie en science générale, A. Comte a été conduit à démembrer la Dynamique et obligé de disperser dans d'autres sciences les séries de problèmes qu'un cadre si mal établi se refusait à recevoir. Il a ainsi rattaché la mécanique rationnelle à la science des grandeurs, malgré la différence de but et de méthode qui les sépare. Puis, ne sachant où colloquer

l'étude des effets terrestres de la pesanteur, il l'a reléguée, sous le nom de barologie, dans la Physique, où elle est manifestement hors de place, puisqu'elle concerne des résultantes d'action des masses et non des modalités dues à des actions moléculaires. Inutile à la Physique, elle forme le complément nécessaire de la science des situations. Par suite de cette fausse attribution, les lois de la chute des corps, qui ont préparé la découverte de la gravitation universelle, se trouvent, contrairement à toute raison, relever d'une science étrangère et appartenir à un cycle ultérieur.

Une distribution si malencontreuse scinde l'unité de la Dynamique et en répartit les lambeaux entre trois sciences distinctes. Pour mettre fin à un pareil désordre d'idées, il suffit de rapprocher ces membres épars et d'en faire un tout cohérent.



## CHAPITRE II

### PROGRAMME DE LA DYNAMIQUE

L'objet de la science ainsi défini, nous avons à opérer le classement de ses problèmes. Les répartitions usuelles, instituées sans vue d'ensemble, ne présentent pas l'ordre, la suite et la proportion qu'exigerait une conception unitaire. On distingue habituellement deux sortes de dynamiques, l'une théorique ou abstraite (mécanique rationnelle d'A. Comte, cinématique d'Ampère) qui constitue comme une géométrie de la force et n'est censée mettre en œuvre que la déduction ; l'autre, phénoménale et concrète (mécanique proprement dite et, en partie, mécanique céleste) qui réclame le secours de l'observation. Il nous paraît difficile de maintenir, dans un programme général de la science, une division ainsi motivée.

La mécanique rationnelle ne représente ni la Dynamique entière, puisqu'elle ne tient pas compte du détail des faits, ni une section spéciale de la Dynamique, puisqu'elle se borne à des spéculations mathématiques sur des « principes » reçus. C'est une science hybride malaisée à colloquer sans rompre son unité. Notons d'abord que le terme de « mécanique » est impropre et la qualification de « rationnelle » manifestement oiseuse, car toutes les sciences sont tenues d'être rationnelles, et celle qui ne les

serait pas ne vaudrait guère la peine d'être étudiée. Sans doute, l'expression de *rationnelle* signifie que la mécanique est surtout une science de raisonnement; mais comme elle n'a ce caractère qu'une fois les principes établis, et comme, pour les établir, il faut employer une autre méthode, cette manière de la désigner est tout à fait défectueuse. Il n'y a point de force abstraite; la force est toujours réelle. Elle implique des manifestations effectives et, quand on la définit « ce qui fixe ou déplace les corps », on voit qu'elle est inséparable des corps et ne peut pas être étudiée en dehors d'eux. Seulement, ses effets sont plus ou moins simples et généraux, plus ou moins complexes et spéciaux. Dans le premier cas, ils se prêtent, une fois constatés, à de longues séries de déductions analytiques, et c'est sur elles que la mécanique rationnelle spéculé; dans le second, l'observation doit plus fréquemment intervenir. Mais, qu'on déduise ou qu'on observe, la recherche porte toujours sur des faits, et l'objet de la science est unique, bien qu'elle ait, en apparence, deux manières de l'étudier.

Si, en effet, la mécanique rationnelle prétendait se restreindre à des spéculations abstraites sur les conditions possibles d'action de la force, elle serait vouée à raisonner sur des hypothèses et constituerait un simple jeu d'esprit, un stérile exercice de mathématique. Les faits seuls, des faits observés, constants et formulés en principes, lui donnent une base assurée, un caractère positif. Supposez les principes modifiés, toutes les conséquences différeront et, ne s'appliquant plus à la réalité des choses, tomberont dans le vide. L'égalité entre l'action et la réaction est, par exemple, le point de départ d'une suite sans fin de raisonnements; mais, imaginez d'autres rapports, la pensée pourra, pour chacun d'eux, prolonger tout aussi loin une série de déductions non moins rigoureuses, dont l'unique défaut sera de ne correspondre à rien. De même pour la loi de la gravitation : en dehors du fait, établi par l'observa-

tion, que la pesanteur agit en raison inverse du carré des distances, l'esprit est libre d'admettre que les corps s'attirent en raison du cube ou de telle autre puissance, et de construire, pour chaque hypothèse, un univers chimérique. Mais à quoi bon et quel serait le fruit de ce travail? Cela n'apprendrait rien de la condition véritable des choses qui seule importe à connaître. Si donc la mécanique se réduisait à tirer les conséquences rationnelles de données imaginaires, elle serait, comme science, d'une parfaite inanité. Ce qui la rend exacte et féconde, c'est qu'elle applique l'analyse à des notions positives et spéculé sur des principes qui expriment des faits généraux. La déduction avait conséquemment besoin d'être mise sur la voie des recherches fructueuses par une méthode capable d'écarter les conjectures *a priori* et de poser les vrais problèmes. Le jour où la cinématique, rompant toute attache avec les faits, voudrait devenir une science idéale, elle serait vouée à calculer laborieusement ce qui n'est pas. Dès qu'elle considère des faits réels généralisés sous formes de principes, elle change de méthode et doit être tenue pour une science d'observation, quoiqu'elle se borne ensuite à déduire.

En outre, la mécanique rationnelle ne constitue pas à elle seule une science complète des situations; elle établit simplement des cadres où les réalités rentrent par voie d'adaptation. Raisonnant sur les conditions les plus générales des faits, elle est obligée, pour suivre l'ordre strict des déductions analytiques, d'éliminer toutes les circonstances qui, dans la nature, compliquent les phénomènes; de sorte qu'après avoir donné la formule abstraite, nécessairement insuffisante, il faut y joindre des données concrètes qui achèvent la connaissance et que l'observation seule a le pouvoir de constater. Ainsi, la mécanique rationnelle suppose les solides et les liquides « parfaits », c'est-à-dire les premiers absolument durs et conservant un ordre invariable quant à l'arrangement de leurs par-

ties, les seconds, parfaitement fluides, c'est-à-dire composés d'éléments qui se meuvent les uns sur les autres avec pleine liberté. Or, c'est là une double erreur et, la loi une fois posée dans sa généralité sommaire, on doit tenir compte des conditions spéciales qui en modifient l'application dans le détail. La science n'est donc entière que lorsque, à des notions théoriques traçant l'ordre idéal des choses, sont venues se joindre des indications complémentaires portant sur l'ordre réel des faits. Disjoindre ces deux études serait les réduire l'une et l'autre à l'impuissance.

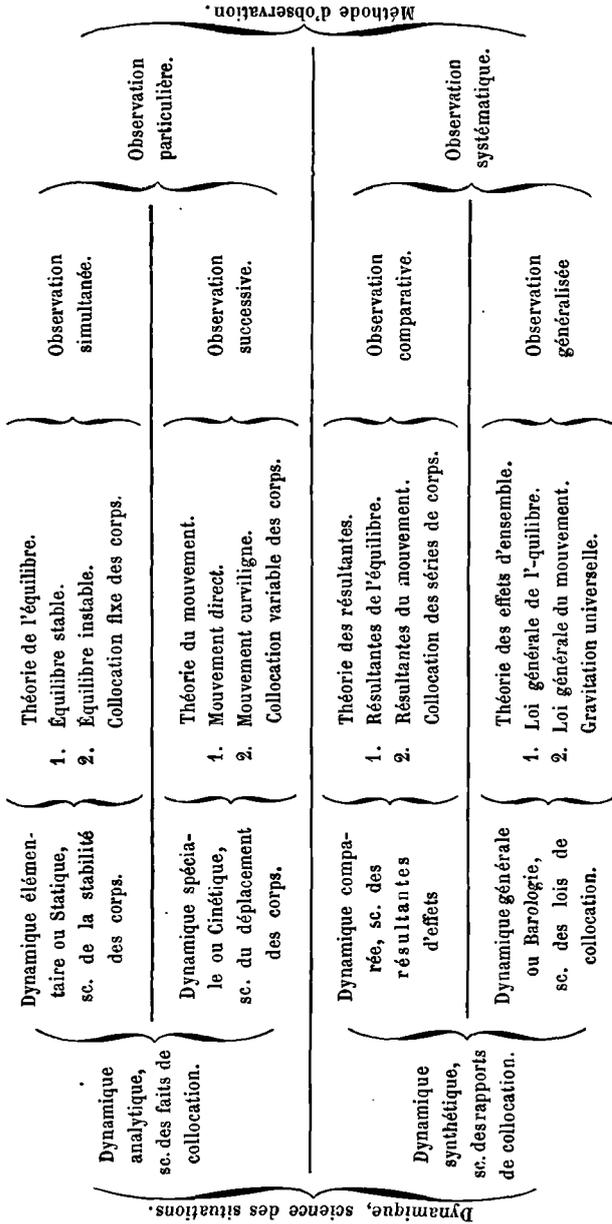
Il faut proclamer bien haut la prééminence des faits dans la Dynamique. Ce sont eux qui commandent et dirigent. Ils marquent le point de départ et le but, établissent les principes et comblent les lacunes de la théorie. La déduction n'est ici qu'un moyen de recherche, un instrument subordonné dont l'emploi ne suffirait pas à constituer la science et doit moins encore motiver son déclassement. La mécanique rationnelle ne diffère point à cet égard de la mécanique proprement dite. L'une et l'autre utilisent l'observation et la déduction, mais dans des proportions inégales, parce que la première spéculé sur des faits généraux et simples dont les conséquences s'étendent très loin, au lieu que la seconde, plus attentive aux particularités et obligée d'admettre des contingences variables qui troublent l'ordre des dérivations logiques, est tenue de recourir plus souvent à l'observation. Ce n'est là, toutefois, qu'une différence de degré dont la considération n'autorise pas à scinder l'unité de la Dynamique et à séparer ses deux moitiés par une dissemblance telle que l'une puisse être déclarée abstraite et l'autre concrète. Il est illogique de supposer que le même sujet, étudié de deux manières différentes, puisse conduire ainsi à deux ordres distincts de connaissances. La science des situations, prise dans son ensemble, traite d'une seule catégorie de faits et ses problèmes doivent

être résolu par une seule méthode que représente l'observation, c'est-à-dire l'intuition combinée avec la déduction.

En somme les deux aspects, théorique et phénoménal, de la collocation des choses sont si étroitement unis qu'il nous semble impossible de les disjointre dans une étude complète. La mécanique rationnelle, non étayée sur des données de fait et sans principes qui les expriment, ne pourrait que suivre les conséquences de vaines hypothèses et construire des mondes en l'air ; la mécanique concrète, non éclairée par la théorie et privée du secours de la déduction, se bornerait à noter les faits sans pouvoir les coordonner et les lier. Pour avoir une science véritable, il faut associer ces deux éléments de connaissance, établir l'intime accord des faits et du raisonnement, en un mot, constater et déduire.

Ce motif de division ainsi écarté, nous classerons les problèmes en consultant la nature et la condition des phénomènes de préférence à la manière de les étudier. Les questions dynamiques, considérées au point de vue de leur simplicité ou de leur complexité relative, se répartissent d'abord en deux groupes principaux suivant que l'on examine les faits isolément ou par séries. En conséquence, nous distinguerons deux parties dans la Dynamique, l'une analytique, consacrée à l'exploration du détail des faits de situation ; l'autre synthétique, ayant pour objet de déterminer leurs rapports et leurs lois. Exposons le programme de chacune d'elles.

THÉSÉOLOGIE OU DYNAMIQUE



## DYNAMIQUE ANALYTIQUE

SCIENCE DES FAITS DE COLLOCATION

Les positions que les corps occupent les uns par rapport aux autres s'offrent à l'observation sous deux aspects dissemblables qu'il importe d'étudier séparément. Les situations peuvent, en effet, rester les mêmes, ce qui constitue un phénomène d'équilibre, ou changer avec le temps, ce qui est un phénomène de mouvement. Une des catégories pythagoriciennes opposait déjà ces apparences contraires, et, dès l'origine, la science a évité de les confondre. Aristote (*De l'âme*, liv. II, ch. v) avait distingué un état « virtuel » de la force où sa puissance, suspendue et comme expectante, persiste sans s'affaiblir en conservant sa disponibilité ; et un état « actuel » où son énergie, appliquée et en action, se manifeste par des effets successifs dans la production desquels la force se dépense et s'épuise par degrés. Leibniz, afin de mieux accuser le contraste, a proposé de substituer aux expressions abstraites d'Aristote celles de « force morte » et de « force vive » ; mais ces termes font mal à propos intervenir dans la Dynamique les idées de vie ou de mort qui lui sont et doivent lui rester étrangères. Comme il s'agit simplement de distinguer la condition des corps qui se meuvent de celle des corps qui n'ont que la tendance au mouvement, il serait plus rationnel d'appeler « statique » ou « quiescente » la force qui détermine l'équilibre, et « cinétique » ou « mouvante » celle qui détermine le mouvement, sans toutefois

perdre de vue que ce sont là, non deux forces différentes, mais seulement deux modes d'action de la même force. L'étude des corrélations dynamiques nous montrera plus loin comment on passe de l'un à l'autre par les forces dites « de dégagement ».

L'analyse des faits de collocation comprend ainsi deux ordres de problèmes relatifs, le premier aux phénomènes d'équilibre qui, uniformes et constants, représentent les éléments de situation ; le second, aux phénomènes de mouvement qui, variables et consécutifs, représentent les changements de situation. Nous donnerons, en conséquence, à ces deux parties de la Dynamique analytique les noms de « Dynamique élémentaire » ou de « Statique », et de « Dynamique spéciale » ou de « Cinétique ».

## I. — DYNAMIQUE ÉLÉMENTAIRE OU STATIQUE

SCIENCE DES FAITS D'ÉQUILIBRE

### THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE

L'équilibre est la condition où les corps se trouvent quand ils gardent les uns par rapport aux autres des situations qui, d'elles-mêmes, ne changent pas. On ne saurait concevoir, en fait de collocation, de phénomène plus simple, puisqu'il établit l'ordre qui existe entre les parties de chaque masse considérée comme constituant un système dynamique, ordre sans lequel il n'y aurait pas de collocation ni de masses. En outre, l'uniformité persistante des effets de l'équilibre rend leur étude relativement aisée, car on n'a pas à scruter des variations successives, à figurer des parcours ou à supputer des temps, toutes données qui exigent des observations suivies et compliquent les problèmes de mouvement. Les questions d'équilibre ne tranchent par des mesures, prises une fois pour toutes, de dimensions, de distances et de poids. Ces notions s'expriment en nombres et l'instrument arithmétique suffit à leur détermination.

La science de l'équilibre porte le nom, parfaitement approprié, de « Statique » (*στατική*, de *στάω*, je reste en place), indiquant la recherche des conditions de puissance et de direction que doivent réaliser les effets de la force pour empêcher le mouvement entre les corps d'un système. Des observations relatives à la permanence de situation des masses durent être faites dès que l'homme devint capable de réflexion. Les plus anciens ouvrages

d'architecture impliquaient des notions empiriques de stabilité. Mais, pour instituer une science, il fallait d'abord mesurer avec précision des distances soit linéaires, soit angulaires, puis spéculer sur l'idée de force et apprendre à évaluer sa puissance en poids. C'est ce qui fit Archimède, et l'on doit, pour cette cause, le regarder comme l'initiateur de la Statique.

L'équilibre est un effet de la force dans le cas particulier où elle s'annule sur une résistance ou se neutralise elle-même par des actions d'égale intensité dirigées en sens contraire. L'état qui en résulte pour les corps ne doit pas être confondu avec celui d'inertie ou de repos absolu, condition idéale d'un corps que ne solliciterait aucune force et qui indique simplement l'incapacité pour la matière de changer par elle-même d'état. Dans tout phénomène d'équilibre, une force réelle est en jeu. Elle n'est pas apparente parce qu'elle ne se résout pas en phénomènes changeants; mais sa tension se manifeste par des pressions continues qu'expriment les poids. L'équilibre peut être conçu comme l'effet de deux poids qui se balancent et son nom même dérive de cette assimilation (« *æqui-librium* », égalité de poids). La cause de l'immobilité que gardent les corps en équilibre est une force arrêtée dans son action, tenue en suspens et comme en réserve. Les faits statiques montrent ainsi le mouvement en puissance ou, pour mieux dire, empêché. On l'appelle alors virtuel; mais le sens de ce terme ne doit pas faire illusion. Le mouvement virtuel implique une force effective et diffère seulement en cela du mouvement actuel qu'il n'y a pas de déplacement accompli, parce qu'une résistance s'y oppose. La force s'exerce alors d'une manière constante, sous forme de tension ou de pression, et détermine l'équilibre. Elle n'est donc pas « morte », comme on disait autrefois; elle est au contraire active, toujours en effort contre l'obstacle, et prête, dès que cessera la résistance, à se convertir en mouvement. Loin de repré-

senter l'absence de force, les faits d'équilibre constituent l'essence même de la force. L'idée de puissance est si étroitement liée à celle de stabilité que le nom de « force » en provient. On le rattache, par le latin *fortis*, à un radical sanscrit, *dhar*, qui a le sens de « soutenir ».

La statique est communément partagée en deux sections dont l'une, la « Statique » proprement dite, traite de l'équilibre des solides ; et l'autre, appelée « Hydrostatique, » de l'équilibre des fluides. Mais cette division a le défaut de faire intervenir comme motif principal de classement une considération d'ordre physique, celle des états solide ou liquide, au lieu de se référer, comme il conviendrait, à des caractères tirés de la nature des phénomènes statiques. En outre, au point de vue même de la distinction posée, elle serait insuffisante, car si l'on admet une Statique pour les solides et une Statique pour les liquides, on devrait instituer aussi une Statique pour les gaz, dont la condition, plus complexe que celle des liquides, motive un examen séparé. Enfin, il resterait à établir des sections intermédiaires pour l'étude des corps pulvérulents et des corps visqueux. Il y a donc, dans ce classement trop sommaire, des lacunes et des causes de confusion.

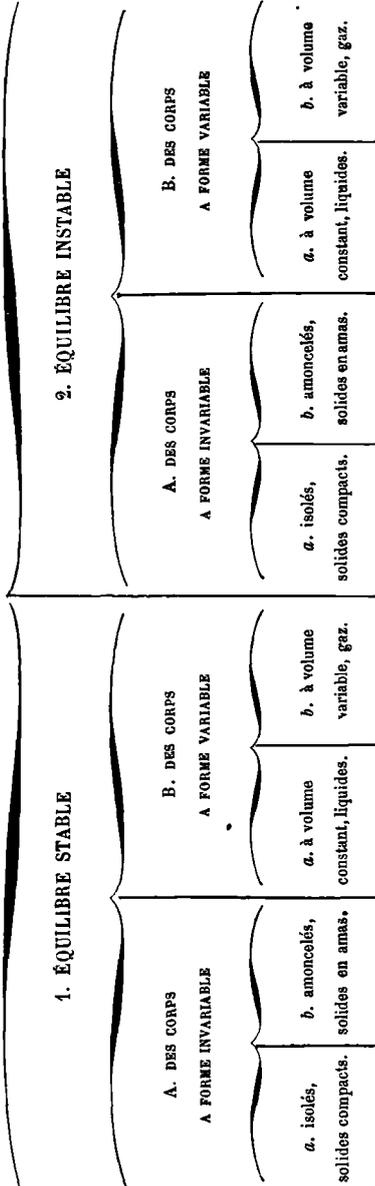
Sans doute, il faudra toujours, dans l'analyse des problèmes, tenir compte de l'état des corps ; mais cette considération n'est pas ici prédominante et ne doit intervenir qu'à son rang dans le classement des faits. Avant tout, il importe de consulter la nature des phénomènes d'équilibre, sous peine de méconnaître leur caractère principal et de s'exposer à troubler leur ordre par de fâcheuses scissions. Considérons premièrement dans les corps la condition statique, c'est-à-dire le degré de stabilité. L'équilibre, pris en lui-même, est uniforme, car il n'y a point diverses manières de rester en repos ; mais des différences sont à noter quant à la manière d'en sortir. L'équilibre stable et l'équilibre instable composent à cet égard deux séries distinctes de faits. Le premier est fixe,

sans terme quant à sa durée, parce que, non seulement il se maintient de lui-même, mais encore il tend à se rétablir quand il a subi, entre certaines limites, l'action de causes perturbatrices. Le second, au rebours, est transitoire, parce que la moindre influence contraire le fait cesser. Le corps, une fois écarté de sa position d'équilibre, la perd aussitôt et, loin d'y revenir spontanément, s'en éloigne de plus en plus. Dans un cas, l'équilibre est donc garanti et durable; dans l'autre, il constitue un état précaire, passager, qui n'a de stable que l'apparence et marque plutôt l'imminence du mouvement. Des conditions aussi dissemblables obligent à diviser la Statique en deux sections principales.

Lorsque, ensuite, nous étudierons les faits en détail, nous aurons à subdiviser ces deux modes d'équilibre par la considération secondaire de la nature des corps, puisque les conditions de stabilité et d'instabilité diffèrent suivant que leur forme est fixe ou changeante, c'est-à-dire qu'ils composent des systèmes invariables ou des systèmes variables. Ceux dont les parties gardent un ordre constant ne se laissent déplacer qu'en masse; leur condition d'équilibre est donc plus simple et mieux assurée. Ceux, au contraire, dont les parties sont mobiles séparément, ont une condition complexe et facile à troubler, parce que la moindre influence capable d'agir sur le moindre de leurs éléments compromet l'ordre de l'ensemble. Cette distinction semble reproduire celle que nous venons de critiquer des états solide et liquide; la répartition est, en effet, la même dans les deux cas; mais il est plus rationnel de consulter la permanence ou la mutabilité de la forme, caractère d'ordre dynamique, que la solidité ou la fluidité, caractère d'ordre physique. En outre, ce mode de classement se prête mieux à l'analyse des problèmes en ce que, dans chaque groupe, il permet de distinguer des degrés.

DYNAMIQUE ÉLÉMENTAIRE OU STATIQUE

SCIENCE DE L'ÉQUILIBRE



## 1. — ÉQUILIBRE STABLE

Les corps sont dits en équilibre stable quand ils ont été mis et sont maintenus en place sous l'influence exclusive ou prépondérante de la pesanteur. Comme cette force est la seule dont les effets soient uniformes et permanents, l'ordre qu'elle impose ne peut être changé que par occurrence et tend même alors à se rétablir spontanément, parce que la force qui le trouble est passagère, tandis que celle qui le détermine est constante. Les conditions de stabilité de l'équilibre sont à examiner dans les deux séries de corps que caractérise l'invariabilité ou la variabilité de la forme.

## A. — Équilibre stable des corps à forme invariable.

Lorsque les éléments des corps gardent entre eux un ordre fixe, leur ensemble constitue un agrégat persistant, un système dont l'unité ne souffre pas de dérangement partiel. La force produit en ce cas des effets collectifs qui rendent son action plus sensible et moins exposée à des perturbations accidentelles. C'est dans cette classe de corps que se rencontrent les conditions les plus favorables à la stabilité de l'équilibre.

L'invariabilité d'un système peut être totale ou partielle, c'est-à-dire appartenir à l'ensemble ou seulement à des fragments. En d'autres termes, on peut considérer les corps isolément ou en amas. Chaque solide, pris à part, forme une masse distincte qui a ses conditions particulières d'équilibre; mais un amas de solides groupés sans adhérence constitue un système imparfait dont les parties, invariables séparément, sont mobiles les unes par rapport aux autres, et conséquemment susceptibles de

prendre des arrangements variables. Étudions ces deux cas.

*a.* — La science de l'équilibre des solides isolés a été fondée par Archimède sur l'observation des effets du levier, dont la théorie offrait l'avantage de réduire les problèmes de Statique à des questions de poids. Toutefois, ce principe n'a pas une généralité suffisante et ne convient qu'à l'étude des forces dont les directions sont parallèles. Au xvi<sup>e</sup> siècle, Stévin avait proposé un système de poids mis sur des plans inclinés et adossés pour évaluer les forces dont les directions convergent. Depuis Galilée, les conditions d'équilibre se déterminent par les lois de la composition des forces.

La stabilité d'équilibre d'un corps à forme invariable résulte du concours de deux causes : l'action verticale de la pesanteur, qui le porterait à tomber, et la présence d'un obstacle fixe qui l'empêche de se mouvoir. On doit donc considérer d'abord la situation du centre de gravité de la masse, où agit l'action totale de la pesanteur, ensuite l'état de la base de sustentation. Un solide, pour être en équilibre stable sur un plan, exige : 1<sup>o</sup> que la verticale passant par son centre de gravité tombe dans l'espace circonscrit par sa base ; 2<sup>o</sup> que l'angle formé par le plan qui le supporte avec l'horizon soit inférieur à l'angle de glissement des surfaces en contact.

Il y aurait encore à distinguer deux sortes d'équilibre stable, suivant qu'il faut plus ou moins de force pour y mettre fin. Si l'on suppose le centre de gravité très rapproché de la base alors que cette base, largement étendue, a pour support un plan non glissant d'une horizontalité parfaite, l'équilibre ainsi établi aura le plus de chances de durée parce qu'il sera capable de résister aux oscillations les plus grandes. Dans le cas, au contraire, où le centre de gravité s'élève sur la base tandis que cette base se rétrécit et repose sur une surface glissante ou

inclinée sur l'horizon, la stabilité du système devient plus précaire et ne se maintient que par rapport à de petites oscillations. Il est sans doute malaisé de tracer une limite précise entre ces deux conditions qui se continuent directement l'une l'autre; on aurait pourtant une image de la première dans une feuille posée à plat sur une surface horizontale, et de la seconde dans un parallépipède dressé sur un de ses petits côtés. Un cube marquerait la séparation entre les deux : comme sa base a deux fois plus de largeur que son centre de gravité de hauteur, il est toujours en équilibre sur un plan horizontal et non glissant. Toute figure plus abaissée que le cube se rapprocherait du maximum d'équilibre et, plus élevée, du minimum.

Enfin, la stabilité des solides se trouve d'autant mieux assurée que leur masse est plus considérable et oppose plus de résistance aux actions perturbatrices. Les plus petits corps cèdent aux moindres influences. Le même vent, qui n'ébranle pas les pierres d'un certain volume, balaie les sables et soulève des tourbillons de poussière.

*b.* — Les solides amoncelés, n'ayant qu'une invariabilité partielle de forme, ont des conditions partielles d'équilibre, moins simples que celles des solides isolés, parce qu'au lieu d'une masse unique dont le déplacement n'est possible qu'en entier, ils constituent un assemblage de masses en partie indépendantes, en partie liées par des solidarités dynamiques.

Pour qu'un amas de solides soit en équilibre stable, il faut d'abord que chacun des corps qui le composent réalise des conditions normales de stabilité, ce qui implique une base non glissante et des corps résistants, car un amas de sphères sur une surface polie ne pourrait pas se maintenir et se répandrait en tous sens comme un liquide; il faut en outre que les lignes de pente abaissées du faite aux extrémités de la base à la surface libre de

l'amas forment avec l'horizontale un angle moindre de  $45^\circ$ . L'équilibre des amas est d'autant plus stable qu'ils ont moins de hauteur par rapport à leur base et que leur pente se rapproche davantage de l'horizontale. Leur stabilité décroît lorsqu'ils gagnent en hauteur en conservant la même base, parce que les lignes de pente se rapprochent alors de la limite de  $45^\circ$  au delà de laquelle l'instabilité commence.

La condition des solides en amas est intermédiaire entre celle des solides isolés et celle des liquides; néanmoins, elle se rattache plus directement à la première et, quoique les corps d'un très petit volume paraissent assez voisins des fluides pour qu'on les ait parfois assimilés, les poussières n'obéissent pas aux mêmes lois que les liquides. Une différence profonde les sépare : les solides, si exiguës que soient leurs dimensions, représentent toujours des agrégats fixes de molécules; ce sont encore des systèmes invariables; dans les liquides, au contraire, les molécules sont toutes désagrégées et mobiles. Il en résulte qu'un liquide prend de lui-même son niveau, tandis qu'un amas pulvérulent ne peut le faire et trouve sa stabilité sur des pentes. Il y a là, dans la série des faits d'équilibre, un hiatus infranchissable, un phénomène limite qui tient à la disparité des éléments dont se composent les masses.

Ainsi les corps à forme constante ont des conditions spéciales d'équilibre. Les solides élèvent plus ou moins leur centre de gravité au-dessus de leur base; mais ils diffèrent à cet égard suivant que la masse est compacte et simple ou divisée et en amas. Pour les solides isolés, l'élévation du centre de gravité peut atteindre une hauteur indéterminée en proportion de laquelle la stabilité va décroissant. Pour les solides amoncelés, la hauteur se trouve restreinte par l'inclinaison que les côtés libres ne doivent pas dépasser.

## B. — Équilibre stable des corps à forme variable.

Les corps dont les moindres éléments sont mobiles les uns sur les autres constituent des agrégats diffluents subordonnés à des conditions plus complexes d'équilibre. Alors que les solides, formant un système unique, ne peuvent être déplacés qu'en masse et sont maintenus par l'action collective de la pesanteur, les fluides, composés de molécules faiblement unies ou même tout à fait indépendantes, n'ont pas de forme arrêtée ni de centre commun de gravité et gardent difficilement un ordre fixe. L'équilibre de leurs parties est toujours instable, car la moindre cause d'action, suffisante pour déplacer une seule molécule, dérange de proche en proche toutes les autres. Il n'y a donc pour eux qu'une stabilité d'ensemble due à l'influence générale de la pesanteur, et qui se rétablit d'elle-même quand elle est accidentellement troublée, parce que toutes les molécules tendent par leurs réactions mutuelles à supprimer l'effet des perturbations subies. L'équilibre de la masse, à la merci des moindres forces intercurrentes, mais sans cesse ramené à sa condition normale, oscille autour d'un état moyen sans pouvoir s'y arrêter et s'y fixer.

On aurait à distinguer dans les corps à forme variable deux degrés de variabilité suivant qu'ils conservent le même volume en changeant de forme ou qu'ils changent à la fois de forme et de volume. Chez les uns, en effet, les molécules, liées par de faibles adhérences, tournent sans se disjoindre les unes autour des autres, ce qui les maintient dans un rapport fixe quant à leurs distances respectives, et, malgré la mutabilité de la forme, le volume reste constant : telle est la condition des liquides. Chez d'autres, les molécules, au lieu d'être retenues par une demi-cohésion, sont libres et même animées d'une force

répulsive qui provoque dans leur masse des effets de dilatation ou d'expansion : tels sont les gaz qui, élastiques et compressibles, ont le volume non moins variable que la forme. De là résultent, pour ces deux classes de corps, des conditions particulières d'équilibre.

*a.* — L'étude de la stabilité des liquides, moins simple que celle des solides, a été tardivement abordée. Comme ces corps sont composés de particules peu adhérentes et toujours disposées à glisser les unes sur les autres dès qu'une force étrangère ou leur propre pesanteur les sollicite, les phénomènes d'équilibre se compliquent en eux d'une cause spéciale de variation. Les liquides n'ont pas de forme déterminée et prennent celle de leurs récipients. L'action de la force, au lieu de se totaliser en un point centre de gravité), est diffuse et dispersée dans la masse entière. Il faut alors spéculer sur des systèmes dépourvus d'unité dynamique et soumis à l'influence d'une multitude de forces minimales malaisées à évaluer en détail. Par suite l'indétermination de plusieurs données laisse subsister dans la solution des problèmes des causes d'incertitude. La mécanique rationnelle suppose les liquides doués d'une liquidité parfaite, c'est-à-dire incompressibles et sans adhérence moléculaire ; elle fait également abstraction des frottements des molécules les unes contre les autres ou contre les parois des récipients ; elle considère comme nulles ou partout égales et constantes les pressions exercées sur les surfaces d'équilibre ; enfin, elle admet que, dans une masse liquide, tous les points situés à une égale distance du centre ont la même densité ce qui supprime les différences de température et de pression. Elle ne peut donc établir que des conditions sommaires et l'observation doit ensuite compléter sur ces divers points les indications du raisonnement.

On fait quelquefois honneur au génie d'Archimède d'avoir inauguré l'étude de l'Hydrostatique par la décou-

verte du principe qui porte son nom; mais ce principe concerne la théorie des corps flottants et formule un rapport de Statique comparée entre l'équilibre des solides et celui des liquides plutôt qu'il ne révèle les conditions propres à ces derniers. L'Hydrostatique est une science moderne, dont Pascal peut être regardé comme le fondateur, car il lui a donné pour base le principe de l'égalité des pressions (*Traité de l'équilibre des liqueurs*). Sa théorie est encore peu avancée, à cause des difficultés que nous venons d'indiquer. Les lois de l'équilibre des liquides pris en masses sont seules connues. Huyghens a montré qu'une de ses conditions est la perpendicularité de l'action de la pesanteur à la surface libre du liquide, qui représente en quelque sorte la base renversée des solides. Une seconde condition signalée par Newton fait dépendre la stabilité des fluides de l'égalité de poids entre les colonnes allant du centre à la circonférence. Enfin, Clairaut a donné une formule générale qui, développée par Maclaurin et Euler, fonde l'équilibre des liquides sur le principe de l'égalité de pression dans tous les sens. Soumise à une pareille loi, la stabilité de ces corps ne peut être qu'exceptionnelle et précaire. Leur équilibre absolu est purement idéal. Ils n'ont qu'un équilibre relatif et pour ainsi dire flottant autour d'un niveau moyen. L'instabilité est naturelle aux liquides, puisqu'il suffit du moindre dénivèlement de la surface, de la moindre pression exercée dans un sens quelconque, d'une différence minime de température, en un mot du déplacement d'une seule molécule, pour faire perdre à la masse entière l'équilibre de ses parties. Les eaux en sont un exemple. Leur condition statique est mobile et presque continuellement troublée par des agitations superficielles. Les couches profondes de l'océan où se rencontrent le maximum de densité et le minimum de variations, paraissent seules jouir d'une immobilité persistante.

Outre ces conditions générales, les liquides ont leurs

conditions spéciales qui tiennent à la mobilité plus ou moins grande de leurs éléments. Il conviendrait d'examiner, d'une part, les liquides pâteux ou visqueux, appelés parfois « fluides imparfaits », dont les molécules, liées par une cohésion appréciable et lentes à se mouvoir, opposent de la résistance aux actions perturbatrices et rendent possible un équilibre partiel ; de l'autre, les liquides doués d'une fluidité bien caractérisée et auxquels l'eau peut servir de type. Il est à noter cependant que les liquides provenant de gaz réduits à de très basses températures la dépassent beaucoup en mobilité moléculaire et ont par conséquent une stabilité moindre. Dans chacune des deux classes, l'Hydrostatique aurait donc à marquer une suite de degrés dont la détermination exigerait le concours de l'observation et de l'expérience. Mais ces questions délicates intéressent la Physique non moins que la Dynamique et sont encore mal élucidées.

b. — L'équilibre des gaz constitue le problème le plus ardu de la Statique parce qu'une nouvelle cause de perturbation vient ajouter à la complexité des faits. Les molécules des gaz, au lieu de garder les unes par rapport aux autres des positions fixes, comme celles des solides, ou de glisser les unes sur les autres, comme celles des liquides, sont animées d'une force de projection qui les fait se repousser élastiquement. Leur assemblage est par suite dilatable, quand nul obstacle ne l'arrête, et compressible, quand il est dominé par une force supérieure à sa puissance d'expansion. Alors que les solides ne changent ni de forme, ni de volume, et que les liquides sont toujours prêts à changer de forme, en conservant le même volume, les gaz changent avec une extrême facilité de volume et de forme. Les corps fluides transmettent également dans tous les sens les pressions qu'ils supportent ; mais, pour les liquides, le poids s'ajoute aux pressions dans une direction constante ; pour les gaz, au contraire, dont la densité

est relativement faible, les pressions sont peu modifiées par l'action de la pesanteur et s'exercent avec une puissance égale dans toutes les directions. L'inconsistance des fluides aériformes et leur aptitude à se répandre les rendent incapables, à moins de contrainte subie, de réaliser un état stable et de s'y tenir. Les liquides trouvent leur équilibre dans des récipients découverts ; les gaz, disposés à fuir en tous sens, ne peuvent être maintenus qu'à condition d'être enclos. L'équilibre d'une masse gazeuse impliquerait l'égalité générale et persistante de la force d'expansion qui anime ses molécules et de la force de compression qui les empêche de se mouvoir. Pour peu que l'une ou l'autre l'emporte en un seul point, il y a rupture locale d'équilibre et déplacement consécutif de toutes les parties.

La stabilité des gaz ne peut donc être obtenue que pour de petits volumes enfermés dans des milieux clos et mis aussi complètement que possible à l'abri des influences perturbatrices. Les gaz libres dont l'atmosphère se compose éprouvent, par l'effet de causes diverses, des variations continuelles de dilatation et de pression qui rendent impossible l'équilibre stable d'aucune partie de cet océan gazeux. Il n'y a pour lui qu'un équilibre d'ensemble, sans cesse troublé, mais sans cesse rétabli par les réactions internes de ses éléments.

D'après la loi de Mariotte qui domine toute la Statique des gaz, leur densité serait en raison directe de la pression subie, c'est-à-dire que, sous un poids double, leur volume se réduirait de moitié ; mais cette loi, réputée jadis d'une exactitude absolue, n'a pas la généralité que la théorie suppose et qui entraînerait comme conséquence la diffusion indéfinie des substances gazeuses dans l'espace. Elle ne conviendrait qu'à des gaz « parfaits », c'est-à-dire à un gaz idéal dont les particules ne s'influenceraient pas les unes les autres, ce qui n'a lieu qu'à un degré d'extrême raréfaction. On ne peut donc plus admettre la loi de Ma-

riotte qu'à titre de loi limite. Les expériences de Regnault et d'autres physiciens prouvent que, sous l'influence de la chaleur et de la pression, chaque gaz se comporte d'une manière à lui propre, et au lieu de maintenir entre le volume et la pression un rapport d'une précision mathématique, varie plus ou moins suivant qu'il se rapproche ou s'éloigne de l'état liquide. Les gaz sous pression doivent être considérés comme une sorte de poussière moléculaire visqueuse. Très raréfiés, ils tendent à constituer un état distinct, comparable à celui des liquides et grâce auquel ils sont susceptibles de prendre un niveau fixe sous l'influence de la pesanteur.

L'Aérostatique doit tenir compte des différences de densité qui séparent les couches superposées de l'atmosphère. On admet que, pour une colonne d'air dont la composition serait homogène et la température égale, les densités et les pressions décroissent en progression géométrique lorsque la hauteur croît en progression arithmétique. Mais les zones inférieures de l'air se chargent de vapeurs en diverses proportions. De plus, les variations de température modifient la loi de décroissance dans une mesure qui n'a rien de fixe, à cause de la multitude des influences dont l'action thermique dépend. Pouillet a constaté que l'air absorbe, dans le sens vertical, environ le quart ou le cinquième de la chaleur transmise à la Terre par le Soleil. Comme la rotation diurne et la translation annuelle ont pour effet de déplacer et de modifier à tout moment cette influence, il est impossible que les couches gardent un équilibre stable. L'ensemble de l'atmosphère conserve seul un équilibre moyen dû à l'action de sa propre pesanteur, sans que l'on connaisse encore l'épaisseur totale de la masse aérienne et les limites entre lesquelles il est donné à sa superficie d'osciller.

La Statique des gaz aurait à déterminer, dans le détail des phénomènes, l'influence qu'exerce l'inégale densité de ces corps sur leurs conditions d'équilibre. Les gaz

lourds, comme l'acide carbonique, prennent leur niveau sous pression et peuvent être contenus, à la façon des liquides, dans des récipients découverts. Un gaz très léger, comme l'hydrogène, se dérobe à toute pression autre que celle qui résulte de sa propre pesanteur et s'échappe par les moindres interstices.

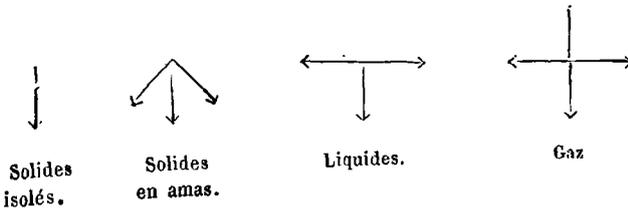
En raison de ces difficultés spéciales, l'Aréostatique est moins avancée que l'Hydrostatique, et, quoiqu'elle repose sur le principe d'égalité de pression qui leur est commun, elle soulève dans son application aux faits une foule de problèmes qui n'ont pas encore été résolus.

Les corps à forme variable ont donc des conditions d'équilibre aussi complexes et faciles à troubler que celles des corps à forme invariable sont simples et persistantes. Les liquides, en raison de leur mobilité moléculaire, cèdent aux moindres pressions; les gaz, plus mobiles encore, portent en eux un principe spontané de mouvement partout en lutte avec l'action de la pesanteur. La stabilité des fluides est pour eux un idéal dont ils se rapprochent plus ou moins, mais qu'il leur est difficile d'atteindre et impossible de maintenir.

Les faits d'équilibre stable, rangés dans l'ordre où nous venons de les exposer, forment une série où les effets de la force quiescente se compliquent par degrés. La stabilité des corps décroît à mesure qu'ils subissent des influences plus diverses et cèdent à l'action de moindres forces. La théorie va ainsi des solides compacts, qui ne se meuvent qu'en masse et ont l'équilibre le mieux garanti, aux solides amoncelés, susceptibles de dérangements partiels; puis aux liquides, caractérisés par la mobilité générale de leurs molécules et dont l'équilibre est en quelque sorte ondoyant; enfin aux gaz qui, animés d'une force interne d'expansion, ne connaissent qu'un équilibre

agité. La permanence de situation résulte, pour les solides isolés, du rapport entre la base de sustentation et le centre de gravité qui doit être sur une perpendiculaire à cette base; pour les solides en amas, de l'angle formé par la ligne de pente dont la moindre obliquité ne doit pas dépasser  $45^\circ$ , c'est-à-dire une inclinaison intermédiaire entre la verticale des solides et l'horizontale des liquides; pour ceux-ci, du nivellement de leur surface libre et de l'égalité de pression dans tous les sens; enfin, pour les gaz, d'une égalité parfaite entre les effets de dilatation et de compression. Les solides ne sont enclins à se mouvoir que dans une direction perpendiculaire passant par leur centre de gravité; il suffit donc qu'ils soient arrêtés en ce sens par un obstacle fixe pour qu'ils restent immobiles. Les solides amoncelés, outre leur propension à tomber verticalement, ont une tendance à rouler sur les pentes supérieures à la moitié d'un angle droit. Les liquides sont également sollicités à se mouvoir dans les deux sens perpendiculaire et oblique; mais, de plus, il glissent sur les pentes les plus faibles et la ligne horizontale marque seule leur niveau normal. Enfin, les gaz sont portés par leur puissance d'élasticité à se répandre dans toutes les directions, ce qui les empêche, à moins de contrainte exercée sur leur périphérie, de se maintenir dans une condition d'équilibre<sup>1</sup>. La stabilité des corps va donc s'atténuant de plus en plus dans ces diverses séries et, dans chacune d'elles, par une suite de degrés.

1. On pourrait figurer ainsi la loi d'équilibre des différentes sortes de corps :



## 2. — ÉQUILIBRE INSTABLE

Après l'équilibre stable qui procure aux corps une permanence indéfinie de situation, il convient d'étudier l'équilibre instable dont l'ordre, occasionnel et transitoire, est toujours prêt à prendre fin. Ces deux états sont séparés par une différence bien tranchée. Le premier, dû à l'action prépondérante de la pesanteur et fixe comme elle, tend à persister sans terme assignable et même, exposé à des perturbations accidentelles, se rétablit de lui-même dès que cesse la cause de dérangement. Le second, sans être en opposition avec les lois de la pesanteur, se rapproche de la limite où, son influence statique étant nulle, l'action de la force va s'exercer librement. Les corps sont alors comme en balance entre les deux conditions d'équilibre et de mouvement, prêts à garder l'une ou à suivre l'autre selon que l'événement en décidera. Mais cet état d'indifférence ne saurait durer et la moindre influence contraire y met un terme. L'équilibre instable est donc un équilibre imparfait qui ne trouve pas en lui-même de garanties de durée et, tôt ou tard, doit disparaître, parce que la pesanteur, au lieu de travailler à le maintenir, est sur le point de conspirer contre lui. Facile à troubler et perdu à la moindre atteinte, il tend à finir comme l'équilibre stable à persister. Il marque donc moins un équilibre véritable que l'imminence du changement. Dès qu'une cause étrangère fait osciller le centre de gravité, non seulement la masse ne revient pas à sa position antérieure, mais encore elle s'en écarte de plus en plus. Les corps n'entrent ainsi que par circonstance dans cet état d'équilibre et se bornent à le traverser. Le mouvement est le terme inévitable d'une situation essentiellement précaire.

Les conditions de l'équilibre instable diffèrent, comme celles de l'équilibre stable, en raison de la constance ou de la mutabilité du système, et sont à examiner dans deux classes de corps.

A. — Équilibre instable des corps à forme constante

La condition d'instabilité des solides varie suivant qu'on les considère isolément ou en amas.

*a.* — Un solide est en équilibre instable quand son centre de gravité se trouve relativement élevé par rapport à sa base de sustentation, ou lorsque cette base a des dimensions réduites, ou enfin qu'elle repose sur un plan dont l'inclinaison se rapproche de l'angle de glissement. Dans ces divers cas, l'action de la pesanteur se convertit en une tendance au mouvement et, une certaine limite atteinte, la moindre impulsion le détermine. En cet état, les masses sont encore en équilibre puisqu'elles restent en place; mais elles ne peuvent s'y maintenir qu'entre des bornes de plus en plus étroites et sont exposées à les franchir par l'effet de minimes influences. On aurait à distinguer deux degrés principaux d'instabilité :

Une instabilité relative, où le corps, immobilisé par son poids, résiste à de très petites oscillations, comme le fait un solide dont le centre de gravité s'élève sans atteindre le maximum de hauteur, et qui repose sur une base assurée, quoique restreinte, mais non réduite au minimum de largeur;

Et une instabilité absolue où le centre de gravité se trouve aussi élevé et la base aussi diminuée que possible. La stabilité est alors nulle et le corps, aussi disposé à se mouvoir qu'à rester en place, cède à l'action de forces infiniment petites.

Quelques exemples donneront idée de ces états d'équi-

libre : Une tige, couchée dans le sens de sa longueur, est stable, et dressée sur sa pointe, instable. Un cube, en équilibre sur un plan horizontal, est instable sur une pente de  $45^\circ$  ou sur une surface de niveau, mais glissante. Un ellipsoïde de révolution est en équilibre stable sur un plan lorsqu'il repose sur son petit axe, et en équilibre instable s'il repose sur le grand. Une sphère sur un plan est en état permanent d'instabilité.

b. — Pour les solides en amas, une nouvelle cause d'instabilité s'ajoute à la précédente, puisque la pesanteur les sollicite à se mouvoir, non seulement dans le sens vertical, mais en outre obliquement, sur des pentes supérieures à  $45^\circ$ . On pourrait aussi distinguer deux cas :

L'un où l'instabilité confine à la stabilité relative, la ligne de pente se rapprochant de l'inclinaison normale de  $45^\circ$ , sans la dépasser ;

L'autre où la ligne de pente, atteignant ou même dépassant cette limite, marque l'imminence de plus en plus grande du mouvement.

Les corps à forme constante sont ainsi les seuls qui puissent persister un temps dans la condition d'équilibre instable ; mais cet état, précaire et transitoire, est exposé à prendre fin dès qu'intervient à son encontre une cause de dérangement suffisante pour produire de faibles oscillations.

#### B. — Équilibre instable des corps à forme variable.

Les corps dont la forme varie diffèrent de ceux dont la forme est invariable, en ce que leur instabilité ne comporte pas de durée. Ils ne sortent de l'équilibre stable que pour passer aussitôt à l'état de mouvement, et de là

provient la mobilité qui caractérise les fluides. Nous devons examiner séparément ceux dont le volume est constant, quoique leur forme soit variable (liquides), et ceux dont le volume n'est pas moins variable que la forme (gaz).

*a.* — Les liquides, si difficiles à maintenir dans un équilibre fixe, sont presque toujours en état d'instabilité, car, pour y mettre leur masse entière, il suffit de la moindre action capable de déplacer une seule molécule. La plus petite inégalité de niveau, la moindre variation de température, la plus faible pression superficielle ou interne produisent ce résultat. Suivant que la surface du liquide s'éloigne ou se rapproche d'une horizontalité parfaite et que la pression subie est énergique ou faible, la cause qui contraint les molécules à se mouvoir agit avec plus ou moins de promptitude et de puissance. La perturbation se manifeste alors par des courants qui agitent le liquide à la recherche de nouvelles conditions d'équilibre. Les molécules directement atteintes par l'action de la force perturbatrice entrent les premières en mouvement. L'instabilité se communique aux molécules voisines, puis se transmet de proche en proche aux tranches successivement ébranlées. Il y aurait lieu de distinguer, selon la nature des liquides, deux degrés d'instabilité :

Les liquides pâteux ou visqueux, dont les molécules sont liées par des adhérences que la force doit surmonter se déplacent avec une lenteur appréciable, et, malgré une rupture partielle d'équilibre, la masse persiste un temps dans le même état.

Les liquides très mobiles propagent avec une extrême rapidité la cause de perturbation et passent presque sans retard à la condition de mouvement.

*b.* — Quant aux gaz qui, dilatables et compressibles, changent avec une égale facilité de volume et de forme, on peut

dire que la stabilité véritable leur est inconnue. Ils ne comportent qu'un équilibre continuellement instable et, toujours en effort pour se répandre, entrent d'eux-mêmes en mouvement dès que vient à faiblir par place la compression qui les maintenait. On sait combien il est malaisé de retenir l'air dans les appartements les mieux clos. Lorsqu'une inégalité se produit entre sa tension et celle de l'air extérieur, les deux masses, mises en instabilité d'équilibre l'une par rapport à l'autre, se pénètrent par les moindres interstices. Des variations analogues, sans cesse occasionnées par diverses influences dans la masse de l'océan aérien, ne permettent à aucune de ses parties de demeurer en repos. « Si l'on considère toutes les causes qui troublent l'équilibre de l'atmosphère, sa grande mobilité due à sa fluidité et à son ressort, l'influence du froid et de la chaleur sur son élasticité, l'immense quantité de vapeur dont elle se charge et se décharge alternativement, enfin les changements que la rotation de la terre produit dans la vitesse de ses molécules par cela seul qu'elles se déplacent dans le sens des méridiens ; on ne sera point étonné de la variété de ses mouvements qu'il sera très difficile d'assujeter à des lois certaines. » (Laplace, *Exposition du système du monde*, IV, XIII.)

On pourrait distinguer, parmi les gaz, deux conditions d'équilibre instable en rapport avec deux degrés principaux de fluidité :

Les gaz lourds, mieux asservis à l'action de la pesanteur et doués d'une moindre force expansive dans le sens vertical, se rapprochent des liquides et s'ébranlent comme eux avec une lenteur relative ;

Les gaz légers, doués de la mobilité la plus grande, sont disposés à se répandre dans toutes les directions dès qu'une issue leur est ouverte.

Ainsi, les corps à forme variable portent en eux un principe général d'instabilité ; mais, au rebours des solides, ils

ne sauraient persister dans cet état d'équilibre; ils le traversent plus ou moins vite et passent presque aussitôt à la condition de mouvement.

Les faits d'équilibre instable, considérés dans leur ensemble, constituent donc, comme ceux d'équilibre stable, une série où l'état de situation des corps devient d'autant plus précaire et rend un déplacement d'autant plus prochain que la variabilité des formes augmente, et que la variabilité des volumes s'y ajoute. Pour les solides, l'instabilité de l'équilibre peut se maintenir plus ou moins longtemps, et ses chances de durée sont plus grandes pour un solide compacte, de poids considérable, que pour un amas de menus fragments. La mise partielle en instabilité des fluides ébranle successivement leur masse entière. La moindre cause de perturbation provoque des courants au sein des liquides; les gaz, par suite de leur tension constante, sont d'eux-mêmes disposés à se mouvoir. Les premiers, sans cesse à la poursuite d'une stabilité normale, s'en rapprochent sans pouvoir l'atteindre; les seconds semblent la fuir et n'y sont assujettis que par contrainte.

#### CONCLUSION

Telles sont les causes qui déterminent pour les corps un ordre permanent ou passager de collocation. Des masses quelconques sont nécessairement en équilibre stable, ou en équilibre instable, ou en mouvement pour passer de l'un à l'autre. Suivant que leur forme est invariable ou variable, la stabilité ou l'instabilité devient leur condition naturelle, et, tandis que les solides, généralement fixes, sont pour nous le modèle de l'immobilité persistante, les fluides, types de continuelle versatilité, s'agitent sans fin à la recherche d'un équilibre toujours précaire. Quand on répar-

tit les corps selon le degré de variabilité de leur forme, on voit que les garanties de stabilité et les chances d'instabilité, inverses les unes des autres, vont en augmentant dans un sens, en diminuant dans l'autre. Ces deux séries d'effets statiques correspondent ainsi aux deux modes de variation, par accroissement et par décroissement, que nous avons distingués dans la théorie des nombres.

## II. — DYNAMIQUE SPÉCIALE OU CINÉTIQUE

SCIENCE DU MOUVEMENT

THÉORIE DU MOUVEMENT

L'étude de l'équilibre nous a conduit jusqu'à un degré d'instabilité où le mouvement devient imminent et va s'accomplir. Suivons dans ce nouvel ordre de faits les manifestations de la force et, après le cas élémentaire où les positions des corps sont fixes, abordons le cas plus complexe où ces positions varient. Nous aurons alors à scruter les effets de l'action dynamique dans une condition non plus virtuelle ou latente, mais actuelle et en plein développement de puissance. La cause qui détermine l'ordre de collocation des corps, inapparente quoique très réelle dans les phénomènes d'équilibre, devient visible dans ceux de mouvement, et c'est même par le pouvoir de les produire que, le plus souvent, on caractérise la force. On la définit d'ordinaire « une cause de mouvement » ; mais cela ne comprend qu'une moitié de ses modes d'action, et le nom de force devrait exprimer, d'une façon générale, « toute cause capable d'empêcher ou de produire le mouvement. » Nous venons de voir comment il est empêché dans les faits d'équilibre ; examinons maintenant de quelle manière il se produit dans les faits de déplacement.

Un corps est dit en mouvement quand il change de position par rapport à d'autres reconnus stables. L'ordre variable de collocation qui en résulte doit être constaté dans les conditions qui lui sont propres. On appelle communément « Dynamique » l'étude des changements de

situation ; toutefois, comme ce terme a le sens général de « force » (de *δύναμις*, puissance), il semble peu rationnel de l'attribuer à la science du mouvement, par opposition à celle de l'équilibre, puisqu'il conviendrait aux deux. C'est pourquoi nous avons préféré le donner pour titre à l'ensemble de la science des faits de collocation. Il pourrait néanmoins servir à désigner la science du mouvement, à condition de lui adjoindre l'épithète de « spéciale » qui éviterait toute confusion avec la « Dynamique élémentaire », science de l'équilibre. Si l'on souhaitait une dénomination particulière, analogue à celle de « Statique », on aurait le choix entre le terme de « Phoronomie » (de *φορά*, transport, et *νόμος*, loi), proposé par Hermann (« *De phoronomia* », 1716), et celui de « Cinématique » (*κίνηματικός*, de *κίνημα*, effort), créé par Ampère comme synonyme de mécanique rationnelle (*Essai sur la philosophie des sciences*, t. I, p 50). Le terme nouveau de « Cinétique » (de *κίνητος*, mobile) aurait l'avantage de ne rappeler aucune signification antérieure et éviterait toute confusion d'idées.

La science du mouvement, plus complexe que celle de l'équilibre, est relativement récente et ne remonte pas au delà de Galilée, alors que les éléments de la Statique datent d'Archimède. Au rebours des faits d'équilibre, uniformes et constants, les faits de mouvement sont variables et consécutifs. Les distances linéaires et angulaires, fixes dans un cas, changent continuellement dans l'autre. L'ordre de collocation des corps qui se meuvent admet des divergences de direction, des inégalités de parcours et de vitesse. Outre la donnée fondamentale de force qui suffit à la Statique et s'évalue en poids, il faut déterminer un élément de durée dont elle n'a pas à tenir compte, parce qu'il n'est pas une condition de ses phénomènes, tandis que sa fonction est essentielle dans la théorie du mouvement. Le temps exprime les variations de la force qui tour à tour s'accumule et se dépense. Il mesure, par la grandeur des effets

produits, la quantité de puissance acquise ou perdue. L'introduction de cette donnée dans les problèmes ajoute beaucoup à la difficulté des solutions.

Leibniz a défini le temps « l'ordre des choses qui se succèdent » (*Nouveaux essais sur l'entendement humain*, liv. II, ch. XIV); mais c'est là une pétition de principe, l'idée de succession impliquant celle de durée. Le concept de temps provient de la généralisation de tous les faits de continuité, comme celui d'espace de la généralisation de tous les faits de contiguïté. Le temps est l'expression abstraite de la persistance de l'être à travers une suite de changements. L'origine de cette idée primordiale doit être cherchée dans la concordance des impressions sur lesquelles se fonde le sentiment de l'identité du moi. Ainsi rattachée à la constatation initiale de l'existence, la notion de temps est universelle au même titre, et tout phénomène s'accomplit dans la durée, comme toute grandeur réelle se colloque dans l'espace.

L'idée de temps, vague et confuse tant qu'elle se réduit à coordonner les perceptions du sens intime, devient explicite et claire à mesure que la sensation externe révèle dans les choses un plus grand nombre de changements. Mais la Dynamique seule pouvait évaluer la durée avec précision. L'Ontologie, dans ses distinctions sommaires, se contente d'indiquer, à l'aide des trois temps des verbes (présent, passé, futur), si les mutations sont actuelles, antérieures ou postérieures, unique donnée que l'intuition saisisse avec évidence. Nos appréciations personnelles de la durée sont fort incertaines et dépendent de la nature des impressions qui nous servent à la mesurer. Le temps fuit d'une aile rapide durant nos joies, et se traîne, durant la tristesse, avec une insupportable lenteur. Il est, dit Voltaire, court quand on le voudrait long et long quand on le voudrait court. L'âge nous en fait juger différemment : le même intervalle, qui représente une éternité pour les enfants, devient de plus en plus fugace à mesure

qu'on vieillit, soit que, moins rempli de sensations vives, il paraisse vide à la réflexion, soit que, comparé à l'ensemble d'une existence déjà longue, il en exprime une fraction d'autant moindre qu'on a plus vécu. La science première était donc incapable de fournir une mesure exacte de la durée. La symbolique du langage serait même plutôt propre à égarer l'esprit par des assimilations trompeuses, parce que l'imagination réalise le temps, comme elle matérialise l'espace, et nous induit à le concevoir sous forme d'un torrent qui coule, emportant tout dans son irrésistible cours. Mais, selon la judicieuse remarque de Ronsard, ce n'est pas le temps qui passe, c'est nous qui passons<sup>1</sup>. Le temps n'est pas une force, un être ou un fait; il est la conception abstraite des uniformités de succession ou de l'ordre de continuité dans les changements des choses.

La Mathématique n'avait pas à spéculer sur l'idée de temps comme elle le fait sur celle d'espace. Quoique l'Arithmétique procure, par ses évaluations de quantité, le moyen de supputer les intervalles de durée, elle était impuissante à établir un étalon fixe, l'unité de temps qui doit se tirer de l'observation des faits. De son côté, la Géométrie, quand elle construit ses figures, suppose bien des déplacements successifs de points, de lignes ou de surfaces accomplis suivant certaines lois; mais ces conditions purement idéales de mouvement n'impliquent pas plus de durée effective que de force réelle. La notion de temps, plus simple en apparence que celle d'espace, puisque la durée coule d'un cours uniforme et toujours dans le même sens, alors que l'étendue se limite sous trois dimensions, était en réalité plus complexe et moins facile à étudier, parce que le raisonnement ne suffisait pas à sa détermination. Il fallait observer les faits dans ce que leur succession

1. Le temps s'en va, le temps s'en va, madame !  
Las! le temps, non, mais nous nous en allons.

a de plus régulier, et la solution de ce problème relevait exclusivement de la Cinétique. Elle exige en effet la connaissance du rapport entre des positions successives dans le temps et simultanées dans l'espace. Le temps, l'espace et le mouvement sont des conceptions corrélatives qui se déterminent l'une par l'autre. On mesure alternativement l'espace par le temps nécessaire pour le parcourir (comme dans les anciennes mesures itinéraires, « journées », « heures » de marche, ou plus scientifiquement dans les calculs de longitude); et le temps par l'espace parcouru (comme dans nos artifices de chronométrie qui tous se ra, mènent à convertir des intervalles de durée en longueurs linéaires). « Il n'y a mouvement, dit Ampère, que quand l'idée de temps pendant lequel a lieu le déplacement, étant jointe à celle du déplacement lui-même, il en résulte la notion de la vitesse plus ou moins grande avec laquelle il s'opère, considération tout à fait étrangère à la géométrie et qui fait le caractère propre de la mécanique. » (*Essai sur la philosophie des sciences*, t. I, p. 66.) Aristote, avec sa brièveté magistrale, avait défini le temps « la mesure » ou plutôt « le nombre du mouvement » (*ἡ ἐπιμέτρως κινήσεως Physique*, IV, xi). S'il est vrai que le temps soit l'expression générale de la continuité, rien ne pouvait en effet mieux servir à sa détermination qu'un phénomène forcément consécutif, comme est le passage d'un corps d'un lieu dans un autre, observé dans les conditions où il s'accomplit avec la régularité la plus grande. Mais, pour reconnaître des faits de ce genre, il fallait observer avec attention, effectuer des analyses précises, et la difficulté de cette étude ajoutait beaucoup à celle des problèmes de mouvement.

Le sujet de la Cinétique n'est pas moins général que celui de la Statique. De même qu'il n'y a pas de corps qui n'ait ses conditions d'équilibre, car, sans ordre fixe de ses parties on ne pourrait plus le percevoir ou le concevoir, il n'y a pas de corps qui ne se meuve par rapport à d'autres

et qui occupe constamment le même lieu de l'étendue. Tous cèdent, avec plus ou moins de lenteur ou de vitesse, à l'action des forces mouvantes. Au sein d'une masse cosmique comme la Terre, nous voyons se produire des déplacements de parties. Les mondes, pris en leur entier, tournent sur eux-mêmes et parcourent des orbites. Ces changements de situation sont surtout appréciables pour nous parmi les astres dont se compose notre système solaire; mais les étoiles, si longtemps réputées « fixes »<sup>1</sup>, opèrent dans les profondeurs de l'espace des révolutions dont l'éloignement nous dissimule la grandeur. Le branle est universel et rien n'échappe à la loi qui contraint les choses à se déplacer éternellement. Le vieil Héraclite proclamait déjà cette vérité dans un adage célèbre : « tout se meut, rien n'est fixe » (πάντα χωρεῖ καὶ οὐδὲν μένει).

On divise d'ordinaire la science du mouvement en deux parties consacrées, l'une, la Dynamique proprement dite, à l'étude du mouvement des solides; l'autre, l'Hydrodynamique, à celle du mouvement des fluides. Ce mode de répartition, où il est tenu compte de la nature des corps et non de la condition des faits, nous paraît plus inacceptable encore en Cinétique qu'en Statique, parce qu'il vise seulement les parties des masses cosmiques, alors que le déplacement total de ces masses s'effectue suivant des lois pareilles, que leur substance soit solide, liquide ou gazeuse. La classification naturelle des mouvements devrait considérer surtout leur caractère dynamique, c'est-à-dire le mode d'action de la force qui les produit. Or, quand on analyse l'idée de mouvement, on voit qu'elle se décompose en plusieurs sortes de notions relatives : 1° à l'intensité des forces, 2° aux directions suivies, 3° aux temps écoulés. Il faut tenir compte de ces trois données essentielles dans l'ordre de leur importance et de leur acquisition possible.

1. Ou plutôt « fixées » (*afīxa*), parce que les anciens les supposaient attachées à la voûte solide du ciel (*firmamentum* de *firmus*, solide), comme des clous brillants à une coupole recouvrant la terre.

La première s'évalue en poids et relève de la Statique. Les deux autres caractérisent d'une manière plus spéciale le mouvement et servent à différencier ses divers cas. La direction a quelque chose de plus simple et de plus important que la vitesse. Elle indique la place du centre d'action de la force, tandis que la vitesse se réfère à la puissance de l'action subie. En outre, la direction se détermine indépendamment de la vitesse et, pour la connaître, il suffit de comparer à des situations fixes le déplacement linéaire ou angulaire du corps qui se meut. En conséquence, nous distinguerons les genres de mouvements par la considération principale de la direction suivie et les espèces de mouvements par celle de la vitesse.

De même qu'en Géométrie toutes les figurations de l'étendue rentrent dans le système rectiligne ou dans le système curviligne, en Cinétique deux directions se partagent la série entière des mouvements. Les corps ou plutôt leurs centres de gravité suivent en effet, quand ils se déplacent, les mêmes lois que les points de la Géométrie, et leurs tendances sont nécessairement rectilignes ou curvilignes. Ou le corps se meut dans une direction invariable, soit à partir d'un centre d'action qui le chasse, soit vers un centre d'action qui l'attire, et son mouvement est alors appelé « direct », parce qu'il s'accomplit en ligne droite; ou bien il décrit une courbe en tournant, soit sur son centre, soit autour d'un centre distant dont l'influence l'enchaîne, et le mouvement est dit « circulaire », mais devrait plutôt s'appeler « curviligne », parce qu'il n'est circulaire que dans un cas et décrit dans tous les autres des courbes variées. La division des mouvements reproduit ainsi celle des constructions de l'étendue et fait passer la connaissance de l'ordre abstrait à l'ordre concret. Lorsque, aux trois dimensions de l'étendue on ajoute l'unique dimension du temps, on a ce que Lagrange a ingénieusement appelé « une géométrie à quatre dimensions » qui constitue la science du mouvement. Mais, au rebours de

la Géométrie pure, qui se déduit d'axiomes et ne sort pas de la spéculation logique, la géométrie du mouvement pose ses problèmes dans le monde des réalités effectives et doit combiner, pour les résoudre, l'observation avec la déduction. Néanmoins, la concordance est parfaite entre les deux sciences, parce que les mouvements, par cela seul qu'ils s'accomplissent dans l'étendue, doivent forcément suivre les lois de sa détermination.

#### 1. — MOUVEMENT RECTILIGNE OU DIRECT

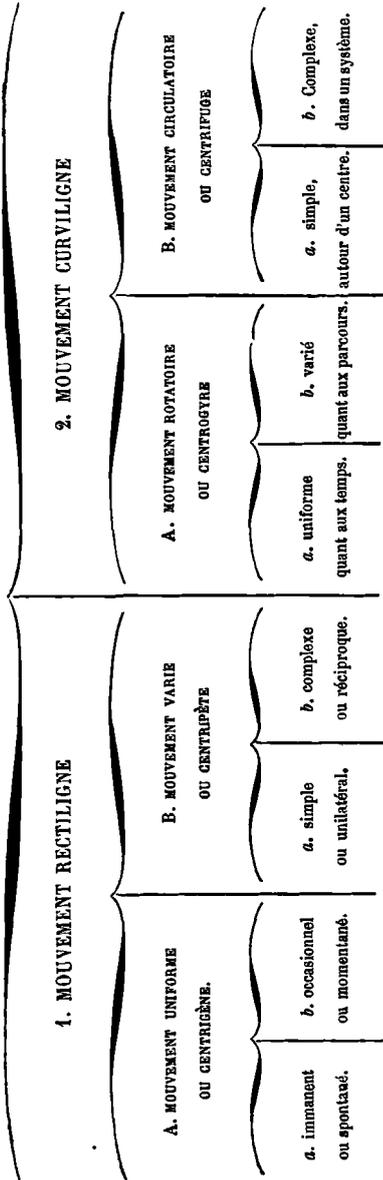
Le mouvement direct suit une direction constante et s'opère en ligne droite.

Les seules variations qu'il comporte résultent du sens dans lequel le mobile se déplace et de la continuité ou de l'alternance du déplacement. Le corps peut, en effet, soit aller, soit venir, le long d'une ligne droite, soit aller et venir alternativement, ce qui fait quelquefois classer les mouvements directs en « continus » et en « alternatifs ». Mais nous n'avons ici à nous occuper que des premiers. La nature ne réalise pas les seconds, du moins en ce qui concerne les masses. Elle n'en produit d'analogues que dans la dynamique des molécules et ils échappent à l'observation. Les mouvements alternatifs des corps d'un volume appréciable sont un effet de nos artifices et relèvent de la mécanique appliquée.

Les mouvements directs doivent être divisés par la considération de leur vitesse. Ils se répartissent alors en « uniformes », quand les corps parcourent des espaces égaux dans des temps égaux, et en « variés », lorsque, dans des temps égaux, ils parcourent des distances inégales. Cette distinction se fonde sur une différence des modes de l'action motrice. Pour le mouvement uniforme, la puissance a son centre d'application au point de départ du mobile, soit qu'elle préexiste en lui, soit que, à un

DYNAMIQUE SPÉCIALE OU CINÉTIQUE

SCIENCE DU MOUVEMENT



moment donné, il l'aît reçue d'une force brusque. L'effet dynamique résulte, en ce cas, d'une impulsion initiale unique et le corps, animé d'une quantité fixe de puissance, se déplace d'un mouvement uniforme, avec une vitesse constante. Pour le mouvement varié, au contraire, le centre d'action de la force est au point d'arrivée et marque le but. L'influence motrice s'exerce alors sans relâche et ses effets produisent en s'accumulant une accélération progressive de vitesse. La force agit donc de deux manières, par impulsion soudaine ou par attraction continue. Dans le premier cas, on élimine la donnée de centre attractif et l'on examine la condition de chaque mobile séparément. Ce mode de mouvement n'a pu se produire qu'avant l'existence des agglomérations cosmiques et peut seul en expliquer la genèse. C'est pourquoi nous l'appellerons « centrigène ». La production du second cas implique l'existence des masses déjà constituées et le mouvement varié, qui porte le no de « centripète », est la conséquence de leur action.

A. — Mouvement uniforme ou centrigène.

Le mouvement uniforme représente la condition la plus simple du déplacement des corps, puisque, pour le concevoir, on doit écarter toutes les causes de variation en direction ou en vitesse dues à l'influence de masses étrangères, et considérer uniquement le corps qui se meut. On remonte ainsi, dans l'analyse des effets de mouvement, jusqu'à un point au delà duquel on ne peut aller, car on n'a plus à examiner qu'un corps isolé, doué d'une force propre, ce qui est prendre l'action dynamique avant toute complication, au moment où elle commence à s'exercer. Ce mode de mouvement est le plus élémentaire que la pensée puisse saisir et sa loi constitue le principe sur lequel toute la Cinétique se fonde. Malgré ce que cette donnée paraît

avoir d'irréductible, deux cas seraient encore à distinguer suivant que la force dont le mobile est animé lui est inhérente ou lui a été communiquée.

*a.* — L'extrême simplicité du mouvement uniforme le déroberait à l'observation. Sa production exigerait des conditions qui ne se rencontrent pas dans la nature actuelle et où il n'est pas possible à l'expérience de se placer. Pour qu'un mouvement de ce genre pût s'accomplir sans perturbation d'aucune sorte, il faudrait supprimer toutes les causes d'action capables de modifier la direction ou la vitesse du mobile, telles que l'attraction des masses cosmiques et la résistance des milieux. Or, nous n'avons pas le moyen de nous soustraire à cette double influence et nous sommes obligés d'imaginer, par hypothèse, des conditions d'où elle serait exclue. Le seul cas où le mouvement uniforme trouverait à s'effectuer serait celui où les moindres particules de substance, trop petites ou trop éloignées pour pouvoir agir les unes sur les autres, se déplaceraient en l'absence de tout centre attractif. On devrait alors supposer chaque particule indépendante et animée d'une force immanente qui la contraindrait à se mouvoir en ligne droite, avec une vitesse toujours égale. Un corps qui porte en lui-même ses conditions de mouvement et qui n'est influencé par aucune puissance extérieure doit en effet persister sans fin dans le même état dynamique, car, toute action intercurrente se trouvant éliminée, on ne voit pas ce qui pourrait le modifier, puisqu'un changement quelconque serait un effet sans cause. Le mobile conservera donc la régularité de sa marche et ne pourra de lui-même ni dévier de sa direction, ni accélérer ou retarder son mouvement. En conséquence, il suivra une ligne droite et parcourra des espaces égaux dans des temps égaux. C'est en cela que consiste la loi dite « d'inertie », expression mal construite qui signifie, non que la matière est inerte, mais que tout corps mû par une force unique

et instantanée conserve invariablement sa direction et sa vitesse. La découverte de ce principe est communément attribuée à Kepler; cependant Lagrange (*Mécanique analytique*, part. II, ch. 1), en reporte l'honneur à Descartes<sup>1</sup> et le tient pour le vrai fondateur de la mécanique rationnelle.

Si simple que soit le mouvement uniforme considéré dans cette condition où il se borne à déplacer en ligne droite les éléments de la substance, l'analyse peut encore le décomposer en deux cas.

Le point de départ absolu de nos conceptions du mouvement serait à chercher dans l'hypothèse où la force qui le produit est inhérente aux particules ultimes de la matière, sortes de points dynamiques qui représentent à la fois pour la pensée le zéro de l'étendue et le zéro de la pesanteur, mais qu'il faut supposer doués d'une puissance indéfectible d'action. C'est dans une condition pareille que l'on se figure les atomes de l'éther, impondérables, sans influence attractive et mus suivant les lois de la projection rectiligne. On explique de la sorte l'élasticité générale du milieu intercosmique. Là serait, comme nous le verrons plus loin, le principe de la force mouvante dont les masses ne font que rendre sensibles les résultantes médiates.

Peut-être faudrait-il attribuer le même mode de mouvement aux éléments de la substance pondérable. Il se pourrait en effet que, amenés à un degré d'atténuation bien inférieur à celui de nos atomes chimiques et séparés par des distances qui ne permettraient pas à l'attraction de s'exercer, ils fussent propres à manifester un pouvoir de

1. Descartes admet que la matière, en vertu des lois mécaniques, doit persévérer dans son mouvement ou dans son repos jusqu'à ce que survienne une cause de changement (*Principes*, 2<sup>e</sup> partie, pri. 36 et 37). Elle doit, en outre, se mouvoir en ligne droite et, quand un corps en mouvement en rencontre un autre, il perd sa direction, mais non son mouvement (id.).

gravitation par leur assemblage sans obéir isolément à ses lois. Ils céderaient alors à une puissance de mouvement particulière à chacun d'eux et qui, amenant leur rencontre, donnerait à la pesanteur occasion de se produire par la formation de centres, noyaux des mondes futurs <sup>1</sup>.

La distinction de ces deux cas de mouvement uniforme pourra paraître subtile; cependant elle correspond à deux états de la matière et à deux modes d'action dynamique représentés par la condition de l'éther et par celle des éléments de la substance pondérable pris antérieurement à toute concentration.

b. — Après le mouvement immanent ou spontané propre aux particules élémentaires telles qu'on peut les concevoir dans leur état initial d'indépendance et de dispersion, examinons le mouvement occasionnel ou transmis qui se produit au sein des masses par l'effet de forces brusques. La science n'est plus réduite, pour en déterminer la loi, à des considérations d'ordre logique et l'observation vient ici en aide au raisonnement. Il ne nous est pas donné de constater le mouvement uniforme dans sa condition la plus simple, puisque le déplacement indéfini d'un corps en ligne droite impliquerait l'hypothèse d'un mobile unique se mouvant à travers un vide infini, tandis que l'état présent de la nature nous montre l'espace peuplé de masses cosmiques et tous les mouvements coordonnés. Cependant, à l'intérieur de ces masses, nous voyons se produire par circonstance entre leurs parties des effets qui rappellent ceux dont nous venons de parler et qui relèvent également de la théorie du mouvement uniforme. Ils sont dus à l'action des forces dites « instantanées » ; mais cette expression est défectueuse en ce sens qu'un corps présumé immobile ne peut pas être mis en mouve-

1. Épicure, complétant la théorie des atomes imaginée par Leucippe et Démocrite, leur attribuait un mouvement propre (« *clinamen* ») par lequel il rendait compte de leur assemblage en forme de corps.

ment dans un temps nul. Pour passer de zéro à une valeur de vitesse, sa masse exige un intervalle de durée pendant lequel la puissance s'accumule, ébranle le mobile et finit par l'entraîner. Les forces instantanées devraient s'appeler plutôt « momentanées. » Leur instantanéité signifie simplement que la cause cesse d'agir dès que le mobile est parti. L'action motrice, ainsi bornée à une impulsion unique, donne en une fois tout ce qu'elle peut fournir de puissance et le corps, qui reçoit d'elle une quantité fixe de mouvement, se déplace d'une manière uniforme. L'intensité des forces instantanées se détermine d'après les deux principes « de la proportionnalité des vitesses aux forces » et « de la réciprocité des vitesses aux masses » ; en d'autres termes, elle a pour mesure le produit de la masse par la vitesse (MV).

Dans le milieu intra-terrestre où nous sommes confinés, nous n'avons pas, il est vrai, d'exemple de mouvements qui soient à la fois directs, uniformes et continus. Tous les corps mus par des forces brusques perdent sous diverses influences la rectitude de leur direction, la régularité de leur marche et la continuité de leur déplacement. Ce résultat tient à deux sortes de causes que l'observation, aidée de l'expérience, a le pouvoir d'apprécier. La première consiste dans l'action attractive d'un centre qui, s'exerçant en même temps que celle de la force brusque, modifie la direction du mobile. On neutralise cette influence en forçant le corps à se mouvoir sur un plan horizontal, à une distance toujours égale du centre de gravité du système. La seconde est imputable à la résistance des milieux qui, mettant le mobile en conflit avec des obstacles, l'oblige à dépenser sa puissance pour les surmonter et entraîne son arrêt quand il l'a toute épuisée. On y remédie en faisant mouvoir des corps sphériques sur une surface aussi unie et dans un milieu aussi raréfié que possible. Sans doute, ce ne sont encore là que des conditions approximatives et le mouvement ainsi obtenu n'est

ni direct, puisqu'il se développe sur une courbe, ni uniforme, puisqu'il se ralentit peu à peu, ni enfin constant, puisqu'il a toujours un terme. Néanmoins, comme il se rapproche d'autant plus de la loi posée qu'on réussit à mieux éliminer les influences perturbatrices, on doit admettre que, si leur suppression était complète, le mouvement serait absolument conforme à la règle indiquée.

La théorie du mouvement uniforme est donc surtout idéale, malgré les secours que lui prête l'observation. Cela provient de l'extrême simplicité du point de vue où l'esprit se place pour la concevoir et qui l'astreint à écarter, par voie d'hypothèse, la complexité des faits, alors qu'en réalité la nature ne permet pas de le faire. Il ne faut pas d'ailleurs s'étonner que la Cinétique, lorsqu'elle se sépare de la Géométrie dont elle est l'aboutissant, présente d'abord quelque chose d'abstrait. Elle perd bien vite ce caractère pour devenir de plus en plus concrète à mesure que les phénomènes se compliquent. Tandis que le mouvement uniforme, donnée d'ordre logique, se laisse induire, mais non constater, le mouvement varié, que nous allons maintenant étudier, est un fait observable et bien défini.

#### B. — Mouvement varié ou centripète.

Les mouvements produits par l'action des masses cosmiques sont plus complexes que les mouvements accomplis par leurs éléments pris dans leur isolement originel ou soumis à l'action de forces brusques. La force ne réside plus en ce cas dans le mobile animé d'une quantité fixe de puissance; elle agit de loin par un centre dont le mobile subit l'influence attractive. Son action est alors continue et la fait qualifier d'« accélératrice », parce que ses effets, s'ajoutant les uns aux autres, acquièrent une

intensité croissante à mesure que le mobile se rapproche de son moteur. Les forces de ce genre, dont la puissance augmente par degrés, sont seules capables de vaincre des résistances et d'effectuer un « travail », leur énergie, sans cesse accrue, pouvant se dépenser en partie sans s'épuiser. Les corps qui cèdent à l'influence d'une masse se dirigent en ligne droite vers son centre de gravité où, par un effet de résultante, toute l'action de la force se trouve localisée en un point. Newton a donné aux mouvements de cette classe le nom de « centripètes » qui figure pour la première fois dans le livre des « *Principes* ».

Le mouvement varié comporte des modifications, non quant à sa direction qui est constante, mais quant à sa vitesse qui s'accélère ou se ralentit suivant que le corps se rapproche ou s'éloigne du centre qui l'attire. La mesure de ces variations était difficile à obtenir. On ne pouvait plus, en effet, spéculer sur des distances ou sur des intervalles de temps d'une valeur donnée et constante, car le calcul de grandeurs variables à l'aide d'un étalon fixe serait nécessairement fautif. Il fallait tenir compte des moindres changements accomplis dans les moindres intervalles, c'est-à-dire apprécier des mouvements infiniment petits dans des moments infiniment courts, problème dont la solution exigeait l'emploi du calcul infinitésimal. Newton a eu la double gloire de créer l'instrument mathématique et de découvrir la loi dynamique.

Les données au moyen desquelles on détermine le mouvement varié sont : l'intensité de la force constante ( $g$ ), le temps ( $t$ ), et l'espace parcouru ( $e$ ), en corrélation si étroite que chacun de ces éléments se déduit des deux autres, suivant la formule  $e = gt$ , qui exprime leur rapport.

On distingue parfois deux sortes de mouvements variés suivant qu'ils sont uniformément accélérés ou uniformément retardés ; mais la même loi s'applique aux uns et aux autres par une simple inversion de formule. Le mouvement varié serait plutôt à examiner dans deux conditions

spéciales, l'une relativement simple où il se produit sous l'influence d'un centre moteur unique; l'autre relativement complexe où il a pour cause l'action de deux centres qui s'attirent réciproquement.

*a.* — La loi du mouvement varié est la plus facile à reconnaître quand on considère l'action directe exercée par une masse cosmique sur une de ses parties, comme nous en avons des exemples si fréquents à la surface de la Terre. Examinons la condition d'un corps qui, sous la seule influence de la pesanteur, passe de l'état d'équilibre à celui de mouvement. Lorsque, et c'est le cas le plus ordinaire, le corps a peu de volume (ce sera, si l'on veut, un fruit qui tombe, une pierre qui se détache, une goutte de pluie, etc.), il est en quelque sorte seul attiré, son action sur le globe pouvant être tenue pour nulle et négligée, tant elle est insignifiante, en raison de l'énorme disproportion des deux masses. Le mobile, cédant à la gravité qui l'entraîne, se porte vers le centre du globe, suivant la normale, avec une vitesse croissante. La direction perpendiculaire de la chute des corps était manifeste et a été connue de tout temps; mais l'accélération du mouvement était moins apparente et ne pouvait être déterminée que par expérience. Aristote en avait déjà l'idée; toutefois, il s'est singulièrement trompé dans la mesure qu'il lui assignait, car il suppose que la vitesse augmente en proportion des intervalles franchis, hypothèse dont la conséquence serait absurde, puisqu'elle ferait varier l'intensité de la pesanteur en raison des parcours effectués. Il faut distinguer, dans le mouvement varié, ce qui concerne la vitesse, et ce qui a rapport aux espaces parcourus :

Les vitesses sont proportionnelles aux temps écoulés;

Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps.

Ces deux lois capitales ont été découvertes par Galilée,

et lui ont mérité le titre de fondateur de la science du mouvement. Quoique établies par l'observation, elles sont encore abstraites en ce sens que pour déterminer, même dans ses conditions les moins complexes, la loi de la chute des corps, il faut éliminer l'action retardatrice des milieux. Ces formules ne s'appliquent avec rigueur qu'à un parcours dans le vide.

*b.* — Après le cas où une masse cosmique agit seule et directement sur un corps qu'elle attire sans être sensiblement attirée par lui, considérons le cas moins simple où deux astres, sollicités par une action réciproque, se meuvent l'un vers l'autre avec d'autant plus de puissance que chacun d'eux est à la fois moteur et mobile, attirant et attiré. La nature, il est vrai, ne nous offre pas d'exemple d'un déplacement par l'effet duquel deux mondes se précipiteraient en ligne droite l'un sur l'autre, de manière à rendre inévitable et prochain un effroyable conflit. Des mouvements analogues se produisent bien parmi les astres, mais ils sont dissimulés par des résultantes qui les dénaturent. Il faut alors les séparer, au moyen de j'analyse, du mouvement tangentiel dont la simultanéité entraîne de continuelles déviations. Nous devons nous borner ici à indiquer la composante centripète de ces mouvements complexes, dont nous étudierons plus loin la nature.

Ainsi les mouvements directs nous révèlent, uniformes, les modes d'action de la force soit immanente, soit brusquement transmise qui anime les éléments des masses cosmiques; et, variés, les modes de l'action qu'une masse, prise dans son ensemble, exerce sur chacune de ses parties ou sur des masses distantes. Les effets de ce genre, semblables par l'uniformité des directions suivies, mais susceptibles de varier en vitesse, expliquent les déplacements par suite desquels les matériaux des mondes s'assem-

blent pour les former, ou que provoquent ces systèmes dynamiques, soit au dedans d'eux-mêmes, soit au dehors. Les mouvements directs, centrigènes ou centripètes, font concevoir la genèse des corps célestes, les changements de situation de leurs parties, le lien qui les rattache les unes aux autres et l'interdépendance des astres malgré les intervalles qui les séparent. Des centres puissants d'action motrice étant ainsi constitués, suivons dans un nouvel ordre de faits les conséquences de ces données.

## 2. — MOUVEMENT CURVILIGNE

A l'étude de mouvements rectilignes, dont la direction est constante, doit succéder celle des mouvements curvilignes, dont la direction change continuellement. Cette seconde classe d'effets dynamiques dépasse de beaucoup la première en étendue et en complexité. Dans les conditions où nous pouvons l'observer, le mouvement direct est propre aux parties des masses cosmiques et par conséquent borné en puissance comme en durée. Le mobile, en cours de déplacement dans un milieu matériel, ne tarde pas à dévier et à s'arrêter, soit que, mû par une force soudaine, il rencontre des obstacles et dépense son énergie à les surmonter, soit que, tombant vers un centre qui l'attire, il l'atteigne ou trouve en chemin des conditions d'équilibre. Dans les deux cas, il a un terme assignable. Le mouvement curviligne, au contraire, est surtout observable dans les corps célestes et coordonne les résultantes collectives de la force. Au lieu de partir d'un centre ou de tendre vers un centre, il s'exécute sur un centre ou autour d'un centre, décrit des courbes variées et s'y développe sans fin. Il représente donc le mouvement véritable, indéfectible et perpétuel. Par lui s'opèrent les déplacements des astres et le branle de la mécanique céleste. Comme les masses cosmiques se meuvent dans un milieu extrême-

ment raréfié que remplit seule une substance impondérable, la résistance qu'elles éprouvent est à peu près nulle et la force dont elles sont animées conserve indéfiniment sa puissance. L'analyse des mouvements curvilignes soulève les problèmes les plus ardu. Mais ici, la nature accomplit les faits sous nos yeux, et le rôle de l'observation devient prépondérant. Tandis que la théorie du mouvement direct se fonde sur des conceptions abstraites, la théorie du mouvement circulaire repose sur des phénomènes constatés et l'astronomie nous offre une magnifique illustration de ses lois.

L'étude de ces mouvements complexes a suivi de loin celle des mouvements directs. Alors que des notions empiriques sur l'action rectiligne des forces mouvantes remontent aux origines de la civilisation et furent utilisées de très bonne heure dans une multitude de pratiques relatives à la confection ou à l'emploi des armes et des outils, l'art d'appliquer le mouvement suivant des courbes est de date relativement récente. L'invention de la roue, ignorée de toutes les populations sauvages, et particulière aux races policées de l'ancien monde, paraît être un legs de la phase pastorale. Son usage a inauguré une ère de progrès mécaniques dont les conséquences, étendues de siècle en siècle, achèvent de transformer de nos jours le matériel de la production industrielle. Toutefois, ce furent les recherches des astronomes qui servirent le mieux à établir la science du mouvement curviligne : « C'est dans l'espace céleste, dit Laplace, que les lois de la mécanique s'observent avec le plus de précision : tant de circonstances en compliquent les résultats sur la terre, qu'il est difficile de les démêler, et plus difficile encore de les assujettir au calcul. Mais les corps du système solaire..., soumis à l'action d'une force principale dont il est facile de calculer les effets, ne sont troublés dans leurs mouvements respectifs que par des forces assez petites pour que l'on ait pu embrasser, dans des formules générales,

tous les changements que la suite des temps a produits et doit amener dans ce système. » (*Exposition du système du monde*, liv. IV.)

On répartit les mouvements curvilignes en faits de rotation des masses sur elles-mêmes et en faits de circulation de masses autour d'autres masses. Nous donnerons aux premiers le nom de « centrogyses » ; les seconds portent celui de « centrifuges ».

#### A. — Mouvement rotatoire ou centogyre.

On appelle rotation le mouvement qu'accomplit un corps quand il tourne sur lui-même autour d'une ligne droite ou « axe » passant par son centre de gravité, ce qui lui donne un équateur et deux pôles. Ce mouvement constitue, pour chaque masse, un phénomène spécial dont la cause et les effets, également circonscrits, se déterminent à part, car la puissance motrice est propre au corps qui tourne sur lui-même, soit qu'il en ait trouvé le principe dans la coordination de ses éléments, soit qu'elle lui ait été communiquée du dehors par une impulsion excentrique. En outre, la rotation s'exécutant sur place, exclut les questions d'orbite, difficulté principale de l'étude de la circulation. Enfin, comme le mouvement rotatoire, exactement circulaire, s'effectue suivant la seule courbe qui soit régulière en toutes ses parties, la force agit dans des conditions d'uniformité constantes. Cette étude, en raison de sa simplicité relative doit être, la première abordée.

La rotation est un phénomène universel. On l'observe dans tous les corps qui se déplacent librement à la surface de la terre et dans ceux des astres qui ont un diamètre appréciable. On est fondé à l'induire dans les autres, et les variations des étoiles périodiques ainsi que les formes des nébuleuses confirment cette hypothèse. Enfin, la théo-

rie démontre qu'il doit exister dans tout corps en mouvement. La notion de la généralité des faits de rotation n'est pourtant pas ancienne. Elle a été longtemps contestée en ce qui concerne la Terre. Bacon, rénovateur des sciences, traite encore d'«absurde» l'opinion que le globe tourne sur lui-même et se dit convaincu que la théorie de son mouvement diurne est «absolument fausse»<sup>1</sup>. Les juges de Galilée n'avaient pas une certitude moindre. Voilà de ces convictions qui font trembler.

Deux sortes d'effets relatifs les uns au temps, les autres aux espaces parcourus résultent de la rotation. Pendant que l'ensemble de la masse tourne suivant une loi simple dans des conditions égales de durée, ses parties parcourent dans le même temps des distances inégales.

a. — Quand un corps tourne sur lui-même, chacun de ses éléments décrit autour de l'axe de rotation des angles égaux dans des temps égaux. Son mouvement est donc comparable au mouvement uniforme dans l'ordre des effets directs, puisque la vitesse est constante dans les deux cas. D'autres analogies seraient à noter entre le plus simple des mouvements rectilignes et le plus simple des mouvements curvilignes. Le premier peut s'exécuter dans toutes les directions et le second sur tous les diamètres. Comme, en outre, dans chaque direction donnée, un mobile peut aller ou venir, la masse peut, sur chaque axe, tourner de gauche à droite (*dextrorsum*), ou de droite à gauche (*sinistrorsum*) ; mais l'impulsion une fois reçue dans un sens, le corps n'en change pas de lui-même. Le mouvement rotatoire se détermine par deux sortes de données relatives l'une à la direction de l'axe et au sens de la rotation, l'autre à sa vitesse.

1. « C'est l'absurdité de ces suppositions qui a fait tomber les astronomes dans celle du mouvement diurne de la terre, hypothèse que nous croyons absolument fausse ». (*Instauratio magna*, lib. III, cap. 4.) Pascal lui-même admet que le Soleil tourne autour de la Terre (*Pensées*, art. I, i).

Dans un système homogène, l'axe de rotation garde un parallélisme constant; mais si le corps a une figure quelconque ou des hétérogénéités de nature au point de vue de la pesanteur, son axe de rotation est sujet à varier. Il existe cependant des « axes principaux », dont la détermination est due à Euler, et autour desquels le mouvement, une fois commencé, tend à persister. Pour un ellipsoïde, les trois axes principaux de rotation sont les trois diamètres conjugués rectangulaires. Mais le moindre diamètre a la stabilité la plus grande, et tous les astres dont les dimensions sont connues tournent sur lui.

La vitesse avec laquelle la rotation s'accomplit est uniforme, tant que les dimensions de l'astre et l'équilibre de ses matériaux ne changent pas. L'astronomie établit que, depuis Hipparque, la durée du jour terrestre n'a pas varié d'un centième de seconde, c'est-à-dire de  $1/8,640,000^{\circ}$  de sa valeur totale (Arago, *Astronomie populaire* liv. XXIII, ch. xxiii). Néanmoins, dans certaines conditions, la vitesse angulaire du corps qui tourne peut varier en plus ou en moins, et, au lieu d'un mouvement uniforme, on a un mouvement rotatoire accéléré ou retardé. Si, par exemple, le corps en rotation se meut dans un milieu résistant, sa vitesse se ralentit à mesure que sa force s'épuise à surmonter l'obstacle; un astre qui se condense et accumule en lui plus de puissance sous un moindre volume, précipite au contraire sa rotation.

*b.* — La rotation, uniforme quant à la durée pour l'ensemble de la masse, entraîne des inégalités quant aux espaces parcourus par ses éléments, et les effets varient en raison de leur distance à l'axe.

Les corps situés sur la ligne axiale opèrent une simple évolution sur place et leur mouvement ne modifie pas d'une manière appréciable l'action de la pesanteur. Mais tous les autres parcourent des circonférences dont la grandeur se développe en proportion de la longueur du rayon, c'est-

à-dire à mesure que les corps s'éloignent de l'axe. Ils effectuent conséquemment une circulation véritable dans des conditions variées de vitesse, parce que, tous les cercles de rotation étant parcourus dans le même temps, le mouvement s'accélère lorsque leur grandeur augmente. Par suite, une tendance impulsive se produit en sens contraire de l'action centripète, s'accroît par degrés et atteint son maximum à l'équateur. Cette influence neutralise en partie celle de la pesanteur, la porte dans une autre direction et peut devenir centrifuge lorsque, par l'effet d'une accélération du mouvement rotatoire, les corps qui se meuvent le plus rapidement se détachent et fuient emportés par la force tangentielle. De là résulte une dernière classe de mouvements dits de circulation ou de translation.

#### B. — Mouvement circulaire ou centrifuge.

Le mouvement de circulation, plus complexe que le précédent, varie à la fois en direction et en vitesse. Au lieu d'avoir une cause interne et de régir isolément chaque masse, il a une cause externe et régit des masses coordonnées en système. Au rebours de la rotation, toujours circulaire, la circulation ne l'est jamais. Elle décrit les courbes les plus diverses et la mécanique céleste réalise la plupart de celles que les géomètres ont figurées. Ce mode de mouvement ne consiste plus en une évolution sur place qui change seulement l'orientation des parties d'un corps ; il fait subir à ce corps entier une révolution dans l'espace. La vitesse de translation des astres est même, en général, supérieure à celle que la rotation communique à leurs zones extrêmes. Pour la Terre, par exemple, le mouvement rotatoire n'atteint guère, sous l'équateur, qu'une vitesse d'environ un demi-kilomètre (plus exactement 464 mètres) par seconde, vitesse à peu près égale à celle d'un boulet de canon, tandis que le globe, lancé sur son orbite, y parcourt en moyenne

30 kilomètres par seconde. On estime à 71 kilomètres pour le Soleil et à 84 pour Arcturus le déplacement de ces astres dans le même temps. C'est, ajoute Arago, parmi les corps regardés jadis comme des types de fixité que l'on constate les plus grandes vitesses dont on ait jusqu'ici trouvé la matière animée. (*Astron. popul.*, t. II, p. 20.) Enfin la circulation ne s'accomplit pas avec une vitesse uniforme, mais admet des inégalités aux stades successifs de son parcours. En raison des influences qu'exercent et que subissent des masses qui tantôt se rapprochent et tantôt s'éloignent les unes des autres, des combinaisons dynamiques se produisent et les orbites ainsi que les vitesses varient.

Si l'on tient compte de la complexité croissante des faits on est conduit à répartir en deux groupes le vaste ensemble des mouvements de circulation. Examinons d'abord ceux qu'exécutent dans un système des astres assujettis autour d'un astre central, puis ceux qui régissent les systèmes d'astres dans leurs rapports respectifs.

*a.* — Le mode de circulation le plus simple, le plus régulier dans ses effets, est représenté par la révolution qu'un astre subordonné accomplit autour d'un astre prépondérant dont l'influence l'enchaîne. Notre système solaire en offre de nombreux exemples. Deux cas principaux sont à considérer, suivant que l'astre vassal circule directement autour de l'astre dominateur, comme font les planètes à l'égard du Soleil, ou que, suzerain lui-même, il retient sous sa loi un astre de moindre importance, appelé satellite.

On ne connaît bien la vraie nature des mouvements planétaires que depuis la découverte des grandes lois de Kepler. Les anciens supposaient les orbites des astres exactement circulaires par cette raison captieuse que, la circonférence étant la plus parfaite des courbes, toute autre aurait compromis l'ordre des mondes ou du moins violé la loi de convenances idéales. Or, il se trouve justement que cette hypothèse si bien raisonnée est la seule dont la

réalisation soit impossible. L'exacte circularité de l'orbite des planètes exigerait en effet que la direction de leur mouvement fût constamment perpendiculaire à la ligne qui joint leur centre à celui du Soleil et que les distances se maintinssent toujours strictement au point où l'attraction subie serait égale à la force centrifuge. La moindre déviation, l'attraction d'un autre centre, suffissent à rendre irréalisables ces conditions absolues et une circularité rigoureuse ne peut exister.

Kepler a montré: 1° que les aires décrites par les rayons vecteurs des planètes sont proportionnelles aux temps écoulés, c'est-à-dire que la vitesse angulaire d'une planète est, à chaque point de son orbite, en raison inverse du carré de la distance au Soleil; 2° que les planètes décrivent autour du Soleil des orbites elliptiques dont cet astre occupe un des foyers<sup>1</sup>; 3° que les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des orbites. Chacune de ces lois révèle une propriété de la force qui régit les mondes. De la loi des aires proportionnelles aux temps, il résulte que toutes les planètes tendent vers le Soleil et sont retenues par son influence. La figure elliptique des orbites planétaires prouve que l'intensité de la force change avec la distance au Soleil, inversement à son carré. Enfin, la loi des carrés des temps des révolutions proportionnels aux cubes des distances moyennes nous apprend que cette force est, pour une même distance, proportionnelle à la masse de chaque planète. (Laplace, *Exposition du système du monde*, liv. IV, ch. I.) Les trois lois de Kepler expliquent ainsi la vitesse de translation des planètes, la forme de leurs orbites et la

1. Si, au lieu d'occuper un des foyers des orbites planétaires, le Soleil en occupait le centre, son action serait, comme l'a fait voir Newton, non plus inversement proportionnelle au carré de la distance, mais en raison directe de cette distance, c'est-à-dire qu'elle augmenterait à mesure que l'astre s'éloignerait. On aurait donc une loi de gravitation toute différente et cela prouve une fois encore que la science a besoin d'être guidée par l'observation des faits pour ne pas s'égarer dans de vaines hypothèses.

durée de leurs révolutions. Les conséquences de ces lois qui sont extrêmement étendues et leur connaissance permet de résoudre par des applications de géométrie la plupart des problèmes de l'astronomie planétaire.

Les mouvements plus complexes des satellites dépendent directement de l'attraction de leur planète et indirectement de celle du Soleil. On sait combien la théorie des mouvements de la Lune est difficile à établir, cet astre étant troublé par le Soleil dans sa révolution autour de la Terre et par la Terre dans sa révolution autour du Soleil. La hiérarchie cosmique ne s'étend pas plus loin, au moins dans notre système, et les satellites n'ont pas à leur tour de satellites. Laplace en a indiqué la cause probable en supposant que, pour les astres subplanétaires, les deux mouvements de rotation et de circulation étaient à l'origine égaux ou peu différents. L'attraction exercée par les planètes sur leurs satellites, avec une puissance accrue en raison de la proximité<sup>1</sup>, put alors déformer ces petits mondes. Par suite, la Lune, au lieu d'être, comme la Terre, un sphéroïde aplati sous les pôles et renflé à l'équateur, a pris la forme d'un ellipsoïde allongé dans la direction de la planète. Cette configuration, qui maintient l'accord des deux mouvements rotatoire et circulatoire, ne permet plus à l'astre que de faibles oscillations pendulaires (libration). Un effet analogue a dû se produire dans les autres satellites du système et leur rotation, partout égale à leur révolution, n'a pas pu devenir assez rapide pour déterminer la formation d'astres dérivés (Laplace, *id.*, liv. V, ch. vi).

Les planètes et les satellites parcourent des ellipses encore très voisines d'une circonférence. Leurs orbites diffèrent quant à la longueur des axes et à l'excentricité des foyers; mais elles se rapprochent par l'inclinaison de leurs

1. Nos marées en sont la preuve, puisqu'elles dépendent de l'influence de la Lune plus que de celle du Soleil malgré la disparité des masses.

plans et composent deux groupes distincts quant au sens de la circulation. A l'extrémité du système solaire, les quatre satellites d'Uranus et la satellité de Neptune ont, par exception, un mouvement rétrograde, d'où l'on peut induire que la rotation des deux planètes l'est aussi. Les comètes, moins étroitement asservies à l'influence du Soleil, décrivent en tous sens autour de lui des ellipses dont beaucoup sont extrêmement allongées. Newton avait proposé d'assimiler leurs orbites à des paraboles, et, dans le voisinage du Soleil, là où ces fantômes d'astres peuvent le mieux être observés, l'assimilation serait en effet possible; mais les comètes, en tant qu'elles font partie du système solaire, ont toujours des orbites elliptiques. Celles dont l'orbite serait parabolique ou hyperbolique ne pourraient que le traverser et iraient se perdre dans les profondeurs de l'espace.

On connaît maintenant assez bien, grâce au peu d'éloignement des masses et à l'amplitude de leurs déplacements apparents, les mouvements du peuple de mondes que domine la royauté du Soleil. Cette étude a, depuis des siècles, constitué l'objet à peu près exclusif de ce qu'on a prématurément appelé la mécanique céleste. Ce n'est pourtant là qu'une partie, et la moindre, du problème de circulation. De nos jours, l'astronomie stellaire, transportant sur un plus grand théâtre, malgré des difficultés croissantes, les recherches ébauchées par l'astronomie planétaire, s'applique à reconnaître les mouvements des systèmes sidéraux,

b. — Les étoiles, disséminées en nombre presque infini dans l'espace, mais également soumises aux lois de la gravitation, exécutent des mouvements circulatoires qui, rendus presque imperceptibles par de prodigieuses distances, avaient échappé jusqu'ici à l'attention des observateurs. Leur complexité ouvre à la Cinétique transcendante un champ d'exploration sans limites. L'étude de ces

translations aurait à distinguer les révolutions des étoiles dans un système et celles des systèmes d'étoiles.

Au point de vue dynamique, la théorie du Soleil a subi des variations singulières dans le cours des siècles. L'apparence fit croire d'abord qu'il tournait chaque jour autour de la terre immobile. Lorsque ensuite l'hypothèse héliocentrique prévalut sur l'illusion géocentrique, on admit la rotation de la Terre et le Soleil fut regardé comme un astre fixe. C'est une simple étoile perdue dans la multitude de celles qui brillent au ciel, et qui se déplace, mais autrement qu'on ne l'avait présumé dans le principe. Entraînant avec lui son nombreux cortège, il se dirige actuellement vers la constellation d'Hercule. Le centre inconnu autour duquel il gravite devrait donc être cherché dans une direction rectangulaire à celle de son mouvement et pourrait se trouver soit dans Persée (Argelander), soit dans les Pleïades (Mœdler). La courbe de l'orbite solaire est encore indéterminée. Quand, au lieu d'une étoile isolée comme notre Soleil, on examine le cas de deux étoiles conjuguées dont il y a une foule d'exemples<sup>1</sup>, les révolutions de ces astres, d'importance peu inégale, qui tournent l'un autour de l'autre ou plutôt autour d'un foyer commun, centre de gravité du système, supposent des orbites continuellement modifiées dont la complication dépasse de beaucoup celle des orbites planétaires. La progression se continue dans les étoiles triples, comme Castor des Gémeaux et  $\alpha$  de la Croix du Sud, où, tandis que deux étoiles principales forment un système binaire, une troisième, plus petite, tourne à distance autour de leur centre de gravité. « de la Lyre, étoile quadruple, présente le cas de deux couples qui tournent l'une autour de l'autre pendant que leurs constituants valsent ensemble. Il existe même une étoile septuple,  $\theta$  d'Orion, où doivent se produire des enche-

1. D'après un travail de M. Flammarion, sur 11,000 étoiles doubles, 819 présentent des indices certains d'un mouvement relatif des composantes (*Comptes-rendus de l'Acad. des sc.*, 1878).

vêtements d'orbites encore plus complexes. Il est malaisé de dire à quelles sortes de mouvements circulatoires donnent lieu de pareils systèmes dont chaque astre composant est peut-être accompagné d'une cohorte de planètes, de satellites, de comètes et d'astéroïdes....

Enfin, la pensée s'avoue impuissante à figurer l'effroyable complexité des mouvements qui s'accomplissent dans les amas d'étoiles (on en connaît où plus de 20 000 astres tourbillonnent ensemble) et surtout dans les nébuleuses. Là, se réalisent des conditions soit d'équilibre, soit de mouvement, dont les lois sont entièrement ignorées. Un savant anglais, Richard Proctor, s'est ingénié à pressentir quelques-unes des combinaisons susceptibles de se produire dans les essaims d'étoiles; mais, en de telles matières, notre science est courte et nos conjectures font à peine quelques pas dans une carrière sans terme. « L'imagination, dit Pascal, se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir » (*Pensées*). A cette extrémité des choses surgissent des problèmes qui mettent la raison vaincue en présence de l'infini même.

Les mouvements de circulation établissent ainsi entre les masses cosmiques un lien de série. Tandis que les plus simples coordonnent les astres en systèmes planétaires, les plus complexes coordonnent les systèmes sidéraux et en font un tout qui s'appelle l'Univers. Là, tous les modes possibles de translation circulaire se produisent au sein d'un ordre dont la régularité n'a d'égale que la grandeur.

Malgré leur différence caractéristique, les deux sortes de mouvements curvilignes composent un groupe dont les termes se suivent logiquement. La rotation impose à chaque masse un mouvement d'ensemble et développe dans ses parties des tendances centrifuges. Puis la circulation,

qui dérive de la rotation, détermine entre les astres des connexions d'effets et des hiérarchies d'influences. Ces deux actions, s'exerçant sur la totalité des corps célestes, assurent à leurs déplacements une puissance et une pérennité que les actions rectilignes n'auraient pas pu procurer.

#### CONCLUSION

Embrassons par la pensée l'ensemble des phénomènes de mouvement : la force qui déplace les corps suit nécessairement une direction rectiligne ou curviligne et détermine soit, dans le premier cas, un mouvement uniforme ou un mouvement varié, soit, dans le second, un mouvement rotatoire ou un mouvement circulatoire. Il ne nous est pas donné de concevoir d'autres conditions de motilité. Les lois qui régissent ces séries de faits dynamiques correspondent, d'une part à celles de l'étendue figurée, de l'autre aux états de groupement de la matière. Le mouvement uniforme est particulier aux moindres éléments disséminés dans l'espace; le mouvement varié a été la conséquence de la réunion en agrégats stables de la substance pondérable et de la genèse des centres cosmiques; la rotation résulte de l'action totale qu'une masse exerce sur elle-même; enfin, la circulation fait graviter de concert la multitude des astres. Ainsi, depuis l'atome qui se meut en ligne droite au sein de l'éther jusqu'aux systèmes de mondes qui circulent dans l'immensité, tout cède à l'empire de la force mouvante et obéit à ses lois.

## II

### DYNAMIQUE SYNTHÉTIQUE

SCIENCE DES RAPPORTS DE SITUATION

Ce que l'ordre de collocation des corps a de fixe et ce qu'il a de changeant est analysé par les deux sciences de l'équilibre et du mouvement. Les phénomènes dynamiques ainsi explorés en détail, nous devons étudier leurs relations, les expliquer les uns par les autres et formuler leurs lois.

Toutes les manifestations de la force sont des résultantes d'actions. Si une seule particule de substance pondérable existait dans l'univers, elle ne serait pas pesante; aucune cause ne la solliciterait à se mouvoir si on la suppose immobile, ou à s'arrêter si on la suppose en mouvement. Son état serait justement celui qu'on appelle d'inertie. On ne pourrait non plus rien dire de sa situation; elle n'en aurait pas. Faute de points de repère, il serait impossible de savoir si elle reste en place ou si elle se meut et, en ce cas, dans quel sens, avec quelle vitesse. Il ne suffirait même pas de deux corps pour leur assigner avec précision une position respective, car, à défaut d'un second rapport, leur distance, seule donnée appréciable paraîtrait finie, infiniment grande ou infiniment petite suivant l'étalon adopté pour la mesurer. Mais, trois corps au moins étant donnés, un problème de collocation se pose et sa solution exige une étude des corrélations dynamiques.

Les faits d'équilibre et ceux de mouvement résultent bien aussi de rapports qu'expriment les conditions :

de leur production; toutefois, ces relations, inséparables des faits eux-mêmes, sont particulières, directes, simples et intrinsèques. Celles que nous allons maintenant examiner sont, au contraire collectives, médiates, complexes et extrinsèques. Elles unissent soit par séries, soit dans l'ensemble, les conditions dynamiques des corps. On doit alors rapprocher les modes d'action de la force, mettre leur interdépendance en lumière et systématiser leur ordre.

L'étude de ces rapports constitue la « Dynamique synthétique ». Nous la subdiviserons en deux sections dont l'une, la « Dynamique comparée », aura pour tâche de scruter les connexions spéciales des faits dans des groupes limités où elles se laissent le plus aisément reconnaître; et l'autre, la « Dynamique générale », sera chargée d'examiner les lois de la totalité des faits et de ramener à l'unité de cause l'ordre entier des collocations.

### III. — DYNAMIQUE COMPARÉE

#### SCIENCE DES RÉSULTANTES SPÉCIALES D'EFFETS

#### THÉORIE DES RÉSULTANTES SPÉCIALES

Des corrélations restreintes et d'une simplicité relative se produisent dans les systèmes de corps au double point de vue de l'équilibre et du mouvement. L'étude de ces rapports n'a pas été jusqu'ici constituée en science distincte. L'esprit de recherche ne pouvait pourtant pas éviter de s'engager dans cette voie et de la suivre, car l'analyse des faits conduisait forcément à noter une multitude d'influences sous l'empire desquelles ils se déterminent ou se modifient; mais les notions de ce genre sont restées confondues avec les constatations de phénomènes, ce qui trouble à la fois l'ordre de complexité des faits et l'ordre de dérivation des rapports. Ainsi mêlées, les analyses et les synthèses laissent également à désirer. En outre, quand on veut ensuite coordonner l'ensemble, on ne trouve pas de degrés pour s'élever au sommet de la spéculation et il faut passer, comme en franchissant un abîme, de l'extrême particularité des faits à l'extrême généralité des lois.

Il serait facile de supprimer cette cause de confusion en instituant une partie de la Dynamique consacrée à l'étude des résultantes d'effets. Sa fonction consisterait à montrer comment se relie les manifestations de la force que, dans les sections précédentes, nous avons exposées séparément. L'examen doit porter, d'abord sur les corrélations statiques, fixes et relativement simples; puis les corré-

DYNAMIQUE COMPARÉE

SCIENCE DES RÉSULTANTES SPÉCIALES D'EFFETS

<p><i>a.</i> Résultantes spéciales de la stabilité des solides.</p>	<p><i>b.</i> Résultantes spéciales de la stabilité des fluides.</p>	<p><i>a.</i> Résultantes spéciales de l'instabilité des solides.</p>	<p><i>b.</i> Résultantes spéciales de l'instabilité des fluides.</p>	<p><i>a.</i> Résultantes spéciales des mouvements uniformes.</p>	<p><i>b.</i> Résultantes spéciales des mouvements variés.</p>	<p><i>a.</i> Résultantes spéciales des mouvements rotatoires.</p>	<p><i>b.</i> Résultantes spéciales des mouvements circulatoires.</p>
<p>A. RÉSULTANTES DE L'ÉQUILIBRE STABLE</p>		<p>B. RÉSULTANTES DE L'ÉQUILIBRE INSTABLE</p>		<p>A. RÉSULTANTES DES MOUVEMENTS DIRECTS</p>		<p>B. RÉSULTANTES DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES</p>	
<p>1. RÉSULTANTES DE L'ÉQUILIBRE</p>				<p>2. RÉSULTANTES DU MOUVEMENT</p>			

RÉSULTANTES COMMUNES DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT

lations cinétiques, plus étendues et plus variées; enfin sur l'accord de ces deux classes de faits.

### 1. — RÉSULTANTES DE L'ÉQUILIBRE

Les corps en équilibre dans un système sont unis par rapports de contiguïté qui les rendent solidaires et se prolongent en séries sans pouvoir, en aucun cas, dépasser les limites d'un monde. Des résultantes collectives se produisent ainsi dans les deux états stable et instable de l'équilibre.

#### A. — Résultantes spéciales de l'équilibre stable.

Comme les conditions de stabilité diffèrent suivant que les formes des corps sont constantes ou variables, il convient d'examiner à part les deux cas.

*α.* — L'équilibre des corps à forme invariable implique entre eux un rapport de superposition et la stabilité des supérieurs est subordonnée à celle des inférieurs qui les supportent.

Un solide isolé a besoin d'une base ferme pour se maintenir en équilibre. Cette base elle-même doit reposer sur un ferme fondement et la série se continuer de la sorte jusqu'à un corps qui, situé au centre de la masse, sert de support universel. Ainsi, les divers solides, tour à tour supportants et supportés, s'étaient les uns les autres dans le sens vertical. Ceux que nous voyons immobiles à la surface du globe ont pour condition d'équilibre une suite d'assises sous-jacentes qui se soutiennent dans un ordre stable et se prolongent jusqu'au centre de gravité du système. Il faut donc que la perpendiculaire abaissée du

centre de gravité des solides superficiels au centre du globe traverse sans interruption des couches également en équilibre.

La même condition s'impose aux solides en amas; mais ils ne dépendent pas seulement les uns des autres dans le sens vertical; ils sont ainsi portés à se mouvoir sur des pentes, et leur équilibre, au lieu d'admettre, comme celui des solides isolés, des faces libres sous toutes les inclinaisons possibles, exige que la ligne abaissée du faite à l'extrémité de la base ne forme pas avec l'horizon un angle de plus de 45.

Enfin, une corrélation statique unit les solides compacts et les solides amoncelés. Les premiers servent aux seconds de support ou d'appui latéral et les seconds offrent aux premiers une base sûre dans des conditions déterminées d'encaissement. En dépit de l'adage, les architectes savent qu'il n'est pas impossible d'établir sur le sable de solides fondements.

*b.* — Les corps à forme variable, par suite de leur mobilité moléculaire, ne peuvent avoir qu'un équilibre commun à l'ensemble du système. La stabilité de la masse est une résultante générale d'actions qui se compensent. Les rapports qui l'établissent diffèrent suivant que les corps sont liquides ou gazeux.

La condition d'équilibre des liquides veut que chacune de leurs molécules soit maintenue en place par une égalité constante de pression dans tous les sens, état idéal aussi difficile à réaliser que facile à troubler. En vertu de cette loi et sous l'empire de la pesanteur une masse fluide tend à niveler sa surface et à balancer ses pressions. Quand divers liquides, inégalement denses, se trouvent superposés, leurs couches doivent être distribuées dans un ordre de densité décroissante et séparées par des lignes de niveau.

La condition d'équilibre des gaz est l'égalité, pour cha-

cune de leurs parties, des deux forces antagonistes d'expansion et de compression. Elle résulte, pour la masse de l'atmosphère, du rapport entre la pesanteur de l'air, agissant comme force compressive, et son élasticité, agissant comme force expansive. La stabilité de l'océan aérien tient à ce que la puissance de répulsion des molécules est maintenue, à un certain degré de température et de raréfaction, par l'action coercitive de la pesanteur qui opère à la façon d'un récipient sur un gaz enclos. On peut en effet regarder l'atmosphère comme enfermée entre la superficie liquide ou solide du globe, qui fait obstacle à ses tendances centripètes, et la limite périphérique où la gravité, l'emportant sur la puissance de diffusion d'un gaz très-raréfié, s'oppose à son expansion dans l'espace. Il est nécessaire d'admettre qu'à la hauteur, encore indéterminée, où notre atmosphère prend fin (les appréciations varient à cet égard de 60 kilomètres à 340, V. Liais, *L'espace céleste*, p. 347, 8), l'air, sous l'influence combinée du refroidissement et de la diminution de pression, perd toute élasticité. La pesanteur suffit alors à retenir ses molécules frappées d'inertie. Des physiciens (Biot, Poisson, etc.,) ont présumé qu'au point où l'air confine à l'éther il s'en sépare par une surface unie comparable à celle de l'océan. Poisson supposait même que cette surface devait se composer d'air liquéfié ou solidifié, dans un état analogue à celui des nuages chargés de gouttelettes de vapeur ou de particules neigeuses, une couche pareille semblant nécessaire pour empêcher l'expansion indéfinie d'un corps gazeux. Les expériences faites récemment sur la condition des gaz réduits à une très faible densité confirment cette conjecture et montrent qu'ils se rapprochent alors de la nature des liquides.

Les liquides et les gaz, également mobiles et toujours prêts à céder aux moindres pressions, sont liés par des solidarités statiques. Les premiers, en raison de leur densité supérieure, servent de support aux seconds et l'é-

quilibre des liquides dépend en partie de celui des gaz qui pèsent sur eux.

Enfin, des rapports unissent, au point de vue d'une stabilité commune, les corps à forme constante et les corps à forme variable. Les solides, mieux à l'abri des perturbations accidentelles, communiquent aux fluides quelque chose de leur fixité. Les liquides qui, par eux-mêmes, trouveraient difficilement des conditions d'équilibre, en rencontrent par circonstance quand ils sont contenus dans des solides, comme on le voit par l'exemple des bassins où les eaux sont retenues et mieux encore par celui de nos récipients usuels. Des corrélations spéciales déterminent, en ce cas, la pression des liquides sur les parois qui les supportent. Stévin a montré que la pression d'un liquide sur une paroi horizontale est égale au poids d'une colonne liquide ayant cette paroi pour base et pour hauteur la surface de niveau. On ramène à la même loi les parois inclinées par leur décomposition en éléments horizontaux. La somme des pressions exercées sur un récipient et prises avec le signe qui leur convient est égale au poids du liquide contenu. La transmission des pressions dans les masses liquides s'effectue suivant une loi que Pascal a découverte et dont il a fait une application ingénieuse par l'invention de la presse hydraulique.

La condition d'équilibre des solides immergés exige que leur densité soit égale à la densité du liquide et celle des corps flottants qu'elle soit inférieure. D'après la loi d'Archimède, un solide plongé dans un liquide ou surnageant à sa surface perd une partie de son poids égale au poids du volume de liquide qu'il déplace. La mesure de l'équilibre des corps flottants consiste à les couper en deux segments dont les centres de gravité doivent se trouver sur la même perpendiculaire au plan sécant représenté par la surface du liquide. Toutefois, la stabilité de cet équilibre est difficile à déterminer quand il faut tenir compte non plus

seulement d'oscillations verticales, mais encore d'oscillations rotatoires (roulis et tangage).

En ce qui concerne l'ensemble des faits d'équilibre dans les deux classes de corps, Lagrange a rattaché la stabilité des liquides à celle des solides par le « principe des vitesses virtuelles » dû à Jean Bernouilli et qui les fait dépendre l'une et l'autre d'une même loi suffisamment générale. Aussi, dans son traité, l'Hydrostatique n'est-elle qu'une section de la Statique visant un cas particulier d'équilibre.

B. — Résultantes spéciales de l'équilibre instable.

Des relations analogues unissent les faits d'instabilité qui se produisent soit parmi les solides, soit parmi les fluides.

*a.* — Un solide mis en instabilité d'équilibre rend instables tous les corps qu'il supporte dans le sens vertical. Ainsi un édifice dont la base est minée n'a plus qu'une stabilité précaire, et s'écroule lorsque son fondement cède.

Dans un amas de solides, chaque corps communique sa condition d'instabilité, non seulement à ceux qu'il supporte dans le sens perpendiculaire, mais en outre à ceux qu'il étaye dans le sens de l'inclinaison normale de 45°. Lorsqu'on renverse un sablier, les particules les plus basses entraînent par leur chute les autres de proche en proche le long des lignes obliques de pente et l'amas s'écoule successivement.

Enfin, les solides compacts et les solides amoncelés se mettent réciproquement en état d'instabilité quand ils ont des conditions de stabilité communes.

*b.* — Comme dans une masse liquide, toutes les mo-

lécules sont solidaires, il suffit qu'une seule perde la stabilité de son équilibre pour rendre instables toutes les autres, et, par suite de son déplacement, des mouvements se propagent dans l'ensemble. Une inégalité minime de pression superficielle ou interne, un souffle qui ride la surface, une fluctuation de vagues, une alternance de marées, une influence thermique, le moindre accident, déterminent dans le sein des eaux de vastes circulations. La masse entière n'a donc qu'un équilibre moyen, sans cesse troublé, mais qui tend sans cesse à se rétablir.

Les gaz, en raison de leur élasticité, ont une propulsion plus marquée encore à rompre leur équilibre dans tous les sens, dès qu'ils trouvent une issue. Pour peu que, dans une masse gazeuse, la pression augmente ou diminue en un seul point, l'instabilité devient générale et un mouvement se produit. Si l'atmosphère n'obéissait qu'aux lois de la pesanteur, ses couches, de densité régulièrement décroissante, garderaient un équilibre constant (sauf l'action de marées luni-solaires); mais cet équilibre est continuellement rompu par le fait des influences cosmiques auxquelles, en raison de sa situation périphérique, l'océan aérien est directement exposé. La chaleur du soleil, en lutte avec la pesanteur, varie pour chaque heure du jour et détermine des inégalités de tension, des courants ascendants ou descendants, des modifications d'état hygrométrique, etc., d'où résulte une instabilité continue. L'agitation générale de l'air, indice d'une condition toujours précaire, contraste avec les mouvements lents où à peine appréciables des eaux et surtout avec la permanence communément assurée des corps solides. Il n'y a pour l'atmosphère qu'un équilibre total maintenu par une infinité de compensations partielles. L'air remédie par son élasticité aux perturbations qui, sans relâche, se produisent dans son sein et les neutralise grâce à des réactions internes. La pression atmosphérique, représentée par le poids de 5,500 000 000 000 000 000 kilogrammes.

fonctionne comme un ressort que tendraient et détendraient tour à tour des forces diverses. Par suite, l'océan gazeux, partout instable ou en mouvement, oscille suivant le cours des heures et des saisons entre des limites variables, tout en conservant dans sa masse une stabilité qu'atteste la hauteur moyenne du baromètre.

Les liquides et les gaz, liés par un rapport statique, s'influencent réciproquement par leurs surfaces en contact et toute cause d'instabilité qui agit sur les uns se répercute sur les autres. Les mers constituent pour l'atmosphère une base mobile et concourent à troubler son équilibre soit par le balancement des marées, soit par la formation de vapeurs. D'autre part, les changements que subit la pression de l'atmosphère et que signalent les variations barométriques, influent sur le niveau de l'océan, qui s'abaisse par places où elle augmente et s'élève où elle diminue. Ces dénivellements locaux sont surtout sensibles dans les « seiches » des grands lacs.

Une relation moins directe unit, au point de vue d'une instabilité commune, les corps à forme constante et les corps à forme variable. Les solides instables rendent précaire l'équilibre des fluides auxquels ils servent de support ou de récipient, et ils sont eux-mêmes d'autant moins stables qu'ils sont supportés par des fluides ou simplement exposés à leur contact.

Enfin, les deux états, stable et instable, d'équilibre ne sont opposés qu'en apparence. La nature les concilie par des lois d'alternance et de connexion. Ils se trouvent même réunis dans la condition des fluides, à la fois stables dans leur ensemble et instables dans chacun de leurs éléments. L'accord de ces deux séries d'effets met dans les parties constituantes d'un monde l'ordre que nous y voyons. Les corps ne sortent d'un état que pour entrer

dans l'autre. Une masse en équilibre stable doit traverser l'équilibre instable pour aboutir au mouvement et son instabilité n'est que la tendance à revenir par le mouvement à l'équilibre. Les formules de la Statique permettent de passer de l'une à l'autre condition par la simple modification d'une donnée qui tantôt assure, tantôt compromet l'équilibre. D'après la démonstration de Lagrange, l'équilibre est stable ou instable, suivant que la somme des forces vives dans le système se rapproche d'un *minimum* ou d'un *maximum*, la force vive étant égale au produit du poids par le double de la hauteur verticale du centre de gravité. Il suffit donc de déplacer dans un solide le centre de gravité le long de la verticale pour rendre son équilibre d'autant plus stable qu'il se trouve placé plus bas, et d'autant plus instable qu'il est élevé plus haut. Tous les cas d'équilibre rentrent ainsi dans la même loi et dépendent d'une seule cause dont l'application varie insensiblement.

## 2. — RÉSULTANTES DU MOUVEMENT

Les relations des faits de mouvement dépassent beaucoup en étendue et en complexité celles des faits d'équilibre, parce que, au lieu d'être circonscrites et fixes, elles admettent des concours d'actions qui se modifient dans l'espace et dans la durée. Leur condition changeante détermine de longs enchainements d'influences. Examinons comment les deux sortes de mouvements, rectilignes et curvilignes, se coordonnent d'abord séparément, puis dans l'ensemble.

### A. — Résultantes spéciales des mouvements directs.

Les résultantes des mouvements directs sont à étudier

au double point de vue de leur uniformité et de leur variabilité.

*a.* — Le mouvement uniforme, point de départ de l'action motrice, est le seul dont la production ne soit la conséquence d'aucun rapport; toutefois, s'il n'en implique pas dans sa cause, il en comporte dans ses effets qui peuvent consister en chocs ou en coexistences de mouvements.

Un corps mu par une force propre se déplace suivant une direction invariable, avec une vitesse uniforme, tant qu'il trouve l'espace libre devant lui. Mais considérons le cas où une rencontre a lieu entre deux corps, soit qu'une masse en mouvement heurte une masse immobile, soit que le conflit se produise entre deux masses en mouvement. Une loi, dite « du choc », règle leur corrélation dynamique et la distribution nouvelle de la force. Lorsqu'un corps est choqué par un autre, il s'opère entre eux une communication de puissance, et le moteur perd une quantité de mouvement égale à celle que le mobile reçoit de lui. Cette loi, dont les déductions sont extrêmement étendues, a été formulée par Newton et figure en tête des « *Principes* ». Ses effets dépassent même l'ordre des phénomènes dynamiques, en ce sens que, dans les cas de choc, il y a toujours une perte plus ou moins considérable de force vive occasionnée par les déplacements persistants ou les vibrations momentanées des molécules. Néanmoins, la force est alors plutôt transformée que perdue et se retrouve intégralement dans les déformations subies par le corps ou dans les agitations moléculaires qui se traduisent en chaleur ou en sons.

Quand les parties d'une masse sont animées de mouvements différents, leurs relations déterminent des effets plus complexes. En vertu de la loi dite « de l'indépendance ou de la coexistence des mouvements », le mouvement commun aux corps d'un système n'altère en rien les mouvements de ces divers corps les uns par rapport aux autres, mouvements qui s'accomplissent comme si chacun d'eux s'effec-

tuait à part, l'ensemble restant immobile. La découverte de cette loi, aussi très importante, est due à Galilée. On y rattache celle « de la composition des forces », d'après laquelle un corps animé de deux mouvements uniformes, dans deux directions divergentes, suit une direction intermédiaire ou « résultante », que l'on obtient par la construction du « parallélogramme des forces », la résultante étant la diagonale du parallélogramme dont chacune des forces composantes aurait, si elle avait agi seule, contraint le mobile à parcourir un des côtés. Ce n'est là qu'une autre manière d'énoncer la loi précédente.

*b.* — Au rebours des mouvements uniformes, dont les relations sont très bornées, parce qu'ils se produisent isolément et ne réagissent que par circonstance, les mouvements variés résultent d'influences collectives et sont naturellement connexes. Leur cause est une action totale dans laquelle se résument une infinité d'actions partielles qui concourent. Lorsqu'un corps tombe vers le centre d'un monde, ce n'est pas ce centre lui-même qui l'attire particulièrement ; l'action motrice est exercée par tous les éléments de la masse cosmique et, d'après la démonstration de Newton, la résultante générale a pour effet d'appeler le corps en mouvement vers le centre de gravité du système où s'effectue la sommation des influences partielles.

Par suite, tous les mouvements variés qui s'accomplissent dans une masse sont naturellement coordonnés puisque leurs directions, au lieu de diverger en tous sens comme celles des mouvements uniformes, tendent vers un centre commun. Leur convergence assure l'unité dynamique du système.

La même cause, agissant à distance sur les astres, de vient pour eux un principe d'interdépendance et détermine la corrélation de leurs mouvements.

Si dissemblable que paraisse la condition des deux sor-

tes de mouvemens directs, la théorie les ramène l'un à l'autre par une application de l'analyse qui, pour chaque instant infiniment court, substitue un mouvement uniforme à un mouvement varié. On suppose alors le mobile animé, à chaque point de son parcours, d'une vitesse égale à celle que la force continue lui communique. On pourrait même, d'une manière générale, considérer le mouvement varié comme dérivé du mouvement uniforme. Celui-ci, qui pour nous est idéal, mais qui pour la nature est réel, a dû animer dans le principe les éléments épars des mondes, les mettre en contact, leur trouver des conditions d'équilibre et, finalement, les unir sous forme de noyaux cosmiques. Le mouvement varié fut dès lors la conséquence de la formation de centres actifs où la gravité développa sa puissance et autour desquels se disposèrent les matériaux dont l'accumulation a produit les mondes.

B. — Résultantes spéciales des mouvements curvilignes.

Les effets des mouvements curvilignes se coordonnent dans les deux cas de la rotation et de la circulation.

a. — Lorsqu'un corps est animé de plusieurs rotations simultanées autour d'axes passant par le même point, une composition de mouvements se produit et une rotation résultante s'effectue autour d'un axe passant par ce point.

En vertu de l'unité du mouvement rotatoire, toutes les parties d'une masse, soumises à la loi d'isochronisme, tournent d'angles égaux dans des temps égaux ; mais, comme elles parcourent dans le même temps des espaces inégaux, en raison de leur distance à l'axe, elles se trouvent unies par deux sortes de rapports, l'un fixe quant à la durée, l'autre variable quant aux parcours. Sous l'influence du second, les actions centrifuges acquièrent une intensité croissante, neutralisent progressivement les tendances

centripètes, et arrivent, par une accélération suffisante, à les surmonter.

*b.* — La circulation, qui substitue à une révolution sur place une translation réelle, implique, entre les masses capables de s'influencer à distance, des corrélations dont la complexité varie suivant l'importance des groupes.

Le mouvement circulaire, étudié dans ses conditions les plus simples, comme dans les révolutions accomplies par les planètes autour du Soleil ou par les satellites autour des planètes, est une sorte de rotation à distance exécutée par un astre assujéti autour d'un centre dominateur dont l'attraction le retient. Mais, comme, par suite du mouvement initial de projection, la circulation s'opère sur une ellipse et non plus sur une circonférence, elle établit entre les astres connexes des relations variables. L'astre subordonné tantôt se rapproche et tantôt s'éloigne de l'astre central qui occupe un des foyers de l'ellipse. Il subit donc des influences inégales et sa marche se trouve alternativement précipitée et ralentie.

La complication des mouvemens circulatoires augmente vite quand, au lieu de considérer seulement deux corps unis par un lien de vassalité directe, on en considère trois ou un plus grand nombre constituant un groupe coordonné. La difficulté d'apprécier en ce cas des actions qui s'entrecroisent et se modifient l'une l'autre est telle que le problème dit « des trois corps » (le Soleil, la Terre et la Lune), le plus simple que l'astronomie comparative puisse poser, n'a pas encore reçu de solution rationnelle. Dans notre système, où d'innombrables éléments cosmiques, planètes, satellites, comètes et astéroïdes, sont associés sous la royauté du Soleil, toutes ces masses, qui s'influencent mutuellement dans des conditions que leurs déplacements font varier sans cesse, occasionnent des corrélations d'effets dont la haute analyse a peine à débrouiller la confusion. Les lois de Keplersupposaient les planètes attirées seulement

par le Soleil ; mais elles s'attirent aussi les unes les autres, et de là résultent dans leurs mouvemens des variations appelées « séculaires » parce qu'elles ne deviennent sensibles qu'au bout d'un long espace de temps. Ainsi, malgré la forte discipline établie par la prédominance du Soleil dont la masse est environ mille fois supérieure à celle de tous ses sujets réunis, les planètes parcourent autour de lui des ellipses dont l'excentricité varie périodiquement ; les grands axes de leurs orbites croissent et décroissent tour à tour ; les plans de ces orbites coupent l'équateur solaire sous des angles graduellement modifiés ; la ligne des apsidés se déplace ; des phénomènes de précession et de nutation se produisent pour la Terre par suite de l'attraction asymétrique exercée par le Soleil et par la Lune sur son renflement équatorial, influence qui a pour effet de changer la direction de l'axe polaire, etc. Du temps de Newton, la science négligeait ces changements, presque inappréciables lorsqu'on n'embrasse qu'un petit intervalle de durée ; mais les astronomes de l'âge suivant ont dû tenir compte des altérations subies dans le cours des siècles par les données dont la théorie présumait à tort la constance. Si limitées qu'elles soient en effet ces variations et avec quelque lenteur qu'elles s'accomplissent, il a fallu les mesurer quand on a voulu déterminer avec précision la nature des mouvemens planétaires, remonter à des époques reculées dans le passé ou devancer l'avenir par des prévisions à long terme. L'étude de ces inégalités, inaugurée par Laplace, a été le principal objet des travaux de Le Verrier. Laplace avait montré que les irrégularités apparentes des révolutions planétaires constituent des oscillations autour d'un état moyen, sans que ces changemens limités, qui se balancent par périodes suivant un rythme régulier, puissent altérer l'ordre permanent du système, assuré par une sorte d'équilibre mobile.

L'étude des corrélations auxquelles peuvent donner lieu les mouvemens des systèmes d'astres (groupes d'étoiles et

nébuleuses) n'est pas actuellement abordable, car l'ignorance des données nécessaires à leur détermination ne permet pas de poser le problème avec netteté.

Ainsi les mouvements circulatoires, modifiés par des réactions mutuelles, se relient et s'harmonisent, d'abord dans un système de mondes où les astres, par suite de leur proximité relative, exercent les uns sur les autres des influences directes, puis entre les systèmes de mondes à divers degrés d'éloignement, de manière à coordonner toutes les masses cosmiques jusque dans les extrêmes profondeurs de l'espace.

Un étroit rapport unit les deux modes de mouvement curviligne, les fait dériver l'un de l'autre et leur permet de se compenser en partie.

On peut en effet expliquer, dans la mécanique céleste, la translation comme une résultante de la rotation. Les parties d'une masse qui tourne sur elle-même sont animées de deux forces divergentes, l'une centripète, qui les appelle vers le centre, en vertu de la pesanteur, l'autre centrifuge, qui les dispose à s'échapper par la tangente, sous l'influence de l'impulsion giratoire. Tant que la première l'emporte, la masse conserve son unité; mais, si la seconde vient à prédominer, et c'est une simple question de vitesse, car, pendant que l'action centripète reste constante, l'action centrifuge augmente en raison de la distance à l'axe et de l'accélération du mouvement<sup>1</sup>, les parties où sa puissance prévaut devront se détacher et fuir emportées par un mouvement tangentiel. Elles entrent alors dans une nouvelle condition dynamique et, en place

1. A l'équateur de la terre, les corps perdent, par l'effet de la rotation,  $\frac{1}{289}$  de leur poids, c'est-à-dire que la force centrifuge égale pour eux  $\frac{1}{289}$  de la force centripète. Comme la première croît proportionnellement au carré de la rotation, il suffirait que le globe tournât 17 fois plus vite ( $17 \times 17 = 289$ ) pour que la pesanteur fut réduite à 0 et le corps prêt à s'échapper par la tangente si peu que la vitesse se trouvât encore augmentée.

d'une rotation, accomplissent une circulation. Toutefois, au début, les deux mouvements ne diffèrent que par une faible solution de continuité entre les masses devenues distinctes, et c'est pourquoi les planètes décrivent autour du Soleil, comme les satellites autour des planètes, des ellipses très voisines de la circonférence. La transformation d'un mouvement circulaire à l'origine en un mouvement elliptique s'opère donc par une variation analogue à celle qui, dans les sections coniques, substitue l'ellipse au cercle, pour peu qu'on incline le plan sécant. Les astres dérivés continuent de tourner autour de l'astre générateur conformément au principe « de la conservation des centres de gravité », établi par Newton, et dans le plan indiqué par celui de la rotation originelle.

L'astre ainsi produit et lancé sur son orbite prend un mouvement de rotation qui, dans ce cas, résulte du mouvement de circulation. Au moment, en effet, où il se sépare de la masse primitive, ses côtés externe et interne, animés de vitesses différentes, en raison de leur inégale distance à l'axe, le contraignent à tourner sur lui-même et dans le même sens. Laplace, développant l'hypothèse cosmogonique de Kant, a montré comment la genèse successive et la condition dynamique des astres dont se compose le système solaire, pouvaient être l'effet d'une série de mouvements rotatoires et circulatoires hiérarchiquement subordonnés. Toutefois, cette théorie célèbre réclamerait aujourd'hui un supplément d'interprétation pour rendre compte du mouvement rétrograde des groupes d'Uranus et de Neptune, car l'anomalie de leur direction doit tenir à une cause particulière encore inexpiquée. (Faye, *Note à l'Académie des sciences*, 1880.)

Pour la mécanique rationnelle, les deux mouvements circulaires sont inséparables et, là où l'un est constaté, l'autre peut être affirmé. Du fait connu de la rotation du Soleil, Lalande avait induit le fait ignoré de sa translation dans l'espace et l'observation a, plus tard, confirmé cette

conjecture hardie. La rotation d'une masse a nécessairement pour cause une impulsion communiquée de dehors au centre, impulsion qui doit déplacer aussi ce centre. Par suite de la relation qui les lie, les deux modes de mouvement peuvent se substituer l'un à l'autre et se compenser. Un mémoire de Poinsot démontre que lorsqu'un corps en rotation rebondit sur un obstacle, il est, après réflexion, renvoyé avec une vitesse supérieure à celle qu'il avait avant, parce qu'une partie du mouvement de rotation se trouve alors transformée en mouvement de circulation, d'où résulte un accroissement de vitesse du centre de gravité. Un choc quelconque ne saurait avoir pour effet d'annihiler à la fois les deux mouvements (sauf dans le cas, bien difficile à réaliser, où il agirait en sens précisément inverse de l'impulsion initiale, par un mouvement égal et contraire); car, excentrique, il suspendrait tout au plus la rotation, et, passant par le centre de gravité, il ne pourrait arrêter que la translation (Poinsot, *Questions dynamiques sur la percussion des corps*, p. 21 et 29).

Enfin, les mouvements directs et les mouvements curvilignes sont corrélatifs. Leurs effets s'entrecroisent par séries. L'étude de ces rapports est le problème le plus intéressant et pour ainsi dire le nœud de la Cinétique comparée.

La disparité des deux sortes de mouvements tient à la situation du point d'application de la force qui, dans un cas, est au départ ou à l'arrivée du mobile, comme s'il était chassé ou attiré; et, dans l'autre, constitue un centre autour duquel tourne le mobile, comme s'il était retenu ou projeté. Mais, dans ces occurrences diverses, c'est toujours la même force qui agit. Seulement, ses effets se compliquent par degrés, selon que la puissance est instantanée et fixe, ou continue et accélératrice, ou bien que

la cause du mouvement réside dans l'astre lui-même ou dans un astre éloigné. Grâce à ces relations, la théorie peut suivre la transformation du mouvement direct en mouvement circulaire et celle du mouvement circulaire en mouvement direct.

L'action rotatoire, à la fois centripète et centrifuge, marque la condition que les corps doivent traverser pour passer de l'un à l'autre état dynamique. Elle participe en outre des deux mouvements directs auxquels se lie son origine, puisqu'elle est uniforme quant aux temps comme le premier, et variée quant aux espaces parcourus comme le second. C'est une sorte de carrefour où s'accomplit la conversion la plus importante des mouvements.

La force sous l'influence de laquelle une masse cosmique tourne sur elle-même est la résultante de la mise en équilibre de ses matériaux et du changement qu'a subi, au moment où ils se fixaient, la puissance dont, à l'origine, ils se trouvaient animés. Si l'on suppose les corps célestes produits par le rapprochement d'une infinité de particules d'abord dispersées, il faut admettre qu'avant la formation des astres leurs éléments cédaient aux lois du mouvement uniforme, car, dans l'état initial d'isolement et d'indépendance, chacun d'eux ne pouvait obéir qu'à sa force propre. Mais, des centres cosmiques une fois constitués, les particules éparses de la matière pondérable durent être attirées vers eux par un mouvement varié, puis s'incorporer à leur masse en y prenant des positions d'équilibre. Toutefois, la puissance de mouvement, ne pouvant se perdre, passa de ces particules dans la masse, conformément aux lois du choc, et contraignit l'ensemble du système à tourner sur lui-même, d'après la résultante moyenne des impulsions reçues. Une masse produite par l'agglomération d'une multitude de parties tombées sur elle de tous côtés, a dû subir en effet une multitude de chocs et prendre un mouvement giratoire dans le plan maximum des aires passant par le centre de gravité. La puissance qui détermine la rotation d'un

astre provient ainsi de la quantité de mouvement dont ses éléments étaient animés dans le principe et qu'ils ont perdue en se fixant. La circulation qui se développe ensuite par l'effet de la rotation est une conséquence indirecte de la même cause.

Les mouvements circulaires des corps célestes résulteraient donc de la somme de force vive transmise à leur masse par la précipitation des éléments dont elle se compose. Le mouvement curviligne est du mouvement rectiligne transformé. Où l'un finit, l'autre commence. Durant la phase où se groupèrent les matériaux des mondes, toute impulsion qui n'était pas dirigée vers le centre de gravité du système devait provoquer en lui un mouvement de rotation et déplacer le centre de gravité par un mouvement de translation. L'immobilité d'une masse formée par des adjonctions successives impliquerait un ensemble de conditions dont le concours est impossible. Il faudrait : 1° pour qu'elle ne tournât pas sur elle-même, que toutes les impulsions dues à la chute de ses matériaux eussent été réducibles à une seule force exactement dirigée vers le centre de gravité ; et 2°, pour qu'elle ne circulât pas dans l'espace, que toutes les impulsions, passant par le centre de gravité, s'y fussent exactement neutralisées. Des chances infinies militent contre l'absolu d'une pareille hypothèse.

Le mouvement curviligne, qui procède du mouvement rectiligne, tend à le produire à son tour. La rotation développe dans les masses une action centrifuge sous l'influence de laquelle les corps sont portés à s'échapper en ligne droite suivant la tangente. Si la partie amenée à se détacher de la sorte cédait à la seule force de projection, elle fuirait par un mouvement direct ; mais, la force centripète continuant d'agir sur elle, la nécessité où se trouve le mobile d'obéir simultanément à deux actions rectilignes différentes l'oblige à parcourir une orbite curviligne. La circulation se ramène ainsi à la composition de deux mouvements directs, l'un tangentiel et uniforme, dû à

l'influence rotatoire, l'autre centripète et varié, dû à l'attraction du centre originel, mouvement dont la résultante est une courbe. Galilée, opérant le premier cette analyse, reconnut la nature des trajectoires que décrivent les projectiles et l'expliqua par l'effet simultané de deux forces, dont la première, instantanée et fixe, détermine la projection, et la seconde, continue et accélératrice, sollicite les corps à tomber vers le centre du globe.

On rattache à la même théorie la loi des oscillations du pendule, si importante pour l'étude de la pesanteur, pour l'intelligence des mouvements vibratoires et par ses applications aux artifices chronométriques. La découverte de l'isochronisme des oscillations pendulaires est aussi due à Galilée. Daniel Bernouilli a signalé la coexistence des petites oscillations qui sert à expliquer l'entrecroisement des ondes à la surface d'un liquide et celui des vibrations sonores ou lumineuses.

Ce que Galilée avait démontré de la composition des forces auxquelles cèdent les projectiles, Newton l'étendit aux astres. Les mouvements sont en effet analogues dans les deux cas, et l'astronomie se réduit, comme on a pu dire, à des problèmes d'artillerie (A. Comte, t. II, p. 167). Newton fit voir que les orbites des astres sont déterminées par la simultanéité de deux actions qui les portent l'une, à tomber sur l'astre central suivant la normale, par un mouvement varié, l'autre à fuir suivant la tangente par un mouvement uniforme. Sollicités à la fois par ces deux tendances rectilignes sans pouvoir céder séparément à aucune, les mondes suivent une résultante curviligne.

Ainsi, les diverses conditions de mouvement se lient et se coordonnent. L'action motrice, très simple au début, complique graduellement ces effets. Elle se bornait d'abord à déplacer en ligne droite, avec une vitesse constante, les moindres particules de substance, éléments dispersés des mondes futurs. Par suite, elle les a rapprochés, mis en contact et unis. Mais, dès que des noyaux cosmiques se con-

stituèrent, le mouvement uniforme, général à l'origine, prit fin, et le mouvement varié lui succéda, ce qui dut amener, avec une intensité croissante, l'agglomération de la matière autour des centres attractifs. Les masses, convertissant alors, par un effet d'incidence, les mouvements directs et limités de leurs parties en un mouvement d'ensemble, circulaire et continu, ont accompli un mouvement de rotation sur elles-mêmes. Enfin, l'accélération du mouvement rotatoire a déterminé le mouvement de circulation et associé les astres par séries. A travers ces changements successifs, les modes de mouvement réagissent les uns sur les autres, se compensent ou se substituent et, là où ils semblent disparaître, ils ne font que se transformer.

CÔNCLUSION. RÉSULTANTES DE L'ÉQUILIBRE  
ET DU MOUVEMENT

Au terme de cette étude de Dynamique comparée, il resterait à établir la corrélation finale de l'équilibre et du mouvement. Les deux modes d'action de la force, loin d'être opposés dans la nature comme ils le sont dans nos analyses, concourent ensemble à son ordre.

Les mouvements qui se produisent à l'intérieur des masses cosmiques, parmi des éléments stables, troublent en partie leur équilibre et sont en partie troublés par lui. Les résistances qu'ils rencontrent, difficiles à évaluer en détail, compliquent le problème de leur détermination. Il faudrait alors pouvoir tenir compte de la déperdition de puissance qu'occasionnent les pressions, les chocs et les frottements, dans les diverses conditions de solidité et de fluidité. Mais n'a on pas encore la mesure de ces influences et la mécanique rationnelle se contente de les éliminer. Ainsi, ses lois de mouvement supposent que les corps se meuvent dans un

vide parfait. Or, cela n'est exact que pour les astres circulant au sein de l'éther. Lorsqu'on aborde l'étude des mouvements intracosmiques, on se heurte à des résistances de milieu pour lesquelles les moyens théoriques d'appréciation font défaut. En ce qui concerne, par exemple, le fonctionnement des machines, les formules ne permettent pas de calculer avec précision leur puissance effective, et l'industrie se trouve réduite à de vagues approximations que dément souvent l'expérience. De même, quoique Galilée ait reconnu la courbe décrite par les projectiles, les équations au moyen desquelles on représente leurs trajectoires ne sont justes qu'appliquées à un parcours dans le vide. On ignore quelle résistance l'air leur oppose. Après avoir admis qu'elle varie en raison directe du carré de la vitesse des projectiles, on croit maintenant qu'elle est proportionnelle au cube pour les projectiles sphériques et à la quatrième puissance pour les projectiles oblongs.

Les lois du mouvement des fluides, en rapport avec leurs conditions d'équilibre, sont moins connues encore. L'analyse est impuissante à déterminer dans une masse liquide les mouvements propres des molécules et les résistances qu'elles ont à surmonter. On tourne la difficulté en recourant à l'artifice, proposé par Daniel Bernouilli, des « tranches parallèles », qui donne le moyen de spéculer séparément sur des sections de molécules ; mais c'est là une hypothèse précaire et, même avec le secours de cet expédient, l'Hydrodynamique n'a guère pu résoudre jusqu'ici que le problème le plus simple, relatif à l'écoulement, par un orifice déterminé, d'un liquide à niveau constant. Le mouvement à deux dimensions, au sein d'un liquide, et surtout le mouvement dans tous les sens, ne sont pas actuellement abordables. Quant à l'étude des mouvements généraux de l'océan et de l'atmosphère, elle soulève des problèmes tellement complexes que la possibilité d'une solution ne se laisse pas même entrevoir.

Sortons du détail des faits où tant d'inconnues resteraient

à dégager ; considérons dans leur ensemble l'équilibre et le mouvement. Malgré leur dissemblance d'aspect, nous devrons les unir par l'identité de cause et les regarder comme les manifestations spéciales, mais connexes, d'une même force appelée à s'exercer dans des conditions diverses. L'accord de ces deux sortes d'effets s'impose à tel point qu'il ne serait pas possible de les isoler dans l'ordre de la nature, car un monde où la stabilité serait absolue se trouverait condamné à l'inertie, au repos et à la mort, de même qu'un monde où règnerait une instabilité générale rentrerait bien vite dans le chaos. Le concert des deux forces quiescente et mouvante est si nécessaire que l'esprit, incapable de les séparer, ne saurait, dans les conditions qui nous sont connues, concevoir ni l'équilibre sans mouvement, ni le mouvement sans équilibre.

A voir les choses de haut, l'équilibre est le résultat d'une tendance au mouvement et le mouvement la recherche de conditions d'équilibre. D'une part, le mouvement constitue des centres fixes d'action ; de l'autre, la stabilité de ces centres développe de la puissance. Ainsi, le mouvement varié aboutit à la mise en équilibre des matériaux des astres par la convergence de leurs directions vers un même centre ; puis, en vertu de ce même équilibre, une rotation s'opère. Le mouvement direct devait donc traverser l'équilibre pour produire le mouvement circulaire. Par contre, les deux états d'équilibre sont séparés par une condition de mouvement. Le passage de la stabilité à l'instabilité, et mieux encore le retour d'un corps de l'état instable à l'état stable impliquent un mouvement effectué, des oscillations subies. Ce changement dynamique s'accomplit par l'intermédiaire des forces dites « de dégagement » ou « de décharge », c'est-à-dire d'une petite quantité de mouvement qui, communiquée (d'ordinaire par impulsion) au corps chargé de forces de tension, décide la transformation de la force morte en force vive. Enfin, la continuité de la circulation résulte de la poursuite sans fin d'un équilibre im-

possible dont l'idéal serait la pondération à distance d'astres liés par des actions réciproques. Sous l'empire de ces deux tendances, les mondes sont à la fois en repos et en mouvement, en mouvement par le repos et en repos dans le mouvement : *motu quiescunt*.

La théorie ramène à l'unité l'équilibre et le mouvement en les faisant dépendre l'un et l'autre d'une seule cause d'action. L'équilibre, en effet, n'est qu'un mouvement suspendu. Dans les corps maintenus immobiles agit une force constante, momentanément arrêtée par un obstacle, mais sans cesse en effort contre lui, comme en témoignent la pression manifestée par les poids, et c'est la permanence de cette action qui fait celle de l'équilibre. Que l'obstacle cède ou soit supprimé, la cause qui contraignait les corps à rester en place va sur-le-champ les contraindre à se mouvoir. La force quiescente et la force mouvante ne diffèrent donc point par nature; c'est la même force qui, empêchée dans un cas, libre dans l'autre, s'exerce dans des conditions variées. Selon les termes d'Aristote, « le mouvement est la mise en action de ce qui existait en puissance » (*Physique*, III, 1 et 2). La cause du mouvement préexiste ainsi dans l'équilibre et celle de l'équilibre dans le mouvement. La science exprime par une formule générale la corrélation des deux états. Déjà Leibniz avait montré qu'on peut regarder le repos comme un mouvement infiniment petit ou infiniment lent. Le « principe de d'Alembert », d'après lequel « les quantités de mouvement perdues ou gagnées par les différents corps d'un système, en vertu de leurs réactions mutuelles, se font équilibre », permet de convertir les questions de mouvement en questions plus simples d'équilibre. Ce principe, combiné par Lagrange avec celui des vitesses virtuelles, a conduit la Dynamique au plus haut degré de perfection qu'elle ait jusqu'ici pu atteindre. (A. Comte, t. I, p. 491.)

Ainsi la force, tantôt virtuelle et tantôt actuelle, tour à tour en suspens et en travail, suit à travers des phases chan-

geantes et des alternances d'effets le cours de ses éternelles manifestations. Mais, en revêtant des aspects divers, elle ne diminue ni ne s'augmente, et son énergie totale reste la même, qu'elle soit maintenue disponible ou mise en action. Le principe « de la conservation de la force », fondement de la Dynamique générale, se lie à la plus simple des lois, celle que Newton a formulée relativement à l'égalité de l'action et de la réaction. La force se communique d'un corps à l'autre, se disperse ou s'accumule, se dépense ou se réserve, et s'applique sans se perdre dans des occurrences variables. Parmi des distributions et des redistributions qui se modifient sans cesse, la somme de puissance reste toujours égale à elle-même dans l'univers.

## II. — DYNAMIQUE GÉNÉRALE OU BAROLOGIE

SCIENCE DES RÉSULTANTES D'ENSEMBLE

### THÉORIE DES RÉSULTANTES COSMIQUES

L'étude de tant de rapports qui se prolongent et s'entrecroisent dans les séries de faits conduit à leur chercher une explication commune et à dégager les lois de l'ensemble. La science ne peut pas, en effet, s'arrêter à mi-chemin dans ses tentatives de synthèse; elle est tenue de reconstituer le tout et d'en donner une formule à la fois très compréhensive et très claire. Au-dessus des corrélations partielles il faut établir la notion d'un ordre universel. Les astronomes de la Chaldée avaient pu former, pendant une longue suite de siècles, de volumineux recueils d'observations dont Aristote reçut la communication par Callisthène; ils ignoraient, comme Aristote lui-même, le vrai système du monde et ne soupçonnaient pas la cause unique des effets dont ils enregistraient si patiemment le détail. Des relevés de faits étaient indispensables sans doute pour fournir une base aux théories et, sans les tables de Tycho-Brahé, Kepler n'aurait pas découvert ses lois; mais les faits ne se coordonnaient pas d'eux-mêmes. Leur multitude, continuellement accrue, se tournait vite en confusion et, plus les répertoires devenaient riches, plus le besoin de systématisation rationnelle se faisait sentir.

La Dynamique resterait donc inachevée si elle ne s'efforçait de ramener à l'unité de cause et de loi la diversité des phénomènes de collocation. Outre la Statique et la Cinétique qui déterminent les conditions d'équilibre et les modes

de mouvement ; outre la Dynamique comparée qui explique les faits par séries, il importe d'instituer une section de la science qui mette en lumière le principe et la loi des manifestations de la force. Sa fonction consiste, non plus à faire connaître tel état d'équilibre, ou tel genre de mouvement, ou telle résultante spéciale, mais à suivre aussi loin que possible l'enchaînement des effets, à remonter jusqu'à leur cause première et à déduire de ses applications la totalité des faits et de leurs rapports. Le vaste amas des connaissances particulières se trouvant ainsi résumé dans quelques vérités très simples, l'ordre de l'ensemble apparaîtrait nettement et son unité ne serait plus dissimulée par la multiplicité de ses aspects.

Les recherches dont nous indiquons l'objet n'ont pas encore été érigées en science distincte. Les notions qui s'y rapportent, au lieu de constituer, comme il conviendrait, une partie de la Dynamique ayant sa dénomination propre, sont dispersées dans les sections précédentes et manquent de coordination. Il y aurait un sérieux avantage à les rapprocher et à les unir. Cette division de la science pourrait s'appeler « Dynamique générale » ou « Barologie » (de βάρος, pesanteur). A. Comte s'est servi de ce dernier terme pour désigner l'étude des effets de la pesanteur à la surface de la Terre, étude mal à propos annexée par lui à la Physique. On doit la restituer à la Dynamique et lui donner assez d'extension pour qu'elle comprenne la théorie de la gravitation.

Ainsi conçue, la Dynamique générale est une science récente, car la position même de ses problèmes en supposait beaucoup d'autres résolus. Les anciens n'avaient pas étendu au delà du milieu terrestre leurs spéculations sur l'effet des forces mouvantes. Quoique l'astronomie ait constaté de bonne heure la régularité du cours des astres, l'idée n'était pas venue d'attribuer leurs déplacements aux mêmes causes qui agissent autour de nous. Descartes, le premier, osa concevoir l'univers comme un vaste mécanisme et tenta de ramener à un principe unique tous les mouvements de

la matière. Sa seule erreur fut de partir d'un principe *à priori*. Mais l'idée-mère était juste et l'on entrevit dès lors la possibilité de subordonner l'astronomie à la Dynamique. Newton opéra cette synthèse grandiose et la Dynamique générale se trouva constituée par la découverte de la gravitation universelle.

Le programme de cette science doit se référer aux divisions principales des faits dont elle a mission d'exprimer les lois. On aurait à déterminer d'abord les résultantes cosmiques de l'équilibre, puis les résultantes cosmiques des mouvements, enfin leur accord dans l'univers.

#### 1. — RÉSULTANTES COSMIQUES DE L'ÉQUILIBRE. DE LA PESANTEUR

Une masse isolée dans l'espace, comme le sont en général les mondes, se compose d'une agglomération de parties qui forment un tout. Pour que cet assemblage conserve sa permanence d'aspect et son unité, il faut que ses éléments soient maintenus par une force commune dans un ordre fixe. Or, cette force ne peut être que la tendance des parties à se porter vers le centre de la masse. Si, en effet, au lieu de tendre vers le centre du système, elles tendaient à s'en éloigner, leur union ne pourrait durer, à moins de contrainte subie, et l'agrégat, livré à lui-même, se réduirait en fragments qui se disperseraient dans l'espace, prêts à s'y résoudre en parcelles. Si même les éléments des mondes n'étaient liés par aucune force constante, leur juxtaposition, purement fortuite, resterait précaire, et l'influence de la moindre force intercurrente y mettrait fin. Il est donc nécessaire d'admettre, comme cause de la formation et de la conservation des masses cosmiques, l'action continue et prépondérante d'une force qui appelle toutes leurs parties vers le centre et qu'on nomme « pesanteur ».

Mais ce point idéal vers lequel tendent sans cesse les

# DYNAMIQUE GÉNÉRALE OU BAROLOGIE

## SCIENCE DES RÉSULTANTES D'ENSEMBLE

<p>a. Résultante totale de la stabilité des solides.</p>	<p>b. Résultante totale de la stabilité des fluides.</p>	<p>a. Résultante totale de l'instabilité des solides.</p>	<p>b. Résultante totale de l'instabilité des fluides.</p>	<p>a. Résultante totale des mouvements uniformes.</p>	<p>b. Résultante totale des mouvements variés.</p>	<p>a. Résultante totale des mouvements rotatoires.</p>	<p>b. Résultante totale des mouvements circulatoires.</p>
<p>A. COORDINATION COSMIQUE DES FAITS D'ÉQUILIBRE STABLE</p>		<p>B. COORDINATION COSMIQUE DES FAITS D'ÉQUILIBRE INSTABLE</p>		<p>A. COORDINATION COSMIQUE DES MOUVEMENTS DIRECTS</p>		<p>B. COORDINATION COSMIQUE DES MOUVEMENTS CURVILIGNES</p>	
<p>1. RÉSULTANTE GÉNÉRALE DES FAITS D'ÉQUILIBRE.</p>				<p>2. RÉSULTANTE GÉNÉRALE DES FAITS DE MOUVEMENT.</p>			
<p>DE LA PESANTEUR</p>				<p>DE LA GRAVITÉ</p>			
<p>RÉSULTANTE UNIVERSELLE DES FAITS DYNAMIQUES DE LA GRAVITATION</p>							

éléments d'un système, tous ne peuvent l'atteindre, car ils se font réciproquement obstacle. En vertu de leur impénétrabilité, attribut pour nous inséparable de la matière et qui assure aux choses une corporéité distincte, les parties d'une masse opposent à l'action de la pesanteur une résistance qui arrête ses tendances centripètes et suffit à immobiliser les corps. Ainsi s'établit entre eux, par suite de l'antagonisme des deux propriétés qui les caractérisent le mieux, un ordre durable de collocation.

La stabilité des éléments d'une masse s'explique donc par l'influence d'une force qui les fait converger vers son centre, tandis que leur impénétrabilité les empêche d'y parvenir. L'équilibre résulte alors de l'action, dirigée en sens contraire, que les corps exercent les uns sur les autres et qui se manifeste par des pressions. Un effet de ce genre exige le contact des choses et ne pourrait pas se produire à distance. Conséquemment, l'ordre statique ne dépasse pas les limites d'un monde, et chaque astre constitue un système défini, un tout isolé dont les matériaux se coordonnent à part. Ces faits, les plus circonscrits et les moins variables que la dynamique générale ait à considérer, montrent comment s'effectue la synthèse des actions qui assurent la permanence des masses.

La résultante cosmique des phénomènes d'équilibre trouve son expression dans la pesanteur. La notion concrète de poids nous est fournie par les sensations musculaires et doit, à ce titre, figurer parmi les données primordiales de l'intuition. Mais, si les effets particuliers de la pesanteur sont manifestes, leur cause générale était difficile à découvrir. L'étude de l'équilibre des corps à la surface de la terre et celle de leurs mouvements à la recherche de l'équilibre, firent, par une induction naturelle (la forme sphéroïdale du globe et la perpendicularité des effets de la pesanteur une fois connues), imaginer comme cause une force qui porterait toutes les parties de la planète à se diriger vers son centre. Des philosophes grecs

avaient eu le pressentiment de cette loi et Lucrèce s'est fait l'interprète de leur théorie :

In medium summæ (quod dicunt) omnia niti  
Atque ideo mundi naturam stare sine ullis  
Ictibus externis...

(Lib. I, v. 1052 sqq.)

Toutefois, cette conjecture ne paraît pas avoir rencontré beaucoup de crédit chez les anciens, car Lucrèce ne l'expose que pour la combattre, et traite d'« imbéciles » (*stolidi*, v. 1067) ceux qui ajoutent foi à de pareilles rêveries. A partir du xvi<sup>e</sup> siècle, les fondateurs de l'astronomie moderne eurent une idée de plus en plus nette de la cause cosmique de la pesanteur, et Galilée réussit enfin à démontrer sa réalité par expérience en donnant la mesure de son action.

Tous les corps qu'il nous est donné de connaître sont pesants, c'est-à-dire tendent vers le centre de gravité du système où s'opère la sommation de toutes les actions partielles. Mais, pour chacune de ses parties, la pesanteur ne représente nullement, comme le croyait Aristote<sup>1</sup> et comme on serait enclin à l'admettre, un *quantum* fixe de puissance qui accompagnerait le corps partout où il plairait à la pensée de le transporter. Il ne faut voir dans le poids qu'un rapport déterminé entre le tout et sa partie quand une distance précise sépare leurs centres respectifs de gravité. Depuis que Cavendish a constaté par la balance de torsion la densité moyenne de la Terre, environ cinq fois et demie supérieure à celle de l'eau, on a pu peser la planète, son volume étant connu. Le calcul assigne à sa masse

1. Dans son traité « *De cælo* », il tient la pesanteur pour une propriété absolue, inhérente à certaines substances, et partage les corps en « lourds » (les pierres, les métaux, etc.), et en « légers » (le feu, la fumée), suivant qu'ils tombent vers le centre de la terre ou qu'ils s'en éloignent, sans réfléchir que le liège serait lourd dans l'air, léger dans l'eau et que les nuages s'abaissent et s'élèvent alternativement.

un poids approximatif de 6, 259 534 milliards de milliards de kilogrammes. Un corps qui pèse 1 kilogramme constitue par conséquent  $\frac{1}{6\ 259\ 534\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}$  de la masse du globe, placé à une distance déterminée de son centre. Pour les corps que nous observons à la surface de la terre, ce rapport est invariable tant que ses deux termes ne changent ni quant à leur masse, ni quant à leur éloignement, et la constance ordinaire de ces conditions fait la permanence de la pesanteur; mais sa valeur serait différente si elles venaient à varier, si par exemple le même corps était transporté dans un astre moindre ou plus considérable que notre planète, ou si, sur terre même, il était éloigné ou rapproché du centre du globe, ou enfin s'il était attiré par d'autres centres. Ainsi un homme du poids moyen de 66 kilog., transporté à la surface de la Lune, y perdrait les  $\frac{5}{6}$  de son poids qui se réduirait à 11 kilog.; tandis que, transporté dans le Soleil, il pèserait 27 fois  $\frac{1}{2}$  plus que sur terre, et son poids, élevé à plus de 1 800 kilog. le rendrait incapable de se mouvoir. Nos projectiles d'artillerie n'auraient alors qu'une portée très réduite, et leur trajectoire, fortement courbée, s'arrêterait à quelques pas. Sans sortir du milieu terrestre, comme l'action de la pesanteur varie en raison de la distance des centres de gravité, l'homme que nous avons pris pour exemple pèsera moins à l'équateur que sous les pôles, au sommet d'une montagne qu'au fond d'une mine. Enfin, si l'on tient compte de l'influence qu'exerce sur lui l'attraction du soleil, il pèsera moins à midi qu'à minuit (la différence est en ce cas une fraction de gramme équivalant à peu près au poids d'un grain de blé); il pèsera plus l'hiver que l'été dans l'hémisphère boréal, et l'été que l'hiver dans l'hémisphère austral, etc. La pesanteur est donc simplement l'expression d'un rapport et son action n'a de constance que dans des conditions données. Ces conditions une fois établies pour l'ensemble d'un monde, leur résultante générale explique, au double point de vue de

l'équilibre stable et de l'équilibre instable, l'ordre de collocation qui rend ses parties solidaires et assure au système son unité.

A. — *Coordination cosmique des faits d'équilibre stable.*

Par suite de la tendance qu'ont tous les corps constituants d'une masse à se porter vers son centre et de la résistance qu'ils s'opposent réciproquement, ils doivent se ranger dans un ordre dont la stabilité résulte des effets contraires, mais également constants, de la pesanteur et de l'impénétrabilité. Lorsque les éléments de la matière pondérable se colloquent sous l'influence exclusive de ces deux causes d'action, ils se disposent en forme de sphère, la plus favorable au maintien de l'équilibre, parce que les pressions s'y répartissent uniformément autour du centre, de manière à se neutraliser dans tous les sens. La configuration sphérique est, en conséquence, celle que prennent toutes les masses, grandes ou petites, quand elles se modèlent sous les lois de la pesanteur, comme le montrent les astres dont le diamètre est appréciable et, à l'autre extrémité de l'échelle des grandeurs, les gouttes de pluie ou de rosée, les grains de plomb fondu, les corps à l'état sphéroïdal, les bulles de savon, etc.

La forme totale ou « figure d'équilibre » étant ainsi déterminée par la pesanteur, voyons comment la même cause assigne leur ordre de collocation aux matériaux, solides ou fluides, dont les masses se composent.

*α.* — Chaque solide, considéré à part, représente une masse distincte qui, en raison de l'invariabilité de sa forme, a un centre de gravité, une base de sustentation. L'action qu'exerce sur lui la masse entière du globe le porterait à tomber vers son centre en ligne droite, suivant la verticale qui joint les deux centres de gravité. Il lui suffira donc,

pour se trouver en équilibre, d'être arrêté dans ce sens par un obstacle fixe, à la surface duquel il ne puisse ni rouler, ni glisser, et dans une situation où il résiste de lui-même à de petites oscillations.

Les solides amoncelés subissent de la même manière l'action de la pesanteur; mais, comme il sont mobiles séparément, leur équilibre exige qu'à la surface libre de l'amas les lignes de pente se rapprochent de l'horizontale plus que de la verticale, parce que, si elles dépassaient l'angle de  $45^\circ$ , les corps superficiels, au lieu d'être retenus par leur poids, seraient entraînés par lui.

*b.* — Les fluides n'ont pas de centre commun de gravité. Chaque molécule obéit directement aux lois de la pesanteur, et la mobilité générale de ces éléments les contraint à se coordonner dans l'ensemble.

Les molécules liquides, liées par de faibles adhérences et toujours disposées à glisser les unes sur les autres en cédant à des actions tangentielles, composent des corps dont le volume est constant, mais dont la forme se modifie sous les moindres influences. Il n'y a donc pour eux qu'un équilibre général que les molécules, sollicitées par la pesanteur, établissent en réagissant les unes sur les autres pour maintenir l'horizontalité de leur niveau et l'égalité de leurs pressions dans tous les sens.

Les conditions d'équilibre sont plus complexes encore pour les gaz, parce que la pesanteur n'a pas seulement à dominer en eux la mobilité moléculaire; elle doit aussi vaincre une force d'élasticité qui fait varier le volume de ces corps sous l'influence des moindres causes de compression ou de décompression. Elle les amène, à travers des changements continuels de situation, à réaliser un équilibre moyen par une multitude de compensations partielles.

Enfin, la pesanteur impose un rapport de collocation

aux solides et aux fluides en raison de leurs densités respectives. Lorsque, à volume égal, les matériaux d'un monde sont inégalement lourds, ils se distribuent suivant une loi de densité décroissante, les plus pesants étant appelés vers le centre avec l'énergie la plus grande et les autres se superposant dans l'ordre de leur moindre pesanteur. Les zones concentriques, ainsi rangées, sont alors en équilibre et, troublées par occurrence, tendent à rétablir leurs positions respectives. Dans le monde que nous habitons, nous voyons les diverses couches dont la géologie a pu constater la nature réparties suivant cette loi de Statique générale. Les strates solides dont se compose le sol qui nous porte ont une densité supérieure à celle des fluides qui occupent la surface de la Terre. Cet ordre paraît se continuer dans les couches internes du globe. On sait, en effet, que sa pesanteur moyenne est environ cinq fois et demie plus considérable que celle de l'eau, tandis que les solides superficiels (terres et pierres) varient de deux à deux et demi. Les zones profondes doivent donc être sensiblement plus pesantes. Legendre et Laplace ont supposé que leur densité croissait d'après une loi qui donnerait, en partant de 2,5 à la superficie, 8,5 pour le milieu du rayon et 11,3 au centre. M. Roche, raisonnant d'après un autre indice, trouve 2,1 pour la surface, 8,5 pour le demi-rayon et 10,6 pour le centre. On peut donc admettre comme vraisemblable que la densité moyenne du globe est environ le double de celle des solides superficiels, et que la densité de la masse centrale est le double de la densité moyenne, c'est-à-dire à peu près égale à celle du plomb. La pesanteur relative de ces matériaux assure à la stabilité de l'ensemble un inébranlable fondement. Au-dessus des couches solides s'étend la masse des eaux dont la densité est notablement inférieure à la densité moyenne du globe. Enfin, la masse gazeuse de l'atmosphère, qui a le plus de légèreté spécifique, occupe la région périphérique de la planète. L'air, à

la température de zéro et au niveau de la mer, pèse, sous le même volume, 770 fois moins que l'eau et le poids total de l'océan aérien n'est que la 1 200 000<sup>e</sup> partie de celle du globe. Les couches superposées de sa masse ont même une densité d'autant moindre qu'elles se rapprochent davantage de la limite externe. En somme, si, partant du centre de la terre, on suivait un de ses rayons, on traverserait des couches de densité continuellement décroissante, depuis les lourds métaux qui forment le noyau de l'astre, jusqu'à la zone d'air extrêmement rarifié qui confine à l'éther.

B. — Coordination cosmique des faits d'équilibre instable.

La même force qui, dans des conditions déterminées, produit l'équilibre stable, donne lieu, lorsque ces conditions se modifient dans une certaine mesure, à des faits d'équilibre instable. C'est encore l'action de la pesanteur qui retient les corps en place; mais son influence statique dépend de causes extrêmement circonscrites et la moindre perturbation suffit à transformer les effets de pression en force vive. Les corps sont ainsi en balance entre les deux états de fixité et de mouvement, prêts à persister dans le premier si nulle influence ne le trouble, ou à suivre la loi du second pour peu que leur base se réduise ou qu'une impulsion soit donnée.

a. — Les solides dont le centre de gravité s'élève, ou dont la base diminue, ou dont le plan se rapproche de l'angle de glissement, sont mis en instabilité d'équilibre par leur propre poids qui, cessant de les maintenir immobiles, les dispose à tomber par l'effet de la moindre oscillation, car la pesanteur ne les fixe que suivant une direction stricte, et décide leur chute dès qu'ils s'en écartent.

Il en est de même des amas de solides lorsque la ligne

d'inclinaison du faite atteint ou dépasse l'angle de glissement.

*b.* — Les fluides, en raison de leur mobilité moléculaire, sont en état permanent d'instabilité, parce que l'équilibre de l'ensemble impliquerait celui de toutes les particules. Or c'est assez qu'une seule se déplace, sous la moindre des influences, pour diminuer la pression dans le lieu qu'elle quitte, l'augmenter là où elle se porte et déterminer ainsi une rupture locale d'équilibre qui, de proche en proche, se communique à la masse entière.

• La cause de l'état instable des liquides est l'action de la pesanteur sous l'empire de laquelle chaque molécule est disposée à glisser sur les pentes les plus faibles partout où se produit une diminution de pression.

La même cause, combinée avec l'élasticité caractéristique des gaz, oblige ceux-ci à compenser les inégalités de tension susceptibles de se produire dans tous les sens, et rend leur stabilité toujours précaire.

Ainsi, par une loi dont la pesanteur rend compte, l'équilibre des corps est d'autant plus exposé que leur forme est plus sujette à varier. L'instabilité continuelle des fluides contraste avec la stabilité d'ordinaire persistante des solides. Au-dessus des strates permanentes de la terre dont la fixité ne se perd que par exception, la masse des eaux et de l'atmosphère, troublée par de minimes influences, est incessamment agitée. Cependant, cela n'est exact que pour le détail, car, si l'on compare les ensembles, le contraire serait plutôt vrai. Les corps dont les parties sont le plus faciles à mouvoir ont, pris en masse, l'équilibre le mieux assuré. La surface solide du globe, tour à tour affaissée et soulevée par le mouvement de bascule que produit l'action des forces internes, est inégale et accidentée dans son relief, alors que la surface de l'océan conserve un niveau constant et que les pressions baro-

métriques oscillent autour d'une moyenne invariable. A considérer les choses dans le cours des âges, c'est la terre qui, au rebours de l'apparence et de l'opinion reçue, constitue l'élément mobile et l'eau l'élément stable. La manière dont ces deux classes de corps sont influencées par la pesanteur explique la disparité de leur condition statique.

La pesanteur est donc la cause qui détermine dans un monde l'ordre, soit stable, soit instable, de ses parties, suivant que son action est arrêtée par un obstacle fixe ou prête à provoquer le mouvement. Les conditions qu'elle établit, variables pour les diverses masses cosmiques, selon la nature de leurs éléments, sont soumises dans toutes à des lois pareilles. Un astre entièrement composé de solides, comme paraît l'être la Lune, doit jouir d'un équilibre constant et l'observation la plus attentive n'a fait découvrir jusqu'ici aucune modification dans l'état de sa surface. Au contraire, une masse incandescente et gazeuse comme le Soleil ne peut connaître qu'une continuelle instabilité. Un globe constitué, comme la Terre, par des solides et des fluides, a des parties en équilibre stable, d'autres en équilibre instable, dont la pesanteur assure la coordination et l'unité.

Si cette force gouvernait seule les mondes, elle assignerait à leurs éléments un ordre qui, une fois établi, persisterait sans fin de lui-même; mais elle s'exerce concurremment avec des forces physiques, chimiques, plastiques ou fonctionnelles, dont l'intervention momentanée trouble par circonstance l'équilibre, déplace les corps, ruine des appuis, fait varier des pressions et, par suite, occasionne des mouvements. Néanmoins, ces causes de perturbation statique ne parviennent pas à rendre précaire l'ordre imposé à l'ensemble par la pesanteur, parce que son influence est générale et constante, alors que celle des autres forces est locale et transitoire. L'empire appartient donc

sans conteste, à la première et tout se range finalement à ses lois. Elle garantit si bien la stabilité des mondes que le jeu des forces accidentelles est impuissant à le compromettre, sauf dans le détail. Malgré l'incessante agitation dont l'atmosphère, les eaux, et peut-être l'intérieur même du globe, sont le théâtre, sa masse garde un équilibre total d'une remarquable fixité. De même, quoique on ait constaté dans le Soleil des mouvements qui dépassent en grandeur tout ce que nous pouvons observer sur terre (taches et protubérances de la couronne), cet astre présente un diamètre dont la mesure micrométrique ne laisse surprendre aucune inégalité. Les perturbations partielles et passagères que les mondes peuvent subir ne modifient donc que par place et par moment l'équilibre de leurs matériaux, et l'ordre persiste dans l'ensemble avec une invariable constance, grâce à l'action préservatrice de la pesanteur qui efface à mesure, par une redistribution normale, les effets toujours circonscrits de dérangements éventuels.

## 2. COORDINATION COSMIQUE DES MOUVEMENTS.

### DE LA GRAVITÉ

Si l'on réserve le terme de « pesanteur » pour désigner la force quiescente qui s'évalue en poids, agit par pression et produit les effets d'équilibre, celui de « gravité » pourrait servir à dénommer le mode d'action de la force dont la puissance, exprimée en distances parcourues et temps révolus, détermine les effets de mouvement. Examinons, au point de vue des résultantes cosmiques, cette seconde classe de faits. Nous avons vu que les divers ordres de mouvements procèdent les uns des autres et se coordonnent par séries; il nous reste à montrer comment ils dérivent tous d'une même cause.

## A. — Résultantes cosmiques des mouvements directs.

*a.* — Le mode le plus simple de l'action motrice doit être considéré, non comme une conséquence, mais comme le principe même de la gravité. Le mouvement uniforme ne pourrait en effet se produire, dans les conditions qui lui sont propres, qu'en dehors de toute influence attractive, et a dû logiquement précéder la formation des centres. Il faut admettre qu'à l'origine il animait, en vertu d'une force immanente, les éléments dispersés de la substance des mondes qui, lancés en ligne droite dans toutes les directions, ne donnèrent sans doute lieu d'abord qu'à des effets d'élasticité ou de réaction analogues à ceux qui constituent les propriétés dynamiques de l'éther. Les atomes primordiaux de la matière pondérable furent ainsi amenés à se rencontrer et à s'unir en formant des agglomérations élémentaires où la gravité prit naissance. Il est présumable qu'elle exige, pour s'exercer, un minimum de masse et de distance qui, avant d'être atteint par les particules initiales, ne rendait possible pour elles que le mouvement uniforme. Il y aurait là un phénomène limite où s'opérerait une transformation de forces et de mouvements. Si l'on suppose la substance des astres disséminée dans l'espace, à un tel degré d'écartement et d'exiguïté que ses atomes cessent de s'attirer les uns les autres, il faudra nécessairement recourir au mouvement uniforme pour les déplacer, les mettre en contact et les grouper en agrégats, noyaux des mondes futurs. C'est pourquoi nous avons donné à ce mode de mouvement la qualification de « centrigène ».

Dès que la gravité devint active, le mouvement uniforme cessa d'être une condition générale de la matière et ne trouva plus à se produire que par accident, sous l'influence

des forces brusques et concurremment avec les effets de la pesanteur.

b. — Tandis que la gravité met fin, dès qu'elle s'exerce, au mouvement uniforme, elle produit le mouvement varié. La force continue qui appelle, avec une vitesse croissante, les éléments d'une masse vers son centre, explique, à partir de la formation des noyaux cosmiques, la précipitation des matériaux des mondes, leur mise en équilibre et leur retour à la stabilité quand ils l'ont accidentellement perdue.

L'étroite connexion des deux sortes de mouvements directs est rendue manifeste par leurs résultantes communes. Lorsque, à l'intérieur d'une masse cosmique, un corps est mu par une force instantanée, au lieu de suivre la seule loi du mouvement uniforme, il subit aussi celle de la gravité qui le fait dévier vers son centre et l'oblige à surmonter des obstacles. Le mouvement uniforme, qui préside à la genèse des mondes, n'a plus, dès que leurs germes existent, qu'un rôle subordonné ou plutôt il n'y a plus de mouvements uniformes; il n'y a que des mouvements composés bien vite ramenés aux lois prédominantes de la pesanteur.

La translation des astres dans l'espace est aussi la résultante de deux mouvements directs, l'un tangentiel ou de projection, qui serait uniforme s'il était seul, l'autre centripète, qui porterait les astres à tomber les uns sur les autres en vertu de leur attraction mutuelle. Les courbes décrites par leurs orbites sont la conséquence de cette composition de mouvements dont la gravité constitue l'agent régulateur.

## B. — Résultantes cosmiques des mouvements curvilignes.

*a.* — La gravité rend aisément compte des deux sortes d'effets qui caractérisent la rotation, puisque, d'une part, l'influence centripète qui lie les éléments du système impose à la masse un mouvement d'ensemble, uniforme quant à la durée; et que, de l'autre, ce même mouvement, qui force les parties inégalement distantes de l'axe à parcourir dans des temps égaux des distances inégales, développe en elles des tendances contrifuges. C'est la même force qui agit dans les deux cas, mais dans des sens différents.

*b.* — La circulation se rattache à la même cause par la rotation dont elle procède. La translation des astres sur leurs orbites s'explique par deux effets simultanés de la gravité produits sous l'influence des forces de projection et d'attraction dont la Dynamique comparée nous a montré le concert. Comme, suivant la même loi, des astres peuvent dériver les uns des autres par séries, des groupes ou systèmes de mondes se coordonnent, liés par des solidarités de mouvements.

Notre système solaire, séparé des systèmes stellaires les plus voisins par un intervalle immense et comme isolé dans l'espace, offre un remarquable exemple des relations susceptibles de s'établir entre des astres assez rapprochés pour réagir directement les uns sur les autres et harmoniser leurs mouvements. Là, plusieurs centaines et peut-être des milliers de planètes<sup>1</sup> dont les plus importantes

1. Le groupe des planètes télescopiques, dont plus de 200 ont été découvertes en moins de trois quarts de siècle (1800-1879), a été évalué par le Verrier à un nombre considérable d'après le volume total que l'analogie permet d'assigner à l'astre dont elles occupent la place et dont elles représentent pour ainsi dire la monnaie. Si, en effet, on admet que leur somme doit équivaloir à un  $\frac{1}{3}$  de la masse de la Terre, comme les 200 pe-

sont escortées de satellites, des myriades de comètes et des flux d'astéroïdes gravitent autour d'un astre central dont la masse imposante, mille fois supérieure à celle de toutes leurs masses réunies, les domine, les enchaîne par son attraction et les fait osciller autour d'un « cercle d'équilibre » dont elles ne peuvent s'écarter qu'entre des limites restreintes, parce que la gravité, modifiant leur vitesse, la ralentit quand elles s'éloignent et l'accélère quand elles se rapprochent.

Une influence pareille, mais extrêmement atténuée par la distance, s'exerce entre les étoiles parmi lesquelles notre Soleil, déchu de sa primauté relative, ne figure qu'à titre de simple unité. Les plus fortes présomptions et même des indices formels autorisent à croire que les systèmes stellaires et les nébuleuses obéissent comme les astres du groupe solaire aux lois de la gravité; mais la théorie des mouvements qui s'accomplissent dans un aussi vaste ensemble est encore indéterminée.

La rotation et la circulation, si étroitement unies qu'on ne les peut séparer, constituent deux effets de la même cause dont la puissance contraint d'abord les masses cosmiques à tourner sur elles-mêmes, puis lance sur leurs orbites les astres dérivés, les fait circuler de concert autour de centres hiérarchiquement subordonnés, et relie tous les corps célestes par la gravité qui leur est commune.

Enfin, les mouvements directs et les mouvements circulaires dérivent d'un seul principe d'action appliqué dans des conditions différentes et donnant lieu à des conséquences inégalement complexes. La gravité détermine les actions centripètes et les actions centrifuges. Le trait d'u-

tites planètes connues en composent à peine la 2500<sup>e</sup> partie, il resterait à en découvrir 800 fois autant, soit environ 160,000.

nion entre ces deux classes de mouvements est établi par la production du mouvement rotatoire où s'accomplit la plus intéressante des transformations dynamiques, la conversion de mouvements rectilignes, partiels et limités, en mouvements curvilignes, connexes et continus. Le fonctionnement régulier de la mécanique céleste résulte de l'accord de ces deux séries d'effets dont l'une produit et conserve chaque monde en particulier, tandis que l'autre établit entre les mondes des séries de rapports. Grâce aux divers modes d'action de la gravité, les astres sont à la fois distincts et solidaires, indépendants et connexes, stables et en mouvement. Liés par des corrélations d'influences, ils gravitent sans trouble et sans fin dans un ordre plein d'une harmonie majestueuse qui fait l'admiration du penseur et dont il nous reste à formuler la loi suprême.

CONCLUSION. — RÉSULTANTES DE L'ÉQUILIBRE  
ET DU MOUVEMENT. GRAVITATION UNIVERSELLE

La Dynamique générale doit, pour conclure, faire dépendre du même principe d'action l'ensemble des phénomènes d'équilibre et des phénomènes de mouvement. Leur accord oblige à regarder tous les faits de collocation comme la résultante d'une force unique dont les effets, variables suivant les conditions où elle s'exerce, se compliquent par degrés. Cette force, dont le mot de « gravitation universelle » exprime la généralité, représente à la fois la « pesanteur » considérée comme cause d'équilibre et la « gravité » considérée comme cause de mouvement. Leur distinction, purement verbale (car le terme de « gravité », de *gravis*, pesant, a le même sens que celui de « pesanteur »), n'implique point une dissemblance de nature et se réfère seulement aux modes de l'action dynamique. La pesanteur est une gravité passive, arrêtée par une résis-

tance et fixant les corps ; la gravité, une pesanteur active, libre d'obstacles et mouvant les corps ; mais la présence ou l'absence d'un support ne change rien à la cause ; c'est toujours la même force qui, virtuelle dans un cas, actuelle dans l'autre, agit dans des circonstances différentes, et son unité résulte de la facilité avec laquelle les corps passent, sous son influence, de l'état d'équilibre à celui du mouvement.

Pour effectuer la synthèse finale des vérités établies par la Dynamique, il suffit d'admettre que la gravitation, attribut essentiel de la matière pondérable, agit suivant une loi simple dans la totalité des corps. L'indication de cette loi se trouvait en germe dans celles par lesquelles Kepler avait assigné les mêmes expressions mathématiques à l'ensemble des mouvements planétaires. Newton identifia la cause de ces mouvements avec la cause des effets de la pesanteur terrestre et réduisit les trois lois de Kepler à une seule qui, se confondant avec l'unique loi de Galilée, prit une extension universelle. La science disposa dès lors d'une formule précise au moyen de laquelle on put rendre compte de toutes les manifestations de la force, au double point de vue de l'équilibre et du mouvement. Étant donné que la gravitation agit « en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances », tous les phénomènes dynamiques se systématisent et se coordonnent logiquement. Cette loi, stricte et sommaire, régit par séries de conséquences la multitude infinie des cas particuliers. La gravitation fait comprendre ce que l'ordre d'un monde a de fixe et ce qu'il a de changeant. Elle rend faciles à concevoir la stabilité des couches solides du globe, le nivellement des eaux, leur circulation sur les pentes, le balancement des marées et l'agitation de l'atmosphère. Dans un ordre plus général, elle explique la conformation sphéroïdale des astres, leur rotation sur eux-mêmes, leur aplatissement sous les pôles et leur renflement à l'équateur. On en déduit encore la translation des planètes

autour du soleil, celle des satellites autour des planètes, la courbe elliptique de leurs orbites et les perturbations séculaires que leurs éléments subissent. Enfin, les déplacements presque imperceptibles des étoiles et les apparences des nébuleuses attestent les effets d'une force dont la puissance s'étend jusqu'aux extrêmes confins de l'univers visible. Dans l'immense variété des mouvements des astres, la science ne voit que les multiples aspects d'un fait unique, expression générale du phénomène le plus familier, l'action de la pesanteur à la surface de la terre. Partout où la substance pondérable tombe sous la prise de nos sens, quelle que soit la grandeur ou l'exiguïté des masses, qu'il s'agisse de grains de poussière ou de systèmes de mondes, la loi de la gravitation s'applique avec rigueur : « la courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeur est, dit Laplace, réglée d'une manière aussi certaine que les orbites planétaires; il n'y a de différence entre elles que celle qu'y met notre ignorance. » (*Exposition du système du monde.*)

La théorie de la gravitation universelle, étayée sur l'ensemble des faits observés et se prêtant à des déductions sans fin, ramène à l'unité de cause l'ordre entier des phénomènes de collocation. Sa formule est si fertile en conséquences que deux siècles d'actives recherches sont loin de les avoir épuisées. La Dynamique, changeant ainsi de méthode, tend à devenir science de raisonnement. Elle ne sera achevée et parfaite que lorsqu'elle aura pu expliquer la totalité des effets qu'elle étudie par des résultantes plus ou moins complexes, mais toujours mathématiques de la loi de la gravitation.

Le seul point qui reste obscur dans cette grande théorie est la cause de la gravitation elle-même, car la formule newtonienne exprime simplement un fait, elle n'en donne pas la raison et se borne à constater le comment sans indiquer le pourquoi. Dans le principe, on avait attribué les

effets de la pensateur à une force d'« attraction » qui appellerait les corps les uns vers les autres ; mais c'était affirmer une qualité occulte dont la mise en action est absolument incompréhensible. L'esprit se refuse à concevoir comment un corps pourrait agir à distance, c'est-à-dire là où il n'est pas, sans l'intermédiaire d'autres corps qui transmettent la puissance. Newton lui-même n'a parlé de l'attraction qu'à titre d'hypothèse, disant que les choses se passaient « comme si les corps s'attiraient <sup>1</sup> ». Cette idée malencontreuse d'attraction et l'embarras d'expliquer par elle ou sans elle le mode d'action de la force furent la principale cause de la difficulté qu'éprouva, pendant près d'un siècle, la théorie de la gravitation à se faire admettre sur le continent.

Si l'on écarte comme irrationnelle et oiseuse l'hypothèse d'une force attractive, il faut nécessairement recourir à celle d'un milieu dynamique interposé, capable de produire et de transmettre à toute distance les effets de la pensateur. On assigne généralement ce rôle à l'éther, substance élémentaire, extrêmement atténuée, mais élastique, dont l'expansion remplit l'espace, sert de lien aux mondes, pénètre tous les corps et donne à l'univers son unité.

La conception d'un éther (*αιθήρ*) remonte aux philosophes grecs. Aristote, qui en composa son élément céleste ou « quinte-essence », complément des quatre éléments terrestres, l'appelle « le corps animé d'un mouvement éternel » (*Météorologie*, liv. I). Toutefois, les anciens ne virent dans cette donnée, pour eux purement imaginaire, qu'un thème à spéculations métaphysiques, et le sens abstrait du mot « quintessence » témoigne d'une foi médiocre en la réa-

1. Il est ailleurs plus explicite : « La supposition d'une gravité innée inhérente et essentielle à la matière, tellement qu'un corps puisse agir sur un autre à distance, est pour moi une telle absurdité que je ne crois pas qu'un homme qui jouit d'une faculté ordinaire de méditer sur les objets physiques puisse jamais l'admettre ». (3<sup>e</sup> Lettre au D<sup>r</sup> Bentley.) Il dit encore, dans son *Optique* (Quæst. 23) : « Quam ego attractionem appello fieri potest ut ea efficiatur impulsu vel alio modo nobis ignoto optice ».

lité qu'il était chargé d'exprimer. Les modernes, reprenant la théorie de l'éther pour l'adapter à une explication positive des faits, en ont mieux tiré parti. Descartes lui attribua, sous le nom de « matière subtile » une fonction dans le mécanisme de l'univers. Newton s'engagea un moment dans la même voie : « Je cherche dans l'éther, écrivait-il à R. Boyle, la cause de la gravitation » (*Lettre* du 28 février 1678). Mais il ne donna pas suite à cette idée. Huyghens la reprit sans réussir à la faire admettre. Euler insista davantage et généralisa les fonctions hypothétiques de l'éther. Lesage fit de la conjecture d'un milieu intercosmique l'objet des méditations de toute sa vie. L'existence d'un fluide éthéré est désormais hors de doute et des physiciens comme Lamé<sup>1</sup> ont pu la déclarer plus manifeste pour la pensée que celle même de la matière ne l'est pour les sens. Nous verrons plus loin quelle part considérable on attribue à l'éther dans la production des phénomènes physiques et chimiques. En Dynamique, il permet de concevoir la gravitation comme une résultante de son élasticité.

Supposons l'espace rempli par une substance extrêmement raréfiée et diffuse à laquelle conviendrait le nom paradoxal de « matière immatérielle », car elle a de la matière la réalité nécessaire, et son immatérialité résulte de ce fait qu'elle échappe à la perception (la matière, dans l'acception usuelle du mot, étant définie « ce qui tombe sous les sens »). Impondérable, intangible, invisible, cette substance diffère profondément, par ses caractères négatifs, de la substance des corps qu'il nous est donné de voir, de toucher et de peser; néanmoins, elle est également douée de propriétés dynamiques et cela rend possible l'action réciproque de l'une sur l'autre. On pourrait concevoir l'éther comme un assemblage illimité

1. Sur l'existence et les propriétés de l'éther, V. Lamé, *Mémoire sur les lois d'équilibre du fluide éthéré*. (*Journal de l'École polytechnique*, t. XIV, cah. 23.)

d'atomes indépendants, tous animés d'un double mouvement de translation et de rotation. Le principe de la dissemblance entre la substance éthérée et la matière pondérable consisterait en cela que les éléments de la première se meuvent sous les seules lois de leur activité propre et de l'élasticité générale de l'ensemble, au lieu que les éléments de la seconde constituent des agrégats fixes, relativement inertes, exposés par conséquent à subir les influences du milieu sans pouvoir réagir avec énergie contre lui. Les atomes éthérés, projetés en tous sens dans l'espace, doivent se choquer, rebondir comme s'ils étaient élastiques<sup>1</sup> et produire une tension uniforme dont rien ne signale la puissance tant que ses effets se bornent à réagir contre elle-même.

Dans un milieu ainsi constitué, imaginons un amas de matière pesante et voyons comment les deux sortes de substances, l'une active, l'autre passive, vont se comporter : l'éther, enveloppant cette masse, exercera sur elle des pressions égales dans tous les sens et la contraindra par suite à se condenser vers son centre jusqu'à ce que la résistance opposée par ses éléments à une pénétration mutuelle contre-balance la tension générale du milieu. La masse, ainsi modelée par une force centripète, prendra la forme sphérique, la plus favorable à l'équilibre de ses parties, et aura pour centre de gravité le point où les pressions convergentes de l'éther atteignent leur maximum d'effet.

En place d'un corps unique subissant de tous les côtés, dans des conditions pareilles, l'influence dynamique de l'éther, considérons maintenant deux corps séparés par une distance quelconque : ils se feront écran l'un à l'autre

1. Si les atomes de l'éther sont simples, ils ne peuvent pas être élastiques puisque l'élasticité constitue la propriété qu'ont les particules d'un système de revenir à leurs positions normales quand elles en sont écartées; mais la rotation produit des effets analogues et permet aux corps durs de rebondir en cas de choc.

dans le sens de la ligne qui les rejoint et, tandis que leurs faces opposées subiront toute la pression de l'éther, leurs faces en regard supporteront une pression moindre. La diminution sera proportionnelle à l'ouverture du cône circonscrit tracé entre les deux périmètres. Or, comme les dimensions de ce cône varient, pour la même base, en raison inverse du carré de la hauteur, la tendance des masses à se porter l'une vers l'autre sera inversement proportionnelle au carré de la distance. Quant à l'influence exercée par la gravité en raison directe des masses, elle s'expliquerait peut-être, comme le pensaient Huyghens et Euler, par la grande fluidité de l'éther qui, pénétrant les corps, agit sur chacun de leurs éléments et détermine une action totale en proportion du nombre de ces particules.

Toutefois, si ces indications paraissent plausibles dans ce qu'elles ont de sommaire, bien des points, qu'il importerait d'éclaircir, restent dans l'ombre. La théorie qui s'efforce d'expliquer la gravitation par l'élasticité d'un fluide intercosmique est encore pleine de lacunes. On ne connaît pas l'intensité moyenne de la tension de l'éther et ses variations possibles. On ignore si l'éther diffus agit directement sur les éléments de la matière pondérable ou par l'intermédiaire de petites atmosphères subordonnées à leur mode de mouvement. On ne sait pas davantage avec quelle vitesse se propage l'influence de la gravité, car, pour en prendre expérimentalement la mesure, il faudrait pouvoir créer ou supprimer à volonté des centres d'action, et cela nous est interdit. Il est même permis de douter que la loi de la gravitation, établie d'après les données d'une observation bien restreinte soit aussi universelle qu'on le suppose et se comporte partout de la même manière, car ce qu'on ignore de ses effets est incomparablement plus vaste que ce qu'on en connaît. Si, par exemple, ces effets se trouvaient, comme ceux de la cohésion, contenus entre certaines limites, la loi ne serait peut-être applicable ni aux intervalles atomiques ou moléculaires, ni à des régions loin-

taines de l'espace, dans l'hypothèse possible où elle subirait une atténuation graduelle qui ne l'empêcherait pas d'exprimer avec une approximation suffisante la cause des mouvements dans le système solaire, mais modifierait son action au delà de distances déterminées et laisserait une autre force coordonner les systèmes sidéraux suivant des lois inconnues. Enfin, on ne peut pas dire si l'éther est continu dans sa masse ou discontinu et composé d'atomes primordiaux. Poisson croyait à la discontinuité de sa substance, à cause de la difficulté de concevoir la transmission transversale des vibrations lumineuses à travers un milieu continu... L'explication de la gravité par une action de l'éther ne serait donc pas une solution dernière et soulèverait une multitude de problèmes; mais elle ajouterait un nouveau chaînon à la série des causes. « Faire dériver l'ignorance de sa source la plus élevée », n'est-ce pas à cela que se réduisent, comme on l'a dit, tous les progrès de notre savoir?



## CHAPITRE III

### MÉTHODE DE LA DYNAMIQUE. DE L'OBSERVATION

Comme les sciences qui précèdent, la Dynamique réclame une méthode appropriée à la nature spéciale de son objet, car ni l'intuition, ni la déduction n'auraient pu suffire à en procurer la connaissance.

La méthode intuitive dont l'efficacité se borne à constater des évidences était impuissante à résoudre les problèmes de collocation par cela seul que ce sont des problèmes, c'est-à-dire que les choses cessent d'être manifestes. Dans ce nouvel ordre de recherches, les difficultés augmentent, les moyens d'information se restreignent et la certitude décroît. En Ontologie, tous les sens procurent avec une égale sûreté des notions d'existence ; en Dynamique, trois seulement, qui affirment le mieux l'extériorité des choses, le sens musculaire, le toucher et la vue, renseignent sur les positions du corps. Leurs aptitudes sont même assez limitées à cet égard et les indications qu'ils fournissent exigent le contrôle de la réflexion. Les sensations musculaires, d'où procèdent les idées de force, de poids, de résistance et de mouvement, ne nous livrent que des données très sommaires, sans pouvoir opérer des analyses précises et marquer des degrés exacts. Le toucher, sens particulier de l'investigation,

dynamique, est inégal et variable. Il apprécie mal les poids, les distances et les vitesses. Alors que les parties les plus sensibles de la peau (le front, les paupières, les lèvres, le dos de la main) sont impressionnées par des poids de 2 milligrammes, les parties douées d'une sensibilité moyenne (la paume de la main, les jambes) ne perçoivent qu'un minimum de 5 centigrammes, et les parties les plus obtuses (les ongles, le talon) restent insensibles à des poids moindres de 1 gramme. Quant à la mesure des distances ou à la faculté de localiser les sensations, il résulte des expériences faites par les Weber que le bout de la langue discerne les deux pointes d'un compas à un intervalle de 0<sup>m</sup>,001; l'extrémité de l'indicateur à 0<sup>m</sup>,002; la seconde articulation des doigts à 0<sup>m</sup>,004; la paume de la main à 0<sup>m</sup>,01; le front à 0<sup>m</sup>,02; la poitrine à 0<sup>m</sup>,04; et le dos à près de 0<sup>m</sup>,08. (Bain, *Les sens et l'intelligence*, p. 144.) Enfin la vue, qui embrasse des ensembles et mesure les distances à l'aide des angles sous-tendus par les rayons visuels, est sujette à une foule d'illusions et de méprises. Un peu plus, un peu moins de transparence dans l'air rapproche ou recule les plans éloignés. Trop lents ou trop rapides, les mouvements nous échappent et le regard ne pourrait saisir ni les oscillations séculaires des couches terrestres, ni les déplacements imperceptibles des étoiles, ni les inégalités de vitesse d'un corps qui tombe, ni la trajectoire d'un projectile. Ce sens est, en outre, le jouet d'une foule de prestiges. Les ondes qui se forment à la surface de l'eau nous semblent animées d'un mouvement de progression alors qu'elles oscillent sur place et que l'ondulation seule se transmet; des corps immobiles nous paraissent se mouvoir quand nous-mêmes nous changeons de lieu; le ciel tourne en apparence autour de la terre, tandis que la terre tourne simplement sur elle-même, et cette erreur, que le raisonnement seul pouvait corriger, a été longtemps universelle. Dès que l'intuition sortait de l'évidence des constatations ontologiques, elle n'avait donc

qu'une certitude restreinte et ses données, en matière de collocation, étaient incomplètes ou erronées. Tout ce que la perception pouvait apprendre et le langage exprimer se réduisait à distinguer si les choses étaient « près » ou « loin », « au-dessus » ou « au-dessous », « devant » ou « derrière », « à droite » ou « à gauche, » car cela seul était évident de soi. Mais des indications aussi vagues ne pouvaient avoir qu'une utilité bien bornée pour une science dont les déterminations auraient eu besoin d'être minutieuses, précises et raisonnées. L'intuition, nécessaire pour constater la réalité des corps et signaler leurs aspects sensibles, était conséquemment impropre à mesurer et à coordonner les faits de situation.

La déduction n'était pas moins incapable de résoudre les problèmes de ce genre, parce que la Mathématique, science abstraite, n'a aucune prise sur les réalités concrètes. Partant de vérités manifestes, elle spéculait sur des idéalités pures et scrutait les rapports logiques des conceptions de la grandeur, sans jamais considérer la condition effective des choses. En fait de collocation, au contraire, tout est contingent et, dès le début, il faut tenir compte de données particulières. Les corps peuvent, en effet, occuper une infinité de places différentes et admettre les dispositions les plus diverses. Il n'y a pas de raison à priori pour qu'ils soient situés en tel point de l'étendue plutôt qu'en tel autre, et unis par telle relation dont la nécessité s'impose. Nul axiome n'en décide. Il faut constater d'abord l'état réel des choses et la nature des rapports, sauf à raisonner ensuite sur les conséquences. Ce n'est plus une question de logique où la déduction suffit; c'est une question de fait qu'elle ne saurait trancher et où l'observation doit intervenir. « On peut, dit M. Huxley, comparer les mathématiques à un moulin d'un travail admirable, capable de moudre à tous les degrés de finesse; mais ce qu'on en tire dépend de ce qu'on y a mis et, comme le plus parfait moulin du monde ne peut donner de la farine de

froment quand on y a mis des cosses de pois, de même, des pages de formules ne tireront pas un résultat certain d'une donnée incertaine. » Pour la Dynamique, la méthode déductive est un outil, un instrument de trituration et d'analyse; les faits, qui constituent l'objet véritable de la science doivent être déterminés par des moyens à elle propres, aptes à les saisir dans leur contingence.

A. Comte s'est donc gravement mépris quand il a cru que la mécanique rationnelle était l'œuvre du raisonnement seul et devait, à ce titre, figurer comme partie intégrante dans la Mathématique. Sans doute, la Dynamique abstraite fait un continuel usage de la déduction; néanmoins, elle diffère de la Mathématique en ce qu'elle ne réussirait pas à se construire avec cet unique secours. Pour séparer nettement les deux sciences et les deux méthodes, il suffit de noter ce trait essentiel que les relations des grandeurs se déduisent d'« axiomes », c'est-à-dire de vérités si manifestes et si nécessaires que nul ne peut les mettre en doute, au lieu que la mécanique part de « principes » ou faits généraux qui, pour trouver créance, ont dû préalablement être constatés et vérifiés. A. Comte réduit autant qu'il le peut cette part inévitable de données concrètes : « ce qui établit, dit-il, *la réalité* de la mécanique rationnelle, c'est d'être fondée sur *quelques faits immédiatement fournis par l'observation*... Trois lois *physiques* du mouvement fournissent à la mécanique rationnelle *une base expérimentale* suffisante sur laquelle l'esprit humain, par de simples spéculations logiques et *sans consulter davantage le monde extérieur*, peut solidement établir l'édifice systématique de la science. » (*Cours de philos. posit.*, t. I, p. 393 et 417.) Mais le rôle de l'observation, même réduit de la sorte à la connaissance de trois lois, n'est pas peu de chose; c'est beaucoup au contraire; c'est le principal, sinon tout. Par cela seul que des considérations de fait interviennent dès le début, qu'il s'agit de « réalités », de « lois physiques », de « base expérimentale », de « monde

extérieur », la méthode mathématique n'a plus qualité pour poser les fondements de la science et sa fonction subordonnée se réduit à raisonner sur des principes institués en dehors d'elle. Ces notions primordiales, qui représentent, non plus des généralités absolues, comme les axiomes, mais des particularités d'observation, n'apparaissent point d'elles-mêmes dans l'ordre réel et, soit pour les découvrir, soit pour les adapter ensuite à la complexité des faits, il fallait employer une méthode autre que la déduction.

Cette méthode qui met les principes en lumière, utilise le raisonnement à ses fins et se plie à la relativité des phénomènes, s'appelle l'observation. L'unique moyen de connaître les situations des masses, leurs rapports et leurs lois, consiste à constater d'abord la réalité des choses, à déterminer ensuite leur ordre de collocation et à s'assurer, par des mesures précises, si cet ordre reste fixe ou se modifie avec le temps. On doit alors analyser les modes d'action de la force, tenir compte de données simultanées ou successives, en un mot scruter les faits précédés de leurs antécédents, entourés de leurs circonstances et suivis de leurs conséquences.

Une pareille manière de procéder n'aurait pas eu de raison d'être en Ontologie, où la vérité, directement saisie, est tenue d'être toujours évidente. Elle convenait moins encore à la Mathématique dont les spéculations portent sur des concepts abstraits. Elle s'imposait au contraire à la Dynamique obligée de constater des existences et de mesurer des grandeurs. Ce n'était plus assez, pour établir des situations, d'affirmer la réalité des choses; il fallait en outre évaluer des quantités, figurer des dimensions. Il ne suffisait pas davantage de raisonner sur les relations idéales des conceptions de l'entendement; il fallait transporter les vérités mathématiques de l'ordre abstrait dans l'ordre concret, appliquer aux faits des lois théoriques

et opérer dans le monde réel des mensurations exactes.

C'est ce que signifie le mot « observer ». Le langage lui attribue d'ordinaire un sens très large et l'observation, qui se prête à l'étude des diverses classes de phénomènes, semble pouvoir suffire à tout. Cependant, son efficacité se borne à reconnaître les situations, c'est-à-dire à mesurer des distances, des angles, des poids et des temps. Si restreints que puissent paraître ces résultats, la Dynamique n'exige pas davantage. Le toucher et la vue fournissent les indications nécessaires. Le premier de ces sens l'emporte par la précision, le second par l'étendue et la multiplicité des renseignements. Comme la méthode emprunte le plus aux impressions visuelles, elle a pris le nom d'observation.

Le procédé de l'observation se lie à celui de l'intuition puisqu'il fait également intervenir le témoignage des sens ; mais il diffère en ce qu'au lieu de s'y réduire il joint la mesure des grandeurs à la constatation des existences. Alors qu'une simple inspection peut rendre certaine la réalité des choses, une étude minutieuse est nécessaire pour déterminer leur situation. Malgré l'analogie des termes, voir et regarder constituent deux opérations distinctes qui caractérisent deux méthodes. Voir est un fait d'intuition et regarder un acte d'observation. Dans le premier cas, il suffit d'ouvrir les yeux ; les objets se peignent d'eux-mêmes sur la rétine ; mais la perception est sommaire et l'idée de l'ensemble confuse. Dans le second, il faut une attention réfléchie ; on veut se rendre compte de ce qu'on voit, examiner de près les choses, en épuiser autant que possible le détail, et l'on arrive à noter une foule de particularités dont chacune a son prix. Un esprit observateur remarque ainsi une quantité de petits faits qui échappent à l'inattention des simples voyants. L'évidence directe n'est donc plus ici que le point de départ de l'observation qui pénètre bien plus avant dans la connaissance. L'observation réalise ce progrès en s'appliquant à surprendre des indices peu

apparents par eux-mêmes, mais susceptibles de devenir manifestes grâce à des relevés exacts.

L'observation procède donc de la déduction et lui emprunte, outre les règles établies pour évaluer les quantités et les théorèmes pour figurer les dimensions, l'art de suivre, aussi loin qu'elles se prolongent, les conséquences mathématiques des faits avérés. Toutefois elle vise un but différent et, au lieu de spéculer sur des idéalités pures, elle a pour fin de déterminer les situations des réalités effectives.

Ainsi l'observation, sans introduire dans l'étude des choses aucun moyen vraiment nouveau de recherche, crée une méthode nouvelle en combinant les deux précédentes. Là où, séparées, l'intuition et la déduction seraient impuissantes, associées, elles se complètent l'une l'autre, se prêtent de mutuels secours et procurent une latitude imprévue d'investigation. D'une part, en effet, la mesure des grandeurs donne à la méthode intuitive la précision qui, dans le détail, lui faisait défaut, étend ses ressources et la rend attentive aux moindres choses; de l'autre, l'application de la méthode déductive à l'ordre réel l'oblige à sortir de la théorie abstraite, l'appelle sur le terrain des faits, la force à devenir pratique et lui livre tout un monde à conquérir. De cet accord intime entre l'intuition, aidée de la réflexion, et la déduction transportée dans l'ordre phénoménal, résultent le génie propre, les aptitudes et le pouvoir de l'observation.

Cette méthode ne se réduit donc pas, comme on l'admet communément, à constater la réalité des faits, car si elle n'allait pas au delà, elle se confondrait avec l'intuition. L'observation doit être entendue dans un sens moins limité. Elle implique le concours de la déduction, puisque la mesure précise des choses nécessite l'emploi d'artifices mathématiques et amène à raisonner sur les rapports des grandeurs. La distinction de deux mécaniques, l'une rationnelle ou purement déductive, l'autre pratique ou

d'observation, tient à un malentendu sur la manière de définir la méthode, indûment bornée à la capacité d'opérer des relevés de faits, tandis que, pour l'observation véritable, la constatation des faits et l'art d'en raisonner sont inséparables. En d'autres termes, observer n'est pas seulement regarder, c'est aussi déduire. La Dynamique n'étudie les faits que pour en tirer des séries de conséquences, et le raisonnement n'est instructif qu'appliqué à des faits constants. Néanmoins, le lien qui unit les deux méthodes, primitivement distinctes, est susceptible de se resserrer et de se relâcher tour à tour. La science des situations peut les disjoindre dans une certaine mesure suivant que, pour des recherches spéciales, elle a intérêt à employer de préférence l'une ou l'autre, et les faits sont considérés tantôt comme des grandeurs d'ordre particulier par la mécanique rationnelle, tantôt dans leur réalité concrète par la mécanique proprement dite et l'astronomie physique; mais ce dédoublement facultatif de la méthode d'observation ne doit pas faire admettre deux sciences indépendantes. C'est toujours le même sujet que l'on examine sous deux aspects, et la connaissance de l'ensemble se compose à la fois de données de faits et de déductions mathématiques,

Malgré la simplicité de ses éléments, la méthode d'observation était difficile à instituer. Elle exigeait, outre un fonds de connaissances acquises et une intelligence déjà exercée, de la suite dans les recherches et une exactitude malaisée à obtenir dans le détail. Les animaux les plus intelligents ne sont pas capables d'observer. Ils ont sans doute des notions intuitives sur la situation des choses perçues et savent très bien les retrouver quand elles restent en place ou les atteindre quand elles changent de lieu. Mais si l'on ne peut leur refuser une sorte de prescience des lois de la Dynamique, on ne saurait leur en accorder la connaissance raisonnée. Ils assistent, ainsi que nous, aux révolutions des astres et,

malgré l'intérêt qu'ils auraient à les prévoir, puisqu'ils en subissent également l'influence, ils n'ont pas d'astronomie. Les enfants eux-mêmes ne deviennent observateurs qu'assez tard. Durant le premier âge, ils se rendent mal compte des distances et, lorsque leurs yeux ravis aperçoivent les étoiles, ils étendent la main pour les saisir. Chez eux, la vue n'a pas encore été mise à point par des expériences répétées. De plus, la réflexion leur fait presque entièrement défaut. Peu à peu, cependant, grâce à la comparaison d'une foule de grandeurs mesurées par divers sens, les appréciations se rectifient. L'attention, d'abord tout entière à la sensation présente, discerne, analyse, compare et, au terme d'un assez long apprentissage, l'être qui raisonne est mis en état d'observer méthodiquement.

Le principal obstacle tenait ici à la difficulté d'opérer des mesures exactes dans l'ordre des réalités concrètes. La Mathématique établit des rapports d'une rigueur absolue parce que, spéculant sur des abstractions, elle conclut simplement à des identités logiques; mais la Dynamique, obligée d'appliquer aux choses ces lois idéales, n'aboutit qu'à des résultats imparfaits, à cause de notre impuissance à saisir des inégalités minimales avec des moyens limités de perception. La science se trouve arrêtée, dans sa recherche de la précision, par une barrière fatale et ne peut prétendre qu'à des approximations. La Mathématique, en passant de la théorie aux faits, perd en partie son caractère de science exacte. Tombée du ciel, comme Vulcain, elle devient boiteuse en touchant la terre. Une part d'incertitude se mêle à toutes les appréciations de grandeurs réelles. On le sait de reste :

« Plus d'une erreur passe et repasse  
Entre les branches d'un compas. »  
(Béranger, *Les sciences*.)

**Autant les vérités mathématiques sont théoriquement**

sûres, autant leur application laisse à désirer dans la pratique. Tout ce qu'on peut obtenir, c'est un à peu près qu'à force d'attention et de soin on tâche de rendre de plus en plus précis, sans qu'il puisse jamais le devenir tout à fait. Les efforts des observateurs tendent sans cesse à supprimer ce que leurs mensurations ont de fautif. La moindre erreur entraîne en effet des conséquences que la meilleure logique ne réussirait pas à corriger, car raisonner sur un fait faux est plutôt propre à étendre le mal qu'à l'atténuer.

L'observation devait donc viser à mettre dans la mesure des données de la Dynamique toute la rigueur que comportaient ses ressources et chercher à tenir compte des moindres inégalités de valeur. Parvient-on, en s'aidant d'ingénieux artifices, à saisir et à supputer des quantités d'une petitesse invraisemblable, comme des millièmes de millimètre en distance, des millionnièmes de gramme en poids, des millionnièmes de seconde en durée, la science en retire des facilités d'exploration et des progrès de connaissance. Mais pour atteindre à ce degré de certitude dans le détail, il fallait disposer d'instruments susceptibles d'ajouter soit à la portée de la vue, soit à la délicatesse du toucher, et découvrir des procédés pour mesurer le plus exactement possible des poids, des angles et des temps. Sans expédients de ce genre, l'observation n'irait pas loin. L'homme a su imaginer diverses sortes d'appareils qui sont comme des sens complémentaires par lesquels il supplée aux lacunes ou aux défauts de ceux que la nature lui a départis. Des systèmes variés de balances procurent le moyen d'apprécier dans les corps l'action de la pesanteur à tous les degrés d'intensité, depuis les cent millionnièmes de gramme qu'accuse la balance de torsion, jusqu'aux masses cosmiques dont le pendule permet de calculer le poids. Grâce aux instruments d'optique, l'œil, acquérant une puissance inespérée de perception, voit l'invisible, scrute les infiniment petits et sonde

l'immensité. Les lunettes, télescopes et microscopes amplifient les images des choses. Les mètres, verniers, micromètres, réticules, graphomètres, cercles divisés, etc., servent à mesurer les distances linéaires ou angulaires. Les appareils chronométriques, gnomons, clepsydres, pendules, chronomètres, machines parallactiques, etc., donnent la mesure du temps et l'on arrive à constater des vingt millièmes de seconde. Mentionnons enfin les objectifs achromatiques, les lunettes méridiennes et même les catalogues d'étoiles. Ce matériel d'exploration, si développé de nos jours et dont la confection représente ce que l'art du constructeur sait produire de plus parfait, se trouve réuni dans des locaux appropriés qui portent le nom d'« observatoires », et en dehors desquels on ne pourrait effectuer que des recherches très bornées.

Tant d'habiles inventions ne suffisaient point encore; il fallait de plus rendre inattaquable la certitude des résultats en faisant subir aux données de l'observation les corrections suggérées par la théorie, afin d'éviter les causes d'erreur qui proviennent, soit de la position de l'observateur (réfraction et parallaxe ordinaire), soit des mouvements complexes de sa base d'opération (parallaxe annuelle, précession des équinoxes, aberration et nutation).

Une dernière difficulté résultait, pour la Dynamique, de la nécessité d'établir des systèmes afin de coordonner les notions de détail, acquises séparément. L'observation livre une à une les constatations de faits et laisse l'ensemble incohérent. Toute tentative pour grouper ces indications éparses, les unir par des explications communes et les soumettre à des lois, implique une conception idéale des modes d'action de la force, conception que l'esprit doit tirer de son propre fonds, car les effets seuls apparaissent; les lois restent cachées, et nulle part la nature n'a pris soin d'en écrire pour nous la formule. L'obligation de recourir à des vues de l'entendement pour

interpréter l'ordre et la cause des phénomènes semble introduire dans la science quelque chose de conjectural et de subjectif; néanmoins, il ne faut pas confondre ces théories nécessaires avec les hypothèses facultatives qu'échafaudent les métaphysiciens. Les systèmes de la science résument des collections de faits, et l'intelligence n'y met de sien, pour parler comme Montaigne, « que le filet à les lier ». Les systèmes de la métaphysique, au contraire, imaginés à priori, sans qu'il soit tenu compte de la réalité des choses, n'en acceptent pas le contrôle et prétendent s'imposer d'autorité à la raison; mais ils ne sauraient y parvenir parce que, loin de la satisfaire, ils l'embarrassent de leurs contradictions. Les théories de la Dynamique sont l'expression abstraite d'un ensemble de phénomènes, la formule synthétique de l'ordre qui existe dans leurs rapports et, s'il est plus malaisé de les établir sur preuves, il est moins facile de les ébranler une fois prouvées. Leur certitude augmente à mesure que s'accroît le nombre des faits dont elles rendent compte et que diminue celui des données conjecturales sur lesquelles on les appuyait d'abord. Lorsque, par suite de ce double progrès d'extension quant aux faits coordonnés et de réduction quant aux hypothèses admises, la théorie se ramène à une seule hypothèse, très simple et très claire, suffisante pour expliquer tous les faits connus, comme la gravitation universelle en est un admirable exemple, elle n'a plus rien de précaire, force les convictions et prévaut à titre de loi démontrée, investie désormais d'une évidence presque égale à celle des axiomes. Mais la science n'a pas atteint ce faite sans de longs efforts, et le besoin d'effectuer d'aussi vastes synthèses, de concevoir et de maintenir les théories d'accord avec la réalité des faits observés, compliquait singulièrement les problèmes à résoudre.

La méthode d'observation n'a réussi à se constituer pleinement qu'à une date assez tardive et son emploi

raisonné est de beaucoup postérieur à celui de la déduction, qui elle-même avait suivi de très loin l'intuition. Le moment où l'esprit humain fut capable d'observer avec suite et avec profit pourrait être marqué par l'établissement de deux sciences particulières qui ont dû précéder la Dynamique, ouvrir sa voie et préparer ses éléments, la géographie et l'astronomie. La première détermina les lieux terrestres, généralement fixes, et la seconde étudia dans les révolutions des astres les mouvements les plus réguliers de la nature, les plus propres, conséquemment, à fournir la mesure de la durée. Toutefois, bien des siècles s'écoulèrent avant qu'une méthode se dégagât de recherches où dominait l'empirisme. Ce grand résultat ne fut guère obtenu que vers l'époque d'Hipparque, où la géographie et l'astronomie, contractant avec la Mathématique une étroite alliance, transformèrent des données confuses en connaissances exactes. Déjà, sans doute, Aristote, Hippocrate même, avaient préconisé l'emploi de la méthode d'observation; mais ils la détournaient de son but en l'appliquant prématurément à l'étude des phénomènes les plus complexes, alors qu'elle n'a d'utilité directe que pour celle des plus simples. C'est surtout dans l'âge moderne, et principalement à partir du xvii<sup>e</sup> siècle, que l'art d'observer a réalisé ses plus grands progrès. Il convient de distinguer, dans l'histoire de ses développements, quatre phases en rapport avec les sections que nous avons établies dans la science.

La Statique pouvait se contenter des moyens d'observation les plus bornés et d'artifices sommaires. Pour scruter les conditions de l'équilibre, il suffisait en effet de mesurer, une fois pour toutes, des distances, des angles et des poids. Ces données s'expriment en nombres, et leur détermination se réduit à de simples opérations d'Arithmologie. Les systèmes de métrique, la théorie du levier et l'usage de la balance, instruments essentiels

de cette étude, remontent aux temps les plus anciens.

Des modes d'exploration plus complexes s'imposent à la science du mouvement. Outre les observations simultanées, nécessaires pour établir des points de repère fixes, il faut alors faire des observations successives, constater des situations variables, suivre les corps dans le cours de leurs déplacements, reconnaître des directions, supputer des temps, évaluer des vitesses, tous problèmes dont la solution réclame le secours d'une Géométrie savante. La difficulté de cet ordre de recherches a conduit la méthode à ses plus ingénieux perfectionnements. Deux siècles ont été consacrés à l'étude des mouvements planétaires. Celle des mouvements stellaires, abordée de nos jours, oblige d'employer des procédés d'une incomparable précision.

La Dynamique comparée n'aurait pas pu se fonder sans un nouveau progrès de méthode. Par cela même qu'elle établit des corrélations entre les divers modes d'action de la force, elle doit combiner les moyens d'étude, relier les faits par séries et s'appliquer à rendre, d'une part, les observations connexes, de l'autre, les explications concordantes.

Enfin, la Dynamique générale, pour rattacher à la même cause la totalité des faits, avait besoin d'instituer une sorte d'observation universelle, capable d'embrasser l'ensemble des manifestations de la force et d'en formuler la synthèse. C'est à elle qu'incombe la tâche d'établir et de vérifier les systèmes où la science résume ses notions les plus étendues. Les lois de la Dynamique, expression de l'ordre intégral des faits de situation, entraînent de vastes séries de conséquences qui doivent être logiquement développées. Parvenue à ce point, la science paraît changer de méthode, employer de préférence la déduction et devenir, comme la Mathématique (à laquelle, d'ailleurs, elle emprunte ses procédés d'analyse et ses formules d'équation), une simple affaire de raisonnement. « L'as-

tronomie, dit Laplace, qui, par la dignité de son objet et la perfection de ses théories, se vante d'être le plus beau monument de l'esprit humain..., se fait gloire de n'être plus séduite par les illusions des sens, d'avoir éliminé entièrement l'empirisme et de s'être réduite à n'être plus qu'un grand problème de mécanique, où la plus profonde géométrie est nécessaire, mais où l'observation ne l'est plus. » (*Exposition du système du monde*, 1824, t. II, pp. 3 et 41.) Peut-être l'affirmation est-elle un peu absolue, car on ne voit point jusqu'ici qu'on ait supprimé les anciens observatoires comme désormais inutiles, et même la tendance serait plutôt à en fonder de nouveaux, si dispendieux que puisse être leur établissement. Il ne sera jamais possible d'éliminer l'observation d'une science de faits. Seulement, sa fonction se modifie, et, au lieu de servir, comme dans le principe, à la découverte des lois, son principal rôle consiste maintenant à vérifier leurs conséquences. La déduction, en effet, autorise à prévoir des résultats qu'il importe de constater, en leur lieu et à leur date, à mesure qu'ils se produisent. Ce pouvoir de prédire à coup sûr est la preuve la plus péremptoire de la justesse des théories, et l'observation qui la confirme rend encore à la science un inappréciable service. Lorsqu'on est arrivé à dresser pour l'avenir des cartes du ciel, à marquer par avance la route des astres, à déterminer l'instant précis de leurs conjonctions ou de leurs oppositions (éclipses), à fixer pour chaque moment donné leurs situations respectives (almanachs, éphémérides, tables de la connaissance des temps...), à signaler même aux observateurs des mondes jusqu'alors inaperçus (planètes Neptune et Vulcain, satellites de Sirius et de Procyon), la méthode n'a plus rien à désirer en fait de certitude. L'évidence est acquise et la science en possession de vérités qui pourront bien être étendues, mais non plus ruinées par le temps.



# TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER

## INTRODUCTION

	Pages
THÉORIE DES SCIENCES.....	I

## PRÉLIMINAIRE

### DÉTERMINATION DES SCIENCES

Conditions de l'établissement des sciences.....	3
I. — Définition des sciences.....	5
II. — Programme des sciences.....	17
III. — Méthodes des sciences.....	36
Tableau synoptique de la classification des sciences.....	50

## LIVRE I

### Ontologie positive ou Logique.

#### SCIENCE DES RÉALITÉS

CHAPITRE I. — DÉFINITION DE L'ONTOLOGIE POSITIVE.....	51
CHAPITRE II. — PROGRAMME DE L'ONTOLOGIE POSITIVE.....	61
§ I. — ONTOLOGIE ANALYTIQUE. SCIENCE DE LA FORMATION DES IDÉES.....	63

	Pages
<b>I. — Ontologie élémentaire, science des idées objectives.....</b>	<b>64</b>
Théorie des idées objectives.....	64
1. — Idées discrètes ou particulières. Du moi.....	67
A. — Du sens intime et du moi conscient. — <i>a.</i> Moi absolu ; <i>b.</i> Moi relatif.....	68
B. — Des sensations internes et du moi sensible. — <i>a.</i> Sensations organiques ; — <i>b.</i> Thermiques et musculaires....	75
2. — Idées concrètes ou attributives. Du non-moi.....	80
A. — Sens de besoin. — <i>a.</i> Sens tactiles (général et spécial) ; <i>b.</i> Sens trophiques (goût et odorat).....	81
B. — Sens d'information. — <i>a.</i> Sens auditifs (ouïe générale et ouïe spéciale) ; — <i>b.</i> Sens visuels (sens des couleurs et sens de l'ordre).....	85
Conclusion.....	90
<b>II. — Ontologie spéciale, science des idées subjectives.....</b>	<b>91</b>
Théorie des idées subjectives.....	91
1. — Idées générales. Collections d'êtres.....	98
A. — Idées d'espèce. — <i>a.</i> Éléments de l'espèce ; — <i>b.</i> Familles, groupes d'espèces.....	99
B. — Idées de genre. — <i>a.</i> Genres, groupes de familles ; <i>b.</i> Ensembles, groupes de genres.....	103
2. — Idées abstraites. Collections d'attributs.....	107
A. — Abstraction primaire, attribut sensibles. — <i>a.</i> Sortes de sensations ; — <i>b.</i> Modes de sensations.....	109
B. — Abstraction secondaire, attributs idéaux. — <i>a.</i> Attributs de genres ; — <i>b.</i> Attributs d'ensembles.....	112
Conclusion.....	115
<b>§ II. — ONTOLOGIE SYNTHÉTIQUE. SCIENCE DES RAPPORTS ENTRE LES IDÉES.....</b>	<b>120</b>
<b>1 — Ontologie comparée, science de l'association des idées.....</b>	<b>121</b>
Théorie de l'association des idées.....	121
1. — Association des idées objectives.....	124
A. — Association des idées du moi. — <i>a.</i> Des données du sens intime ; — <i>b.</i> Des données des sens internes.....	124
B. — Association des idées du non-moi. — <i>a.</i> Des données des sens de besoin ; — <i>b.</i> Des données des sens d'information.	127
2. — Association des idées subjectives.....	139
A. — Association des idées générales. — <i>a.</i> Des idées d'espèce ; — <i>b.</i> Des idées de genre.....	140
B. — Association des idées abstraites. — <i>a.</i> Relatives aux attributs sensibles ; — <i>b.</i> Relatives aux attributs idéaux..	141
Conclusion. Logique générale.....	146

TABLE DES MATIÈRES.

487

	Pages
<b>II. — Ontologie générale, science de l'identification des idées</b> .....	152
Théorie des communications d'idées. Du langage.....	152
1. — Identification des idées objectives.....	166
A. — Identification des idées du moi. — <i>a.</i> Du moi conscient; <i>b.</i> Du moi sensible.....	166
B. — Identification des idées du non-moi. — <i>a.</i> Des données des sens de besoin ; — <i>b.</i> Des données des sens d'information .....	170
2. — Identification des idées subjectives.....	172
A. — Identification des idées générales. — <i>a.</i> Des idées d'espèce; — <i>b.</i> Des idées de genre.....	173
B. — Identification des idées abstraites. — <i>a.</i> Primaires; <i>b.</i> Secondaires.....	177
Conclusion. — De l'évidence et du sens commun.....	181
<b>CHAPITRE III. — MÉTHODE DE L'ONTOLOGIE POSITIVE. — DE L'INTUITION</b> .....	183

LIVRE II

Métrologie ou Mathématique.

SCIENCE DES GRANDEURS

<b>CHAPITRE I. — DÉFINITION DE LA MATHÉMATIQUE</b> .....	195
<b>CHAPITRE II. — PROGRAMME DE LA MATHÉMATIQUE</b> .....	209
§ I. — MATHÉMATIQUE ANALYTIQUE. — SCIENCE DE LA DÉTERMINATION DES GRANDEURS.....	211
I. <b>Mathématique élémentaire ou Arithmétique, science de la formation des nombres</b> .....	214
Théorie du nombre. De l'unité et de la pluralité.....	214
1. — Accroissement des nombres.....	220
A. — Opérations additives, par adjonctions simples. — <i>a.</i> Numération ascendante; — <i>b.</i> Addition.....	222
B. — Opérations multiplicatives, par adjonctions répétées. — <i>a.</i> Multiplication; — <i>b.</i> Élévation aux puissances....	229
2. — Décroissement des nombres.....	232
A. — Opérations soustractives, par disjonctions simples. — <i>a.</i> Numération descendante; — <i>b.</i> Soustraction....	233
B. — Opérations divisives, par disjonctions répétées. — <i>a.</i> Division; — <i>b.</i> Extraction des racines.....	234
Conclusion .....	236

	Pages
<b>II. — Mathématique spéciale ou Géométrie, science des figurations de l'étendue.....</b>	<b>239</b>
Théorie de l'étendue. Du point et des dimensions.....	239
1. — Constructions rectilignes.....	252
A. — Éléments des figurations rectilignes. — <i>a.</i> Points; — <i>b.</i> Lignes droites.....	253
B. — Systèmes de figurations rectilignes. — <i>a.</i> Surfaces planes; — <i>b.</i> Volumes polyédriques.....	256
2. — Constructions curvilignes.....	258
A. — Éléments des figurations curvilignes. — <i>a.</i> Points; — <i>b.</i> Lignes courbes.....	258
B. — Systèmes de figurations curvilignes. — <i>a.</i> Surfaces courbes; — <i>b.</i> Volumes à surfaces courbes.....	264
Conclusion.....	267
<b>§ II. — MATHÉMATIQUE SYNTHÉTIQUE, SCIENCE DES RAPPORTS DES GRANDEURS.....</b>	<b>269</b>
<b>I. — Mathématique comparée, science des rapports spéciaux des grandeurs.....</b>	<b>270</b>
Théorie des rapports mathématiques.....	270
1. — Rapports arithmétiques.....	273
A. — Rapports par différence. — <i>a.</i> Rapport numératif; <i>b.</i> Rapport additif.....	275
B. — Rapports par quotient. — <i>a.</i> Rapport multiplicatif; — <i>b.</i> Rapport potentiel. Logarithmes.....	277
2. — Rapports géométriques.....	279
. — Rapports des éléments de l'étendue. — <i>a.</i> Rapports des points; — <i>b.</i> Rapports des lignes.....	280
B. — Rapports des systèmes de construction. — <i>a.</i> Rapports des surfaces; — <i>b.</i> Rapports des volumes.....	286
Conclusion. — Rapports des nombres et des figures.....	289
<b>II. — Mathématique générale ou Algèbre, science des fonctions des grandeurs.....</b>	<b>295</b>
Théorie des fonctions des grandeurs.....	295
1. — Équations arithmétiques.....	301
A. — Équations directes. — <i>a.</i> Équations élémentaires (1 <sup>er</sup> et 2 <sup>e</sup> degrés); — <i>b.</i> Équations supérieures (3 <sup>e</sup> et 4 <sup>e</sup> degrés).....	304
B. — Équations indirectes. — <i>a.</i> Analyse transcendante; — <i>b.</i> Analyse hypertranscendante.....	306
2. — Équations géométriques.....	314
A. — Équation des éléments de figuration. — <i>a.</i> Coordination des points; — <i>b.</i> Équation des lignes.....	316
B. — Équation des constructions de l'étendue. — <i>a.</i> Équation des surfaces; — <i>b.</i> Équation des volumes.....	320
Conclusion. — Loi universelle d'égalité.....	321
<b>CHAPITRE III. — MÉTHODE DE LA MATHÉMATIQUE. — DE LA DÉDUCTION.....</b>	<b>323</b>

LIVRE III

Théséologie ou Dynamique.

SCIENCE DES SITUATIONS

	Pages
CHAPITRE I. — DÉFINITION DE LA DYNAMIQUE.....	337
CHAPITRE II. — PROGRAMME DE LA DYNAMIQUE.....	351
§ I. — DYNAMIQUE ANALYTIQUE, SCIENCE DES FAITS DE SITUATION..	357
I. — Dynamique élémentaire ou Statique, science de l'équilibre.....	359
Théorie de l'équilibre.....	359
1. — Équilibre stable.....	364
A. — Équilibre stable des corps à forme invariable. — <i>a.</i> Isolés, solides compacts; — <i>b.</i> Amoncélés, solides en amas.	364
B. — Équilibre stable des corps à forme variable. — <i>a.</i> A volume constant, liquides; — <i>b.</i> A volume variable, gaz.	368
2. — Équilibre instable.....	376
A. — Équilibre instable des corps à forme invariable. — <i>a.</i> Solides isolés; — <i>b.</i> Solides amoncélés.....	377
B. — Équilibre instable des corps à forme variable. — <i>a.</i> Liquides; — <i>b.</i> Gaz.....	378
Conclusion.....	381
II. — Dynamique spéciale ou Cinétique, science du mouvement.....	383
Théorie du mouvement.....	383
1. — Mouvement direct ou rectiligne.....	390
A. — Mouvement uniforme ou centrigène. — <i>a.</i> Immanent ou spontané; — <i>b.</i> Occasionnel ou momentané.....	392
B. — Mouvement varié ou centripète. — <i>a.</i> Simple ou unilatéral; — <i>b.</i> Complexe ou réciproque.....	397
2. — Mouvement curviligne.....	401
A. — Mouvement rotatoire ou centrogryre. — <i>a.</i> Uniforme quant aux temps; — <i>b.</i> Varié quant aux parcours.....	403
B. — Mouvement circulatoire ou centrifuge. — <i>a.</i> Simple, autour d'un centre; — <i>b.</i> Complexe, dans un système....	406
Conclusion.....	413
§ II. — DYNAMIQUE SYNTHÉTIQUE, SCIENCE DES RAPPORTS DE SITUATION.....	414
1. — Dynamique comparée, science des rapports spéciaux de situation.....	416

	Pages
Théorie des résultantes spéciales d'effets.....	416
1. — Résultantes de l'équilibre.....	418
A. — Résultantes de l'équilibre stable. — <i>a.</i> Des solides; —	
<i>b.</i> Des fluides.....	418
B. — Résultantes de l'équilibre instable. — <i>a.</i> Des solides;	
<i>b.</i> Des fluides.....	422
2. — Résultantes du mouvement.....	425
A. — Résultantes des mouvements directs. — <i>a.</i> Uniformes;	
<i>b.</i> Variés.....	425
B. — Résultantes des mouvements circulaires. — <i>a.</i> Rota-	
toires; — <i>b.</i> Circulatoires.....	428
Conclusion.....	437
<b>II. — Dynamique générale ou Barologie, science</b>	
<b>des résultantes cosmiques.....</b>	<b>442</b>
Théorie des résultantes cosmiques.....	442
1. — Résultantes cosmiques de l'équilibre. De la pesanteur..	444
A. — Coordination des effets de l'équilibre stable. —	
<i>a.</i> Des solides; — <i>b.</i> Des fluides.....	449
B. — Coordination des effets de l'équilibre instable. —	
<i>a.</i> Des solides; — <i>b.</i> Des fluides.....	452
2. — Résultantes cosmiques du mouvement. De la gravité...	455
A. — Coordination des mouvements directs. — <i>a.</i> Uniformes;	
<i>b.</i> Variés.....	456
B. — Coordination des mouvements curvilignes; — <i>a.</i> Rota-	
toires; — <i>b.</i> Circulatoires.....	458
Conclusion. — Gravitation universelle.....	460
<b>CHAPITRE III. — MÉTHODE DE LA DYNAMIQUE. — DE L'OBSER-</b>	
<b>VATION.....</b>	<b>469</b>

FIN DE LA TABLE DU TOME PREMIER

PARIS. — IMPRIMERIE ÉMILE MARTINET, RUE MIGNON 2.



LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET C<sup>ie</sup>

108, Boulevard Saint-Germain, 108

BIBLIOTHÈQUE DE PHILOSOPHIE CONTEMPORAINE

Volumes in-48 à 2 fr. 50 c<sup>ts</sup> — Cartonnés, 3 fr.

<p><b>H. Taine.</b> Le Positivisme anglais. 2 éd. L'Idealisme anglais. Philosophie de l'art. 3 éd. Philos. de l'art. en Italie. 2 éd. De l'Idéal dans l'art. 2<sup>e</sup> éd. Philos. de l'art dans Pays Bas. Philos. de l'art en Grèce.</p> <p><b>Paul Janet.</b> Le Matérialisme contemp. 2<sup>e</sup> éd. La Crise philosophique. Le Cerveau et la Pensée. Philos. de la Révol. française. 2<sup>e</sup> éd.</p> <p>St-Simon et le St-Simonisme. <i>Spinoza</i> : Dieu, l'homme. <b>Odyse Barrot.</b> Philosophie de l'histoire.</p> <p><b>Alaux.</b> Philosophie de M. Cousin.</p> <p><b>Ad. Franck.</b> Philos. du droit pénal. Philos. du droit ecclésiastique. Philosophie mystique au dix-huitième siècle.</p> <p><b>E. Saissset.</b> L'âme et la vie. Critique et histoire de la philosophie.</p> <p><b>Charles Lévêque.</b> Le Spiritualisme dans l'art. La Science de l'invisible.</p> <p><b>Auguste Laugel.</b> Les Problèmes de la nature. Les Problèmes de la vie. Les Problèmes de l'âme. La Voix, l'Oreille et la Musique.</p> <p><b>L'Optique et les Arts.</b> <b>Challamel-Lacour.</b> La philos. individualiste.</p> <p><b>Charles de Rémusat.</b> Philosophie religieuse.</p> <p><b>Albert Lemoine.</b> Le Vital. et l'Anim. de Stahl. De la Physion. et de la Parole. L'Habitude et l'Instinct.</p> <p><b>Milkaud.</b> L'Esthétique anglaise.</p> <p><b>A. Véra.</b> Essais de philos. hégélienne.</p>	<p><b>Beaussire.</b> Antécéd. de l'hégélianisme.</p> <p><b>Bost.</b> Le Protestantisme libéral. <b>Francisque Bouillier.</b> De la Conscience.</p> <p><b>Ed. Auber.</b> Philosophie de la Médecine.</p> <p><b>Leblais.</b> Matérialisme et spiritualisme.</p> <p><b>Ad. Garnier.</b> De la morale dans l'antiquité.</p> <p><b>Schœbel.</b> Philos. de la raison pure.</p> <p><b>Tissandier.</b> Des sciences occultes.</p> <p><b>J. Moleschott.</b> La Circulation de la vie. 2 vol.</p> <p><b>L. Buchner.</b> Science et nature. 2 vol.</p> <p><b>Ath. Coquerel fils.</b> Transf. du christianisme.</p> <p><b>La Conscience et la Foi.</b> Histoire du Credo.</p> <p><b>Jules Levallois.</b> Déisme et Christianisme.</p> <p><b>Camille Selden.</b> La Musique en Allemagne.</p> <p><b>Fontanès.</b> Le Christianisme moderne.</p> <p><b>Saigey.</b> La Physique moderne. 2<sup>e</sup> tir.</p> <p><b>Mariano.</b> La Philos. contemp. en Italie.</p> <p><b>E. Faivre.</b> De la variabilité des espèces.</p> <p><b>J. Stuart Mill.</b> Auguste Comte. 2<sup>e</sup> éd.</p> <p><b>Ernest Bersot.</b> Libre philosophie.</p> <p><b>Albert Réville.</b> La divinité de Jésus-Christ. 2<sup>e</sup> éd.</p> <p><b>W. de Fonvielle.</b> L'astronomie moderne.</p> <p><b>G. Coignet.</b> La morale indépendante.</p> <p><b>E. Boutmy.</b> Philosophie de l'architecture en Grèce.</p>	<p><b>E. Vacherot.</b> La Science et la Conscience.</p> <p><b>Em. de Laveleye.</b> Des Formes de gouvernement.</p> <p><b>Herbert Spencer.</b> Classification des sciences.</p> <p><b>Max Müller.</b> La science de la religion.</p> <p><b>Ph. Gauckler.</b> Le Beau et son histoire.</p> <p><b>L.-A. Dumont.</b> Hæckel et l'évolution.</p> <p><b>Bertauld.</b> L'ordre social et l'ordre Philosophique sociale.</p> <p><b>Th. Ribot.</b> La Philos. de Schopenhauer.</p> <p><b>A. Herzen.</b> Physiologie de la volonté.</p> <p><b>Bentham et Grot.</b> La religion naturelle.</p> <p><b>Hartmann (E. de)</b> La religion de l'avenir. Le Darwinisme. 2<sup>e</sup> éd.</p> <p><b>Lotze (H.).</b> Psychologie physiologique.</p> <p><b>Schopenhauer.</b> Essai sur le libre arbitre. Le Fondement de la morale. Pensées et fragments.</p> <p><b>Liard.</b> Logiciens anglais cont. Marion.</p> <p><b>Locke, sa vie et son œuvre.</b> <b>O. Schmidt.</b> Les sciences naturelles conscientes.</p> <p><b>Hæckel.</b> Les preuves du transfert. La psychologie cellulaire.</p> <p><b>Pi y Margall.</b> Les nationalités.</p> <p><b>Barthélemy S-Hil.</b> De la métaphysique.</p> <p><b>Espinas.</b> Philos. expérimentale.</p> <p><b>Siciliani.</b> Psychogénie moderne.</p> <p><b>Nolen.</b> La Philosophie de Leibniz. (Sous presse).</p>
---	---	---