ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — **Eugenio Beltrami** *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa.*

SERIE II - TOMO XXVI
(dal settembre al dicembre dell'anno 1897).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXVI.° (SERIE II.ª)

Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio.

(Di Luigi Berzolari, *a Torino.)*

Nel presente lavoro mi propongo di estendere agli iperspazî alcuni dei risultati, a cui è giunto l'Halphen nelle sue belle ricerche sopra gl'invarianti differenziali (*), e che, com'è noto, furono applicati dallo stesso Halphen allo studio delle equazioni differenziali lineari, specialmente del 3.° e del 4.° ordine (**). In tale estensione, — che, se non erro, mette anche in miglior luce talune delle proprietà dovute all'Halphen, e, come si dirà tra breve, può aver applicazioni alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque (maggiore di due) — torna spesso utile il metodo della proiezione in spazî inferiori, il quale ha già dato risultati importanti, sopratutto in ricerche di pura geometria. Così (nel § III) vien risolto per questa via, e per uno spazio lineare S_n ad n dimensioni (***) un problema, alla cui soluzione l'Halphen, per lo spazio

(*) Vedi la *Thèse sur les invariants différentiels* (1878), e la Memoria *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Journal de l'École Polytechnique, XLVII Cahier, 1880): è a quest'ultima che in seguito ci riferiremo più particolarmente. — È superfluo ricordare come i concetti di questi due lavori (massime del primo) siano poi stati svolti ed ampliati da molti autori, segnatamente inglesi (Forsyth, Elliott, Rogers, ecc.), e come essi si connettano colle ricerche del sig. Lie sulla teoria generale degli *invarianti differenziali*, e con quelle del sig. Sylvester sulla teoria dei *reciprocanti.* Si consulti a tal proposito il *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* del sig. F. Meyer (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. I, 1892, pag. 230 e seg.[1]).

(**) Vedansi la Memoria premiata *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (Sav. étrang., t. XXVIII, n.° 1, 1883), e quella che ha per titolo *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (Acta Mathem., vol. 3, 1883).

(***) In tutto il lavoro s'indicherà con S_i $(i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1)$ uno spazio lineare di i dimensioni contenuto in S_n. Un S_0 sarà un punto, un S_1 una retta, un S_2 un piano, un S_{n-1} un iperpiano.

ordinario (*), è giunto soltanto con calcoli che, già laboriosi per $n=3$, sarebbero impraticabili per un valore indeterminato di n.

Ecco ora in breve il contenuto di questo scritto.

Ponendo sotto forma più simmetrica il procedimento seguìto dall'HALPHEN per lo spazio ordinario, ho anzitutto stabilito le equazioni differenziali delle *curve razionali normali* di S_n (**), le quali formano, per così dire, il nocciolo intorno a cui si raccoglie tutto il lavoro. Esse sono in numero di $n-1$, e dell'ordine $n+3$, e godono della proprietà che, indicandone, *in un certo ordine*, con $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ i primi membri, l'insieme formato con un numero qualunque di questi, presi ordinatamente a partire dall'ultimo, è invariante per trasformazioni omografiche dell' S_n, mentre (all'infuori di T_{n-1}) le singole T non hanno siffatta proprietà. Di tali sistemi si trova sùbito il significato geometrico: in particolare, la quantità T_{n-1} è un invariante differenziale projettivo, e per $n=3$ coincide coll'invariante di 6.° ordine (il solo di quest'ordine che si abbia per le ordinarie curve sghembe), che dall'HALPHEN è stato chiamato v, ed il cui annullarsi caratterizza le curve, di cui tutte le tangenti appartengono ad un complesso lineare (***).

In sèguito (§§ III e IV), posta l'origine delle coordinate in un punto non singolare di una data curva, e chiamate $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ le coordinate cartesiane d'un punto di questa prossimo all'origine, si suppongono sviluppate le $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ in serie di potenze di x mediante la formola del TAYLOR, e si risolve il problema (a cui si è alluso in principio) di trasformare questi sviluppi, con una sostituzione lineare conveniente, in altri di natura più semplice, aventi la *forma canonica :*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x^2 + J_{n+1}^{(1)} x^{n+3} + J_{n+2}^{(1)} x^{n+4} + \cdots, \\ x_2 = x^3 + J_{n}^{(2)} x^{n+3} + J_{n+1}^{(2)} x^{n+4} + \cdots, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_{n-3} = x^{n-2} + J_5^{(n-3)} x^{n+3} + J_6^{(n-3)} x^{n+4} + \cdots, \\ x_{n-2} = x^{n-1} \qquad\qquad\qquad + J_5^{(n-2)} x^{n+4} + \cdots, \\ x_{n-1} = x^{n} \quad + J_3^{(n-1)} x^{n+3} + J_4^{(n-1)} x^{n+4} + \cdots, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(*) Nella Memoria già citata *Sur les inv. diff. des courbes gauches*, pag. 29 e seg.

(**) Curve d'ordine n appartenenti ad S_n, ma non a spazî inferiori (epperò razionali). Per le loro proprietà vedasi p. es. VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse*, ecc. (Math. Ann., Bd. 19).

(***) Il concetto di tali curve è stato esteso ad un iperspazio in modo affatto diverso e per tutt'altro scopo dal sig. BOREL nel lavoro *Sur l'équation adjointe et sur certains* dove tutti i coefficienti J sono invarianti differenziali projettivi [relativi (*)], di cui il *peso* è uguale al rispettivo indice inferiore, e l'*ordine* è dato dalla somma dei due indici aumentata di un'unità.

Specialmente notevoli sono gl'invarianti dei pesi $3, 4, \dots, n+1$, e la loro composizione viene assegnata nel § V: si trova così che uno qualunque $J^{(r)}_{n-r+h}$ di essi si può rappresentare in forma di quoziente, il cui denominatore è una potenza di T_{n-1}, e il cui numeratore è una somma di termini, ciascuno dei quali contiene come fattori alcune delle $T_{n-1}, T_{n-2}, \dots, T_{r-h+2}$ e delle loro derivate di ordine non superiore ad $h-2$. Vengono determinate in particolare le espressioni ed il significato geometrico dei coefficienti $J^{(n-1)}_3, J^{(n-3)}_5, \dots, J^{(1)}_{n+1}$, che sono gl'invarianti differenziali d'ordine $n+3$ della curva proposta (**): il più semplice di essi, cioè $J^{(n-1)}_3$, coincide collo stesso T_{n-1}.

Fra gl'invarianti che si possono comporre con quelli ora nominati hanno la maggiore importanza gl'invarianti $j_3, j_4, \dots, j_{n+1}$, dei pesi $3, 4, \dots, n+1$, formati *in modo intiero* con le T e le loro derivate. Si dimostra infatti (nel § VII) che, salvo fattori numerici, essi coincidono cogli invarianti così detti *lineari* o *fondamentali* di un'equazione differenziale lineare d'ordine $n+1$, — i quali, considerati per la prima volta da Laguerre e dal sig. Brioschi (e, sotto veste geometrica, dall'Halphen), furono poi ulteriormente studiati da Halphen, Forsyth, Brioschi, Wallenberg ed altri; — mentre nel § V si stabilisce una loro proprietà, che, in un caso particolare (***), è l'interpretazione geometrica d'un importante teorema dovuto al sig. Brioschi (****).

Nel § VI vengono stabilite le formole, colle quali si passa da ogni invariante differenziale projettivo al suo duale, e si prova che ognuno degl'invarianti $j_3, j_4, \dots, j_{n+1}$ coincide, a meno del segno, col proprio duale.

---

systèmes d'équations différentielles (Annales scient. de l'École Norm. Sup., 3.ª serie, t. 9, 1892).

(*) Da siffatta rappresentazione si passa tosto a quella in cui i coefficienti sono tutti invarianti assoluti.

(**) Sono questi gl'invarianti d'ordine più basso, ove si faccia astrazione da quello affatto ovvio, d'ordine n, che nel presente lavoro vien chiamato U, ed il cui annullarsi definisce le curve appartenenti ad un iperpiano.

(***) In questo caso particolare, la proprietà di cui si tratta è che *una curva di S_n è una curva razionale normale di questo spazio, quando per essa tutti gl'invarianti j_3, $j_4, \dots, j_{n+1}$ sono nulli.*

(****) V. la Memoria *Les invariants des équations différentielles linéaires* (Acta Mathem., vol. 14, 1890, pag. 273).

§ I.

Alcune generalità sugli invarianti differenziali projettivi d'una curva di S_n.

1. In questo paragrafo (dove un determinante verrà rappresentato scrivendone fra parentesi il termine principale) sono raccolti gli enunciati delle principali definizioni e proprietà, di cui dovrò nel seguito far uso, e che si ottengono (in generale senza difficoltà) come estensioni di alcune stabilite dall'Halphen nei due lavori citati fin dal principio.

S'indicheranno con $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ le coordinate cartesiane di un punto di S_n, e quando il punto si muova descrivendo una curva, le sue ultime coordinate $x_1, \ldots, x_{n-1}$ verranno considerate come funzioni della x.

Ora poniamo:

$$U = \frac{1}{1!\,2!\ldots n!}(x_1'' x_2''' \ldots x_{n-1}^{(n)}), \tag{2}$$

dove gli apici denotano derivate prese rapporto ad x. La quantità U è un invariante differenziale projettivo (d'ordine n): invero il suo annullarsi in un punto assegnato d'una curva di S_n esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè esista un iperpiano avente colla curva un contatto d'ordine n in quel punto.

Introduciamo ancora le seguenti quantità:

$$D_i^{(k)} = \frac{(k+1)!}{(n+i)!}\,\frac{(x_1'' x_2''' \ldots x_{k-1}^{(k)} x_k^{(n+i)} x_{k+1}^{(k+2)} \ldots x_{n-1}^{(n)})}{(x_1'' \ldots x_{n-1}^{(n)})}, \tag{3}$$

dove gli apici che stanno nel secondo membro denotano derivate rapporto ad x, e si ha:

$$i > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Un invariante differenziale projettivo, che per definizione sia intero rispetto alle variabili $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ e alle derivate di queste ultime rapporto ad x, non contiene nè le variabili nè le derivate prime, ed è una funzione omogenea dei determinanti della forma $(x_1^{(i_1)} x_2^{(i_2)} \ldots x_{n-1}^{(i_{n-1})})$: il grado di tale funzione omogenea si chiamerà *grado* dell'invariante. Così il grado di U è l'unità. Di qui segue che il quoziente di un invariante differenziale intero di grado g per U^g è una funzione intera delle quantità $D_i^{(k)}$: basta infatti osservare che si ha identicamente:

$$\frac{1}{U}\left(x_1^{(i_1)}\, x_2^{(i_2)} \ldots x_{n-1}^{(i_{n-1})}\right) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\, i_1!\, i_2! \ldots i_{n-1}!\, \left(D_{i_1-n}^{(n-1)}\, D_{i_2-n}^{(n-2)} \ldots D_{i_{n-1}-n}^{(1)}\right).$$

Eseguendo la sostituzione lineare

$$X = \alpha\, x, \qquad X_i = x_i, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1), \tag{5}$$

dove α è una costante arbitraria, si riconosce che, se nei varî termini d'un invariante intero si sommano tutti gl'indici di derivazione, si ottiene per tutti i termini un medesimo risultato. Questa somma costante si dirà il *peso* dell'invariante. Così il peso di U è $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$. Convenendo poi di dire che $D_i^{(k)}$ ha il peso $n + i - k - 1$, e indicando con g il grado e con p il peso d'un invariante intero, questo potrà mettersi sotto la forma $U^g\,\varphi$, dove φ è una funzione intera delle $D_i^{(k)}$, e la somma dei pesi delle varie quantità $D_i^{(k)}$ contenute nei singoli termini di φ sarà, per tutti questi termini, $p - g\,\frac{(n-1)(n+2)}{2}$. Questo numero può essere considerato come il *peso* di φ, se come definizione di peso si assume questa, che coincide colla precedente quando l'invariante sia intero: il peso d'un invariante è l'esponente della potenza di α, per la quale risulta moltiplicato l'invariante, quando su questo si eseguisca la sostituzione inversa della (5).

Come per il piano e per lo spazio ordinario (secondo ciò che ha dimostrato l'Halphen), così anche per l' S_n il grado ed il peso sono caratteristici per ciascun invariante. Si faccia la trasformazione lineare

$$X = \frac{\xi}{\xi_n}, \qquad X_i = \frac{\xi_i}{\xi_n}, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1), \tag{6}$$

dove le ξ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sono funzioni lineari delle x, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, di cui il determinante dei coefficienti sia D. Se si chiama U_0 l'espressione formata colle nuove variabili al modo stesso con cui U è formato colle variabili primitive, si trova la relazione:

$$U_0 = D\, \frac{\xi_n^{n^2-1}}{(\xi_n \xi' - \xi \xi'_n)^{\frac{n(n+1)}{2}}}\, U,$$

dove i due apici che figurano nel denominatore indicano derivate rapporto ad x.

Più in generale, se un dato invariante s'imagina ridotto alla forma di funzione delle quantità $D_i^{(k)}$ (nel qual caso esso è di grado zero) e s'indica con q il suo peso, l'effetto della sostituzione (6) è di riprodurlo moltiplicato per $\left(\frac{\xi_n^2}{\xi_n \xi' - \xi \xi'_n}\right)^q$. Se invece l'invariante è posto sotto una forma qualsiasi, e s'indicano con g il suo grado e con p il suo peso, dalle due proprietà precedenti risulta che l'effetto d'una sostituzione lineare (6) è di riprodurlo moltiplicato per

$$D^g \frac{\xi_n^{2p-(n-1)g}}{(\xi_n \xi' - \xi \xi'_n)^{g+p}}.$$

2. Data in S_n una curva qualsiasi, è facile esprimere le ultime coordinate d'un suo punto, il quale giaccia nell'intorno di un suo punto non singolare, come serie procedenti secondo le potenze intere positive crescenti della prima coordinata, e per modo che i coefficienti siano le $D_i^{k)}$. Se infatti sono $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ le coordinate del punto considerato, ed $Y, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ quelle del punto prossimo ad esso, per lo sviluppo del Taylor abbiamo:

$$Y_k = y_k + y'_k (Y - y) + \frac{1}{2!} y''_k (Y - y)^2 + \cdots$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Introducendo le nuove coordinate $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ legate alle prime dalle relazioni lineari

$$\left.\begin{aligned} & x = Y - y, \\ & x_k = (k+1)! \frac{(y''_1, y'''_2, \ldots, y^{(k)}_{k-1}, Y_k - y_k - y'_k (Y - y), y^{(k+2)}_{k+1}, \ldots, y^{(n)}_{n-1})}{(y''_1 y'''_2 \ldots y^{(n)}_{n-1})} \\ & \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - 1), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

s'ottengono gli sviluppi richiesti:

$$x_k = x^{k+1} + \sum_{i=1}^{i=\infty} D_i^{k)} x^{n+i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - 1). \qquad (8)$$

In tutto ciò che segue partiremo sempre da questi sviluppi.

§ II.

Le equazioni differenziali delle curve razionali normali di un iperspazio.

3. Proponiamoci di stabilire le equazioni differenziali delle curve razionali normali di S_n. Una tal curva, che diremo Γ, è d'ordine n, dipende da $(n-1)(n+3)$ costanti essenziali, ed è rappresentata dall'insieme di $n-1$ equazioni. Eliminando quelle costanti dalle $(n-1)(n+4)$ equazioni che si ottengono associando le date con quelle che se ne ricavano derivandole $n+3$ volte rapporto ad x, risultano le cercate equazioni differenziali, che sono dunque in numero di $n-1$ e dell'ordine $n+3$. Per costruirle effettivamente, potremo procedere in modo più spedito, sostituendo nelle equazioni della curva, al posto delle $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, gli sviluppi (8), ed uguagliando a zero i coefficienti dei termini risultanti fino a quelli di grado $n+3$ inclusivamente.

È evidente che per siffatto calcolo si debbono assumere le equazioni di una Γ che passi per l'origine delle coordinate: considerando allora la curva come luogo delle intersezioni delle rette omologhe di due stelle collineari, di cui una abbia il centro nell'origine, tali equazioni si possono scrivere come segue:

$$\frac{p_{00}\,x + p_{01}\,x_1 + \cdots + p_{0,n-1}\,x_{n-1} + p_{0n}}{x}$$
$$= \frac{p_{10}\,x + p_{11}\,x_1 + \cdots + p_{1,n-1}\,x_{n-1} + p_{1n}}{x_1}$$
$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{p_{n-1,0}\,x + p_{n-1,1}\,x_1 + \cdots + p_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + p_{n-1,n}}{x_{n-1}},$$

dove le p sono le costanti da eliminarsi. Uguagliando il primo dei precedenti rapporti al $(k+1)^{\text{mo}}$, e riducendo a forma intiera, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} p_{0i}\,x_k\,x_i - \sum\limits_{i=1}^{i=n-1} p_{ki}\,x\,x_i + p_{0n}\,x_k - p_{kn}\,x + p_{00}\,x\,x_k - p_{k0}\,x^2 = 0 \\ (k = 1,\, 2, \ldots,\, n-1). \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Ora dovendo sostituire qui al posto delle $x_1, \ldots, x_{n-1}$ gli sviluppi (8), basta pel nostro scopo tener conto, in tali sviluppi, dei termini di grado non superiore ad $n+3$; ciò facendo, e conservando anche nel risultato i soli termini di quei gradi, si ha:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=n-1} p_{0i}\,(x^{k+i+2}+D_1^{(i)}x^{n+k+2})-\sum_{i=1}^{i=n-1} p_{ki}\,(x^{i+2}+D_1^{(i)}x^{n+2}+D_2^{(i)}x^{n+3})\\
&\qquad+p_{00}\,(x^{k+2}+D_1^{(k)}x^{n+2}+D_2^{(k)}x^{n+3})+p_{01}\,D_1^{(k)}x^{n+3}\\
&+p_{0n}(x^{k+1}+D_1^{(k)}x^{n+1}+D_2^{(k)}x^{n+2}+D_3^{(k)}x^{n+3})-p_{k0}\,x^2-p_{kn}\,x=0\\
&\qquad\qquad(k=1,\ 2,\ldots,\ n-1).
\end{aligned}\right\}\quad(10)
$$

È necessario trattare a parte il caso di $k=1$. Se nell'equazione precedente, scritta in tale ipotesi, si uguagliano a zero i coefficienti di tutte le potenze di x, il cui grado non supera $n+3$, risulta:

$$
\left.\begin{aligned}
&p_{1n}=0,\\
&p_{0n}-p_{10}=0,\\
&p_{00}-p_{11}=0,\\
&p_{01}-p_{12}=0,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&p_{0,n-3}-p_{1,n-2}=0,\\
&p_{0,n-2}-p_{1,n-1}+p_{0n}\,D_1^{(1)}=0,\\
&p_{0,n-1}+p_{00}\,D_1^{(1)}+p_{0n}\,D_2^{(1)}-\sum_{i=1}^{i=n-1} p_{1i}\,D_1^{(i)}=0,\\
&p_{00}\,D_2^{(1)}+p_{01}\,D_1^{(1)}+p_{0n}\,D_3^{(1)}+\sum_{i=1}^{i=n-1} p_{0i}\,D_1^{(i)}-\sum_{i=1}^{i=n-1} p_{1i}\,D_2^{(i)}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(11)
$$

Ponendo nelle ultime due i valori di $p_{11}, p_{12},\ldots, p_{1,n-1}$ ricavati dalle precedenti, si hanno le due equazioni:

$$
\left.\begin{aligned}
&D_1^{(2)}p_{01}+D_1^{(3)}p_{02}+\cdots+D_1^{(n-1)}p_{0,n-2}-p_{0,n-1}+(D_1^{(1)}D_1^{(n-1)}-D_2^{(1)})p_{0n}=0,\\
&\quad(D_2^{(2)}-2\,D_1^{(1)})\,p_{01}+(D_2^{(3)}-D_1^{(2)})\,p_{02}+\cdots+(D_2^{(n-1)}-D_1^{(n-2)})\,p_{0,n-2}\\
&\qquad\qquad-D_1^{(n-1)}p_{0,n-1}+(D_1^{(1)}D_2^{(n-1)}-D_3^{(1)})\,p_{0n}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(12)
$$

Per $k=2,\ 3,\ldots,\ n-1$ si hanno ogni volta dalla (10), collo stesso procedimento, $n+3$ equazioni fra le p, e sostituendo nelle ultime due i valori di

$p_{k1}, \ldots, p_{k,n-1}$ ricavati dalle precedenti, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{c} D_1^{(k+1)} p_{01} + D_1^{(k+2)} p_{02} + \cdots + D_1^{(n-1)} p_{0,n-k-1} - p_{0,n-k} \\ + (D_1^{(k)} D_1^{(n-1)} - D_2^{(k)} + D_1^{(k-1)}) p_{0n} = 0, \\ (D_2^{(k+1)} - D_1^{(k)}) p_{01} + D_2^{(k+2)} p_{02} + \cdots + D_2^{(n-1)} p_{0,n-k-1} - p_{0,n-k+1} \\ + (D_1^{(k)} D_2^{(n-1)} - D_3^{(k)} + D_2^{(k-1)}) p_{0n} = 0. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Per semplicità di scrittura poniamo:

$$\left.\begin{array}{c} F_k = D_1^{(k)} D_1^{(n-1)} - D_2^{(k)} + D_1^{(k-1)}, \\ F_k^* = D_1^{(k)} D_2^{(n-1)} - D_3^{(k)} + D_2^{(k-1)}, \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1), \end{array}\right\} \tag{14}$$

colla convenzione che sia [cfr. le (3) e (4)]:

$$D_1^{(0)} = 0, \qquad D_2^{(0)} = 0.$$

Allora, eliminando fra le (12) e (13) le quantità $p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0n}$, si ottengono le cercate equazioni differenziali, rappresentate dall'annullarsi dei determinanti d'ordine n formati colle orizzontali della matrice

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} D_1^{(2)} & D_1^{(3)} & \ldots & D_1^{(n-2)} & D_1^{(n-1)} & -1 & F_1 \\ D_1^{(3)} & D_1^{(4)} & \ldots & D_1^{(n-1)} & -1 & 0 & F_2 \\ D_1^{(4)} & D_1^{(5)} & \ldots & -1 & 0 & 0 & F_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_1^{(n-1)} & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & F_{n-2} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & F_{n-1} \\ D_2^{(2)} - 2 D_1^{(1)} & D_2^{(3)} - D_1^{(2)} & \ldots & D_2^{(n-2)} - D_1^{(n-3)} & D_2^{(n-1)} - D_1^{(n-2)} & -D_1^{(n-1)} & F_1^* \\ D_2^{(3)} - D_1^{(2)} & D_2^{(4)} & \ldots & D_2^{(n-1)} & 0 & -1 & F_2^* \\ D_2^{(4)} - D_1^{(3)} & D_2^{(5)} & \ldots & 0 & -1 & 0 & F_3^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_2^{(n-1)} - D_1^{(n-2)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & F_{n-2}^* \\ -D_1^{(n-1)} & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & F_{n-1}^* \end{array} \right\| . \tag{15}$$

Per lo spazio ordinario ($n = 3$), la matrice è

$$\left\| \begin{matrix} D_1^{(2)} & -1 & D_1^{(1)} D_1^{(2)} - D_2^{(1)} \\ -1 & 0 & D_1^{(2)} D_1^{(2)} - D_2^{(2)} + D_1^{(1)} \\ D_2^{(2)} - 2\, D_1^{(1)} & -D_1^{(2)} & D_1^{(1)} D_2^{(2)} - D_3^{(1)} \\ -D_1^{(2)} & -1 & D_1^{(2)} D_2^{(2)} - D_3^{(2)} + D_2^{(1)} \end{matrix} \right\|,$$

e prendendone i determinanti che si hanno omettendone la terza oppure la quarta orizzontale, si ottengono, salvo la diversità dei simboli, le espressioni chiamate dall' Halphen risp. v e w, le quali, uguagliate a zero, dànno le equazioni differenziali delle cubiche gobbe.

Per il piano ($n = 2$), la matrice si riduce all'unico determinante

$$\left| \begin{matrix} -1 & D_1^{(1)} D_1^{(1)} - D_2^{(1)} \\ -2\, D_1^{(1)} & D_1^{(1)} D_2^{(1)} - D_3^{(1)} \end{matrix} \right|.$$

Chiamando, come d'uso, con y l'ordinata (cioè la x_1), e denotando con apici le derivate rapporto all'ascissa x, si ha:

$$U = \frac{1}{2} y'',$$

$$D_1^{(1)} = \frac{1}{3} \frac{y'''}{y''}, \qquad D_2^{(1)} = \frac{1}{12} \frac{y^{\mathrm{IV}}}{y''}, \qquad D_3^{(1)} = \frac{1}{60} \frac{y^{\mathrm{V}}}{y''},$$

sicchè il determinante precedente diviene:

$$\frac{1}{540} \frac{1}{y''^3} (9\, y''^2\, y^{\mathrm{V}} - 45\, y''\, y'''\, y^{\mathrm{IV}} + 40\, y'''^3).$$

L'ultimo fattore, uguagliato a zero, dà l'equazione differenziale delle coniche nella forma assegnata per la prima volta da Monge (*).

(*) Nella Nota *Sur les Équations différentielles des Courbes du second Degré* (Corresp. sur l'École imp. Polytechn., Paris, N.° II, 1810, pag. 51-54), un sunto della quale comparve nel *Bulletin de la Société Philom.*, Paris, 1810, pag. 87-88. — Sono assai curiosi i particolari che nell'articolo *On the Method of Reciprocants*, ecc. (*Nature*, vol. XXXIII, 1886, pag. 224) il Sylvester ha dato sulle fasi per le quali è passata la ricerca di tale equazione. Il metodo più naturale e più semplice per istabilirla è senza dubbio quello stesso a cui ha accennato Monge (dandone soltanto il risultato finale), e che può ora presentarsi sotto la forma seguente. Sia

$$a\, x^2 + b\, y^2 + 2\, c\, x\, y + 2\, d\, x + 2\, e\, y + f = 0$$

4. Chiamando $T_{n-k}(k=1,\ 2,\dots,\ n-1)$ il determinante formato colle prime $n-1$ orizzontali e colla k^{ma} (a cominciar dal basso) orizzontale della matrice (15), potremo assumere come equazioni differenziali delle curve Γ le seguenti:

$$T_1=0,\qquad T_2=0,\dots,\ T_{n-1}=0,$$

in ciascuna delle quali le derivate dell'ordine più elevato, cioè $n+3$, compaiono soltanto nell'ultima orizzontale del primo membro. Se diciamo $P_1^{(k)}$, $P_2^{(k)},\dots,\ P_n^{(k)}$ gli elementi di tale orizzontale, abbiamo dunque:

$$T_{n-k}=\begin{vmatrix} D_1^{(2)} & D_1^{(3)} & \dots & D_1^{(n-2)} & D_1^{(n-1)} & -1 & F_1 \\ D_1^{(3)} & D_1^{(4)} & \dots & D_1^{(n-1)} & -1 & 0 & F_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_1^{(n-1)} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & F_{n-2} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & F_{n-1} \\ P_1^{(k)} & P_2^{(k)} & \dots & P_{n-3}^{(k)} & P_{n-2}^{(k)} & P_{n-1}^{(k)} & P_n^{(k)} \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$(k=1,\ 2,\dots,\ n-1),$$

---

l'equazione di una conica, e la si derivi successivamente cinque volte rispetto ad x. Le tre ultime equazioni a cui si giunge possono scriversi così:

$$\begin{aligned} &(c\,x+b\,y+e)\,y'''+3\,(b\,y'+c)\,y'' &&=0,\\ &(c\,x+b\,y+e)\,y^{\mathrm{IV}}+4\,(b\,y'+c)\,y'''+\ 3\,b\,y''^2 &&=0,\\ &(c\,x+b\,y+e)\,y^{\mathrm{V}}+5\,(b\,y'+c)\,y^{\mathrm{IV}}+10\,b\,y''\,y''' &&=0. \end{aligned}$$

E di qui, eliminando le quantità $c\,x+b\,y+e$, $b\,y'+c$, $b\,y''$ (coll'osservazione che $y''=0$ è l'equazione differenziale delle linee rette), si ottiene l'equazione cercata:

$$0=\begin{vmatrix} y''' & 3\,y'' & 0 \\ y^{\mathrm{IV}} & 4\,y''' & 3\,y'' \\ y^{\mathrm{V}} & 5\,y^{\mathrm{IV}} & 10\,y''' \end{vmatrix}=9\,y''^2\,y^{\mathrm{V}}-45\,y''\,y'''\,y^{\mathrm{IV}}+40\,y'''^3\ (*).$$

Un altro metodo assai semplice per giungere alla stessa equazione è quello indicato dall'HALPHEN nella Nota *Sur l'équation différentielle des coniques* (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. VII, pag. 83), e riprodotto dal JORDAN nel suo *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (2.ª ediz., 1893, vol. 1.°, pag. 157-158). A proposito del metodo di HALPHEN il SYLVESTER ha osservato (*Lectures on the Theory of Reciprocants*, American Journal of

---

(*) Nell'atto di licenziare le bozze mi sono accorto che questo metodo è già stato esposto per disteso e in questa stessa forma dal BATTAGLINI nella Nota *Sui punti sestatici di una curva qualunque* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1888, pag. 238).

od anche, svolgendo il determinante secondo gli elementi dell'ultima orizzontale:

$$T_{n-k} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}} P_i^{(k)} \begin{vmatrix} D_1^{(n-i+1)} & D_1^{(n-i+2)} & \ldots & D_1^{(n-1)} & F_{n-i} \\ D_1^{(n-i+2)} & D_1^{(n-i+3)} & \ldots & -1 & F_{n-i+1} \\ D_1^{(n-i+3)} & D_1^{(n-i+4)} & \ldots & 0 & F_{n-i+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_1^{(n-1)} & -1 & \ldots & 0 & F_{n-2} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & F_{n-1} \end{vmatrix} - P_n^{(k)} \right\} \tag{17}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Il determinante che sta fra le parentesi si può sviluppare in forma assai comoda secondo gli elementi dell'ultima verticale: il coefficiente dell'elemento F_{n-i+j} di posto $(j+1)^{\text{mo}}$ si trova allora moltiplicando quello dell'elemento precedente per $D_1^{(n-1)}$, quello dell'antiprecedente per $D_1^{(n-2)}, \ldots$, quello del secondo elemento per $D_1^{(n-j+1)}$, quello del primo, che è $(-1)^{\frac{(i-1)(i-2)}{2}}$, per $D_1^{(n-j)}$, indi sommando i risultati.

In particolare si ottiene:

$$T_{n-1} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \{ D_3^{(n-1)} - 2 D_2^{(n-2)} + D_1^{(n-3)} + 3 D_1^{(n-1)} D_1^{(n-2)} - 3 D_1^{(n-1)} D_2^{(n-1)} + 2 (D_1^{(n-1)})^3 \},$$

$$T_{n-2} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \{ D_3^{(n-2)} - 2 D_2^{(n-3)} + D_1^{(n-4)} + 4 (D_1^{(n-1)})^2 D_1^{(n-2)} - 4 D_1^{(n-2)} D_2^{(n-1)} - 2 (D_1^{(n-1)})^2 D_2^{(n-1)} + 2 D_1^{(n-1)} D_1^{(n-3)} - D_1^{(n-1)} D_2^{(n-2)} + (D_2^{(n-1)})^2 + 2 (D_1^{(n-2)})^2 + (D_1^{(n-1)})^4 \},$$

le quali, per $n = 3$, si riducono alle quantità v e w di Halphen, quando si tenga presente che per $n < 4$ è $D_1^{(n-3)} = 0$.

Math., vol. IX, pag. 345-346) che, quantunque assai ingegnoso, esso non può estendersi a curve piane di ordine qualunque. Esso può però venir esteso in un altro senso, cioè alle *varietà quadratiche* di uno spazio a quante si vogliano dimensioni, come io ho mostrato nella Nota *Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1896, pag. 247).

Sull'equazione differenziale delle coniche vedansi ancora Sylvester, American Journal, vol. IX, pag. 17-18, e Lie, Math. Ann., Bd. 32, pag. 226.

5. È facile trovare le equazioni della curva Γ osculatrice ad una data curva (cioè avente con questa un contatto d'ordine $n+2$) in un suo punto assegnato. Invero, partendo anzitutto dagli sviluppi (8), le equazioni d'una Γ per l'origine son date dalle (9). Ora, in virtù delle (11) e delle formole ad esse analoghe che si hanno per $k=2, 3,\ldots, n-1$, le (9) diventano:

$$\sum_{i=1}^{i=n-k-1} p_{0i}(x_i x_k - x x_{k+i}) + \sum_{i=0}^{i=k-1} p_{0,n-k+i} x_k x_{n-k+i}$$

$$+ p_{0n}(x_k - x x_{k-1} - D_1^{(k)} x x_{n-1}) = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dove per $k=1$ si conviene che sia $x_0 = x$. Le cercate equazioni s'ottengono eliminando $p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0n}$ fra la precedente, la prima delle (12) e le $n-2$ relazioni che si deducono dalla prima delle (13) ponendovi $k=2, 3,\ldots, n-1$. Il primo membro di una qualunque fra le equazioni risultanti è il determinante formato colle prime $n-1$ orizzontali della matrice (15) e con un'altra orizzontale costituita dagli elementi

$$x_1 x_k - x x_{k+1},\ x_2 x_k - x x_{k+2}, \ldots, x_{n-k-1} x_k - x x_{n-1},$$

$$x_{n-k} x_k,\ x_{n-k+1} x_k, \ldots, x_{n-1} x_k,\ x_k - x x_{k-1} - D_1^{(k)} x x_{n-1}.$$

Se infine al posto delle $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ si sostituiscono le espressioni fornite dalle (7), s'ottengono le equazioni richieste (*).

6. Prima di proseguire ci occorre stabilire alcune formole. Consideriamo in S_n una curva qualsiasi C, rappresentata nell'intorno di un suo punto non singolare 0, preso come origine delle coordinate, dagli sviluppi (8); e dallo spazio S_r, avente con essa un contatto d'ordine r in 0, proiettiamola sopra un arbitrario S_{n-r-1} (potendo essere $r=0, 1,\ldots, n-3$). Chiameremo C' la projezione di C, ed $0'$ quella di 0, cioè l'intersezione dell'S_{n-r-1} coll'S_{r+1} avente in 0 con C un contatto d'ordine $r+1$. In generale, lo spazio S_k (con $k=0, 1,\ldots, n-r-2$) avente con C' in O' un contatto d'ordine k sarà l'intersezione di S_{n-r-1} coll'S_{r+k+1} avente in O con C un contatto d'ordine $r+k+1$, e verrà rappresentato, entro l'S_{n-r-1}, dalle

(*) Per lo spazio ordinario queste equazioni sono state assegnate dall'HALPHEN (*Sur les inv. diff. des courbes gauches*, l. c., pag. 10) in modo inesatto.

equazioni:

$$x_{r+k+1} = x_{r+k+2} = \cdots = x_{n-1} = 0.$$

Se entro l' S_{n-r-1} prendiamo come origine O', e poniamo:

$$y = \frac{x_{r+1}}{x_r}, \qquad y_1 = \frac{x_{r+2}}{x_r}, \ldots, \; y_{n-r-2} = \frac{x_{n-1}}{x_r}, \tag{18}$$

si riconosce che (facendo uso, per l' S_{n-r-1}, di simboli analoghi ai simboli $D_i^{(k)}$ introdotti nel n.° 1 per l' S_n) dovranno aversi, per le coordinate di un punto situato su C' nell'intorno di O', sviluppi della forma:

$$\left. \begin{array}{l} y_k = y^{k+1} + \sum\limits_{i=1}^{i=\infty} \Delta_i^{(k)} y^{n-r+i-1} \\ (k = 1, 2, \ldots, n-r-2). \end{array} \right\} \tag{19}$$

Per determinare i coefficienti $\Delta_i^{(k)}$ basta trovare anzitutto gli effettivi sviluppi di y_k e di y in funzione di x, come si deducono dalle (8) eseguendo le divisioni indicate nelle (18), indi sostituire tali sviluppi nelle (19), ed uguagliare i coefficienti delle medesime potenze di x. Così facendo, si ricavano senza difficoltà le espressioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1^{(k)} = D_1^{(r+k+1)}, \\ \Delta_2^{(k)} = D_2^{(r+k+1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta_k^{(k)} = D_k^{(r+k+1)}, \\ \Delta_{k+1}^{(k)} = D_{k+1}^{(r+k+1)} - (k+1) D_1^{(r+1)}, \\ \Delta_{k+2}^{(k)} = D_{k+2}^{(r+k+1)} - (k+1) D_2^{(r+1)} + k D_1^{(r)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta_{n-r-1}^{(k)} = D_{n-r-1}^{(r+k+1)} - (k+1) D_{n-r-k-1}^{(r+1)} + k D_{n-r-k-2}^{(r)}, \\ \Delta_{n-r}^{(k)} = D_{n-r}^{(r+k+1)} - (k+1) D_{n-r-k}^{(r+1)} + k D_{n-r-k-1}^{(r)} - (n-r) D_1^{(r+k+1)} D_1^{(r+1)}, \\ \cdot \quad \cdot \end{array} \right\} \tag{20}$$

e in generale, per $i \geqq 1$,

$$\Delta_{k+i}^{(k)} = D_{k+i}^{(r+k+1)} - (k+1) D_i^{(r+1)} + [D_{i-1}^{(r)}, \; D_{i-1}^{(r+1)}, \ldots, \; D_{i-1}^{(r+k+1)}],$$

dove il simbolo scritto come ultimo termine rappresenta una funzione delle $D^{(r)}$, $D^{(r+1)}, \ldots, D^{(r+k+1)}$, i cui indici inferiori non superano $i - 1$. Sicchè, colle formole precedenti, da ogni invariante differenziale di ordine ω di curve di S_{n-r-1} si deduce un invariante differenziale d'ordine $\omega+r+1$ di curve di S_n, il quale è formato soltanto colle quantità $D^{(r)}, D^{(r+1)}, \ldots, D^{(n-1)}$ i cui indici inferiori, posto

$$\omega - 2n + 2r + 3 = \lambda,$$

hanno al più i valori $\lambda - 1, \lambda, \ldots, \lambda + n - r - 2$ risp.: quantità che tutte, all'infuori delle ultime (cioè delle $D^{(n-1)}$), sono d'ordine inferiore ad $\omega + r + 1$.

Per $n=3$ risultano le formole date dall'Halphen, senza dimostrazione, alla pag. 85 della Memoria più volte citata *Sur les inv. diff. des courbes gauches*.

7. Consideriamo l'espressione di T_{n-k} fornita dalla (17), dove, quando sia $k=1, 2, \ldots, n-2$, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&P_1^{(k)} = D_2^{(n-k+1)} - D_1^{(n-k)},\\
&P_2^{(k)} = D_2^{(n-k+2)},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&P_{k-1}^{(k)} = D_2^{(n-1)},\\
&P_k^{(k)} = 0,\\
&P_{k+1}^{(k)} = -1,\\
&P_{k+2}^{(k)} = \cdots = P_{n-1}^{(k)} = 0,\\
&P_n^{(k)} = F_{n-k}^{*} = D_1^{(n-k)} D_2^{(n-1)} - D_3^{(n-k)} + D_2^{(n-k-1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

In virtù di queste formole (per $k=1, 2, \ldots, n-2$) sarà sufficiente estendere la somma che comparisce in (17) da $i=1$ fino ad $i=k+1$.

Siano ora $\Theta_1, \ldots, \Theta_{n-r-2}$ i primi membri delle equazioni differenziali delle curve razionali normali di S_{n-r-1}, e per chiarezza consideriamo in primo luogo le $\Theta_2, \ldots, \Theta_{n-r-2}$. Se, conservando i simboli del n. precedente, scriviamo $\Theta_{n-r-k-1}$ in forma analoga alla (16), ed al posto delle Δ sostituiamo le espressioni date dalle (20), risulta:

$$\Theta_{n-r-k-1} = \begin{vmatrix}
D_1^{(r+3)} & D_1^{(r+4)} & \ldots & D_1^{(n-1)} & -1 & F_{r+2} + D_1^{(r+1)}\\
D_1^{(r+4)} & D_1^{(r+5)} & \ldots & -1 & 0 & F_{r+3}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
D_1^{(n-1)} & -1 & \ldots & 0 & 0 & F_{n-2}\\
-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & F_{n-1}\\
P_1^{(k)} & P_2^{(k)} & \ldots & P_{n-r-3}^{(k)} & P_{n-r-2}^{(k)} & P_n^{(k)} + \varepsilon
\end{vmatrix}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-r-3),$$

dove è

$$\varepsilon = 0 \qquad \text{se} \qquad k = 1,\ 2, \ldots,\ n - r - 4,$$
$$\varepsilon = D_1^{(r+1)} \qquad \text{se} \qquad k = n - r - 3.$$

Svolgendo il determinante secondo gli elementi dell'ultima orizzontale, ed avendo riguardo alle (21) ed alla (17), si ottiene in ogni caso:

$$\left.\begin{array}{c} \Theta_{n-r-k-1} = (-1)^{\frac{(r+1)(2n-r)}{2}+1}\, T_{n-k} \\ (k = 1,\ 2, \ldots,\ n - r - 3). \end{array}\right\} \tag{22}$$

Se invece si considera Θ_1, e si fanno in esso le sostituzioni or ora indicate, ricordando la prima delle (14) si trova:

$$\Theta_1 = (-1)^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}} F_{r+1}$$
$$+ \begin{vmatrix} D_1^{(r+3)} & D_1^{(r+4)} & \ldots & D_1^{(n-1)} & -1 & F_{r+2} \\ D_1^{(r+4)} & D_1^{(r+5)} & \ldots & -1 & 0 & F_{r+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_1^{(n-1)} & -1 & \ldots & 0 & 0 & F_{n-2} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & F_{n-1} \\ P_1^{(n-r-2)} - D_1^{(r+2)} & P_2^{(n-r-2)} - D_1^{(r+3)} & \ldots & P_{n-r-3}^{(n-r-2)} - D_1^{(n-2)} & -D_1^{(n-1)} & P_n^{(n-r-2)} \end{vmatrix}$$

Se in corrispondenza all'ultima orizzontale si spezza il determinante nella differenza di altri due, e si svolge il primo di questi secondo gli elementi dell'ultima orizzontale, confrontando colla (17), dove siasi posto $k = n - r - 2$, risulta facilmente:

$$\Theta_1 = (-1)^{\frac{(r+1)(2n-r)}{2}+1}\, T_{r+2},$$

epperò si conclude che la (22) è vera anche per $k = n - r - 2$. Si ha così la proprietà:

Se nei primi membri $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{n-r-2}$ (*con* $r = 0,\ 1, \ldots,\ n - 3$) *delle equazioni differenziali delle curve razionali normali di un* S_{n-r-1} *appartenente all'* S_n *si eseguiscono le sostituzioni* (20), *si ottengono ordinatamente, salvo il segno, i primi membri* $T_{r+2}, T_{r+3}, \ldots, T_{n-1}$ *delle ultime* $n - r - 2$ *equazioni differenziali delle curve razionali normali di* S_n.

Circa a siffatti segni, nel caso più semplice in cui si faccia la projezione da un punto sopra un iperpiano ($r = 0$), essi sono per le rispettive Θ e T gli stessi oppur no, secondo che n è dispari o pari.

La proprietà precedente non soltanto mostra che l'insieme d'un numero qualunque delle espressioni $T_1, \ldots, T_{n-1}$, prese ordinatamente a cominciar dall'ultima, è invariante per trasformazioni omografiche dell' S_n, ma fornisce altresì un (primo) significato geometrico dell'annullarsi delle espressioni di quell'insieme in un punto assegnato di una curva arbitraria di S_n. È chiaro infatti che, posto per semplicità $k = n - r - 2$, quella proprietà può interpretarsi come segue:

L'essere soddisfatte, in un punto non singolare O di una qualsiasi curva C di S_n, le ultime k ($= 1, 2, \ldots, n - 2$) *equazioni differenziali delle curve razionali normali di S_n, è la condizione necessaria e sufficiente perchè, projettando C dallo spazio S_{n-k-2}, avente con essa un contatto d'ordine $n - k - 2$ in O, sopra un S_{k+1}, si ottenga una curva C′ siffatta, che esista una curva razionale normale dello spazio S_{k+1}, la quale abbia con C′ un contatto d'ordine $k + 4$ nel punto O′ projezione di O* (*).

In particolare:

La quantità T_{n-1}, di cui alla fine del n.° 4 si è data l'espressione sviluppata, *è un invariante differenziale projettivo, di ordine $n + 3$ e di peso 3: il suo annullarsi caratterizza, sopra una curva qualsiasi C, i punti tali che, projettando C sopra un piano dall' S_{n-3} avente in uno di essi con C un contatto d'ordine $n - 3$, risulti una curva dotata di un punto sestattico nella projezione del punto considerato* (**).

(*) Più tardi (nel n.° 18) questa stessa proprietà verrà espressa per mezzo dell'annullarsi simultaneo, nel punto O, di k *invarianti differenziali projettivi.*

(**) Tali sono, nello spazio ordinario, i punti d'una curva, pei quali sei tangenti consecutive appartengono ad un complesso lineare (cfr. Halphen, *Sur les inv. diff. des courbes gauches*, pag. 85).

§ III.

Alcune interpretazioni geometriche. Riduzione alla forma canonica (1).

8. Le proprietà del paragrafo precedente possono essere presentate sotto altra forma, collegandole colla risoluzione del problema generale di trasformare gli sviluppi (8) in altri, che abbiano la forma canonica (1) indicata nell'introduzione del presente lavoro. Questa forma può anzitutto esser preveduta con considerazioni geometriche: al quale scopo basta far capo al teorema seguente (*), di cui mi limito a dar l'enunciato, poichè la dimostrazione si ottiene senza difficoltà estendendo quella data dall'Halphen (nel n.° 13 del lavoro poc' anzi citato) per lo spazio ordinario:

Se due curve di S_n hanno un contatto d'ordine k in un punto O non singolare per nessuna di esse, e vengono tagliate con un iperpiano infinitamente vicino ad O ed avente per limite un iperpiano qualunque non tangente in O alle due curve, la retta che unisce i due punti d'intersezione prossimi ad O ha il suo limite in un piano tangente ben determinato, il quale non dipende dalla posizione limite dell'iperpiano mobile.

Se da un punto scelto ad arbitrio su tal piano si projettano le date curve sopra un iperpiano, si ottengono due curve, che nella projezione di O hanno un contatto d'ordine superiore a k.

Questo piano si dirà il *piano principale* delle date curve nel punto 0. E si diranno ordinatamente S_3, $S_4, \ldots$, S_{n-1} *principali* delle curve stesse in 0 quelli che sono determinati da quel piano e dagli spazî S_2, $S_3, \ldots$, S_{n-2} aventi in 0 colle date curve un contatto di 2.°, 3.°,..., $(n-2)^{\text{mo}}$ ordine.

È chiaro che, se da un S_{r-1} qualunque appartenente all' S_{r+1} principale ($r = 1, 2, \ldots, n-2$) si proiettano le date curve sopra un S_{n-r}, risultano due curve aventi nella projezione di 0 un contatto d'ordine superiore a k. Ora si assuma 0 come origine delle coordinate, e si supponga che quell'S_{r+1} sia rappresentato dalle equazioni

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-r-1} = 0.$$

(*) Altri teoremi, che con questo hanno intimo legame, si troveranno nella dissertazione di laurea del D.r Beppo Levi, che verrà presto pubblicata.

Sviluppando le coordinate x_1, $x_2,\ldots$, x_{n-1} di due punti, prossimi ad O e appartenenti alle due curve, in serie di potenze di x, tali sviluppi avranno i coefficienti ordinatamente uguali fino a quelli dei termini di grado k inclusivamente, ed anzi gli sviluppi delle x_1, $x_2,\ldots$, x_{n-r-1} coincideranno fino ai termini di grado $k+1$.

Ciò posto, siano C una curva qualsiasi di S_n ed O un suo punto non singolare, e consideriamo la curva razionale normale Γ individuata dall'avere con C un contatto d'ordine $n+2$ in O. Come è noto, essa può rappresentarsi colle formole:

$$x_1 = x^2, \qquad x_2 = x^3, \ldots, \; x_{n-1} = x^n:$$

basta per ciò introdurre l'omogeneità nelle coordinate, intendendo che le x, x_1, $x_2,\ldots$, x_{n-1} significhino i rapporti di n coordinate ad un'altra x_0, e supporre che le equazioni

$$x_{n-1} = 0, \qquad x_{n-2} = 0, \qquad x = 0, \qquad x_0 = 0$$

rappresentino quattro iperpiani, di cui il primo abbia con Γ un contatto d'ordine $n-1$ in O, il secondo abbia con Γ un contatto d'ordine $n-2$ in O e sechi ulteriormente Γ in un punto *arbitrario* Ω, il terzo passi per O ed abbia con Γ un contatto d'ordine $n-2$ in Ω, e l'ultimo abbia con Γ un contatto d'ordine $n-1$ in Ω; mentre l'equazione

$$x_{n-i} = 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots, n-1)$$

sia quella dell'iperpiano avente con Γ due contatti degli ordini $n-i$ ed $i-2$ risp. in O ed Ω.

Con tale sistema di coordinate la curva C, nell'intorno di O, verrà rappresentata da sviluppi della forma:

$$\left. \begin{array}{c} x_i = x^{i+1} + H_{n+3}^{(i)} x^{n+3} + H_{n+4}^{(i)} x^{n+4} + \cdots \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{array} \right\} \tag{23}$$

E se come iperpiano $x_{n-2} = 0$ si sceglie proprio l'iperpiano principale di C e Γ in O, dovrà risultar nullo il coefficiente di x^{n+3} nella serie che dà x_{n-2}, e la rappresentazione (23) assumerà la forma voluta (1), dove evidentemente tutti i coefficienti J saranno invarianti differenziali projettivi.

9. Sulla forma (23) possiamo far sin d'ora alcune osservazioni, di cui ci gioveremo in sèguito. Lo spazio S_{r+1} $(r = 1, 2, \ldots, n-2)$ definito dalle equazioni

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_{n-1} = 0$$

ha in O con C e con Γ un contatto d'ordine $r+1$; affinchè esso coincida coll' S_{r+1} principale di queste curve in O, è necessario e sufficiente (n. prec.) che si abbia:

$$H_{n+3}^{(r+1)} = H_{n+3}^{(r+2)} = \cdots = H_{n+3}^{(n-1)} = 0.$$

L'esser soddisfatte queste $n-r-1$ relazioni dà quindi la condizione perchè projettando C e Γ sopra un S_{n-r} da un arbitrario S_{r-1} contenuto nell' S_{r+1}, che ha con C e Γ un contatto d'ordine $r+1$ in O, si ottengano due curve aventi un contatto d'ordine superiore ad $n+2$ nella projezione O' di O (*). In particolare, se projettiamo C e Γ dall' S_{r-1} avente con esse un contatto d'ordine $r-1$ in O, si deduce che la projezione C' di C sarà tale, che esisterà nell' S_{n-r} una curva razionale normale di questo spazio, la quale avrà in O' con C' un contatto d'ordine superiore ad $n-r+2$. Ora, posto $k=n-r-1$, questa interpretazione geometrica coincide con quella che si è stabilita alla fine del n.° 7 per il contemporaneo verificarsi, nel punto O, delle ultime k equazioni differenziali delle curve razionali normali di S_n. Ciò sussiste, evidentemente, anche per $k=n-1$ (ossia per $r=0$), e tutto questo basta per poter affermare che *le* $H_{n+3}^{(r+1)}, H_{n+3}^{(r+2)}, \ldots, H_{n+3}^{(n-1)}$ ($r=0, 1, \ldots, n-2$) *dovranno potersi esprimere come funzioni lineari omogenee delle quantità già studiate* $T_{r+1}, T_{r+2}, \ldots, T_{n-1}$ (in particolare, che la $H_{n+3}^{(n-1)}$ non potrà differire dalla T_{n-1} che per un fattor costante). A conferma della qual conclusione si può anche osservare che, se si costruiscono le equazioni differenziali delle curve razionali normali di S_n sotto la forma (16) e ponendo a base gli sviluppi (23), si trova per la quantità T_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ l'espressione

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} H_{n+3}^{(i)} \text{ (**)}.$$

È anche facile assegnare il significato geometrico dell'annullarsi dei singoli coefficienti $H_{n+3}^{(i)}$: significato che, ben s'intende, è legato all'iperpiano, variabile in un fascio, $x_{n-2}=0$ (n. prec.). Invero l'annullarsi di $H_{n+3}^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots,$

(*) Senza invocare la proprietà degli spazî principali, ciò risulta anche dalle (23), quando come S_{r-1} si assuma quello che vien rappresentato da

$$x = x_0 = x_{r+1} = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

(**) Dalle osservazioni del testo nasce altresì un nuovo modo d'interpretare geometricamente *l'annullarsi delle* $T_{r+1}, T_{r+2}, \ldots, T_{n-1}$ *in un punto* O *di* C: questo fatto cioè dà *la condizione perchè l'* S_{r+1} *principale di* C *e* Γ *in* O *coincida coll'* S_{r+1} *che ha in* O *con tali curve un contatto d'ordine* $r+1$.

$n-1$) esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè, projettando sopra un piano le curve C e Γ da un S_{n-3} situato nell'iperpiano $x_i = 0$, si ottengano due curve aventi nella projezione di O un contatto d'ordine superiore ad $n+2$.

Se come tale S_{n-3} si assume quello che è rappresentato da

$$x_{i-2} = x_{i-1} = x_i = 0, \tag{24}$$

nasce una notevole interpretazione, che può anche dedursi direttamente nel seguente modo. Si consideri la quadrica ($n-2$ volte specializzata)

$$x_i\, x_{i-2} - x_{i-1}^2 = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1), \tag{25}$$

dove per $i = 1,\ 2$ si conviene di scrivere risp.

$$x_1\, x_0 - x^2 = 0, \qquad x_2\, x - x_1^2 = 0.$$

Essa contiene la curva Γ, e come spazio doppio l' S_{n-3} dato dalle (24), il quale ha con Γ due contatti degli ordini $i-2$ ed $n-i-2$ in O ed Ω risp. Sostituendo in (25) gli sviluppi (23), si trova l'equazione:

$$H_{n+3}^{(i)}\, x^{n+i+2} + \cdots = 0,$$

nella quale i termini che seguono il primo contengono potenze superiori di x. Sicchè, delle intersezioni di C colla quadrica, $n+i+2$ vengono in generale assorbite dal punto O, e ne viene assorbito un numero maggiore soltanto quando sia $H_{n+3}^{(i)} = 0$. Ricordando che C e Γ hanno in O un contatto d'ordine $n+2$, risulta dunque la proprietà:

Projettando la curva C dall' S_{n-3} rappresentato dalle (24) *sopra un piano, si ottiene una curva tale che esiste una conica avente con essa nella projezione di O un contatto d'ordine $n-i+3$ in generale: l'annullarsi della quantità $H_{n+3}^{(i)}$ è appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè questo contatto sia d'ordine più elevato* (*).

10. Ora proponiamoci di risolvere in modo puramente algebrico la questione enunciata in principio del n.° 8: a tal fine, come ha fatto l' Halphen

(*) Le singole quantità $H_{n+3}^{(i)}$ (al pari delle T_i) non sono invarianti, all'infuori della $H_{n+3}^{(n-1)}$ (la quale, come già si è notato, e come si vedrà nel séguito con maggior precisione, non differisce dalla T_{n-1}). Il significato, che per siffatto invariante vien fornito dal teorema del testo, coincide con quello trovato alla fine del n.° 7. Anche l'interpretazione, che lo stesso teorema dà dell'annullarsi di $H_{n+3}^{(n-2)}$, coincide con quella che già conosciamo, secondo la quale l'iperpiano principale di C e Γ in O vien rappresentato da $x_{n-2} = 0$.

per $n=3$, cercheremo anzitutto una sostituzione lineare, la quale conduca dagli sviluppi (8) alla forma intermediaria (23), ed in questo passaggio (che, come si è veduto nel n.° 8, si può eseguire in infiniti modi) manterremo invariato l'iperpiano $x_{n-2}=0$. Avvertiamo poi fin d'ora che, per le questioni di cui più innanzi dovremo occuparci, nello sviluppo della i^{ma} coordinata ($i=1, 2, \ldots, n-1$) secondo le potenze crescenti della variabile indipendente ($x, y, \ldots$), cercheremo ogni volta la forma effettiva dei coefficienti pei soli termini il cui grado non superi $n+i+2$.

Indicando con $X, X_1, \ldots, X_{n-1}$ le nuove coordinate, sia

$$\frac{\xi}{\xi_n}=X, \qquad \frac{\xi_i}{\xi_n}=X_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1) \tag{26}$$

la cercata sostituzione. Per l'ipotesi fatta, le $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ dovranno esprimersi linearmente colle $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ nella forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= x + A_1^{(0)} x_1 + \cdots + A_{n-1}^{(0)} x_{n-1},\\
\xi_1 &= x_1 + A_2^{(1)} x_2 + \cdots + A_{n-1}^{(1)} x_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_{n-3} &= x_{n-3} + A_{n-2}^{(n-3)} x_{n-2} + A_{n-1}^{(n-3)} x_{n-1},\\
\xi_{n-2} &= x_{n-2},\\
\xi_{n-1} &= x_{n-1},\\
\xi_n &= 1 + A_0 x + A_1 x_1 + \cdots + A_{n-1} x_{n-1},
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

dove i coefficienti A sono da determinarsi.

Ora consideriamo le differenze

$$\xi_n \xi_1 - \xi^2, \ \xi_n^2 \xi_2 - \xi^3, \ldots, \ \xi_n^{n-1} \xi_{n-1} - \xi^n, \tag{28}$$

le quali, sviluppate secondo le potenze crescenti di x, cominciano risp. con un termine di grado $3, 4, \ldots, n+1$, e disponiamo dei coefficienti A in guisa che risultino nulli tutti i termini di tali sviluppi fino a quelli di grado $n+2$ inclusivamente. Si ottengono così $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ relazioni fra le A, cioè tante appunto quante sono queste quantità, e risultano, per le differenze (28), sviluppi della forma:

$$\xi_n^i \xi_i - \xi^{i+1} = \theta_{n+3}^{(i)} x^{n+3} + \theta_{n+4}^{(i)} x^{n+4} + \cdots$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Di qui e dalle (26) si ricava:

$$X_i = X^{i+1} + \theta^{(i)}_{n+3} \frac{x^{n+3}}{\xi_n^{i+1}} + \theta^{(i)}_{n+4} \frac{x^{n+4}}{\xi_n^{i+1}} + \cdots \tag{29}$$

Ma dalle (27) si deduce:

$$\frac{\xi}{\xi_n} = x + (A_1^{(0)} - A_0)\, x^2 + (A_2^{(0)} - A_1 - A_0 A_1^{(0)} + A_0^2)\, x^3$$
$$+ \cdots + (A_{n-1}^{(0)} - A_{n-2} + \cdots)\, x^n + \cdots,$$

epperò si ha facilmente:

$$\frac{x^{n+3}}{\xi_n^{i+1}} = \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+3} + h^{(n+3)}_{n+4} \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+4} + \cdots + h^{(n+3)}_{n+i+2} \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+i+2} + \cdots,$$

$$\frac{x^{n+4}}{\xi_n^{i+1}} = \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+4} + h^{(n+4)}_{n+5} \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+5} + \cdots + h^{(n+4)}_{n+i+2} \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+i+2} + \cdots,$$

. . . .

$$\frac{x^{n+i+2}}{\xi_n^{i+1}} = \left(\frac{\xi}{\xi_n}\right)^{n+i+2} + \cdots,$$

dove:

$$\left.\begin{aligned}
h^{(n+3)}_{n+4} &= (n - i + 2)\, A_0 - (n + 3)\, A_1^{(0)}, \\
h^{(n+3)}_{n+5} &= (n - i + 2)\, A_1 - (n + 3)\, A_2^{(0)} + \frac{(n+3)(n+6)}{2} (A_1^{(0)})^2 \\
&\quad + \left\{ (n + 4)(i + 1) - (n + 3)(n + 5) \right\} A_0 A_1^{(0)} \\
&\quad + \left\{ \frac{(n+2)(n+3)}{2} - (n + 3)\, i + \frac{i(i+1)}{2} \right\} A_0^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
h^{(n+3)}_{n+i+2} &= (n - i + 2)\, A_{i-2} - (n + 3)\, A_{i-1}^{(0)} + \cdots \\
&\qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n - 1),
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

mentre $h^{(n+4)}_{n+5}$, $h^{(n+4)}_{n+6}, \ldots$; $h^{(n+5)}_{n+6}, \ldots$; ... si deducono risp. dai precedenti cambiando soltanto n in $n + 1$, $n + 2, \ldots$, ma lasciando del tutto inalterate le quantità A.

Sostituendo in (29) si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} X_i = X^{i+1} + H^{(i)}_{n+3} X^{n+3} + H^{(i)}_{n+4} X^{n+4} + \cdots \\ (i = 1,\ 2, \ldots,\ n - 1), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

avendo posto:

$$\left.\begin{aligned}
&H^{(i)}_{n+3} = \theta^{(i)}_{n+3},\\
&H^{(i)}_{n+4} = h^{(n+3)}_{n+4}\,\theta^{(i)}_{n+3} + \theta^{(i)}_{n+4},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&H^{(i)}_{n+i+2} = h^{(n+3)}_{n+i+2}\,\theta^{(i)}_{n+3} + h^{(n+4)}_{n+i+2}\,\theta^{(i)}_{n+4} + \cdots + h^{(n+i+1)}_{n+i+2}\,\theta^{(i)}_{n+i+1} + \theta^{(i)}_{n+i+2}.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

In (31) abbiamo la forma intermediaria cercata, che ha il tipo della (23).

11. A risolvere completamente la questione trattata nel n.° precedente rimangono ancora da determinare le espressioni dei coefficienti A delle (27) in funzione delle quantità $D^{(k)}_i$ con cui sono composte le (8). Per tale scopo, — mal potendosi estendere il metodo usato dall'Halphen per $n = 3$, e che consiste nell'eseguire effettivamente i calcoli indicati nel n.° precedente, sviluppando le differenze (28), ecc. — projettiamo la data curva C, rappresentata nell'intorno dell'origine O dagli sviluppi (8), da O sopra un arbitrario iperpiano, e, come s'è fatto nel n.° 6, dove pongasi $r = 0$, dato in S_n un punto che abbia per coordinate $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$, assumiamo entro l'S_{n-1} come coordinate della sua projezione i rapporti

$$y = \frac{x_1}{x}, \qquad y_1 = \frac{x_2}{x}, \ldots, \qquad y_{n-2} = \frac{x_{n-1}}{x}.$$

In virtù delle (20), dove si faccia $r = 0$, la projezione C' di C verrà rappresentata, nell'intorno del punto O' projezione di O, dagli sviluppi:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = y^2 + D^{(2)}_1 y^n + (D^{(2)}_2 - 2\,D^{(1)}_1)\,y^{n+1} + \cdots,\\
&y_2 = y^3 + D^{(3)}_1 y^n + D^{(3)}_2 y^{n+1} + \cdots,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&y_{n-2} = y^{n-1} + D^{(n-1)}_1 y^n + D^{(n-1)}_2 y^{n+1} + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Se ora in S_n si eseguisce sulle coordinate $x, x_1, \ldots, x_{n-1}$ la trasformazione lineare fornita dalle equazioni (26) e (27), nascerà nell'S_{n-1} per le coordinate $y, y_1, \ldots, y_{n-2}$ la trasformazione lineare

$$\frac{\eta}{\eta_{n-1}} = Y, \qquad \frac{\eta_i}{\eta_{n-1}} = Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2), \tag{34}$$

dove

$$\left.\begin{aligned}
\eta &= y + A_2^{(1)} y_1 + \cdots + A_{n-1}^{(1)} y_{n-2},\\
\eta_1 &= y_1 + A_3^{(2)} y_2 + \cdots + A_{n-1}^{(2)} y_{n-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{n-4} &= y_{n-4} + A_{n-2}^{(n-3)} y_{n-3} + A_{n-1}^{(n-3)} y_{n-2},\\
\eta_{n-3} &= y_{n-3},\\
\eta_{n-2} &= y_{n-2},\\
\eta_{n-1} &= 1 + A_1^{(0)} y + A_2^{(0)} y_1 + \cdots + A_{n-1}^{(0)} y_{n-2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Ora si supponga che la trasformazione data dalle (26) e (27) conduca per la curva C alla rappresentazione (31): la trasformazione data dalle (34) e (35) fornirà di conseguenza per la curva C' una rappresentazione, che si potrà ricavare direttamente dagli sviluppi (31), applicando a questi le formole (20), le quali, com'è chiaro, valgono indipendentemente dal particolare significato che hanno nelle (8) i simboli $D_i^{(k)}$. Nel caso attuale, in cui si tratta degli sviluppi (31), questi simboli hanno i valori seguenti:

$$D_1^{(k)} = 0, \qquad D_2^{(k)} = 0, \qquad D_3^{(k)} = H_{n+3}^{(k)}, \ldots$$
$$(k = 1,\ 2, \ldots,\ n-1),$$

epperò la rappresentazione, che in virtù delle (34) e (35) si ottiene per C', è:

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= Y^{i+1} + H_{n+3}^{(i+1)} Y^{n+2} + \cdots \\ (i &= 1,\ 2, \ldots,\ n-2). \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Siccome questa, per lo spazio S_{n-1}, ha la stessa forma della (31), segue che, se la trasformazione risultante dalle (26) e (27) risolve il nostro problema per la curva C di S_n, la trasformazione risultante dalle (34) e (35) risolverà lo stesso problema per la curva C' di S_{n-1}.

Di più si scorge (osservazione che utilizzeremo nel n.° 13) che i coefficienti dei secondi termini nelle (31) e (36) sono ordinatamente uguali gli uni agli altri, all'infuori del coefficiente $H_{n+3}^{(1)}$ che nelle (36) non comparisce (*).

Ora dal modo con cui debbono venir determinati i coefficienti A delle (27) — in modo cioè da annullare, nelle differenze (28), i coefficienti dei diversi

(*) Si può anche osservare come dalle cose precedenti risulti che, trovate le H_{n+3} per l'S_{n-1}, si hanno immediatamente e senza nessun calcolo anche le H_{n+3} per l'S_n, all'infuori della prima.

termini fino a quelli di grado $n+2$ — risulta subito che essi sono formati, in modo intiero, colle sole quantità $D_1^{(i)}$ e $D_2^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. Se quindi si confrontano le (8) colle (33), e le (26), (27) colle (34), (35), si conclude che, quando si siano determinate le espressioni di $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, dalle prime $n-1$ di esse si potranno dedurre risp. quelle di $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{n-1}^{(0)}$ cambiando soltanto n in $n-1$ nei coefficienti delle diverse quantità D (*), ma lasciando del tutto inalterate queste quantità, ad eccezione delle $D_1^{(1)}$ e $D_2^{(1)}$ che dovranno essere omesse, e della $D_2^{(2)}$ che dovrà venir cangiata nella differenza $D_2^{(2)}-2\,D_1^{(1)}$. Ma si riconosce facilmente che la $D_2^{(1)}$ non entra in nessuna delle $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$, e che le $D_1^{(1)}$ e $D_2^{(2)}$ entrano soltanto nell'ultima di queste, avendosi

$$A_{n-2} = 3\,D_1^{(1)} - 2\,D_2^{(2)} + \cdots,$$

dove i termini omessi nel secondo membro sono tutti indipendenti da $D_1^{(1)}$ e $D_2^{(2)}$. Deducendo di qui l'espressione di $A_{n-1}^{(0)}$ secondo la regola ora indicata, risulta:

$$A_{n-1}^{(0)} = 2\,D_1^{(1)} - D_2^{(2)} + \cdots,$$

cioè i due termini scritti si ricavano dai corrispondenti termini di A_{n-2} soltanto col diminuirne i coefficienti di un'unità.

I ragionamenti fatti si possono proseguire considerando le $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \ldots$, onde si può enunciare la regola semplicissima:

Le espressioni dei coefficienti $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{n-1}^{(0)}$ si deducono risp. da quelle di $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ col solo mutamento di n in $n-1$ nei coefficienti delle varie quantità $D_1^{(i)}$ e $D_2^{(i)}$; collo stesso cangiamento, dalle espressioni di $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{n-2}^{(0)}$ si deducono risp. quelle di $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \ldots, A_{n-1}^{(1)}$, e così di seguito.

La determinazione delle quantità A si ottiene dunque con semplici cangiamenti di lettere, quando si siano soltanto determinati i coefficienti $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ della ξ_n.

12. Per trovare questi ultimi coefficienti, si osservi che, per $k=1, 2, \ldots, n-1$, si può scrivere:

$$\xi_n^{n-k} = 1 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots + R_{k-1} x^{k-1} + [(n-k)\,A_{k-1} + R_k]\,x^k + \cdots,$$

(*) S'intende che, se qualcuno di tali coefficienti fosse puramente numerico, cioè indipendente da n, esso dovrebbe venir diminuito di un'unità.

dove tutte le $R_1, R_2, \ldots, R_k$ sono quantità note contenenti le $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$, ma non contenenti nessuna delle $A_{k-1}, \ldots, A_{n-1}$. In modo analogo, possiamo scrivere:

$$\xi^{n-k+1} = x^{n-k+1}\Big\{1 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_{k-1} x^{k-1}$$
$$+ [(n-k+1) A_k^{(0)} + S_k] x^k + \cdots\Big\},$$

dove le $S_1, S_2, \ldots, S_k$ sono pure quantità note formate colle $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{k-1}^{(0)}$, ma non contenenti nessuna delle $A_k^{(0)}, \ldots, A_{n-1}^{(0)}$. Ed inoltre si osservi che le $S_1, S_2, \ldots, S_k$ si deducono risp. dalle $R_1, R_2, \ldots, R_k$ cambiando n in $n+1$, e sostituendo al posto delle $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$ ordinatamente le $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{k-1}^{(0)}$. Se allora (v. il n.° 10) scriviamo che nello sviluppo della differenza

$$\xi_n^{n-k}\,\xi_{n-k} - \xi^{n-k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

è nullo il coefficiente di x^{n+1}, otteniamo la relazione:

$$\left.\begin{aligned}(n-k) A_{k-1} - (n-k+1) A_k^{(0)} + R_k - S_k + D_1^{(n-k)}\\ + \sum_{i=1}^{i=k-1} (R_i + D_1^{(n-i)}) A_{n-i}^{(n-k)} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Analogamente, uguagliando a zero il coefficiente di x^{n+2} nello sviluppo della differenza

$$\xi_n^{n-k+1}\,\xi_{n-k+1} - \xi^{n-k+2} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}(n-k+1) A_{k-1} - (n-k+2) A_k^{(0)} + \rho_k - S_k + \rho_1 D_1^{(n-k+1)} + D_2^{(n-k+1)}\\ + \sum_{i=1}^{i=k-2} (D_2^{(n-i)} + \rho_1 D_1^{(n-i)} + \rho_{i+1}) A_{n-i}^{(n-k+1)} - \sum_{i=1}^{i=k-1} S_i A_{k-i}^{(0)} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dove si è posto:

$$\rho_1 = R_1 + A_0,$$
$$\rho_2 = R_2 + R_1 A_0 + A_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_{k-1} = R_{k-1} + R_{k-2} A_0 + \cdots + R_1 A_{k-3} + A_{k-2},$$
$$\rho_k = R_k + R_{k-1} A_0 + \cdots + R_1 A_{k-2}.$$

Dalle (37) e (38) si deduce:

$$\left.\begin{aligned} A_{k-1} &= (n-k+2)\left\{R_k - S_k + D_1^{(n-k)} + \sum_{i=1}^{i=k-1} (R_i + D_1^{(n-i)})\, A_{n-i}^{(n-k)}\right\} \\ &\quad -(n-k+1)\left\{\rho_k - S_k + \rho_1 D_1^{(n-k+1)} + D_2^{(n-k+1)}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{i=k-2} (D_2^{(n-i)} + \rho_1 D_1^{(n-i)} + \rho_{i+1})\, A_{n-i}^{(n-k+1)} - \sum_{i=1}^{i=k-1} S_i A_{k-i}^{(0)}\right\} \\ &\qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Come già si è notato, le quantità $R_1, \ldots, R_k$; $S_1, \ldots, S_k$; $\rho_1, \ldots, \rho_k$ contengono soltanto le $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$ e le $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_{k-1}^{(0)}$, le quali ultime si ricavano ordinatamente dalle prime con soli cangiamenti di lettere (n.° prec.); le $A_{n-k+1}^{(n-k)}, A_{n-k+2}^{(n-k)}, \ldots, A_{n-1}^{(n-k)}$ e le $A_{n-k+2}^{(n-k+1)}, A_{n-k+3}^{(n-k+1)}, \ldots, A_{n-1}^{(n-k+1)}$ che entrano nel secondo membro della (39) si deducono pure cogli stessi cangiamenti di lettere risp. dalle $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$. Abbiamo dunque nella (39) una formola, col mezzo della quale si può determinare l'espressione di A_{k-1} quando siano note quelle di $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$ (per $k = 2, 3, \ldots, n-1$). D'altra parte si trova subito direttamente:

$$A_0 = -(n-1)\, D_1^{(n-1)},$$

e per $k = n$ serve senz'altro la (38), dalla quale, essendo $A_n^{(0)} = 0$, si può dedurre l'espressione di A_{n-1} (*). Perciò, ricordando ciò che si è dimostrato nel n.° precedente, possiamo dire che il problema di determinare la sostituzione (26), (27) è risoluto. Esso ha una ed una sola soluzione, e per la via ora indicata si trova:

$$A_0 = -(n-1)\, D_1^{(n-1)},$$

$$A_1 = n\, D_1^{(n-2)} - (n-1)\, D_2^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} (D_1^{(n-1)})^2,$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (n-1)\, D_1^{(n-3)} - (n-2)\, D_2^{(n-2)} + (n-1)(n-3)\, D_1^{(n-1)} D_2^{(n-1)} \\ &\quad -(n-1)(n-3)\, D_1^{(n-1)} D_1^{(n-2)} - \frac{(n-1)(n-3)(n+4)}{6} (D_1^{(n-1)})^3, \end{aligned}$$

(*) La stessa (38) si potrebbe anche assumere a compiere l'ufficio della (39): infatti (ad es.) projettando C dal punto O sopra un iperpiano, in luogo del coefficiente A_{n-1} comparirebbe, come s'è veduto nel n.° prec., l'$A_{n-1}^{(0)}$, il quale risulterebbe quindi espresso, per mezzo della (38), in funzione di $A_1^{(0)}, \ldots, A_{n-2}^{(0)}$; e di qui, come s'è notato ancora nel n.° prec., si otterrebbe tosto A_{n-2} espresso in funzione di $A_0, A_1, \ldots, A_{n-3}$. E così di sèguito. Preferiamo però riferirci alla (39), dove la cosa apparisce in modo più esplicito.

$$
\begin{aligned}
A_3 = {} & (n-2)\, D_1^{(n-4)} - (n-3)\, D_2^{(n-3)} + (n^2 - 5n + 5)\, D_1^{(n-1)}\, D_2^{(n-2)} \\
& - (n^2 - n - 4)\, D_1^{(n-2)}\, D_2^{(n-1)} - (n-2)(n-3)\, D_1^{(n-1)}\, D_1^{(n-3)} \\
& + \frac{n(n-3)}{2} (D_2^{(n-1)})^2 + \frac{(n-2)(n+3)}{2} (D_1^{(n-2)})^2 \\
& + \frac{(n-2)(n^2-5n+12)}{2} (D_1^{(n-1)})^2\, D_1^{(n-2)} - \frac{(n-3)(n^2-3n+4)}{2} (D_1^{(n-1)})^2\, D_2^{(n-1)} \\
& + \frac{(n-2)(n-3)(n^2+7n-20)}{24} (D_1^{(n-1)})^4 ,
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
A_i = (n-i+1)\, D_1^{(n-i-1)} - (n-i)\, D_2^{(n-i)} + \cdots
$$

$$
(i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1),
$$

dove i termini, che nell'espressione di A_i seguono i due che si son scritti, contengono almeno due fattori D (*).

13. Avendo nei n.ⁱ precedenti determinata la sostituzione lineare (26), (27), che dalla rappresentazione (8) conduce alla (31), cerchiamo ora in quest'ultima le effettive espressioni dei coefficienti $H_{n+3}^{(i)}$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1)$. Il metodo tenuto dall'Halphen per raggiungere questo scopo nel caso di $n = 3$ consiste nello sviluppare i calcoli che sono stati indicati nel n.° 10: tali calcoli possono essere del tutto risparmiati per la via seguente, la quale ha pure il vantaggio di mettere in evidenza il modo di composizione di quei coefficienti, che è assai semplice e notevole.

Per ciò che si è trovato nella prima parte del n.° 9, possiamo anzitutto scrivere:

$$
H_{n+3}^{(1)} = \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 + \cdots + \gamma_{n-1} T_{n-1},
$$

dove le γ sono da determinarsi. Ora, considerando l'espressione di T_{n-k} fornita dalla (16), il determinante del secondo membro contiene una sola delle quantità $D_3^{(1)}, \ldots,\ D_3^{(n-1)}$, cioè la $D_3^{(n-k)}$ che entra nell'elemento $P_n^{(k)}$ (**).

(*) Pel caso estremo $i = n-1$, cioè nell'espressione di A_{n-1}, poichè $D_1^{(0)} = 0$, non si ha più che un termine contenente un sol fattore D. Si trova facilmente:

$$
A_{n-1} = -D_2^{(1)} + D_2^{(2)}\, D_1^{(n-1)} - 2\, D_1^{(1)}\, D_1^{(n-1)} + \ldots
$$

(**) Si ha infatti dalla seconda delle (14):

$$
P_n^{(k)} = F_{n-k}^{*} = D_1^{(n-k)}\, D_2^{(n-1)} + D_2^{(n-k-1)} - D_3^{(n-k)}.
$$

Poichè tal quantità nel determinante risulta moltiplicata per $(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, la formola precedente si può scrivere come segue:

$$H^{(1)}_{n+3} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (\gamma_1 D^{(1)}_3 + \gamma_2 D^{(2)}_3 + \cdots + \gamma_{n-1} D^{(n-1)}_3) + \cdots, \quad (40)$$

dove i termini omessi da ultimo son formati, oltre che colle γ, unicamente colle $D^{(i)}_1$ e $D^{(i)}_2$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

D'altra parte $H^{(1)}_{n+3}$, pel n.° 10, è il coefficiente di x^{n+3} nello sviluppo della differenza $\xi_n \xi_1 - \xi^2$, epperò:

$$H^{(1)}_{n+3} = D^{(1)}_3 + A^{(1)}_2 D^{(2)}_3 + A^{(1)}_3 D^{(3)}_3 + \cdots + A^{(1)}_{n-1} D^{(n-1)}_3 + \cdots, \quad (41)$$

dove i termini omessi in fine contengono soltanto le quantità $D^{(i)}_1$, $D^{(i)}_2$ e le A_i, $A^{(0)}_i$, $A^{(1)}_i$. Ma segue dai n.i precedenti che queste ultime son formate alla loro volta esclusivamente colle $D^{(i)}_1$ e $D^{(i)}_2$, sicchè possiamo dire che nella (41) i termini non scritti alla fine sono formati soltanto colle $D^{(i)}_1$ e $D^{(i)}_2$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Confrontando le (40) e (41) fra loro, si deduce:

$$\gamma_1 = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}, \quad \gamma_i = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} A^{(1)}_i$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Per trovare l'espressione di $H^{(i)}_{n+3}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$, projettiamo la curva C dal punto O sopra un iperpiano: si è veduto nel n° 11 che per la curva projezione C' si ottiene, nell'intorno della projezione O' di O, la rappresentazione (36), analoga alla (31) di C, quando si faccia uso della trasformazione lineare (34), (35), dove le $A^{(2)}_3, A^{(2)}_4, \ldots, A^{(2)}_{n-1}$ compajono al posto delle $A^{(1)}_2$, $A^{(1)}_3, \ldots, A^{(1)}_{n-1}$ di S_n. Per ciò che or ora si è dimostrato, il primo coefficiente delle (36), cioè $H^{(2)}_{n+3}$, sarà dunque espresso nel modo seguente:

$$H^{(2)}_{n+3} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\Theta_1 + A^{(2)}_3 \Theta_2 + \cdots + A^{(2)}_{n-1} \Theta_{n-2}),$$

dove le Θ sono i primi membri delle equazioni differenziali delle curve razionali normali di S_{n-1}, formati al modo stesso delle T. Per la (22), dove si faccia $r = 0$, questa formola diventa:

$$H^{(2)}_{n+3} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (T_2 + A^{(2)}_3 T_3 + \cdots + A^{(2)}_{n-1} T_{n-1}).$$

È chiaro che il ragionamento si può proseguire, onde si concludono le formole cercate:

$$\left.\begin{aligned}
H_{n+3}^{(1)} &= (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (T_1 + A_2^{(1)} T_2 + \cdots + A_{n-1}^{(1)} T_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H_{n+3}^{(n-3)} &= (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (T_{n-3} + A_{n-2}^{(n-3)} T_{n-2} + A_{n-1}^{(n-3)} T_{n-1}),\\
H_{n+3}^{(n-2)} &= (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} T_{n-2},\\
H_{n+3}^{(n-1)} &= (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} T_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

§ IV.

Continuazione. — Gl'invarianti differenziali projettivi dei pesi 3, 4,..., $n+1$, e in particolare quelli d'ordine $n+3$.

14. Le forme analoghe alla (31) sono in numero semplicemente infinito: avutane una, quella data dalle (31), tutte le altre si possono ottenere nel modo seguente. Sia p una quantità arbitraria, e pongasi:

$$\psi = 1 + npX + \sum_{i=1}^{i=n-1} \binom{n}{i+1} p^{i+1} X_i,$$

$$\varphi = X + \sum_{i=1}^{i=n-1} \binom{n-1}{i} p^i X_i,$$

$$\varphi_r = \sum_{i=0}^{i=n-r-1} \binom{n-r-1}{i} p^i X_{r+i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

colla convenzione che sia $\binom{m}{0} = 1$. Sostituendo gli sviluppi (31), e ponendo

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_k^{(r)} &= \sum_{i=0}^{i=n-r-1} \binom{n-r-1}{i} p^i H_{n+k}^{(r+i)}\\
(r &= 1, 2, \ldots, n-1; \quad k = 3, 4, \ldots),
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

risulta:

$$\psi = (1 + pX)^n + X^{n+3} \sum_{i=1}^{i=n-1} \binom{n}{i+1} p^{i+1} H_{n+3}^{(i)} + \cdots,$$

$$\varphi = X(1 + pX)^{n-1} + X^{n+3} \sum_{i=1}^{i=n-1} \binom{n-1}{i} p^i H_{n+3}^{(i)} + \cdots,$$

$$\varphi_r = X^{r+1}(1 + pX)^{n-r-1} + \sum_{i=3}^{i=\infty} \Gamma_i^{(r)} X^{n+i}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Scrivendo la forma effettiva dei coefficienti soltanto pei termini di grado non superiore ad $n + r + 2$ in X (il che, come già si è avvertito nel n.° 10, basta per il nostro scopo), dalle formole precedenti si deduce:

$$\psi^r \varphi_r - \varphi^{r+1} = X^{r+1}(1 + pX)^{nr} \sum_{i=3}^{i=r+2} \Gamma_i^{(r)} X^{n-r+i-1} + \cdots$$

Svolgendo la potenza di $1 + pX$, e ponendo per brevità:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_3^{(r)} = \Gamma_3^{(r)}, \\ &\gamma_4^{(r)} = \Gamma_4^{(r)} + \binom{nr}{1} p\, \Gamma_3^{(r)}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\gamma_{r+2}^{(r)} = \Gamma_{r+2}^{(r)} + \binom{nr}{1} p\, \Gamma_{r+1}^{(r)} + \cdots + \binom{nr}{r-1} p^{r-1} \Gamma_3^{(r)}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

questa formola diventa:

$$\left.\begin{aligned} \psi^r \varphi_r - \varphi^{r+1} = \gamma_3^{(r)} X^{n+3} + \gamma_4^{(r)} X^{n+4} + \cdots + \gamma_{r+2}^{(r)} X^{n+r+2} + \cdots \\ (r = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Se ora si fa la trasformazione di coordinate

$$\frac{\varphi}{\psi} = Z, \qquad \frac{\varphi_r}{\psi} = Z_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

di qui e dalle (45) segue:

$$\left.\begin{aligned} Z_r = Z^{r+1} + \gamma_3^{(r)} \frac{X^{n+3}}{\psi^{r+1}} + \gamma_4^{(r)} \frac{X^{n+4}}{\psi^{r+1}} + \cdots + \gamma_{r+2}^{(r)} \frac{X^{n+r+2}}{\psi^{r+1}} + \cdots \\ (r = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Ma abbiamo colla divisione:

$$\frac{\varphi}{\psi} = X - p\,X^2 + p^2\,X^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\,p^{n-1}\,X^n + \cdots,$$

e d'altra parte (bastando qui tener conto dei soli termini il cui grado in X non supera n):

$$\psi^{r+1} = (1 + p\,X)^{n(r+1)} + \cdots$$

Epperò si trova senza difficoltà:

$$\frac{X^{n+3}}{\psi^{r+1}} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i \binom{n\,r-3}{i} p^i \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{n+i+3} + \cdots,$$

$$\frac{X^{n+4}}{\psi^{r+1}} = \sum_{i=0}^{i=n-2} (-1)^i \binom{n\,r-4}{i} p^i \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{n+i+4} + \cdots,$$

. . . .

$$\frac{X^{n+r+2}}{\psi^{r+1}} = \sum_{i=0}^{i=n-r} (-1)^i \binom{n\,r-r-2}{i} p^i \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{n+r+i+2} + \cdots$$

Sostituendo in (46) risulta:

$$Z_r = Z^{r+1} + \gamma_3^{(r)}\,Z^{n+3} + \left\{\gamma_4^{(r)} - \binom{n\,r-3}{1} p\,\gamma_3^{(r)}\right\} Z^{n+4},$$

$$+ \left\{\gamma_5^{(r)} - \binom{n\,r-4}{1} p\,\gamma_4^{(r)} + \binom{n\,r-3}{2} p^2\,\gamma_3^{(r)}\right\} Z^{n+5} + \cdots +$$

$$+ \left\{\gamma_{r+2}^{(r)} - \binom{n\,r-r-1}{1} p\,\gamma_{r+1}^{(r)} + \binom{n\,r-r}{2} p^2\,\gamma_r^{(r)} - \cdots +\right.$$

$$\left. + (-1)^{r-1} \binom{n\,r-3}{r-1} p^{r-1}\,\gamma_3^{(r)}\right\} Z^{n+r+2} + \cdots$$

$$(r = 1,\ 2, \ldots,\ n-1).$$

Ponendo qui al posto delle γ le loro espressioni date dalle (44), ordinando il coefficiente di ciascuna potenza di Z secondo le potenze ascendenti di p, e facendo uso dell'identità (facile a dimostrarsi e di cui dovremo servirci anche più tardi)

$$\sum_{i=0}^{i=m} (-1)^i \binom{t}{m-i} \binom{t-k+i}{i} = \binom{k-1}{m}, \tag{47}$$

il coefficiente di Z^{n+k} nel precedente sviluppo ($k = 3,\ 4, \ldots,\ r+2$) assume definitivamente la forma semplice

$$\sum_{i=0}^{i=k-3} \binom{k-1}{i} \Gamma_{k-i}^{(r)}\,p^i.$$

Negli sviluppi che così risultano son contenute, al variare di p, tutte le infinite rappresentazioni richieste.

15. Per avere ormai la rappresentazione (1), dove tutti i coefficienti J sono invarianti differenziali projettivi, basta dare a p, nello sviluppo or ora ottenuto, un valore che annulli il coefficiente di Z^{n+3} nello sviluppo di Z_{n-2}, cioè, per le (43) e (42), basta porre:

$$p = -\frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}.$$

S'ottengono così le effettive espressioni degli invarianti J, e in particolare:

$$\left.\begin{array}{l} J^{(r)}_{n-r+h} = \sum\limits_{i=0}^{i=h-2} (-1)^i \binom{h}{i} C^{(r)}_{h-i+1} \left(\frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}\right)^i \\ (r = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad h = 2, 3, \ldots, r+1), \end{array}\right\} \tag{48}$$

dove le C denotano i valori che assumono le Γ quando per p si ponga il valore precedente, epperò sono espresse da:

$$\left.\begin{array}{l} C^{(r)}_k = \sum\limits_{i=0}^{i=n-r-1} (-1)^i \binom{n-r-1}{i} H^{(r+i)}_{n+k} \left(\frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}\right)^i \\ (r = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad k = 3, 4, \ldots, r+2). \end{array}\right\} \tag{49}$$

L'invariante $J^{(r)}_{n-r+h}$ fornito dalla (48) è di ordine $n+h+1$ e di peso $n-r+h$: si hanno così un invariante, cioè $J_3^{(n-1)}$, del minimo peso 3, uno, cioè $J_4^{(n-1)}$, di peso 4, e poi tre di peso 5, quattro di peso $6, \ldots, n-1$ di peso $n+1$.

In particolare, per ognuno di tali pesi si ha uno ed un solo invariante d'ordine $n+3$: fa soltanto eccezione il peso 4, al quale non corrisponde nessuno di quegli invarianti. Le espressioni di siffatti invarianti d'ordine $n+3$ sono:

$$J^{(r)}_{n\,r+2} = C^{(r)}_3 = \sum_{i=0}^{i=n-r-1} (-1)^i \binom{n-r-1}{i} H^{(r+i)}_{n+3} \left(\frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}\right)^i$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n-3, n-1),$$

e, ridotte ad un'unica frazione, segue dalle (42) che *i loro numeratori sono formati in modo intiero ed omogeneo colle* $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ (mentre i loro denominatori sono potenze di T_{n-1}).

Sul significato geometrico dell'annullarsi di questi invarianti è superfluo spender parole, giacchè esso è compreso nelle interpretazioni date nella seconda parte del n.° 9: al qual proposito è qui soltanto da avvertire che nel caso presente, dove trattasi della rappresentazione canonica (1), gl'iperpiani coordinati sono tutti *covarianti differenziali projettivi* della curva C nel punto O.

§ V.

Composizione delle quantità H mediante le T e le loro derivate. — Gl'invarianti dei pesi 3, 4,..., $n+1$ formati in modo intiero con le T e le loro derivate.

16. Apparisce dalle (48) e (49) che gl'invarianti J dei pesi 3, 4,..., $n+1$ sono formati essenzialmente colle quantità H, di cui si è data un'espressione nel n.° 10 [colle (30) e (32)]. Ma a tale espressione possiamo dare un'altra forma, che ha molto maggiore importanza.

Cominciamo dall'osservare che, se s'indicano con apici le derivate rapporto ad x, dalla (3) risulta (per la regola di derivazione dei determinanti):

$$(D_i^{k)})' = \frac{(k+1)!}{(n+i)!}\frac{1}{(x_1''\dots x_{n-1}^{(n)})^2}\Big\{(x_1''\dots x_{n-1}^{(n)})\big[(x_1''\dots x_{k-2}^{(k-1)}\, x_{k-1}^{(k+1)}\, x_k^{(n+i)}\, x_{k+1}^{(k+2)}\dots x_{n-1}^{(n)})$$

$$+(x_1''\dots x_{k-1}^{(k)}\, x_k^{(n+i+1)}\, x_{k+1}^{(k+2)}\dots x_{n-1}^{(n)}) + (x_1''\dots x_{k-1}^{k}\, x_k^{(n+i)}\, x_{k+1}^{(k+2)}\dots x_{n-2}^{(n-1)}\, x_{n-1}^{(n+1)})\big]$$

$$-(x_1''\dots x_{k-1}^{(k)}\, x_k^{(n+i)}\, x_{k+1}^{(k+2)}\dots x_{n-1}^{(n)})(x_1''\dots x_{n-2}^{(n-1)}\, x_{n-1}^{(n+1)})\Big\}.$$

Gli ultimi due termini si possono trasformare mediante l'identità

$$(x_1''\dots x_{k-1}^{(k)}\, x_k^{(n+i)}\, x_{k+1}^{k+2)}\dots x_{n-2}^{(n-1)}\, x_{n-1}^{(n+1)})(x_1''\dots x_{n-1}^{n)})$$

$$-(x_1''\dots x_{k-1}^{(k)}\, x_k^{(n+i)}\, x_{k+1}^{k+2)}\dots x_{n-1}^{(n)})(x_1''\dots x_{n-2}^{n-1)}\, x_{n-1}^{(n+1)})$$

$$= -(x_1''\dots x_{n-2}^{(n-1)}\, x_{n-1}^{(n+i)})(x_1''\dots x_{k-1}^{(k)}\, x_k^{(n+1)}\, x_{k+1}^{(k+2)}\dots x_{n-1}^{(n)}),$$

sicchè risulta la formola di derivazione per le D:

$$(D_i^{k})' = (n+i+1)\, D_{i+1}^{k)} - (k+1)\, D_i^{k-1)} - (n+1)\, D_1^{k)}\, D_i^{(n-1)}. \qquad (50)$$

Ora, supposto $i>2$, si ricavi di qui $D_{i+1}^{k)}$, e poi si applichi successivamente la formola stessa ai termini che man mano si presentano nel suo secondo membro: si potrà così riuscire alla relazione seguente, in cui per comodo si è mutato i in $i-1$:

$$\left.\begin{array}{c} D_i^{(k)} = \dfrac{1}{(n+4)(n+5)\ldots(n+i)}(D_3^{(k)})^{(i-3)} + \cdots \\ (i=4, 5, \ldots), \end{array}\right\} \tag{51}$$

dove i termini che nel secondo membro seguono quello scritto sono formati in modo intiero soltanto colle quantità $D_1^{(j)}$, $D_2^{(j)}$, $D_3^{(j)}$ e colle derivate di queste ultime di ordine inferiore ad $i-3$. Ma dalla (16) risulta:

$$D_3^{(k)} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} T_k + R_{n+2}, \tag{52}$$

essendo R_{n+2} una funzione intiera delle sole $D_1^{(j)}$ e $D_2^{(j)}$, e perciò di ordine non superiore ad $n+2$. Derivando un numero qualunque s di volte i due membri della precedente identità, dalla R_{n+2} proverranno, per la (50), varî termini contenenti delle D di ordine superiore ad $n+2$ (ma al più uguale ad $n+s+2$), ma essi, per la (51), si potranno tutti esprimere colle sole D_1, D_2, D_3, e colle derivate di queste ultime (di ordine $s-1$ al più). Applicando poi alle D_3 ed alle loro derivate la formola (52), si giungerà in fine ad una relazione:

$$(D_3^{(k)})^{(s)} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} T_k^{(s)} + \psi(T, T', \ldots, T^{(s-1)}) + R_{n+2},$$

in cui ψ indica una funzione intiera delle T_{n-1}, $T_{n-2}, \ldots, T_{k-s}$ e delle loro derivate di ordine non superiore ad $s-1$, ed R_{n+2} indica di nuovo una funzione intiera delle sole D_1 e D_2. Sostituendo l'espressione ora trovata nel secondo membro della (51) in ogni luogo ove esistano delle D_3 o loro derivate, risulta:

$$\left.\begin{array}{c} D_i^{(k)} = \dfrac{(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(n+4)(n+5)\ldots(n+i)} T_k^{(i-3)} + \psi_1(T, T', \ldots, T^{(i-4)}) + R_{n+2} \\ (i=4, 5, \ldots), \end{array}\right\} \tag{53}$$

dove ψ_1 è una funzione intiera delle T_{n-1}, $T_{n-2}, \ldots, T_{k-i+3}$ e delle loro derivate d'ordine non superiore ad $i-4$, ed R_{n+2} ha il solito significato.

Ciò posto, si consideri una qualunque delle H, la $H_{n+s}^{(r)}$ $(r=1, 2, \ldots, n-1;\ s=3, 4, \ldots, r+2)$, e si osservi che, per le (32), le quantità $D_i^{(k)}$ il cui ordine supera $n+2$ sono contenute in essa solo in quanto entrano nelle θ di cui è composta la stessa H; che inoltre in nessuna di tali θ un medesimo termine può contenere più d'un fattore $D_i^{(k)}$ il cui ordine superi $n+2$. Di guisa che si ha:

$$H_{n+s}^{(r)} = D_s^{(r)} + \cdots, \tag{54}$$

dove nel secondo membro ciascuno dei termini che seguono quello scritto è il prodotto d'un coefficiente numerico per alcune delle quantità $D_i^{(k)}$, in una al più delle quali si ha $i > 2$ (essendo però sempre $i < s$). Se allora, in luogo di queste ultime $D_i^{(k)}$, si sostituiscono le espressioni date dalla (53), si ottiene:

$$H_{n+s}^{(r)} = \frac{(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(n+4)(n+5)\ldots(n+s)} T_r^{(s-3)} + \varphi(T,\ T',\ldots,\ T^{(s-4)}) + R_{n+2},$$

dove φ *è una funzione intiera, i cui termini contengono tutti come fattori alcune delle* $T_{n-1}, T_{n-2},\ldots, T_{r-s+3}$ *e delle loro derivate d'ordine non superiore ad* $s-4$, *mentre i coefficienti di questi termini sono formati in modo intiero colle sole* $D_1^{(i)}$ *e* $D_2^{(i)}$, ed R_{n+2} ha il solito significato.

Ora è evidente che in ogni punto d'una curva razionale normale dell'S_n tutte le H sono nulle; della stessa proprietà gode la funzione φ, epperò la

$$R_{n+2} = 0$$

è un'equazione differenziale d'ordine $n+2$ al più, la quale dev'essere soddisfatta in ogni punto d'una tale curva. Essa è dunque una combinazione delle $T_1, T_2,\ldots, T_{n-1}$, e poichè queste sono tutte d'ordine $n+3$, e non è possibile — com'è posto in evidenza dalla (52) — formare con esse alcuna combinazione che sia d'ordine più basso, si conclude che R_{n+2} è nulla identicamente. *Si ha dunque infine la cercata relazione:*

$$\left.\begin{array}{l} H_{n+s}^{(r)} = \dfrac{(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(n+4)(n+5)\ldots(n+s)} T_r^{(s-3)} + \varphi(T,\ T',\ldots,\ T^{(s-4)}), \\ \qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ n-1; \qquad s=3,\ 4,\ldots,\ r+2), \end{array}\right\} \tag{55}$$

essendo φ *la funzione poc'anzi definita.*

Come esempio, applichiamo il metodo esposto alla ricerca dell'espressione di $H_{n+4}^{(n-1)}$. Scrivendo soltanto i termini d'ordine superiore ad $n+2$, abbiamo:

$$H_{n+4}^{(n-1)} = D_4^{(n-1)} - 4\, D_1^{(n-1)}\, D_3^{(n-1)} + \cdots,$$

$$T_{n-1} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} D_3^{(n-1)} + \cdots,$$

$$T_{n-2} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} D_3^{(n-2)} + \cdots,$$

$$D_1^{(n-1)} T_{n-1} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} D_1^{(n-1)} D_3^{(n-1)} + \cdots,$$

e inoltre, per la (50),

$$T'_{n-1} = (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \Big\{ (n+4) D_4^{(n-1)} - 3(n+2) D_3^{(n-2)}$$
$$- 2(2n+5) D_1^{(n-1)} D_3^{(n-1)} + \cdots \Big\}.$$

Di qui si deduce:

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4) H_{n+4}^{(n-1)} - T'_{n-1} + 6 D_1^{(n-1)} T_{n-1} - 3(n+2) T_{n-2} = R_{n+2},$$

dove R_{n+2} è d'ordine $n+2$ al più. Come si è veduto in generale, tale quantità dev'essere nulla, epperò la cercata relazione è:

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4) H_{n+4}^{(n-1)} = T'_{n-1} - 6 D_1^{(n-1)} T_{n-1} + 3(n+2) T_{n-2}.$$

In modo del tutto analogo si trova:

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4)(n+5) H_{n+5}^{(n-1)} = T''_{n-1} - 14 D_1^{(n-1)} T'_{n-1} + 2(2n+3) T'_{n-2}$$
$$+ 2 \Big\{ (4n^2 + 29n + 54) D_1^{(n-2)} - (n^2 + 12n + 30) D_2^{(n-1)}$$
$$+ (n^2 + 12n + 51)(D_1^{(n-1)})^2 \Big\} T_{n-1}$$
$$- 2(3n^2 + 29n + 42) D_1^{(n-1)} T_{n-2} + 2(3n^2 + 13n + 18) T_{n-3},$$

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4) H_{n+4}^{(n-2)} = T'_{n-2}$$
$$+ \Big\{ (5n+13) D_1^{(n-2)} - 2(n+3) D_2^{(n-1)} + 2(n+3)(D_1^{(n-1)})^2 \Big\} T_{n-1}$$
$$- (3n+13) D_1^{(n-1)} T_{n-2} + (3n+5) T_{n-3}.$$

17. Se il valore di $H_{n+s}^{(r)}$ dato dalla (55) si sostituisce nelle (49), si ottiene anche degl'invarianti J di pesi $3, 4, \ldots, n+1$ [mercè la (48)] una notevole espressione formata col mezzo delle T e delle loro derivate. *Se trattasi di $J_n^{(r)}{}_{r+h}$, essa è una frazione, il cui denominatore è una potenza di T_{n-1}, e il cui numeratore è una somma di termini, ognuno dei quali con-*

tiene come fattori alcune delle T_{n-1}, $T_{n-2}, \ldots, T_{r-h+2}$ *e delle loro derivate d'ordine non superiore ad* $h-2$; *le* T *di cui compariscono le derivate dell'ordine massimo sono* T_r, $T_{r+1}, \ldots, T_{n-1}$.

Le formole che dànno gl'invarianti J espressi in tal maniera si possono stabilire per via del tutto analoga a quella indicata nel n.° prec. per le H. Si trova così, ad es.:

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4) J_4^{(n-1)} = T'_{n-1} - 6 D_1^{(n-1)} T_{n-1} - 6 T_{n-2} \ (*),$$

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4)(n+5) J_5^{(n-1)} = {} & T''_{n-1} - 14 D_1^{(n-1)} T'_{n-1} + 2(2n+3) T'_{n-2} \\ & - 4(n+5) \frac{T_{n-2} T'_{n-1}}{T_{n-1}} - 6n(n+5) \frac{T_{n-2}^2}{T_{n-1}} \\ & + 2 \left\{ (4n^2 + 29n + 54) D_1^{(n-2)} - (n^2 + 12n + 30) D_2^{(n-1)} \right. \\ & \left. + (n^2 + 12n + 51)(D_1^{(n-1)})^2 \right\} T_{n-1} \\ & - 2(3n^2 + 17n - 18) D_1^{(n-1)} T_{n-2} + 2(3n^2 + 13n + 18) T_{n-3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} (n+4) J_5^{(n-2)} = {} & T'_{n-2} - \frac{T_{n-2} T'_{n-1}}{T_{n-1}} - 3(n+2) \frac{T_{n-2}^2}{T_{n-1}} \\ & + \left\{ (5n+13) D_1^{(n-2)} - 2(n+3) D_2^{(n-1)} + 2(n+3)(D_1^{(n-1)})^2 \right\} T_{n-1} \\ & - (3n+7) D_1^{(n-1)} T_{n-2} + (3n+5) T_{n-3}.\end{aligned}$$

18. La somma di più invarianti differenziali d'un medesimo grado e d'un medesimo peso è un nuovo invariante; perciò sommando fra loro gl'invarianti J di uno stesso peso, moltiplicati per fattori costanti, si otterrà un nuovo invariante di quel peso.

Fra tali somme hanno particolare importanza (ad es. per l'applicazione che, come vedremo, se ne può fare alle equazioni differenziali lineari) quelle che dànno un risultato intiero rispetto alle T. Esse si ottengono senza diffi-

---

(*) Per $n=3$ questa diventa la formola (38) della Memoria *Sur les inv. diff. des courbes gauches*, che l'HALPHEN (nel n.° 18 e poi nel n.° 35) ha dimostrato in due modi diversi, il secondo dei quali è quello stesso che qui abbiamo esteso considerando nel n.° precedente, anzichè l'invariante $J_4^{(n-1)}$, la quantità non invariante $H_{n+4}^{(n-1)}$.

coltà, poichè dalle (48) e (49) si ricava:

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=0}^{i=k-3}(-1)^i\binom{k-1}{i}J_k^{(n-i-1)}=\sum_{i=0}^{i=k-3}(-1)^i\binom{k-1}{i}H_{n+k-i}^{(n-i-1)}\\ (k=3,\,4,\ldots,\,n+1),\end{array}\right\}\quad(56)$$

così che, denotando con j_k il valore comune dei due membri, *j_k è l'invariante differenziale richiesto, di peso k e intiero nelle T e loro derivate.* Più precisamente, in virtù della (55):

L'invariante j_k, rappresentato dall'uno o dall'altro membro della (56), *si può esprimere come una somma di termini, in ciascuno dei quali entrano come fattori alcune delle T_{n-1}, $T_{n-2},\ldots,$ T_{n-k+2} e delle derivate di queste di ordini non superiori a $k-3$, $k-2,\ldots,$ 0 risp., mentre i coefficienti dei singoli termini o sono puramente numerici, o sono formati in modo intiero colle sole quantità $D_1^{(i)}$ e $D_2^{(i)}$.*

Così si ha:

$$j_3=J_3^{(n-1)}=(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\,T_{n-1},$$

$$j_4=J_4^{(n-1)}=\frac{(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{n+4}\left(-6\,T_{n-2}-6\,D_1^{(n-1)}\,T_{n-1}+T'_{n-1}\right),$$

$$\begin{aligned}j_5=\frac{(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(n+4)(n+5)}\Big\{&56\,T_{n-3}+56\,D_1^{(n-1)}\,T_{n-2}\\ &+2\left[(7n-16)\,D_1^{(n-2)}-(7n+30)\,D_2^{(n-1)}+(7n+51)\,(D_1^{(n-1)})^2\right]T_{n-1}\\ &-14\,T'_{n-2}-14\,D_1^{(n-1)}\,T'_{n-1}+T''_{n-1}\Big\}.\end{aligned}$$

Di qui si ricava una conseguenza notevole. Poichè infatti si ha:

$$j_k=\mu\,T_{n-k+2}+\cdots$$
$$(k=3,\,4,\ldots,\,n+1),$$

dove μ è un coefficiente numerico, e nel secondo membro i termini che seguono il primo son formati nel modo già detto colle sole T_{n-1}, $T_{n-2},\ldots,$ T_{n-k+3}, risulta la proprietà, che *se in un punto non singolare d'una qualsiasi curva C di S_n sono nulli tutti gl'invarianti $j_3, j_4,\ldots, j_k$ $(k=3,\,4,\ldots,\,n+1)$, sono pure nulle in quel punto tutte le quantità T_{n-1}, $T_{n-2},\ldots,$ T_{n-k+2} (di cui la prima sola è un invariante), e reciprocamente.*

Che il simultaneo annullarsi, in un punto di C, delle quantità T_{n-1}, $T_{n-2}, \ldots, T_{n-k+2}$ costituisse una proprietà invariante, si era già riconosciuto in altro modo alla fine del § II, assegnandone altresì l'interpretazione geometrica: ora vediamo di più che quel fatto può venir espresso anche per mezzo del simultaneo annullarsi dei primi $k-2$ invarianti della serie $\dot{j}_3$, $\dot{j}_4, \ldots, \dot{j}_{n+1}$.

Per $k = n + 1$ si ha in particolare il teorema (di cui l'inverso è evidente):

Se per una curva C di S_n tutti gl'invarianti $j_3, j_4, \ldots, j_{n+1}$ sono nulli, C è una curva razionale normale dello spazio S_n.

§ VI.

Invarianti differenziali duali fra loro.

19. Siano C una curva arbitraria di S_n ed O un suo punto non singolare, e s'indichino con (C) ed (O) la curva ed il punto risp. corrispondenti, in un'arbitraria correlazione dell'S_n, alla forma costituita dagl'iperpiani aventi con C un contatto d'ordine $n-1$, ed all'iperpiano avente con C un tale contatto in O. Le due curve C e (C) si diranno, coll'Halphen, *aggiunte* l'una dell'altra, e si diranno pure *aggiunti* (o *duali*) fra loro due invarianti differenziali projettivi, l'uno della curva C in O, l'altro della curva (C) in (O), quando essi si deducano l'uno dall'altro mediante la legge di dualità. Si tratta di stabilire le relazioni, colle quali un dato invariante di C può venir trasformato nel suo aggiunto.

Siano $x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0$ le $n+1$ coordinate omogenee del punto O, e come coordinate di (O) si prendano i determinanti

$$(x_0\, x'\, x''_1 \ldots x^{(n-1)}_{n-2}), \qquad (x_{n-1}\, x'_0\, x'' \ldots x^{(n-1)}_{n-3}), \ldots,$$
$$(x_1\, x_2'\, x_3'' \ldots x^{(n-1)}_0), \qquad (x\, x_1'\, x_2'' \ldots x^{(n-1)}_{n-1}),$$

dove gli apici denotano derivate rapporto alla variabile, da cui dipende la posizione del punto O sopra C. Si passerà ad n coordinate non omogenee ponendo $x_0 = 1$, ed assumendo come coordinate di (O) i rapporti degli ultimi n fra i precedenti determinanti al primo. Sicchè, scegliendo x come variabile indipendente, e chiamando $X, X_1, \ldots, X_{n-1}$ le coordinate di (O), si avrà:

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{(x''_{n-1}\, x_1''' \ldots x_{n-3}^{(n-1)})}{(x_1'' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})}, \\
X_1 &= \frac{(x''_{n-2}\, x'''_{n-1}\, x_1^{\mathrm{IV}} \ldots x_{n-4}^{(n-1)})}{(x_1'' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{n-3} &= \frac{(x_2''\, x_3''' \ldots x_{n-1}^{(n-1)})}{(x_1'' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})}, \\
X_{n-2} &= \frac{(-1)^{n-1}(x_1'\, x_2'' \ldots x_{n-1}^{(n-1)})}{(x_1'' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})}, \\
X_{n-1} &= \frac{x\,(x_1'\, x_2'' \ldots x_{n-1}^{(n-1)}) - (x_1\, x_2'' \ldots x_{n-1}^{(n-1)})}{(x_1'' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})}.
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Se si pone in O l'origine delle coordinate, e come iperpiani $x_{n-1}=0$, $x_{n-2}=0,\ldots,$ $x_1=0$ si assumono degli iperpiani che abbiano con C contatti risp. degli ordini $n-1$, $n-2,\ldots,$ 1 in O, gli stessi fatti avranno luogo per la curva (C) nel punto (O), di guisa che, ponendo

$$\left.\begin{aligned}
b_i^{(k)} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k x_i}{d\,x^k}, \qquad B_i^{(k)} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k X_i}{d\,X^k} \\
(i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1),
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

nell'intorno dell'origine avranno luogo, risp. per le curve C e (C), gli sviluppi:

$$x_i = b_i^{(i+1)}\, x^{i+1} + b_i^{(i+2)}\, x^{i+2} + \ldots \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n-1), \tag{59}$$

$$X_i = B_i^{(i+1)}\, X^{i+1} + B_i^{(i+2)}\, X^{i+2} + \ldots \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n-1). \tag{60}$$

E si tratta di passare, col mezzo delle (57), dagli sviluppi (59) ai (60). A tale scopo basterà sviluppare i due membri di ciascuna delle (60) secondo le potenze crescenti di x, ed uguagliare i risultati (*).

20. In questo numero e nei seguenti indicheremo con π_k una funzione delle quantità $b_i^{(j)}$ dove sia $j \leq k$, cioè una funzione di tali quantità che non contenga derivate d'ordine superiore a k.

Cominciamo collo sviluppare secondo le potenze crescenti di x i determinanti contenuti nei secondi membri delle (57). Posto per semplicità

$$P = 1!\ 2!\ldots(n-1)!\, b_1^{(2)}\, b_2^{(3)} \ldots b_{n-2}^{(n-1)},$$

(*) Cfr. Halphen, *Sur les inv. diff. des courbes gauches*, pag. 39 e seg.[1]

è facile anzitutto trovare, pel denominatore comune delle (57), lo sviluppo:

$$(x_1'' \, x_2''' \dots x_{n-2}^{(n-1)}) = \lambda_{n-1} + \lambda_n x + \cdots, \tag{61}$$

dove i coefficienti sono dati da:

$$\lambda_{n+k-1} = P\binom{n+k-1}{k} \frac{b_{n-2}^{(n+k-1)}}{b_{n-2}^{(n-1)}} + \pi_{n+k-2}, \tag{62}$$

ed in particolare si ha:

$$\lambda_{n-1} = P. \tag{63}$$

Quanto ai numeratori delle (57), per i primi $n-2$ fra essi abbiamo uno sviluppo della forma:

$$\left.\begin{array}{c} (x''_{n-i} \, x'''_{n-i+1} \dots x^{(i)}_{n-2} \, x^{(i+1)}_{n-1} \, x_1^{(i+2)} \dots x^{(n-1)}_{n-i-2}) = \lambda_n^{(i-1)} x^i + \lambda_{n+1}^{(i-1)} x^{i+1} + \cdots \\ (i = 1, \; 2, \dots, \; n-2). \end{array}\right\} \tag{64}$$

I termini che in questo sviluppo sono di grado $k \, (= i, \; i+1, \dots)$ in x, e di ordine $n+k-i$ per ciò che concerne le derivate, costituiscono il prodotto

$$(-1)^{(n-1)i} \, P \, \frac{(n+k-i)!}{(n-i)!} \, \frac{b_{n-1}^{(n+k-i)}}{b_{n-i-1}^{(n-i)}} \, x^{k-i+2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2!}x & \frac{1}{3!}x^2 & \dots & \frac{1}{(i-1)!}x^{i-2} & \frac{1}{k!}x^{i-2} \\ 1 & x & \frac{1}{2!}x^2 & \dots & \frac{1}{(i-2)!}x^{i-2} & \frac{1}{(k-1)!}x^{i-2} \\ 0 & 1 & x & \dots & \frac{1}{(i-3)!}x^{i-3} & \frac{1}{(k-2)!}x^{i-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \frac{1}{(k-i+2)!}x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{(k-i+1)!} \end{vmatrix}.$$

Svolgendo il determinante secondo gli elementi dell' ultima verticale, ed osservando che il minore risultante dal sopprimerne l' ultima orizzontale e l' ultima verticale ha per valore, qualunque sia i,

$$\frac{1}{(i-1)!} x^{i-2},$$

si trova che il determinante stesso equivale a

$$\frac{(-1)^{i-1}}{k!}\left\{1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\cdots+(-1)^{i-1}\binom{k}{i-1}\right\}x^{i-2},$$

cioè ad

$$\frac{1}{(i-1)!\,(k-i)!\,k}\,x^{i-2}.$$

Per conseguenza nella (64) si ha:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda^{(i-1)}_{n+k-i}=(-1)^{(n-1)i}\,P\binom{n+k-i}{k}\binom{k-1}{i-1}\dfrac{b^{(n+k-i)}_{n-1}}{b^{(n-i)}_{n-i-1}}+\pi_{n+k-i-1}\\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n-2),\end{array}\right\}\tag{65}$$

ed in particolare:

$$\lambda^{(i-1)}_{n}=(-1)^{(n-1)i}\,P\binom{n}{i}\frac{b^{(n)}_{n-1}}{b^{(n-i)}_{n-i-1}}.\tag{66}$$

Circa il penultimo numeratore delle (57), si ha uno sviluppo della forma:

$$(-1)^{n-1}\,(x_1'\,x_2''\ldots x^{(n-1)}_{n-1})=\lambda^{(n-2)}_{n}\,x^{n-1}+\lambda^{(n-2)}_{n+1}\,x^{n}+\cdots,$$

dove i termini che sono di grado k in x, e dell'ordine $k+1$, sono dati dal prodotto

$$(-1)^{n-1}\,(k+1)\,.\,(n-1)!\,b^{(2)}_{1}\,b^{(3)}_{2}\ldots b^{(n-1)}_{n-2}\,b^{(k+1)}_{n-1}\,x^{k-n+3}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-3} & x^{n-3}\\ 1 & 2x & 3x^2 & \ldots & (n-2)\,x^{n-3} & k\,x^{n-3}\\ 0 & 2.1 & 3.2\,x & \ldots & (n-2)(n-3)\,x^{n-4} & k(k-1)\,x^{n-4}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-2)!\,x & \dfrac{k!}{(k-n+3)!}\,x\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-2)! & \dfrac{k!}{(k-n+2)!}\end{vmatrix}.$$

Se in questo determinante si dividono gli elementi della seconda verticale per $2!$, quelli della terza per $3!,\ldots$, quelli dell'ultima per $k!$, si ottiene ciò che diventa il determinante precedentemente considerato, quando in esso si faccia $i=n-1$. Il nostro determinante equivale dunque a

$$\frac{1!\,2!\ldots(n-3)!\,(k-1)!}{(k-n+1)!}\,x^{n-3}.$$

Epperò:

$$\lambda_{k+1}^{(n-2)} = (-1)^{n-1} P(k+1) \binom{k-1}{n-2} b_{n-1}^{(k+1)} + \pi_k ,$$

e in particolare:

$$\lambda_n^{(n-2)} = (-1)^{n-1} P n \, b_{n-1}^{(n)} ,$$

le quali sono le formole che si ricaverebbero dalle (65) e (66) ponendovi $i = n - 1$.

Da ultimo abbiamo:

$$(x_1 \, x_2'' \ldots x_{n-1}^{(n-1)}) = \mu_n \, x^n + \mu_{n+1} \, x^{n+1} + \cdots ,$$

dove i termini di grado k in x e d'ordine k costituiscono il prodotto

$$b_1^{(2)} \, b_2^{(3)} \ldots b_{n-2}^{(n-1)} \, b_{n-1}^{(k)} \, x^{k-n+3} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-3} & x^{n-3} \\ 2 \, . \, 1 & 3 \, . \, 2 \, x & 4 \, . \, 3 \, x^2 & \ldots & \dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} x^{n-3} & \dfrac{k!}{(k-2)!} x^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)! \, x & \dfrac{k!}{(k-n+2)!} x \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)! & \dfrac{k!}{(k-n+1)!} \end{vmatrix} .$$

Per calcolare il valore di questo determinante, lo si svolga secondo gli elementi della prima orizzontale, poi si divida per x la prima orizzontale di ciascuno dei minori risultanti, ed inoltre nel primo di questi si dividano la prima, la seconda,..., la penultima, l'ultima verticale risp. per $3!$, $4!$,..., $(n-1)!$, $k!$, nel secondo quelle stesse verticali per $4!$, $5!$,..., $(n-1)!$, $k!$, e così via. I determinanti che s'ottengono con queste operazioni coincidono ordinatamente con quello che si è considerato poc'anzi per primo, quando vi si ponga $n-2$ in luogo di i e $k-2$ in luogo di k, oppure $n-3$ in luogo di i e $k-3$ in luogo di k, ecc. Per conseguenza, dopo facili riduzioni, il determinante di cui si tratta diventa:

$$1! \, 2! \ldots (n-1)! \left\{ \binom{k-3}{n-3}\binom{k}{2} - \binom{k-4}{n-4}\binom{k}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{k-n+1}{1}\binom{k}{n-2} \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \binom{k}{n-1} + (-1)^n \right\} x^{n-3} .$$

Ma, per la (47),

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \binom{k-i}{n-i}\binom{k}{i-1} = (-1)^{n-1},$$

epperò:

$$\mu_k = P\left\{\binom{k-2}{n-2}\binom{k}{1} - \binom{k-1}{n-1}\right\} b_{n-1}^{(k)} + \pi_{k-1},$$

e in particolare:

$$\mu_n = (n-1)\, P\, b_{n-1}^{(n)}.$$

Se quindi poniamo:

$$x\,(x_1'\, x_2'' \ldots x_{n-1}^{(n-1)}) - (x_1\, x_2'' \ldots x_{n-1}^{(n-1)}) = \lambda_n^{(n-1)}\, x^n + \lambda_{n+1}^{(n-1)}\, x^{n+1} + \cdots,$$

sarà:

$$\lambda_k^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\, \lambda_k^{(n-2)} - \mu_k,$$

ossia:

$$\lambda_k^{(n-1)} = P\binom{k-1}{n-1} b_{n-1}^{(k)} + \pi_{k-1},$$

la quale coincide con quella che si dedurrebbe dalla (65) ponendovi $i = n$.

Si conclude che *i numeratori delle* (57) *sono tutti espressi, per* $i = 1$, $2, \ldots, n$, *dal secondo membro dell'unica formola* (64), *dove i coefficienti* λ *sono forniti dalle* (65) *e* (66).

21. Dalla (64), per $i = 1$, e dalla (61) si ricava colla divisione:

$$\frac{(x''_{n-1}\, x_1''' \ldots x_{n-3}^{(n-1)})}{(x_1''\, x_2''' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})} = \frac{\lambda_n^{(0)}}{\lambda_{n-1}}\, x \left\{1 + \left(\frac{\lambda_{n+1}^{(0)}}{\lambda_n^{(0)}} + \pi_n\right) x + \left(\frac{\lambda_{n+2}^{(0)}}{\lambda_n^{(0)}} + \pi_{n+1}\right) x^2 + \cdots \right\}.$$

Ma se si pone

$$G = (-1)^{n+1}\, \frac{n\, b_{n-1}^{(n)}}{b_{n-2}^{(n-1)}},$$

per le (63), (65) e (66) si ha:

$$\frac{\lambda_n^{(0)}}{\lambda_{n-1}} = G,$$

$$\frac{\lambda_{n+k-1}^{(0)}}{\lambda_n^{(0)}} = \frac{1}{n+k}\binom{n+k}{k} \frac{b_{n-1}^{(n+k-1)}}{b_{n-1}^{(n)}} + \pi_{n+k-2},$$

dalle quali e dalla precedente risulta, per un qualsiasi valore di r:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x''_{n-1}\, x_1''' \ldots x_{n-3}^{(n-1)})^{r+1}}{(x_1''\, x_2''' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})^r} &= P\, G^{r+1}\, x^{r+1} \left\{ 1 + \left[\frac{r+1}{n+2}\binom{n+2}{2} \frac{b_{n-1}^{(n+1)}}{b_{n-1}^{(n)}} + \pi_n\right] x \right. \\ &\left. + \left[\frac{r+1}{n+3}\binom{n+3}{3} \frac{b_{n-1}^{(n+2)}}{b_{n-1}^{(n)}} + \pi_{n+1}\right] x^2 + \cdots \right\}, \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

dove i denominatori delle diverse funzioni π sono formati unicamente colle quantità $b_1^{(2)}, b_2^{(3)}, \ldots, b_{n-1}^{(n)}$.

Ciò posto, dalle (57) e (60) si deduce, per il numeratore del secondo membro della i^{ma} fra le (57), lo sviluppo

$$B_{i-1}^{(i)} \frac{(x''_{n-1}\, x_1''' \ldots x_{n-3}^{(n-1)})^i}{(x_1''\, x_2''' \ldots x_{n-2}^{(n-1)})^{i-1}} + B_{i-1}^{(i+1)} \frac{(\text{idem})^{i+1}}{(\text{idem})^i} + \cdots$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n).$$

Se in questo, al posto delle varie frazioni, si sostituiscono gli sviluppi forniti dalla (67), indi nello sviluppo risultante e in quello che forma il secondo membro della (64) si uguagliano i coefficienti delle stesse potenze di x, si ottiene:

$$\lambda_n^{(i-1)} = P\, G^i\, B_{i-1}^{(i)},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{n+k-i}^{(i-1)} &= P\, G^i\, B_{i-1}^{(i)} \left\{ \frac{i}{n+k-i+1} \binom{n+k-i+1}{k-i+1} \frac{b_{n-1}^{(n+k-i)}}{b_{n-1}^{(n)}} + \pi_{n+k-i-1} \right\} \\ &+ P\, G^{i+1}\, B_{i-1}^{(i+1)} \left\{ \frac{i+1}{n+k-i} \binom{n+k-i}{k-i} \frac{b_{n-1}^{(n+k-i-1)}}{b_{n-1}^{(n)}} + \pi_{n+k-i-2} \right\} \\ &+ \cdots + P\, G^{k-1}\, B_{i-1}^{(k-1)} \left\{ \frac{k-1}{n+2} \binom{n+2}{2} \frac{b_{n-1}^{(n+1)}}{b_{n-1}^{(n)}} + \pi_n \right\} + P\, G^k\, B_{i-1}^{(k)} \end{aligned}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n; \qquad k = i+1, i+2, \ldots).$$

Sostituendo in queste i valori delle λ dati dalle (65) e (66), e ponendo

$$g = \frac{1}{G} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{b_{n-2}^{(n-1)}}{b_{n-1}^{(n)}} \text{ (*)}, \tag{68}$$

si deducono facilmente le relazioni cercate (**), cioè:

$$\left. \begin{aligned} B_{i-1}^{(i)} &= (-1)^{(n-1)i} \binom{n}{i} g^i \frac{b_{n-1}^{(n)}}{b_{n-i-1}^{(n-i)}}, \\ B_{i-1}^{(k)} &= (-1)^{(n-1)i+1} \binom{n+k-i}{k} \binom{k-1}{i-2} g^k \frac{b_{n-1}^{(n+k-i)}}{b_{n-i-1}^{(n-i)}} + \pi_{n+k-i-1} \\ & (i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned} \right\} \tag{69}$$

(*) Dalle (69) risulta che le due quantità G e g sono duali fra loro.

(**) Con un ragionamento analogo a quello di Halphen (l. c., pag. 43), sebbene alquanto più minuzioso, si potrebbe trovare un altro termine nella seconda di tali relazioni; ma mi astengo da questa ricerca, perchè superflua pel mio scopo.

22. Poichè (n.° 1) gl'invarianti differenziali si possono sempre considerare come funzioni delle quantità $D_i^{(k)}$, è ora necessario vedere in che modo queste si trasformino mediante la legge di dualità. Data un'espressione qualunque f formata colle $x_1, \ldots, x_{n-1}$ e le loro derivate rapporto ad x, rappresenteremo con (f) l'espressione formata allo stesso modo colle $X_1, \ldots, X_{n-1}$ e le loro derivate rapporto ad X.

Colle rappresentazioni (59) e (60), ricordando la (2), abbiamo anzitutto:

$$U = b_1^{(2)} b_2^{(3)} \ldots b_{n-1}^{(n)},$$

$$(U) = B_1^{(2)} B_2^{(3)} \ldots B_{n-1}^{(n)},$$

l'ultima delle quali, in virtù delle (69), diviene:

$$(U) = (-1)^{\frac{n(n^2-1)}{2}} \binom{n}{2}\binom{n}{3} \cdots \binom{n}{n-2} g^{\frac{n^2+n-4}{2}} \frac{b_{n-2}^{(n-1)} (b_{n-1}^{(n)})^{n-2}}{b_1^{(2)} b_2^{(3)} \ldots b_{n-3}^{(n-2)}}. \tag{70}$$

Se poi si pone per brevità

$$\Omega_i^{(k)} = \begin{vmatrix} b_k^{(n+i)} & b_k^{(k+2)} & b_k^{(k+3)} & \ldots & b_k^{(n-1)} & b_k^{(n)} \\ b_{k+1}^{(n+i)} & b_{k+1}^{(k+2)} & b_{k+1}^{(k+3)} & \ldots & b_{k+1}^{(n-1)} & b_{k+1}^{(n)} \\ b_{k+2}^{(n+i)} & 0 & b_{k+2}^{(k+3)} & \ldots & b_{k+2}^{(n-1)} & b_{k+2}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-2}^{(n+i)} & 0 & 0 & \ldots & b_{n-2}^{(n-1)} & b_{n-2}^{(n)} \\ b_{n-1}^{(n+i)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix},$$

si ha sùbito:

$$D_i^{(k)} = \frac{\Omega_i^{(k)}}{b_k^{(k+1)} b_{k+1}^{(k+2)} \ldots b_{n-1}^{(n)}},$$

e poichè

$$\Omega_i^{(n-1)} = b_{n-1}^{(n+i)},$$

si ha in particolare:

$$D_i^{(n-1)} = \frac{b_{n-1}^{(n+i)}}{b_{n-1}^{(n)}}. \tag{71}$$

Si trova inoltre senza difficoltà:

$$(D_i^{(k)}) = B_1^{(2)} B_2^{(3)} \ldots B_{k-1}^{(k)} \frac{(\Omega_i^{(k)})}{(U)},$$

ossia, per le (69) e (70):

$$(D_i^{(k)}) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)\left\{(n-k)(n+k+1)+2\right\}}}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k+2} \cdots \binom{n}{n-2} g^{\frac{1}{2}\left\{(n-k)(n+k+1)-2\right\}}} \frac{b_1^{(2)} b_2^{(3)} \ldots b_{n-k-2}^{(n-k-1)} (\Omega_i^{(k)})}{b_{n-2}^{(n-1)} (b_{n-1}^{(n)})^{n-k-1}}. \tag{72}$$

Ora nel determinante $(\Omega_i^{(k)})$ il termine contenente le derivate d'ordine più alto, cioè $2n+i-k-1$, è il termine principale, epperò:

$$(\Omega_i^{(k)}) = B_k^{(n+i)}\, B_{k+1}^{(k+2)}\, B_{k+2}^{(k+3)} \ldots B_{n-1}^{(n)} + \pi_{2n+i-k-2}.$$

Ponendo per le B le loro espressioni date dalle (69), sostituendo nella (72), e facendo uso della (68) e della (71), dove in luogo di i siasi posto $n+i-k-1$, si ottiene:

$$(D_i^{(k)}) = -\frac{k(k+1)}{n(n+i)}\binom{2n+i-k-1}{n-1} g^{n+i-k-1}\, D_{n+i-k-1}^{(n-1)} + \pi_{2n+i-k-2}, \tag{73}$$

che è la formola cercata.

Poichè in questa l'esponente di g è uguale (n.° 1) al peso di $(D_i^{(k)})$, e poichè, come già si è notato nel n.° prec., i denominatori delle funzioni π, che in essa compariscono, contengono soltanto le quantità $b_1^{(2)}, b_2^{(3)}, \ldots, b_{n-1}^{(n)}$, e con queste non è possibile formare nessuna funzione delle $D_i^{(k)}$, si può ripetere letteralmente il ragionamento fatto dall' HALPHEN a pag. 45 della Memoria più volte citata *Sur les inv. diff. des courbes gauches,* e si conclude:

Sia φ un invariante differenziale projettivo, funzione intera delle $D_i^{(k)}$; sia (φ) lo stesso invariante formato col porre, al posto delle $D_i^{(k)}$, le $(D_i^{(k)})$; e sia φ_1 l'aggiunto di φ. Se p è il peso di φ, l'invariante φ_1 è pure di peso p, e se due curve aggiunte C e (C) sono riferite fra loro per mezzo delle formole (57), *ha luogo, in due punti corrispondenti O ed (O), l'identità:*

$$(\varphi) = \mu\, g^p\, \varphi_1,$$

dove μ è un coefficiente numerico, e g è data dalla (68).

23. Applichiamo i risultati precedenti a cercare gli aggiunti degli invarianti $j_3, j_4, \ldots, j_{n+1}$. Per questo scopo partiamo dall'espressione di j_k che vien data dal secondo membro della (56):

$$\left.\begin{aligned} j_k &= \sum_{i=0}^{i=k-3} (-1)^i \binom{k-1}{i} H_{n+k-i}^{(n-i-1)} \\ &(k = 3,\ 4, \ldots, n+1). \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Poichè j_k è di peso k, una qualunque delle $D_s^{(r)}$ che entrano a formarlo sarà al più di peso k, così che si avrà:

$$n - r + s \leqq k + 1.$$

La quantità $(D_s^{(r)})$ duale di $D_s^{(r)}$, che per la (73) è d'ordine $2n-r+s-1$, sarà dunque d'ordine non superiore ad $n+k$, epperò l'invariante stesso (j_k)

non potrà essere d'ordine superiore ad $n+k$. D'altra parte le (74) e (54) mettono in evidenza in j_k l'esistenza del termine $D_k^{(n-1)}$, il cui duale, per la (73), a meno d'un fattore, coincide collo stesso $D_k^{(n-1)}$, ed è perciò d'ordine $n+k$. Si conclude pertanto che (j_k) è precisamente d'ordine $n+k$, cioè dell'ordine stesso di j_k. Siccome poi questi due invarianti hanno anche lo stesso peso (n.° prec.), e sono entrambi intieri nelle D, non potranno differire che per un fattore.

Per determinare questo fattore, poichè abbiamo già notato che in j_k la quantità $D_k^{(n-1)}$ ha per coefficiente l'unità, basterà cercare il coefficiente della stessa quantità in j_k.

In virtù della (73), la $D_k^{(n-1)}$ può entrare a far parte di (j_k) in quanto proviene da una qualunque delle $D_k^{(n-1)}$, $D_{k-1}^{(n-2)}$, ..., $D_1^{(n-k)}$; e poichè ciascuna di queste ha il peso k, essa non potrà comparire in j_k che moltiplicata per un fattore numerico, cioè, come diremo brevemente, non potrà comparire in j_k che *isolata*. Siamo dunque condotti a cercare quali siano le D isolate in j_k, cioè nelle $H_{n+r}^{(i)}$ (essendo $i=n-1,\ n-2,\dots,\ n-k+2$, e risp. $r=k,\ k-1,\dots,\ 3$) che per la (74) compongono j_k.

Se supponiamo dapprima che sia $r>3$, risulta dalle (32) che le D isolate entrano in $H_{n+r}^{(i)}$ soltanto in quanto entrano in $\theta_{r-3}^{(i)}$. Ora è facile trovare che in una qualunque $\theta_{r-3}^{(i)}$ ($i=1,\ 2,\dots,\ n-1$, ma $r>3$) tali D non possono entrare che nel trinomio

$$D_r^{(i)}+i\,A_{n+r-i-2}-(i+1)\,A_{n+r-i-1}^{(0)},$$

dove le A hanno lo stesso significato che avevano nel § III, ma è da avvertire che, se il loro indice inferiore supera $n-1$, il termine corrispondente manca. Per le θ che a noi importano è sempre

$$n+r-i-1=k,$$

quindi le D isolate nelle nostre $\theta_{r-3}^{(i)}$ entrano soltanto nell'espressione

$$D_r^{(i)}+i\,A_{k-1}-(i+1)\,A_k^{(0)}.$$

Ora, scrivendo soltanto i termini colle D isolate, si ha (cfr. il n.° 11):

$$A_s=(n-s+1)\,D_1^{(n-s-1)}-(n-s)\,D_2^{(n-s)}+\cdots,$$

$$A_{s+1}^{(0)}=(n-s)\,D_1^{(n-s-1)}-(n-s-1)\,D_2^{(n-s)}+\cdots$$

$$(s=1,\ 2,\dots,\ n-1);$$

dunque infine, scrivendo sempre soltanto le D isolate, risulta la formola richiesta:

$$\left.\begin{array}{l} H^{(i)}_{n+r} = D'^{(i)}_r - (n-k-i+1)\, D_1^{n-k)} + (n-k-i)\, D_2^{n-k+1)} + \cdots \\ \left(\begin{array}{lll} & i = n-1,\ n-2, \ldots, & n-k+2 \\ \text{e risp. } r = & k, \quad k-1, \ldots, & 3 \end{array}\right). \end{array}\right\} \quad (75)$$

Abbiamo scritto che essa è valida anche pel caso di $r = 3$ che era stato escluso dal precedente ragionamento, giacchè per $r = 3$ si ha da considerare la $H^{(n-k+2)}_{n+3}$, e in essa, per le (42), le D isolate provengono unicamente da

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\, T_{n-k+2},$$

cioè costituiscono la somma

$$D'^{(n-k+2)}_3 + D_1^{n-k)} - 2\, D_2^{(n-k+1)},$$

che è appunto quella che si ricava dalla (75) per $i = n - k + 2$, $r = 3$.

Dalle (74) e (75), applicando note proprietà dei coefficienti binomiali, si deduce ormai che in j_k le D isolate formano la somma

$$\sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} D'^{(n-i-1)}_{k-i}.$$

Nell'espressione duale di questa, il coefficiente di $D^{(n-1)}_k$ è, per la (73), il prodotto di g^k per la quantità

$$\frac{1}{n}\binom{n+k}{n-1} \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i} \frac{(n-i)(n-i-1)}{n+k-i}.$$

Per calcolare la somma che qui figura, si può osservare che si ha identicamente

$$\frac{(n-i)(n-i-1)}{n+k-i} = n-k-i-1 + \frac{k(k+1)}{n+k-i},$$

in grazia della quale tal somma si riduce a

$$-k(k+1) \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} \frac{1}{n+k-i},$$

ossia a

$$-\frac{n!\,(k+1)!}{(n+k)!} \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i \binom{n+k-i-1}{k-i-1} \binom{n+k}{i}.$$

La nuova somma che qui comparisce, per la (47), equivale a $(-1)^{k-1}$, epperò il cercato coefficiente è $(-1)^k g^k$. Si ha cioè la relazione:

$$(j_k) = (-1)^k g^k j_k$$

$$(k = 3,\ 4, \dots,\ n+1).$$

Facendo uso di una denominazione proposta dall'Halphen (*), possiamo dire: *L'invariante j_k è propriamente od impropriamente uguale al suo aggiunto, secondo che il suo peso è pari o dispari.*

Risulta di qui e da ciò che s'è trovato alla fine del n.° 18, che *le interpretazioni geometriche date in fine del* § II *coincidono colle loro duali;* in particolare si ha quest'altro significato geometrico di T_{n-1}:

L'annullarsi dell'invariante T_{n-1} in un punto O d'una curva C è la condizione necessaria e sufficiente perchè la sezione prodotta dal piano ivi osculatore nella varietà sviluppabile (ad $n-1$ dimensioni), costituita dagli S_{n-2} che hanno con C un contatto d'ordine $n-2$, presenti in O un punto sestatico (**).

§ VII.

Sopra gl'invarianti d'una equazione differenziale lineare d'ordine qualunque (maggiore di due).

24. Data un'equazione differenziale lineare (omogenea) d'ordine $n+1$ (con $n \geq 2$)

$$y^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} P_1 y^{(n)} + \dots + \binom{n+1}{1} P_n y' + P_{n+1} y = 0\,, \qquad (76)$$

dove le P sono funzioni di x, e gli apici indicano derivate rapporto ad x, è noto che essa possiede $n-1$ *invarianti lineari* o *fondamentali* $a_3, a_4, \dots, a_{n+1}$, risp. dei pesi $3,\ 4, \dots,\ n+1$ (***). Il primo di essi è quello che fu determi-

(*) L. c., pag. 47. — Nel caso dello spazio ordinario ($n=3$), studiato dall'Halphen, gl'invarianti j sono due soli (da lui chiamati v ed s_7), e si presentano senz'altro da sè sotto forma intiera nelle D, poichè coincidono cogl'invarianti canonici $J_3^{(n-1)}$, $J_4^{(n-1)}$ (v. le ultime formole del n. 18). Per gli spazî a più che tre dimensioni, come si è veduto, le cose procedono in tutt'altro modo.

(**) Cfr. Halphen, l. c., pag. 85-86.

(***) Si trovano molte notizie bibliografiche su questo argomento nei lavori dei sig.[i] Forsyth (Phil. Trans., vol. CLXXIX, 1888) e Wallenberg (G. di Crelle, vonato per la prima volta dal LAGUERRE per l'equazione di 3.° ordine (*), e poi dall'HALPHEN — ricorrendo alla considerazione dell'*equazione aggiunta* di LAGRANGE — per un'equazione d'ordine qualunque (**). La sua espressione è:

$$a_3 = \frac{1}{2}\left\{ P_1'' - 3(P_2' - 2P_1P_1') + 2(P_3 - 3P_1P_2 + 2P_1^3)\right\},$$

da cui risulta la notevole proprietà, già avvertita dall'HALPHEN (***), che questo primo invariante non dipende dall'ordine dell'equazione.

Se nella (76) al posto della y s'introduce la nuova variabile Y data dalla relazione

$$Y = y\, e^{\int P_1 dx},$$

l'equazione trasformata viene a mancare del secondo termine, cioè assume la forma seguente:

$$y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} p_2 y^{(n-1)} + \cdots + \binom{n+1}{1} p_n y' + p_{n+1} y = 0, \qquad (77)$$

dove abbiamo continuato ad indicare con y la variabile dipendente, e le p sono espresse come segue:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= -P_1' - P_1^2 + P_2,\\ p_3 &= -P_1'' - 3P_1P_2 + 2P_1^3 + P_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p_i &= -P_1^{(i-1)} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Per la forma ridotta (77) il sig. FORSYTH, nella citata Memoria, ha calcolato effettivamente gl'invarianti a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, ed ha trovato che l'espressione

---

lume CXIII, 1894), e nel volume, recentemente pubblicato, del sig. LUDWIG SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Zweiten Bandes erster Theil, 1897).

(*) V. le due Note di questo autore nel vol. LXXXVIII (pag. 116 e 224) dei *Comptes rendus* (1879).

(**) HALPHEN, *Sur la réduction des équations diff. lin. aux formes intégrables* (Sav. étrang., t. XXVIII, N.° 1, 1883), pag. 125-127.

(***) L'invariante a_3 coincide con quello che l'HALPHEN, nella Memoria ultimamente citata, ha rappresentato con $\frac{1}{2}V$. Altrove (*Sur les invariants des éq. diff. lin. du quatrième ordre*, Acta Mathem., vol. 3, 1883) l'HALPHEN ha indicato lo stesso invariante V colla lettera v.

di una qualunque delle a (da lui rappresentate colla lettera Θ) consta di due parti, la prima delle quali non dipende dall'ordine dell'equazione, ed è *lineare* nelle p e nelle loro derivate, mentre la parte rimanente, che non gode di queste proprietà, è tale che ogni suo termine contiene come fattori alcune delle quantità p_2, p'_2, p''_2,...

In un lavoro pubblicato due anni dopo (*), il sig. BRIOSCHI ha posto i valori di $a_3, \ldots, a_7$, dati dal sig. FORSYTH, sotto forma alquanto più semplice, ed ha assegnata per uno qualunque a_r degl'invarianti fondamentali la parte lineare, che è la seguente:

$$\sum_s A_{r,s}\left[p_{r-2s}^{(2s)} - \frac{(r-2s)(r-2s-1)}{2(2s+1)(r-s-1)} p_{r-2s-1}^{(2s+1)}\right], \tag{79}$$

dove si ha:

$$A_{r,0} = 1, \qquad A_{r,s+1} = \frac{(r-2s-2)(r-2s-1)^2(r-2s)}{4(s+1)(2s+1)(r-s-1)(2r-2s-3)} A_{r,s}, \tag{80}$$

ed $s = 0, 1, \ldots, \frac{r}{2} - 1$ per r pari; $s = 0, 1, \ldots, \frac{r-3}{2}$ per r impari (**).

Nei due lavori poc'anzi citati (***) l'HALPHEN ha pure introdotto il concetto di *courbe attachée* all'equazione (76). A tal fine si considerino $n+1$ integrali indipendenti dell'equazione come coordinate omogenee projettive d'un punto di uno spazio S_n ad n dimensioni: allora al variare della x questo punto descrive una certa curva C, che è la curva *attachée* alla data equazione differenziale (****). L'HALPHEN ha dimostrato che gl'invarianti differenziali projettivi della curva C coincidono cogl'invarianti dell'equazione (76), formati in modo algebrico coi coefficienti P e colle loro derivate. E per le equazioni differenziali di 3.° ordine (*Sur la réduction*, ecc., pag. 132 e seg.[i]) e di 4.° ordine (*Acta Math.*, vol. 3, pag. 332 e seg.[i]) ha provato che l'invariante a_3, salvo un fattor numerico, coincide risp. col primo membro della equazione differenziale delle coniche, oppure delle curve gobbe, le cui tangenti

(*) *Les invariants des équations différentielles linéaires* (Acta Mathem., vol. 14, 1890).

(**) Tutti questi ed altri risultati del sig. BRIOSCHI sono riportati nella citata Memoria del sig. WALLENBERG, e nel libro del sig. L. SCHLESINGER.

(***) *Sur la réduction*, ecc., pag. 114; *Sur les invariants*, ecc. (Acta Math., vol. 3, pag. 331).

(****) Cfr. pure alcune Note del sig. FANO nei Rend.[i] della R. Accad. dei Lincei, 1895, e il volume citato del sig. L. SCHLESINGER. La *courbe attachée* è da questo autore (l. c., pag. 133) chiamata *Integralcurve*.

appartengono ad un complesso lineare. Nella seconda delle Memorie ora nominate, cioè pel caso delle equazioni di 4.° ordine, lo stesso autore ha trovato molti altri invarianti dell'equazione, confrontandoli con gl'invarianti differenziali delle ordinarie curve gobbe, che egli aveva poco prima studiato nel lavoro che più volte abbiamo ricordato, *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Journal de l'École Pol., XLVII Cahier).

Valendoci dei risultati a cui siamo giunti nei precedenti paragrafi, siamo ora in grado di stabilire in modo più completo ed uniforme — e per una equazione differenziale lineare di ordine qualunque — il legame che intercede fra gl'invarianti fondamentali dell'equazione e gl'invarianti differenziali projettivi della curva C ad essa *attachée.*

25. Si è già detto che il punto corrente su C ha per coordinate omogenee $n+1$ integrali indipendenti y_1, y_2, y_{n+1} della (76). Si trasformi l'equazione assumendo come nuova variabile indipendente ξ il rapporto $\frac{y_1}{y_{n+1}}$, e per modo che $n-1$ integrali $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ della nuova equazione siano i rapporti $\frac{y_2}{y_{n+1}}, \frac{y_3}{y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}}$. L'equazione trasformata ammetterà gli $n+1$ integrali $1, \xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, e sarà quindi priva degli ultimi due termini, cioè, chiamando η la nuova variabile dipendente, avrà la forma:

$$\eta^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} \Pi_1 \eta^{(n)} + \cdots + \binom{n+1}{2} \Pi_{n-1} \eta'' = 0. \tag{81}$$

Ora è chiaro che la curva C *attachée* all'equazione (76) non viene mutata per effetto dell'eseguita trasformazione: sicchè, se si conservano per essa tutti i simboli che si sono adoperati nei paragrafi precedenti (colla sola avvertenza che nel caso attuale essi s'intendono formati colle coordinate $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$), e si scrive che alla (81) soddisfanno le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, i coefficienti di quell'equazione risultano espressi, mediante gli elementi relativi alla curva C, colle relazioni:

$$\Pi_i = -i!\, D_1^{(n-i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{82}$$

Ciò posto, osserviamo che l'invariante a_r $(r = 3, 4, \ldots, n+1)$ ha il peso r, è d'ordine $n+r$ rispetto agli integrali, ed è intero nei coefficienti Π e nelle loro derivate. In virtù delle (82), esso si convertirà in un invariante differenziale della curva C, il quale avrà il peso r e l'ordine $n+r$, e sarà inoltre intiero nelle quantità D, e non potrà quindi differire che per un coefficiente numerico dall'invariante j_r considerato nei n.^{i} 18 e 23.

Per determinare siffatto coefficiente, basta imaginare le espressioni di a_r e j_r formate col mezzo delle Π e delle loro derivate, e confrontare fra loro i termini contenenti le derivate di ordine più alto. Quanto a j_r, già si è notato nel n.° 23 che in esso il termine di ordine più elevato è $D_r^{(n-1)}$. Ora dalla (50) si ricava:

$$D_{i+1}^{k)} = \frac{1}{n+i+1}\left\{(D_i^{(k)})' + (k+1)\,D_i^{k-1)} + (n+1)\,D_1^{k)}D_i^{n-1)}\right\},$$

mentre per le (82) si ha:

$$D_1^{k)} = -\frac{1}{(n-k)!}\,\Pi_{n-k}\,.$$

Da queste si deduce:

$$D_{i+1}^{k)} = -\frac{1}{(n-k)!}\,\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+i+1)}\,\Pi_{n-k}^{(i)} + \cdots,$$

dove i termini che nel secondo membro seguono il primo sono formati in modo intiero con le Π e le loro derivate di ordini non superiori ad $i-1$. Pertanto abbiamo:

$$j_r = -\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+r)}\,\Pi_1^{(r-1)} + \cdots,$$

nel secondo membro della quale i termini che seguono il primo son formati in modo intero con le Π e le loro derivate di ordini non superiori ad $r-2$.

Per cercare il coefficiente di $\Pi_1^{(r-1)}$ in a_r ricorreremo all'espressione di a_r calcolata per la forma ridotta (77). Dovendo però riferirci all'equazione (81), i coefficienti p della forma ridotta dovranno venir espressi in funzione dei coefficienti Π per mezzo delle formole (78), nelle quali alla lettera P siasi sostituita la Π. Sarà perciò:

$$p_i = -\Pi_1^{(i-1)} + \cdots,$$

dove nel secondo membro si è scritto il solo termine contenente la derivata di ordine più alto. Allora una semplice occhiata data alle formole (4) del citato lavoro del sig. Brioschi (l. c., pag. 235) mostra che, sostituendo in a_r al posto delle p le espressioni fornite dalla precedente relazione, il coefficiente di $\Pi_1^{(r-1)}$ in a_r non è altro che la somma — cangiata di segno — dei coefficienti della parte lineare dello stesso a_r quale sta scritto in quel lavoro. Epperò, in virtù della (79), si conclude la cercata relazione, che stabilisce il legame fra gli invarianti j_r ed a_r:

$$a_r = (n+2)(n+3)\ldots(n+r)\sum_s A_{r,s}\left[1 - \frac{(r-2s)(r-2s-1)}{2(2s+1)(r-s-1)}\right]\cdot j_r,$$

essendo le $A_{r,s}$ date dalle (80). A tale relazione si può facilmente anche dare l'aspetto seguente:

$$a_r = (-1)^r \frac{(n+2)(n+3)\dots(n+r)}{c_r} j_r, \tag{83}$$

dove c_r è il minimo multiplo comune dei denominatori delle frazioni irriducibili che costituiscono i coefficienti della parte lineare di a_r (scritto coi coefficienti p). Per es. si ha:

$$c_3 = 2,\ c_4 = 5,\ c_5 = 14,\ c_6 = 42,\ c_7 = 132,\ c_8 = 429,\ c_9 = 1430.$$

In particolare è da notarsi la relazione:

$$a_3 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n+2)(n+3)}{2} T_{n-1},$$

la quale (come si è detto nel n.° prec.) è già stata dimostrata dall'Halphen per le equazioni differenziali di 3.° e 4.° ordine (*Sur la réduction*, ecc., pag. 132 e seg.^{i}, e *Acta Math.*, vol. 3, pag. 332 e seg.^{i}); e quest'altra:

$$a_4 = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{5} J_4^{(n-1)},$$

che già è stata stabilita dall'Halphen (*Acta Math.*, vol. 3, pag. 339) per una equazione di 4.° ordine.

26. In virtù della (83), le proprietà di cui godono gli invarianti j_r si traducono in altrettante proprietà degl'invarianti a_r. Così il teorema con cui si chiude il n.° 18 diventa:

Se tutti gl'invarianti fondamentali $a_3, a_4, \dots, a_{n+1}$ d'un'equazione differenziale lineare d'ordine $n+1$ sono nulli, la curva ATTACHÉE *all'equazione è una curva razionale normale del proprio spazio (ad n dimensioni),*

e questa è l'interpretazione geometrica del seguente teorema dovuto al signor Brioschi (*), che così viene ad essere stabilito anche colla diretta considerazione della curva *attachée* all'equazione:

Se gl'invarianti $a_3, a_4, \dots, a_{n+1}$ d'un'equazione differenziale lineare d'ordine $n+1$ sono nulli, gl'integrali di questa equazione si possono esprimere per mezzo di forme binarie, a coefficienti costanti, di due argomenti che sono gl'integrali d'un'equazione differenziale di 2.° ordine.

(*) L. c., pag. 237. Cfr. pure L. Schlesinger, l. c., pag. 204-205 e pag. 216.

Così pure, avendo dimostrato (n.° 23) che ognuno degl'invarianti j_r coincide, salvo il segno, col proprio aggiunto, possiamo dire:

Ciascuno degl'invarianti a_3, $a_4, \ldots$, a_{n+1} di un'equazione differenziale lineare d'ordine $n+1$ si trasforma in sè stesso (a meno del segno, che rimane o no invariato, secondo che il peso dell'invariante è pari o dispari), quando ai coefficienti dell'equazione proposta vengano sostituiti quelli della sua aggiunta (di LAGRANGE*),*

la qual proprietà è stata avvertita dall'HALPHEN (*) per l'invariante a_3, ed anzi ha servito a questo autore per l'effettiva determinazione di questo invariante sotto la forma che abbiamo riportata in principio del n. 24.

Torino, 12 aprile 1897.

(*) *Sur la réduction* ecc., pag. 125-126.

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio.

(*Di* FEDERIGO ENRIQUES *a Bologna e* GINO FANO *a Roma*)

Oggetto di questa Memoria è la classificazione dei gruppi continui di trasformazioni birazionali (o cremoniane) dello spazio, cioè la *riduzione* di essi *a tipi* determinati, *mediante trasformazioni birazionali.*

Fra questi gruppi si presentano subito quattro categorie, come naturale estensione dei gruppi cremoniani tipici del piano: i gruppi proiettivi, i gruppi conformi (gruppi di trasformazioni che mutano una sfera in una sfera) ed i gruppi (che si possono chiamare) *di Jonquières generalizzati*, cioè quelli che posseggono una stella invariante di rette o un fascio invariante di piani.

Lo studio dei gruppi di queste quattro categorie è stato in parte già effettuato (pei gruppi proiettivi e conformi), ed in parte (pei gruppi di Jonquières generalizzati) si potrebbe facilmente effettuare, riducendosi a casi già noti, valendosi cioè di una opportuna composizione dei gruppi binari e dei gruppi cremoniani di varietà a due dimensioni.

Appare dunque naturale che si cerchi — come noi appunto abbiamo cercato — di ricondurre birazionalmente i vari gruppi cremoniani a *tipi* appartenenti ad una delle quattro categorie nominate, o almeno di vedere in quali casi questa riduzione risulta possibile. E ciò accade invero per *tutti* i gruppi cremoniani, *fatta eccezione* soltanto per *due* tipi ben definiti di gruppi ∞^3, i quali si distaccano da tutti i rimanenti, e ciascuno dei quali si può caratterizzare in modo sufficiente. Ecco precisamente i risultati della nostra analisi.

I gruppi cremoniani primitivi sono riducibili (birazionalmente) a *gruppi proiettivi* o *conformi* (era nota soltanto la possibilità di eseguire questa riduzione mediante una trasformazione *puntuale*).

I gruppi imprimitivi sono riducibili a *gruppi di Jonquières generalizzati*, fatta eccezione per *tre* tipi di gruppi (semplici, transitivi) ∞^3, nei quali le trasformazioni che lasciano fermo un punto generico dello spazio formano gruppi finiti oloedricamente isomorfi ai gruppi dei poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro). Tuttavia nel *caso tetraedrico* il gruppo ∞^3 si riduce ancora ad un *gruppo conforme.*

I gruppi corrispondenti al *caso ottaedrico* ed *icosaedrico* sono riducibili rispett. a due tipi ben definiti, composti il primo di ∞^3 *trasformazioni cubiche*, il secondo di ∞^3 *trasformazioni del 7.º ordine.*

In conclusione: *i gruppi continui di trasformazioni birazionali dello spazio si possono ricondurre birazionalmente a gruppi proiettivi o conformi, oppure a gruppi di Jonquières generalizzati, o infine a due tipi ben definiti di gruppi* (semplici, transitivi) ∞^3 *rispett. dell'ordine 3 e 7.*

Proposizioni preliminari.

1. Due osservazioni fondamentali ci saranno utili nel nostro studio. La prima è la seguente:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali dello spazio o è algebrico, o è contenuto in un gruppo più ampio algebrico.

Questa proprietà spetta come è noto ai gruppi continui di trasformazioni birazionali di una qualsiasi varietà algebrica (Picard, Painlevé, Castelnuovo e Enriques). Essa ci permette di limitarci, senza introdurre con ciò restrizioni, alla considerazione di gruppi algebrici.

2. La seconda osservazione fondamentale è la seguente:

Ogni gruppo continuo di trasformazioni birazionali dello spazio lascia invariati infiniti sistemi lineari (ampi quanto si vuole) *di superficie algebriche.*

Per costruire un tale sistema invariante rispetto ad un gruppo dato, basta p. e. partire da un qualsiasi sistema continuo (lineare o no) di superficie: i sistemi trasformati di questo formeranno un *corpo* di superficie aventi un certo ordine n, ed il minimo sistema lineare a cui questo corpo appartiene, od anche il sistema lineare completo determinato dal medesimo gruppo base, forniranno dei sistemi invarianti (cioè dei nuovi corpi) pel dato gruppo di trasformazioni (*).

(*) Cfr. Enriques, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano.* Rendic. Accad. dei Lincei. Maggio 1893.

L'osservazione precedente si può anche enunciare dicendo che « ogni gruppo cremoniano dello spazio è simile ad un gruppo proiettivo di un certo spazio S_n »: invero, se si costruisce pel gruppo proposto un sistema lineare invariante di superficie algebriche avente una certa dimensione n ($\geqq 3$), si ha subito una varietà razionale V_3 di S_n rappresentata sullo spazio ordinario da quello stesso sistema lineare di superficie, ed un gruppo proiettivo di S_n che opera sulla V_3 come il nostro gruppo cremoniano opera nello spazio.

Affinchè questa rappresentazione della V_3 riesca biunivoca, basta soltanto supporre che il sistema invariante costruito sia *semplice*, vale a dire che le superficie di esso passanti per un punto generico non passino in conseguenza per altri punti variabili: questa condizione, come è chiaro, può soddisfarsi in infiniti modi, data l'arbitrarietà che compare nella costruzione del sistema.

3. Dalla similitudine dei gruppi cremoniani dello spazio S_3 con gruppi proiettivi di convenienti spazi S_n si deducono subito alcune conseguenze delle quali dovremo spesso far uso in seguito. Le enunciamo qui esplicitamente:

a) Ogni curva invariante per un gruppo cremoniano, il quale subordini su di essa almeno ∞^2 trasformazioni diverse, è una curva algebrica e razionale (*).

b) Ogni curva invariante per un gruppo cremoniano algebrico, il quale, subordini su di essa almeno ∞^1 trasformazioni diverse, è una curva razionale (**).

c) Ogni superficie invariante per un gruppo cremoniano algebrico, il quale operi transitivamente sui punti di essa, è una superficie algebrica e razionale (***).

Queste proposizioni non sono che la traduzione immediata dei noti teoremi relativi alle curve e alle superficie con trasformazioni proiettive in sè, cui abbiamo alluso nelle citazioni precedenti.

d) Ogni curva (invariante) luogo di punti uniti per le trasformazioni cremoniane di un gruppo continuo, è una curva algebrica, oppure è contenuta in una superficie algebrica, luogo anch'essa di punti uniti.

(*) KLEIN-LIE, *Comptes Rendus*, 1870; LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, s. 187.

(**) L. c.

(***) ENRIQUES, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.* Atti Istituto Veneto, ser. VII, tom. IV e V, 1893; FANO, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse.* Rend. Acc. dei Lincei, Febbraio 1895.

Ogni superficie luogo di punti uniti per le trasformazioni di un gruppo cremoniano continuo è una superficie algebrica.

Per stabilire quest'ultima proposizione basta osservare che i punti uniti delle omografie di un S_n sono isolati, oppure costituiscono degli spazi lineari, e questi ultimi possono segare una varietà algebrica (invariante) V_3 soltanto secondo curve o superficie algebriche (luoghi di punti uniti su V_3).

Gruppi primitivi.

4. I gruppi primitivi di trasformazioni puntuali dello spazio sono stati classificati dal sig. Lie (*), il quale ha dimostrato che ogni gruppo siffatto può essere ricondotto con una trasformazione puntuale:

a) al gruppo ∞^{10} delle trasformazioni conformi;

b) oppure ad uno dei seguenti gruppi proiettivi:

1) gruppo ∞^{15} di tutte le omografie;
2) gruppo ∞^{12} delle affinità;
3) gruppo ∞^{11} delle affinità equivalenti;
4) gruppo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale;
5) gruppo ∞^{6} di una quadrica non specializzata (movimenti non euclidei);
6) gruppo ∞^{7} delle similitudini;
7) gruppo ∞^{6} dei movimenti (euclidei).

Questa riduzione vale in particolare anche per i gruppi cremoniani, in quanto si tratti di classificarli dal punto di vista gruppale. Ma nuovi tipi possono presentarsi (ed effettivamente si presentano) allorchè si tratta di trovare i gruppi cremoniani birazionalmente distinti. Può infatti accadere che la trasformazione puntuale che riconduce un gruppo cremoniano dato ad uno dei gruppi enumerati non sia birazionale.

5. Si abbia un gruppo cremoniano algebrico, primitivo, Γ, ed un gruppo Γ' appartenente ad uno dei tipi *a*) o *b*), trasformato di Γ mediante una trasformazione puntuale. Per comodità di linguaggio designeremo con Σ e Σ' gli spazi in cui sono dati rispett. i due gruppi Γ e Γ'.

(*) *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, s. 122-140.

Qualunque sia il tipo di Γ', esistono certo in questo gruppo infinite trasformazioni, che lasciano fermi tutti i punti di una retta (di Σ'), senza lasciar fermi contemporaneamente tutti i punti di una superficie passante per questa retta. Di qui si trae che le curve C dello spazio Σ corrispondenti alle rette dello spazio Σ' debbono essere *algebriche*. Infatti le infinite trasformazioni di Γ che lasciano fissi tre punti di una C costituiscono un sottogruppo algebrico di Γ, pel quale la C è una curva di punti uniti non contenuta in una superficie di punti uniti (cfr. il lemma d, § 3). Ma possiamo anche riconoscere facilmente che le curve C [trasformate delle rette di Σ', o parti irriducibili (variabili) di queste trasformate] sono *razionali*. Infatti le trasformazioni di Γ che lasciano invariata una C costituiscono un sottogruppo algebrico, le cui operazioni scambiano i punti di C in almeno ∞^1 modi (perchè lo stesso appunto accade in Σ', fissando una retta relativamente a Γ'): la razionalità delle C segue dunque dai lemmi a) b) del § 3.

Infine osserviamo che nello spazio Σ due punti individuano *una* C che passa per essi, poichè altrimenti tutte le trasformazioni di Γ che lasciano fermi i punti di una C dovrebbero lasciare ferma la superficie (passante per la detta C) luogo delle C che si appoggiano alla nominata in un punto fisso ed in un secondo punto variabile; mentre, se in Σ' si fissano tutti i punti di una retta, le trasformazioni di Γ' così ottenute non lasciano ferma alcuna superficie per questa retta.

6. Ciò posto consideriamo le superficie F dello spazio Σ che corrispondono ai piani dello spazio Σ' nella trasformazione puntuale che fa corrispondere Γ a Γ': le F sono algebriche e razionali, poichè contengono una rete di curve razionali C: *esse formano un sistema lineare* ∞^3, perchè due punti di Σ individuano una C (sezione di due F) passante per essi (*); e questo sistema lineare $|F|$, ad intersezioni variabili razionali, è invariante rispetto al gruppo Γ se Γ', appartiene ad uno dei tipi b), ossia è un gruppo proiettivo. Se invece Γ' appartiene al tipo a), ossia è il gruppo conforme ∞^{10}, si vede facilmente che il sistema costruito sarà contenuto in un sistema lineare invariante ∞^4 (che indicheremo ancora con $|F|$) corrispondente al sistema delle sfere di Σ', e tale che le intersezioni variabili di due superficie sieno ancora razionali.

(*) Cfr. Enriques, *Una questione sulla linearità*, ecc. Rend. Accad. dei Lincei, Giugno 1893.

In ogni caso il detto sistema invariante $|F|$ è contenuto in *un* sistema lineare invariante completo, cioè determinato dal gruppo base.

Ora i sistemi lineari completi, almeno ∞^3, di superficie algebriche ad intersezioni variabili razionali si possono ricondurre con una trasformazione birazionale dello spazio ad uno dei seguenti tipi (*):

1) sistema di superficie d'ordine n con una retta base $(n-1)^{\text{pla}}$;
2) sistema delle quadriche tangenti in un punto ad un piano dato;
3) sistema delle quadriche per una conica, p. e. sistema delle sfere;
4) sistema dei piani.

Si può dunque assumere come tipo del gruppo Γ, trasformandolo birazionalmente in Σ, un gruppo che lasci invariato un sistema lineare appartenente ad uno dei tipi 1) 2) 3) 4). Ma nei casi 1) e 2) questo gruppo non risulta primitivo, e quindi anche Γ non potrebbe essere tale. Concludiamo dunque che:

Ogni gruppo cremoniano primitivo dello spazio può ricondursi con una trasformazione birazionale:

1) *ad un gruppo proiettivo,*
2) *o ad un gruppo conforme.*

Resterebbero ora a determinare i singoli gruppi primitivi proiettivi e conformi. Quelli proiettivi sono noti, e sono quelli stessi enumerati come tipi di gruppi puntuali. Nel gruppo conforme totale (∞^{10}) si troverebbe un solo tipo di sottogruppo primitivo che non si lascia ricondurre birazionalmente (ma solo con una trasformazione [2, 1]) ad un gruppo proiettivo: tale è *il gruppo delle trasformazioni conformi che lasciano fissa una sfera data*, il quale nasce appunto con una trasformazione [1, 2] dal gruppo proiettivo (∞^6) di una quadrica non specializzata.

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad integrazioni variabili iperellittiche.* Mathematische Annalen, Bd. 46. La riduzione si applica ai sistemi *semplici* (v.[i] l. c.); ma tali sono appunto sempre i sistemi completi ad intersezioni razionali e di dimensione $\geqq 3$, essendo completo il sistema di curve segato sopra una superficie qualunque del sistema dalle rimanenti.

Gruppi algebrici semplicemente infiniti.

7. Si abbia nello spazio un gruppo cremoniano algebrico ∞^1. Le traiettorie C dei vari punti saranno curve algebriche e razionali (§ 3, lemma *b*), formanti una congruenza del 1.° ordine, e sopra ciascuna di queste curve vi saranno *due* punti uniti. Se questi punti coincidono per ogni C (se si tratta cioè di un gruppo parabolico) il luogo dei punti stessi sarà una superficie (che potrà anche ridursi ad una curva o all'intorno di un punto fisso) unisecante le curve C.

Escludiamo questo caso, e dimostriamo che anche in ogni altro caso esiste una varietà (superficie, curva, ecc.) unisecante le curve C della congruenza. Lo scopo della dimostrazione è di poter poi applicare un risultato noto (*), che permetterà di ricondurre con una trasformazione birazionale la congruenza delle curve C ad una stella di raggi.

Consideriamo perciò un gruppo proiettivo ∞^1 di un certo S_n equivalente al gruppo proposto (operante sopra una V_3 rappresentata birazionalmente sullo spazio), e chiamiamo ugualmente C le traiettorie di questo gruppo. Possiamo supporre che le C sieno prive di punti doppi; basta infatti osservare che, in caso opposto, questi punti doppi dovrebbero essere punti uniti per le omografie del gruppo; allora, considerando un sistema lineare invariante di varietà algebriche passanti per tutti quei punti uniti, si potrebbe trasformare la V^3 in un'altra varietà di un altro spazio, ed il gruppo proiettivo dato in un altro gruppo le cui traiettorie risulterebbero prive di punti doppi. (Il ragionamento cadrebbe in difetto se il gruppo proiettivo equivalente al gruppo dato fosse un gruppo di S_3, e si avesse una (vera) superficie come luogo di punti uniti; ma allora questa sarebbe un piano, ed il gruppo si comporrebbe di omologie, sicchè la conclusione sussisterebbe ancora.)

Ciò posto, sia F il luogo dei punti uniti pel nostro gruppo proiettivo sulle traiettorie C appartenenti alla varietà (invariante) V_3. Dico che F non può essere una varietà unica irriducibile, bisecante le C, ma deve necessariamente spezzarsi in due luoghi (curve, superficie, ecc.) unisecanti le C. Sup-

(*) Estensione di un teorema di Nöther. Cfr. Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione D'un' equazione algebrica* $f(x\,y\,z)=0$, ecc. Mathem. Annalen, Bd. 49, n.° 15.

porremo perciò che F sia una varietà irriducibile bisecante le C; e faremo vedere che si cade in un assurdo.

Essendo la F un luogo di punti uniti pel nostro gruppo proiettivo, lo spazio lineare (minimo) S_r cui F appartiene risulterà tutto costituito di punti uniti; in particolare risulteranno anche costituite di punti uniti le rette che uniscono le coppie di punti uniti di una (qualunque) curva C. Ora ciò è assurdo, perchè lo spazio lineare (S_h) cui appartiene la C dovrebbe allora contenere anche infiniti iperpiani (S_{h-1}) uniti, e quindi sulla C stessa (generica) verrebbe subordinato dal gruppo ∞^1 soltanto un numero finito di trasformazioni (proiettive).

Resta dunque provata l'esistenza di un luogo di punti unisecante le traiettorie C del gruppo proiettivo su V_3, ovvero, ciò che è lo stesso, del gruppo cremoniano di S_3 (perchè appunto F dovrà spezzarsi in due parti, contenenti ciascuna *un* punto di ogni C).

Se ne deduce (come abbiamo già avvertito):

Ogni gruppo cremoniano ∞^1 algebrico dello spazio si può trasformare birazionalmente in guisa che le traiettorie dei punti divengano le rette di una stella.

La stella è naturalmente invariante per tale gruppo. Si noti che si può anche supporre che *il centro della stella sia unito sopra ogni singolo raggio;* basta far corrispondere all'intorno di questo punto uno dei luoghi di punti uniti delle traiettorie C.

Gruppi la cui riduzione si può far dipendere da quella dei gruppi ∞^1.

8. *Gruppi doppiamente intransitivi.* I gruppi cremoniani algebrici doppiamente intransitivi portano un punto generico dello spazio nei punti di una curva algebrica C. Queste curve C si possono dunque considerare come le traiettorie di un sottogruppo ∞^1 (algebrico) del gruppo dato. Si deduce:

Ogni gruppo cremoniano algebrico due volte intransitivo si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariate le rette di una stella (ma non sempre il centro di essa.)

9. *Gruppi integrabili.* I gruppi integrabili (*) posseggono sempre un sottogruppo ∞^1 invariante. Trattandosi di gruppi cremoniani algebrici, questo

(*) Lie, op. cit., Bd. I, s. 265; Bd. III, s. 679, 681.

sottogruppo ∞^1 invariante dovrà pure essere algebrico se è unico, ed in caso diverso potrà essere scelto algebrico. Questa conclusione si ricava dall'esame dei gruppi proiettivi integrabili di cui il LIE (*) ha assegnato il tipo, tenendo sempre presente l'equivalenza dei gruppi cremoniani di S_3 a gruppi proiettivi che lasciano ferma una varietà razionale V_3 di uno spazio opportuno.

Ecco il ragionamento a cui conviene ricorrere.

Ogni gruppo proiettivo integrabile Γ' di S_n lascia fisso (almeno) un punto di S_n, una retta per questo punto, un piano per questa retta, ecc. Consideriamo il più ampio gruppo Γ definito da queste condizioni; gruppo che è certamente algebrico. Da esso si può staccare algebricamente (come è noto, e evidente) una successione di sottogruppi invarianti, le cui dimensioni decrescono di una unità per volta. Fra questi se ne troverà uno che ha comune col sottogruppo (algebrico) Γ' precisamente ∞^1 trasformazioni, le quali formeranno un sottogruppo algebrico invariante (∞^1) di Γ'.

Ciò posto, si deduce:

Ogni gruppo cremoniano algebrico integrabile si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciar fissa una stella di rette.

Basta infatti considerare un sottogruppo algebrico ∞^1 invariante nel gruppo dato, e trasformare in una stella di rette la congruenza delle sue traiettorie.

10. *Corollario. Gruppi* ∞^2. I gruppi ∞^2 essendo integrabili (**), si può applicare ad essi il resultato precedente. Ma in questo caso si può anche dire di più.

Si abbia un gruppo cremoniano algebrico ∞^2 semplicemente intransitivo, tale cioè che i punti dello spazio descrivano, per effetto delle trasformazioni di esso, delle *superficie* F, che saranno algebriche e razionali, e formeranno un fascio. Il sottogruppo ∞^1 invariante del gruppo stesso (o, se questo gruppo è permutabile, un qualunque suo sottogruppo ∞^1 algebrico) darà luogo ad una congruenza invariante del 1.° ordine di curve razionali C; sopra ogni F vi sarà un fascio invariante di tali curve.

Ora noi vogliamo dimostrare che le superficie F si possono trasformare birazionalmente nei piani di un fascio — ossia nei piani per una retta a —, facendo in pari tempo corrispondere alle curve C le rette di una stella col centro A su a.

(*) Op. cit., Bd. I, s. 589; Bd. III, s. 262, 681.
(**) LIE, op. cit., Bd. 1, s. 713.

Infatti si può procedere nel seguente modo. In primo luogo si può far corrispondere biunivocamente ad ogni F un piano α per a, ed alle C sopra una F le rette per A nel corrispondente piano α: ciò segue da un noto teorema del sig. NOETHER (*), applicato alla varietà ∞^2 delle curve C. In secondo luogo, considerando una superficie unisecante le C, si può riferire punto per punto ogni C alla retta corrispondente.

Con ciò si ottiene la trasformazione birazionale cercata, per la quale ogni F risulta rappresentata sul piano corrispondente.

Resta così stabilito che:

Ogni gruppo cremoniano algebrico ∞^2 si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariati i singoli piani d'un fascio, nonchè una stella di rette col centro sull'asse del detto fascio.

11. *Gruppi semplicemente intransitivi.* Alle considerazioni svolte pei gruppi ∞^2 si collega la riduzione di tutti i gruppi cremoniani algebrici semplicemente intransitivi, cioè di quei gruppi pei quali i punti dello spazio descrivono *superficie* (razionali) F di un fascio. In un tal gruppo esiste infatti sempre un sottogruppo algebrico ∞^1, il quale darà sopra ogni F un fascio di traiettorie razionali C. Benchè questi fasci di curve C, sopra le singole F, non sieno ora (in generale almeno) invarianti rispetto all'intiero gruppo proposto, essi ci danno tuttavia il mezzo di trasformare contemporaneamente (come nel caso dei gruppi ∞^2) tutte le F nei piani per una retta, e questi piani (non i fasci di rette ottenuti su di essi) risulteranno invarianti pel gruppo trasformato.

Concludiamo dunque:

Ogni gruppo cremoniano algebrico semplicemente intransitivo si può ridurre birazionalmente ad un gruppo che lasci invariati i piani d'un fascio.

12. *Gruppi transitivi imprimitivi, ∞^4 almeno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie.* Si abbia un gruppo cremoniano algebrico Γ, ∞^4 almeno, transitivo, il quale lasci invariata una serie ∞^1 di superficie F. Dimostriamo anzitutto che, se tale serie non è composta di superficie algebriche, se ne può sempre costruire un'altra, composta di superficie algebriche, la quale pure costituisca un sistema d'imprimitività pel gruppo Γ: anzi la nuova serie che verrà costruita risulterà un fascio, se era un fascio la prima.

(*) *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, Bd. III.

Supponiamo dunque che le F non sieno algebriche.

Vi sono certo in Γ infinite trasformazioni, e, fra queste, ∞^1 costituenti un gruppo continuo algebrico, le quali lasciano fermo un punto generico P dello spazio, e quindi la superficie F (o ciascuna delle F) per questo punto. Vi è dunque sopra ogni F uno ed un solo fascio di curve algebriche razionali (traiettorie del gruppo ∞^1 considerato): invero, in ogni altro caso, o la F sarebbe luogo di punti uniti pel gruppo ottenuto fissando P, oppure sopra di essa si avrebbero, variando il punto P, fasci differenti di curve razionali; e in ambo i casi la F stessa dovrebbe essere algebrica.

Ora consideriamo gli infiniti fasci di curve algebriche C, appartenenti rispett. alle varie superficie F; essi danno luogo ad una congruenza (algebrica) di curve C, che sarà invariante pel gruppo Γ. Questa congruenza è certo del 1.° ordine, se la serie delle F è un fascio; e, ogni qual volta sia del 1.° ordine, essa è certo razionale, perchè le curve C incontreranno un piano generico secondo i gruppi di punti di una involuzione (*). Se invece la congruenza delle C è di ordine > 1, potremo pur sempre concludere che essa o è razionale (cioè riferibile ad un piano), oppure è riferibile (elemento per elemento) a una superficie rigata ellittica; ciò perchè, non potendo ora le C essere contemporaneamente fisse (cioè traiettorie) per nessun sottogruppo ∞^1 di Γ, esse verranno certo scambiate da questo gruppo (che è algebrico) in almeno ∞^4 (e basterebbe anzi in ∞^3) modi diversi (**).

Nel caso della rigata ellittica, alle generatrici di questa corrisponderanno ∞^1 fasci algebrici di curve C, e quindi ∞^1 superficie algebriche costituenti una serie invariante pel gruppo Γ.

Se invece la congruenza delle curve C è razionale, il gruppo Γ, in quanto opera sugli elementi (C) di questa congruenza, può essere rappresentato con un gruppo proiettivo che operi sui punti di una superficie (razionale) φ di un conveniente spazio S_n (riferita alla congruenza). Questo gruppo proiettivo dovrà scambiare tra loro ∞^1 linee trascendenti W su φ, corrispondenti agli ∞^1 fasci di curve C che appartengono alle singole F; di qui si trae facilmente che il detto gruppo proiettivo operante sui punti di φ è precisa-

(*) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* Rend. Acc. dei Lincei, Ottobre 1893; Math. Ann., Bd. 44.

(**) Castelnuovo e Enriques, *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes;* Compt. Rend. de l'Ac. des Sc., 1895. Cfr. anche: *Sur quelques récents résultats*...; Math. Ann., Bd. 48, § 46.

mente ∞^2 e composto di operazioni permutabili, giacchè ognuna di quelle linee W (essendo trascendente) ammette solo ∞^1 trasformazioni proiettive in sè, e non può essere luogo di punti uniti per infinite proiettività che non lascino fermi anche tutti i punti di φ. Esisterà quindi su φ almeno un fascio invariante di curve razionali, corrispondentemente a un sottogruppo ∞^1 algebrico (certo esistente) del gruppo permutabile ∞^2 su φ. A questo fascio corrisponderà nella congruenza delle C una serie ∞^1 di superficie algebriche, composte ciascuna con ∞^1 C; e tale serie sarà invariante pel gruppo Γ. La serie stessa sarà un fascio se la congruenza delle C è del 1.° ordine, e quindi certo se era un fascio la serie delle F.

Dunque, in ogni caso, i gruppi cremoniani, algebrici, transitivi, ∞^4 algebrici meno, che lasciano invariata una serie ∞^1 di superficie, lasciano invariata anche una serie ∞^1 di superficie *algebriche* (come avviene anche pei gruppi intransitivi). Dovremo ora distinguere i due casi, in cui la serie nominata sia un *fascio*, oppure una *serie d'indice* > 1.

13. *Fascio invariante di superficie.* Si abbia un gruppo cremoniano Γ, ∞^4 almeno, il quale lasci invariato un fascio di superficie F.

Il gruppo Γ può essere supposto algebrico, giacchè in caso opposto basterebbe ampliarlo convenientemente. Similmente (per il § prec.) le superficie F possono supporsi algebriche, altrimenti basterebbe sostituire il fascio delle F con un altro fascio invariante di superficie algebriche.

Esiste in Γ un sottogruppo algebrico almeno ∞^1 che lascia ferme (tre e quindi) tutte le F; e se la sua dimensione è > 1, si potrà sempre costruire in esso un sottogruppo ∞^1 pure algebrico. Si avrà così su ogni F un fascio di curve C algebriche, razionali, traiettorie di quel sottogruppo ∞^1.

Di qui si trae (cfr. i §§ 10, 11) la possibilità di trasformare il fascio delle F in un fascio di piani, riferendo le C di ciascun fascio su una F alle rette di un fascio nel corrispondente piano.

Concludiamo:

Ogni gruppo cremoniano di dimensione > 3 il quale lasci invariato un fascio di superficie si può trasformare birazionalmente in guisa da lasciare invariato un fascio di piani.

14. *Serie invariante di superficie d'indice* > 1. Il gruppo cremoniano Γ, ∞^4 almeno, ammetta invece un sistema d'imprimitività costituito da una serie ∞^1 di superficie F, d'indice > 1. Tanto il gruppo Γ come le superficie F pos-

sono supporsi algebrici. In Γ esiste un sottogruppo algebrico almeno ∞^1 che lascia ferme tutte le F, ed ha quindi come traiettorie le curve C, loro mutue intersezioni. Le curve C costituiscono dunque una congruenza (del 1.° ordine) di curve razionali, riducibile ad una stella di rette (cfr. il § 7): tale congruenza è evidentemente invariante pel gruppo Γ.

Concludiamo perciò:

Ogni gruppo cremoniano di dimensione > 3, il quale lasci invariata una serie ∞^1 di superficie d'indice > 1, si può trasformare birazionalmente in un gruppo che lascia invariata una stella di rette

Analisi dei casi residui.

15. Quali casi irriducibili ai precedenti restano ancora da esaminare?

Abbiamo esaurita dapprima la classificazione dei gruppi primitivi.

Fra i gruppi imprimitivi abbiamo già considerati quelli (una o due volte) intransitivi, e quelli integrabili; due categorie nelle quali rientrano in particolare i gruppi ∞^1 e ∞^2.

Non abbiamo detto nulla dei gruppi ∞^3 transitivi semplici (cioè non integrabili).

Passando ai gruppi imprimitivi di dimensione > 3, abbiamo considerato quelli pei quali si ha una serie invariante ∞^1 di superficie.

Dobbiamo invece ancora considerare i gruppi (transitivi) imprimitivi, ∞^4 almeno, che scambiano tra loro le curve di una congruenza invariante. Si possono tuttavia lasciare da parte quei casi in cui, esistendo anche una serie ∞^1 invariante di superficie, il gruppo rientrerebbe in un caso già esaminato.

Possiamo dunque limitarci a considerare i gruppi dotati di una congruenza invariante, i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo (quindi, come vedremo, in almeno ∞^5 modi diversi). Segue da ciò che la congruenza in questione dovrà essere del 1.° ordine (cioè per ogni punto dello spazio passerà una sola curva di essa). Invero si abbia per un gruppo una congruenza di curve invariante, d'ordine > 1. Fissata una curva C della congruenza, resterà fissa la superficie luogo di tutte le C che si appoggiano ad essa: se, per comodità d'intuizione, si trasporta il gruppo che opera sulle C in un piano, facendo corrispondere i punti di questo piano agli elementi (C) della congruenza, avremo nel piano un gruppo tale che, fissando un punto, resta pure fissa una linea variabile con esso: è noto che tale proprietà spetta soltanto ai gruppi imprimitivi. E poichè d'altra parte ogni gruppo primitivo di trasformazioni puntuali del piano è almeno ∞^5 (*), così vediamo appunto che le curve C della congruenza invariante dovranno pure venir scambiate in almeno ∞^5 modi diversi.

Dunque, riassumendo le conclusioni precedenti, i casi non riducibili a quelli già trattati e che perciò dobbiamo ancora esaminare sono i seguenti:

a) gruppi semplici transitivi ∞^3 (algebrici);

b) gruppi transitivi, imprimitivi, che lasciano invariata una congruenza di curve del 1.° ordine, scambiando gli elementi (curve) di questa congruenza in modo primitivo (∞^5 almeno).

Esamineremo dapprima il secondo di questi casi, lasciando per ultime le considerazioni relative ai gruppi ∞^3, le quali più si allontanano dall'ordine di idee seguito fin qui.

Gruppi transitivi che posseggono una congruenza invariante del 1.° ordine i cui elementi (curve) vengono scambiati in modo primitivo.

16. Trattandosi di gruppi cremoniani algebrici, le curve C della congruenza invariante e la congruenza stessa χ sono algebriche.

Lo possiamo vedere così.

Fissando un punto generico P dello spazio si stacca dal gruppo proposto G (che è almeno ∞^5) un sottogruppo *algebrico* (almeno ∞^2) Γ, pel quale resta ferma la curva C della congruenza χ che contiene P stesso. Se i punti della C vengono ancora scambiati in almeno ∞^1 modi dalle trasformazioni di Γ, la C è algebrica e razionale [§ 3, lemmi *a*) *b*)].

Se invece tutti i punti della C risultano già fissi per lo stesso sottogruppo Γ (o pel gruppo continuo massimo che vi è contenuto due volte, se Γ è un gruppo misto) la C è ancora algebrica, oppure è contenuta in *una* superficie algebrica F passante per P, di cui tutti i punti risulteranno uniti quando sia fisso P [§ 3, lemma *d*)].

In questa seconda ipotesi, la curva C della congruenza χ che passa per un punto qualunque di F, essendo luogo di punti uniti pel medesimo sotto-

(*) Lie, op. cit., Bd. III, s. 35.

gruppo Γ del gruppo proposto G, dovrà appartenere tutta ad F. Se ne trae quindi l'esistenza di un fascio invariante di superficie F, ciascuna delle quali conterrebbe infinite curve C della congruenza proposta; e ciò contraddice alla premessa che il nostro gruppo G debba operare sulla detta congruenza in modo primitivo.

Le curve C della congruenza invariante χ sono dunque algebriche, e anzi razionali, perchè ciascuna di esse è fissa per un sottogruppo di G che deve scambiarne i punti almeno in ∞^1 modi (G essendo transitivo).

L'algebricità della congruenza segue poi immediatamente dal fatto che una curva algebrica, per effetto delle trasformazioni d'un gruppo cremoniano algebrico, deve descrivere un sistema algebrico. La congruenza, essendo del 1.° ordine, sarà anche razionale [per la razionalità delle involuzioni piane (*)], ciò che d'altronde si vedrebbe qui direttamente.

Vogliamo ora dimostrare che si può trasformare birazionalmente la congruenza delle curve C in una stella di rette. Sappiamo che perciò occorre (e basta) stabilire l'esistenza di una superficie algebrica unisecante le C.

Considerato un piano α, i cui punti vengano riferiti agli elementi (C) della congruenza, sappiamo che si può rappresentare su questo piano il gruppo primitivo che opera sulle C mediante (**):

a) il gruppo proiettivo totale ∞^8;

b) o il gruppo proiettivo ∞^6 che lascia ferma una retta;

c) o il gruppo proiettivo speciale ∞^5 che lascia ferma una retta (ed è sottogruppo invariante del precedente).

La corrispondenza tra la congruenza delle C e il piano α, che serve a stabilire questa rappresentazione, è birazionale (***).

Indichiamo con G' il gruppo proiettivo [appartenente al tipo *a*) *b*) o *c*)] che opera sul piano α considerato.

Il gruppo G' e il nostro gruppo cremoniano G saranno isomorfi; ma può ben darsi che questo isomorfismo non sia oloedrico, che cioè all'identità in G' corrispondano in G infinite operazioni, formanti un sottogruppo invariante, che sarebbe però algebrico e due volte intransitivo. Esso permetterebbe quindi

(*) Castelnuovo, lav. cit.; Rend. Acc. dei Lincei, Ottobre 1893; Mathem. Ann., Bd. 44.

(**) Lie, op. cit., Bd. III, s. 35.

(***) Cfr. Fano, *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè stesse.* Rend. Circ. Matem. di Palermo; tom. X, pag. 1 e seg.

di costruire una unisecante delle curve C (sue traiettorie), e di ridurre così la congruenza di esse ad una stella di rette (§ 8).

Possiamo dunque supporre che fra G' e G interceda un isomorfismo oloedrico (in senso gruppale), pel quale ad ogni trasformazione di G' (in particolare all'identità) corrisponda *una* o un numero discreto di trasformazioni in G.

Il gruppo G sarà quindi esso stesso ∞^5, o ∞^6, o ∞^8.

Senza preoccuparci tuttavia della sua dimensione, noi distingueremo, rispetto a G, tre casi diversi, da un altro punto di vista:

1) Fissando una curva C, si ha un sottogruppo di G che scambia i punti di questa curva in soli ∞^1 modi.

Il gruppo che si ha sulla C (continuo o misto che sia) possiede una coppia unita di punti. Se questa, per ogni C, risultasse costituita da due punti coincidenti, sarebbe senz'altro costruito razionalmente sopra ogni C *un* punto, che è quanto ci occorre.

Possiamo dunque escludere questo caso, e limitarci a mostrare che la coppia unita che si ha sopra una C tenuta ferma, o è comune a tutte le C, o descrive al variare della C stessa una superficie riducibile, composta di due altre unisecanti la congruenza; cosicchè in ogni caso la congruenza delle C risulterà riducibile ad una stella di rette.

Facciamo la dimostrazione per assurdo; supponiamo cioè che la coppia unita di una C descriva una curva K o una superficie F irriducibile (bisecante le C). La K o la F costituiranno in ogni caso un luogo invariante pel gruppo G.

Nel 1.° caso, considerando le infinite superficie generate dalle C che escono da uno stesso punto generico di K, si ottiene subito pel gruppo G un sistema d'imprimitività costituito da una serie ∞^1 invariante di superficie; e questo è un caso che a noi non occorre esaminare.

Nel 2.° caso il gruppo G opera sulla superficie F in modo primitivo, e lascia invariante su di essa una serie ∞^2 di coppie di punti (la serie delle coppie unite considerate sulle C). Ora la F è razionale (perchè G subordina su di essa — come nella congruenza delle C — almeno ∞^5 trasformazioni diverse) (*); perciò si dovrebbe ottenere sopra un piano rappresentativo di essa un gruppo cremoniano primitivo il quale lasci invariante una serie ∞^2 di coppie di punti (sia cioè tale che, fissato un punto generico, risulti fisso di conseguenza qualche altro punto o gruppo di punti variabile col primo). D'altra

(*) Castelnuovo e Enriques, l. c.

parte i gruppi cremoniani primitivi del piano si riducono ai tipi *a*) *b*) *c*) sopra enumerati, pei quali non è invariante alcuna serie ∞^2 di coppie di punti; ecco dunque l'assurdo, da cui scaturisce la riducibilità della F che dovevasi dimostrare.

Nell'ipotesi 1) la congruenza delle C è dunque certo riducibile a una stella di rette.

2) Fissando una C, si ha un sottogruppo di G che scambia i punti di questa C in ∞^2 modi.

Allora il gruppo (binario) ∞^2 delle trasformazioni sulla C, lascia fisso *un* punto della curva (*), e questo punto, al variare della stessa C, ci darà il luogo (algebrico) unisecante le curve della congruenza, che occorre per ridurre la congruenza stessa ad una stella di rette.

3) Fissando una C si ha un sottogruppo di G che opera sui punti della C in modo ∞^3.

Allora ci possiamo ridurre al caso precedente staccando da G un conveniente sottogruppo.

Consideriamo perciò ancora il gruppo G' operante proiettivamente nel piano α. Possiamo supporre che G' appartenga ad uno dei tipi *b*) o *c*); se no basterebbe staccare da G' (e conseguentemente da G) il sottogruppo che si ottiene fissando una retta del piano α.

Supponendo dunque che G' appartenga al tipo *b*) o *c*), ossia possegga una retta unita, imponiamo su questa uno, o due, o tre punti uniti fissi; staccheremo così da G', e quindi da G, dei sottogruppi le cui dimensioni andranno decrescendo da 5 (o 4) in giù. Fra questi sottogruppi, arrestandoci a tempo, ne troveremo certo uno tale, che le trasformazioni di esso che lasciano ferma una C operino sopra questa in modo ∞^2, e lascino quindi fermo *un* punto della C stessa; punto che verrà così razionalmente individuato.

Riassumendo pertanto i risultati dell'analisi fatta, concludiamo: *Ogni gruppo cremoniano algebrico che lascia invariata una congruenza del 1.º ordine scambiando le curve di essa in modo primitivo, può essere ricondotto birazionalmente ad un gruppo che scambi (del pari primitivamente) le rette di una stella invariante,* e operi anzi *proiettivamente* su questa stella. Quest'ultima parte segue immediatamente dalla riducibilità, più volte ricordata, dei gruppi primitivi di trasformazioni birazionali del piano (o della stella) a gruppi proiettivi.

(*) Lie, op. cit., Bd. III, s. 17.

Gruppi semplici, transitivi ∞^3.

17. *Generalità.* Si abbia un gruppo cremoniano $\infty^3\,\Gamma$, algebrico, transitivo, semplice.

Si considerino due punti generici A e B dello spazio. Vi sarà *una*, oppure un numero finito ($\geqq 2$) di trasformazioni di Γ che fanno corrispondere B ad A, secondochè, fissando il punto A per le trasformazioni di Γ, si ottiene l'identità soltanto, oppure un gruppo finito d'ordine > 1.

Riferiamoci al 1.° caso. Tenendo fisso il punto A e facendo variare B, i punti dello spazio vengono a corrispondere biunivocamente alle trasformazioni del gruppo. Pensiamo queste trasformazioni una prima volta come *elementi (punti)* di una varietà (razionale) V_3, una seconda volta come *operazioni*, le quali agiscano per moltiplicazione (in un dato senso) sulle trasformazioni stesse concepite come elementi di V_3, e producano quindi sugli elementi (o punti) di questa varietà un certo gruppo transitivo $\overline{\Gamma}$.

Abbiamo allora in V_3 quella che si può chiamare la *rappresentazione canonica* del gruppo. Veramente si ottengono in V_3 due rappresentazioni canoniche *coniugate* (e quindi due gruppi *coniugati*) secondo il senso fissato per la moltiplicazione innanzi considerata; ma è indifferente assumere l'una o l'altra di esse. — Se poi in un modo qualunque si riferisce birazionalmente la V_3 allo spazio (S_3), si ottiene una rappresentazione canonica del gruppo Γ nello spazio; e questo ci fornisce un *tipo*, a cui il gruppo stesso può essere ricondotto con una trasformazione cremoniana.

Supponiamo invece che abbia luogo il 2.° caso, cioè che un punto generico dello spazio venga trasformato in sè stesso da un numero finito $n > 1$ di operazioni del gruppo Γ. Tenendo ancora fermo A e facendo variare B, si otterrà allora una corrispondenza (n, 1) (razionale in un solo senso) fra la varietà V_3, i cui elementi sono le trasformazioni di Γ, e lo spazio S_3. Ai punti dello spazio vengono ora a corrispondere biunivocamente non più i singoli punti di V_3, bensì i gruppi di punti di una involuzione (razionale) su questa varietà; involuzione che sarà invariante rispetto al gruppo $\overline{\Gamma}$. Ciascun gruppo (P) di questa involuzione resta fisso per un gruppo finito di operazioni contenute in $\overline{\Gamma}$ (corrispondenti alle operazioni di Γ che lasciano fermo un punto di S_3). Questo gruppo finito opera transitivamente sui punti di (P) stesso; e applicando a (P) le ∞^3 operazioni di $\overline{\Gamma}$, si genera appunto l'involuzione considerata. Sui gruppi di punti di questa involuzione [che sono i trasformati di (P)] il gruppo $\overline{\Gamma}$ opera come Γ operava a sua volta sui punti dello spazio S_3. Riferendo pertanto in un altro modo qualunque — che converrà poi scegliere opportunatamente — gli elementi (gruppi) della stessa involuzione ai punti dello spazio S_3, si otterrà anche per questo caso un *tipo*, a cui il gruppo cremoniano Γ potrà essere birazionalmente ricondotto.

Le considerazioni svolte fin qui mostrano che il problema della determinazione dei gruppi cremoniani (algebrici, transitivi, semplici) ∞^3 si può spezzare in due parti distinte:

1) in primo luogo dovremo assegnare le diverse rappresentazioni canoniche (birazionalmente distinte) di questi gruppi (cfr. § 18). Ciò equivale a determinare quei gruppi nei quali un punto generico dello spazio risulta fisso per la sola trasformazione identica;

2) in secondo luogo, sopra ciascuna delle varietà V_3 corrispondenti alle nominate rappresentazioni canoniche, dovremo costruire tutte le possibili involuzioni invarianti (§ 19). E per questo dovremo prender le mosse dall'esame dei vari sottogruppi finiti di ciascun gruppo canonico (in quanto ogni gruppo di una di quelle involuzioni si potrà generare con uno di questi sottogruppi finiti).

18. *Rappresentazioni canoniche.* Si abbia un gruppo cremoniano Γ, algebrico, semplice, ∞^3. Come abbiamo detto innanzi, pensiamo le trasformazioni di esso una prima volta come *elementi* (punti) di una varietà (algebrica) V_3, una seconda volta come *operazioni* che agiscono per moltiplicazione sulle trasformazioni stesse pensate come elementi di V_3, e producono quindi su questa varietà le ∞^3 trasformazioni di un gruppo transitivo $\overline{\Gamma}$ (sicchè in $\overline{\Gamma}$ stesso esisterà *una* trasformazione nella quale si corrispondono due punti generici di V_3).

La composizione gruppale di Γ, e quindi di $\overline{\Gamma}$, è (come per ogni gruppo semplice ∞^3) quella stessa del gruppo proiettivo binario (*). Segue da ciò che in Γ (o in $\overline{\Gamma}$) una trasformazione generica è permutabile con ∞^1 soltanto, e perciò tutti i sottogruppi ∞^1 di Γ sono algebrici e razionali; essi vengono rappresentati su V_3 dalle linee razionali C di una congruenza del 1.° ordine. In Γ esistono pure ∞^1 sottogruppi a due dimensioni, algebrici e razionali anche questi, perchè contenenti infiniti sottogruppi ∞^1 algebrici; essi danno

(*) Lie, op. cit., Bd. III, s. 714-16.

luogo su V_3 ad ∞^1 superficie razionali F, che si segano due a due secondo curve C.

Tutte le curve C e tutte le superficie F su V_3 hanno almeno un punto base comune: il punto che rappresenta la trasformazione identica di Γ. Ma può darsi che le C e le F abbiano più d'uno, diciamo n punti comuni (certo in numero finito): questi punti rappresenteranno allora le trasformazioni di un sottogruppo finito G_n, invariante entro Γ, e comune a tutti i sottogruppi ∞^1 e ∞^2 di Γ stesso. Si può anzi dir subito che G_n dovrà essere un gruppo ciclico, appunto perchè contenuto (invariantivamente) in gruppi cremoniani algebrici, continui, semplicemente infiniti.

Dopo esser dunque partiti dalla considerazione che i nostri gruppi ∞^3 (Γ) sono oloedricamente isomorfi (in senso gruppale) al gruppo proiettivo binario, vediamo ora che sotto l'aspetto algebrico essi possono tuttavia differirne per la presenza di un sottogruppo ciclico invariante di ordine $n > 1$, il quale non compare invece (com'è noto) nel gruppo proiettivo binario. Ove pertanto un tal sottogruppo sia effettivamente contenuto in Γ, è chiaro ch'esso dovrà corrispondere, nell'isomorfismo fra Γ e il gruppo binario ∞^3, alla sola trasformazione identica di quest'ultimo. Perciò i gruppi cremoniani semplici ∞^3 si distingueranno in due *specie*, secondochè contengono o no un sottogruppo ciclico invariante (di ordine > 1); vale a dire, secondochè la corrispondenza d'isomorfismo che intercede fra essi ed il gruppo proiettivo binario è una corrispondenza birazionale — e perciò [1, 1] —, oppure una corrispondenza [n, 1] razionale in un senso solo. Esaminando più da vicino questo secondo caso, vedremo fra poco che esso può presentarsi soltanto per $n = 2$; saranno dunque due soli i gruppi canonici (birazionalmente distinti) di cui andiamo ora in cerca.

Ciò premesso, proponiamoci di trovare effettivamente, per i gruppi di prima e di seconda specie così definiti, le rappresentazioni canoniche cui alludevamo alla fine del prec. § 17.

a) *Gruppi della 1.ª specie.* Riprendiamo la considerazione della varietà V_3 e del gruppo $\bar{\Gamma}$ su di essa, e facciamo operare le ∞^3 trasformazioni di questo gruppo sulle superficie F e sulle curve C, loro mutue intersezioni. Si otterranno così (da ciascuna $F\ \infty^1$, e quindi) in tutto ∞^2 superficie, che si segheranno due a due secondo curve razionali, e tre a tre in *un* punto. Questo sistema ∞^2 di superficie è dunque certo quadratico, e sarà perciò contenuto in un sistema ∞^3 lineare, anzi omaloidico; esso e quest'ultimo saranno invarianti pel gruppo $\bar{\Gamma}$.

Riferendo ora proiettivamente il detto sistema omaloidico (∞^3) di superficie al sistema dei piani dello spazio S_3, ci procureremo in S_3 un gruppo *proiettivo* trasformato di $\bar{\Gamma}$ (e di Γ). Ma di gruppi proiettivi semplici ∞^3 *transitivi* si hanno in S_3 due tipi soltanto (*): il gruppo ∞^3 di una cubica gobba, ed il gruppo delle omografie (biassiali) che lasciano ferma una quadrica e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra di essa. Fra questi due, è anche chiaro che il gruppo proiettivo dianzi ottenuto in S_3 sarà precisamente del secondo tipo, perchè in questo caso soltanto vi è una sola trasformazione del gruppo che fa corrispondere fra loro due punti generici di S_3.

Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani algebrici, semplici, ∞^3, della 1.ª specie, ammettono come rappresentazione canonica il gruppo delle omografie (biassiali) dello spazio S_3, che lasciano fissa una quadrica e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra di essa (**).

Quindi: *Il detto gruppo proiettivo è il tipo a cui può ricondursi birazionalmente ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 1ª specie, nel quale non esista alcuna trasformazione non identica che lasci fisso un punto generico.*

b) Gruppi della 2.ª specie (in cui si ha un G_n ciclico invariante). Ritorniamo alla solita rappresentazione canonica su V_3; e, come nel caso precedente, facciamo agire le operazioni di $\bar{\Gamma}$ sulle superficie F e sulle curve C, loro mutue intersezioni. Otteniamo ancora ∞^2 superficie che si segano due a due secondo curve razionali, e tre a tre in gruppi di n punti. Questi gruppi di n punti (T, $T\pi$, $T\pi^2, \ldots$ $T\pi^{n-1}$) nascono, per effetto delle operazioni T di $\bar{\Gamma}$, dal gruppo-base G_n (1, π, $\pi^2, \ldots$ π^{n-1}) delle superficie F e delle curve C, e formano un'involuzione *ciclica* I_n: la stessa involuzione che si ottiene facendo agire sui punti (T) di V_3 le operazioni del gruppo ciclico G_n concepite, non più come trasformazioni di $\bar{\Gamma}$, ma come trasformazioni del gruppo coniugato (ossia per moltiplicazione a destra invece che a sinistra) (cfr. § 17). Sugli elementi (gruppi) della I_n il gruppo $\bar{\Gamma}$ opererà come il gruppo canonico di 1.ª specie operava nel caso *a*) sui punti di V_3.

(*) Cfr. p. e. Fano, *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè.* Memorie della R. Accad. di Torino, ser. II, tom. XLVI; v. in part. § 5.

(**) Questo stesso gruppo ci darà dunque la rappresentazione canonica (su S_3) del gruppo proiettivo binario; cosa che può anche verificarsi direttamente (cfr. Fano, l. c.).

Il nostro sistema ∞^2 di superficie risulterà contenuto, come nel caso precedente, in un sistema lineare ∞^3 invariante rispetto a $\bar{\Gamma}$, di cui due superficie si segheranno ancora secondo una curva razionale, ma tre superficie avranno a comune tutto un gruppo di n punti dell'involuzione ciclica I_n.

Riferiamo ancora proiettivamente questo sistema lineare ∞^3 di superficie al sistema dei piani dello spazio S_3. La V_3 si trasformerà in uno spazio S_3 multiplo (n^{plo}), nel quale al gruppo $\bar{\Gamma}$ corrisponderà un gruppo proiettivo; e, poichè la I_n è un'involuzione *ciclica*, così (per una nota proprietà delle equazioni abeliane in cui le radici formano un unico periodo) il detto spazio multiplo sarà del tipo:

$$x \quad y \quad z \quad \sqrt[n]{f(x\,y\,z)}$$

dove f è un certo polinomio. Infine, poichè alle rette dello spazio multiplo S_3 corrispondono su V_3 curve *razionali*, segue da una nota formula di Zeuthen che il polimonio f dovrà essere di 2.° grado. In conclusione dunque la V_3 viene rappresentata sopra uno spazio n^{plo} (ciclico):

$$x \quad y \quad z \quad \sqrt[n]{f(x\,y\,z)}$$

avente la *quadrica* di diramazione:

$$f\,(x\,y\,z) = 0;$$

in modo che alle ∞^3 trasformazioni del gruppo $\bar{\Gamma}$ su V_3 corrispondono in questo spazio multiplo certe ∞^3 trasformazioni proiettive (formanti un gruppo semplice, transitivo), le quali dovranno lasciar ferma la superficie di diramazione. Ma, se $n > 2$, la superficie di diramazione totale si compone, oltrechè della quadrica $f = 0$, anche del piano all'infinito (contato $n - 2$ volte); e quindi non esiste nessun gruppo proiettivo, transitivo, ∞^3, che la lasci invariata. Si trae di qui che deve essere $n = 2$, come avevamo preannunziato.

Ora, se $n = 2$, la V_3 viene ad esser così rappresentata sullo spazio *doppio* con quadrica di diramazione:

$$x \quad y \quad z \quad \sqrt{f(x\,y\,z)};$$

il quale a sua volta nasce per proiezione (da un punto esterno A) della quadrica Q_3 di S_4, che ha per equazione:

$$u^2 = f(x\,y\,z).$$

Di più, alle trasformazioni proiettive dello spazio (doppio) $u = 0$ che lasciano invariata la quadrica $f(x\,y\,z) = 0$ corrispondono le trasformazioni proiettive di Q_3 che mutano in sè stesso lo spazio $u=0$. Noi potremo dunque assumere addirittura la stessa quadrica Q_3 come varietà canonica V_3 pei gruppi di 2.ª specie, intendendo che il gruppo $\bar{\Gamma}$ operante sopra tale varietà sia un gruppo proiettivo di S_4, che lasci fermo, insieme alla quadrica considerata, lo spazio $u=0$, e quindi anche il polo (A) di esso. Nello spazio $u=0$ si avrà un gruppo proiettivo ∞^3 (di 1.ª specie) subordinato di $\bar{\Gamma}$ e in corrispondenza [1, 2] con $\bar{\Gamma}$ stesso, il quale lascerà invariata la sezione Q_2 di Q_3; questo gruppo proiettivo (e però anche $\bar{\Gamma}$) dovrà pure lasciar ferme tutte le generatrici di uno dei due sistemi sopra Q_2 [cfr. il caso a)].

Concludiamo perciò:

I gruppi cremoniani ∞^3 della 2.ª specie ammettono come rappresentazione canonica il gruppo delle omografie di S_4 che lascia invariata una quadrica (non specializzata):

$$u^2 = f_2(x\,y\,z);$$

una sua sezione iperpiana (quindi anche il relativo polo), *e tutte le generatrici di un determinato sistema sopra tale sezione.*

Questi gruppi posseggono un sottogruppo invariante G_2 e sono in corrispondenza d'isomorfismo [2, 1] *col gruppo proiettivo binario.*

Il gruppo proiettivo (canonico) della Q_3 è notoriamente equivalente ad un gruppo conforme di S_3, al quale si può ridurre proiettando Q_3 da un suo punto sopra un S_3, e ponendo successivamente in questo spazio un'opportuna proiettività (reale o no). Da questa osservazione si trae che:

Ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 2.ª specie, nel quale non esista, all'infuori dell'identità, nessuna trasformazione che lasci fisso un punto generico, si può ricondurre birazionalmente ad un gruppo conforme, il quale muti in sè stessa una sfera e ciascuna delle sue generatrici (immaginarie) di un determinato sistema.

Osservazione. Data l'equivalenza dei gruppi cremoniani di S_3 coi gruppi proiettivi di convenienti spazi S_n $(n \geqq 3)$ che trasformano in sè stesse varietà razionali a 3 dimensioni, si può domandare di porre in relazione i risultati precedenti, e particolarmente quello relativo alla possibile esistenza, entro un gruppo semplice ∞^3, di un sottogruppo invariante G_2, con quanto è già noto relativamente ai gruppi proiettivi ∞^3. Si deve anzi avere così un nuovo modo di giungere alle stesse proposizioni gruppali già stabilite (salvo poi compiere la ricerca delle rappresentazioni canoniche dei nostri gruppi). — Or bene, nessuna difficoltà si oppone a tale procedimento. Infatti un noto teorema di Study (*) dà il modo di costruire tutti i gruppi proiettivi semplici ∞^3 di un S_n; scrivendo le equazioni di tali gruppi (**), si vede che vi compariscono quattro parametri a, b, c, d legati dalla relazione $ad - bc = 1$, la quale risulta in particolare soddisfatta quando si ponga

$$b = c = 0, \qquad a = d = \pm 1.$$

Per $a = d = +1$ si ha in ogni caso (nel gruppo ∞^3) l'identità, mentre per $a = d = -1$ si ha ancora l'identità oppure un'involuzione invariante, secondochè le dimensioni degli spazi minori che sono fissi pel gruppo (secondo il teorema di Study) hanno o non hanno tutte la stessa parità.

19. *Involuzioni invarianti per gruppi canonici.* Passiamo ora alla seconda parte del compito che ci siamo assegnato alla fine del § 17; proponiamoci cioè di costruire per i gruppi di 1.ª e 2.ª specie (di cui già abbiamo date le rappresentazioni canoniche) le diverse involuzioni invarianti, che si ottengono partendo dai loro sottogruppi finiti. Questi sottogruppi si possono considerare *a priori* come noti, perchè devono corrispondere in isomorfismo oloedrico, o tutt'al più emiedrico (nel caso di un gruppo di 2.ª specie) ai gruppi finiti di proiettività binarie, ed è noto che questi ultimi sono ciclici o diedrici, oppure appartengono ai tre tipi che prendono il nome dai poliedri regolari (tetraedro, ottaedro, icosaedro).

a) Nel caso dei gruppi di 1.ª specie l'isomorfismo di cui si tratta sarà certo oloedrico; pertanto, tenendo presenti le considerazioni svolte da principio (n.° 17), avremo:

Dato nello spazio un gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, semplice, transitivo) della 1.ª specie, le trasformazioni di esso che lasciano fermo un punto generico devono formare un gruppo finito oloedricamente isomorfo ad un gruppo binario ciclico o diedrico, o ad uno dei gruppi dei poliedri regolari.

E tutti questi casi possono effettivamente presentarsi.

Consideriamo infatti il gruppo proiettivo canonico di 1.ª specie in S_3, del quale sappiamo che lascia fissa una quadrica Q_2 e le sue generatrici di un determinato sistema T. In questo gruppo Γ esistono sottogruppi finiti oleodricamente isomorfi ad un qualunque gruppo binario finito G: basta prendere

(*) Cfr. Lie, op. cit., Bd. III, s. 785. Cfr. anche Fano, Mem. cit. (Acc. di Torino), § 2.
(**) Fano, Mem. cit., § 3.

infatti quelle trasformazioni di Γ che subordinano operazioni di un tal gruppo binario nella schiera ∞^1 di generatrici di Q_2 che è coniugata a T. Il sottogruppo (finito) di Γ così ottenuto dà luogo (in infiniti modi) ad un insieme di punti (P), il quale, per effetto delle omografie del gruppo complessivo Γ, genera un'involuzione (razionale) invariante rispetto a Γ stesso. Basta ora riferire gli elementi (gruppi) dell'involuzione ai punti dello spazio (S_3), per ottenere in questo un gruppo cremoniano (di 1.ª specie), nel quale le trasformazioni che lasciano fermo un punto generico formino un gruppo finito oloedricamente isomorfo a G.

b) Passiamo ora ai gruppi di 2.ª specie, e consideriamo perciò di nuovo il gruppo proiettivo Γ' di S_4 che lascia invariata una quadrica Q_3, uno spazio S_3 $(u=0)$ col polo A e la quadrica sezione Q_2, nonchè tutte le generatrici di un determinato sistema T sopra Q_2.

Anche qui, ogni gruppo proiettivo finito, il quale operi sulla schiera ∞^1 delle generatrici di Q_2 coniugata a T, può considerarsi come subordinato di un gruppo proiettivo finito G (ad esso oloedricamente isomorfo) dello spazio $S_3\,(u=0)$, per il quale sieno fissi la quadrica Q_2 e il sistema T su di essa. A quest'ultimo gruppo corrisponderà (in isomorfismo emiedrico) un sottogruppo finito di G' di Γ', *contenente il sottogruppo invariante* G_2 *di* Γ' *stesso, e quindi* (l'operazione non identica di questo G_2, ossia) *l'omologia armonica* I *di centro* A *e spazio* $u=0$. Se ora costruiamo su Q_3 un insieme generico di punti (P'), invariante rispetto a G', e su cui G' operi transitivamente, questo insieme risulterà costituito da un certo numero di coppie dell'involuzione (omologia armonica) I; e applicando a quest'insieme di punti tutte le trasformazioni di Γ', ne dedurremo una certa involuzione, composta mediante la I, la quale sarà invariante rispetto a Γ'. Ora, è chiaro che sugli elementi (gruppi) di questa involuzione Γ' opererà, non già come un gruppo di 2.ª specie, ma come un gruppo di 1.ª specie; infatti, poichè l'involuzione stessa è composta mediante la I, così l'*operazione* I lascerà fermi tutti i gruppi di essa, opererà cioè sul sistema di questi gruppi come la trasformazione identica, *privando* (per così dire) il gruppo ∞^3 subordinatovi da Γ' del proprio G_2 invariante.

Se si vuole dunque ottenere su Q_3 un'involuzione invariante rispetto a Γ', sulla quale Γ' stesso operi come un gruppo di 2.ª specie, bisognerà costruire l'insieme (P') *partendo da un sottogruppo finito* G' *di* Γ' *il quale non contenga la trasformazione involutoria* I. Abbiamo così una vera *limitazione* nella scelta del gruppo finito G' (entro Γ'); limitazione che ha per iscopo di eliminare fin d' ora tutti quei casi, nei quali si ricadrebbe in un gruppo di 1.ª specie.

È anche facile constatare l'effettiva esistenza di gruppi finiti G' non contenenti l'operazione I; tali sono invero tutti i sottogruppi ciclici di Γ' d'ordine dispari (i quali non contengono addirittura nessuna operazione involutoria). Ma si può anche aggiungere che è questo il solo caso possibile; e ciò si desume facilmente dal fatto che « G' deve contenere la trasformazione I ogni qualvolta contiene un'operazione (ciclica) a periodo pari ».

Quest'ultima proprietà si stabilisce subito nel modo seguente. Sia π una operazione ciclica a periodo $2n$ contenuta in G'. La π^n sarà un'involuzione; e, come tale, se non coincide colla I, dovrà subordinare un'involuzione anche nello spazio S_3 fisso ($u = 0$). Quest'ultima involuzione (di S_3) lascerà fissa tutte le rette di una congruenza lineare, avente per direttrici due generatrici u, v del sistema coniugato a T sulla quadrica Q_2; per conseguenza la π^n lascerà invariate le infinite coniche sezioni di Q_3 coi piani per A che si appoggiano alle u, v. Ora, sopra ciascuna di queste coniche la π^n subordina l'involuzione avente come punti doppi le intersezioni colle stesse u, v; questa involuzione non potrà dunque differire da quella che ha per centro di collineazione A, che viene cioè subordinata sulle stesse coniche dalla I. Sarà perciò in ogni caso $\pi^n \equiv I$; ossia la I starà nel gruppo G', come si voleva dimostrare.

Ora, se il sottogruppo finito G' di Γ' (su Q_3) non contiene la I, esso è *oloedricamente* isomorfo al gruppo G subordinato nello S_3 fisso, e quindi anche ad un certo gruppo proiettivo binario; siccome poi G' non deve contenere alcuna operazione a periodo pari, così questo gruppo binario, e quindi G' stesso, non potranno essere altro che gruppi ciclici di ordine dispari.

Pertanto, tenendo presenti le osservazioni già svolte precedentemente, avremo:

Dato nello spazio un gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, transitivo, semplice) della 2.ª specie, le trasformazioni di esso che lasciano fermo un punto generico dovranno in ogni caso formare un sottogruppo ciclico d'ordine dispari ($\geqq 1$).

20. *Classificazione dei gruppi cremoniani* ∞^3 (*algebrici*, ecc.). Ecco ora come si delinea lo schema dello studio dei nostri gruppi cremoniani ∞^3 (algebrici, semplici, transitivi):

1.° gruppi di 1.ª o 2.ª specie del *tipo ciclico*, cioè gruppi nei quali, fissando un punto generico, si ha un gruppo finito ciclico (§ 21). (Pei gruppi di 2.ª specie è solo possibile il caso del gruppo ciclico d'ordine dispari);

2.° gruppi di 1.ª specie:
α) del *tipo diedrico* (§ 23);
β) del *tipo tetraedrico* (§ 25);
γ) del *tipo ottaedrico* (§ 26);
δ) del *tipo icosaedrico* (§ 27).

Cominceremo dal 1.° caso, e esamineremo poi separatamente il gruppo del tipo diedrico, e i gruppi del tipo di ciascuno dei poliedri regolari (tutti di 1.ª specie).

21. *Caso ciclico. Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo ciclico (sia esso di 1.ª o di 2.ª specie) può ricondursi birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.*

a) Cominciamo col dimostrare la proposizione pei gruppi di 1.ª specie. Riferiamoci perciò alla loro rappresentazione canonica, data dal gruppo proiettivo Γ di S_3 che lascia ferma una quadrica Q_2 e tutte le generatrici di un sistema T sopra di essa. Bisogna ora costruire nel modo più generale un'involuzione I_n invariante rispetto a Γ, il cui gruppo generico (P) risulti generato da un sottogruppo finito ciclico di Γ stesso. E poichè Γ si può considerare come ottenuto dal gruppo cremoniano proposto mediante una trasformazione $[1, n]$ (razionale in un solo senso) la quale faccia corrispondere ai punti di S_3 i gruppi della nominata involuzione I_n, *tutto si ridurrà a far vedere che, costruita l'involuzione I_n, esiste nello spazio (S_3) della quadrica Q_2 una congruenza del 1.° ordine di curve razionali, invariante rispetto al gruppo Γ, con varietà unisecante, e appartenente a quell'involuzione* (tale cioè, che la curva della congruenza passante per un punto generico contenga sempre anche gli $n-1$ punti coniugati di questo).

Ora, noi possiamo procurarci subito, e in modo assai semplice, una congruenza lineare di *rette* soddisfacente alle condizioni richieste (ossia invariante, e appartenente all'involuzione I_n: l'esistenza di superficie unisecanti è in questo caso evidente).

Infatti ogni gruppo di punti (P) generato da un sottogruppo ciclico di Γ appartiene ad una retta a, la quale si appoggia a due generatrici (distinte) u, v del sistema T; e questa retta a [che contiene già ∞^1 gruppi di punti trasformati di (P)] descrive, per effetto delle varie omografie di Γ, l'intera congruenza lineare di direttrici u e v.

Questa congruenza lineare sarà dunque invariante rispetto a Γ; inoltre ogni retta di essa conterrà (come la a) infiniti gruppi di punti trasformati di (P), cioè infiniti gruppi dell'involuzione I_n, sicchè appunto quella congruenza apparterrà a questa involuzione.

b) Passiamo al caso dei gruppi di 2.ª specie, e riprendiamo perciò il gruppo proiettivo Γ' di S_4, che lascia invariata una quadrica Q_3, la sua sezione Q_2 con uno spazio S_3, e le generatrici di *un* sistema T sopra Q_2. Ricordiamo pure che questo gruppo Γ' risulta isomorfo (in corrispondenza [2, 1]) col gruppo Γ (canonico di 1.ª specie) che ne viene subordinato nello S_3 fisso.

Consideriamo su Q_3 una involuzione I'_n invariante rispetto a Γ', generata partendo da un gruppo ciclico, d'ordine dispari, (P'): proiettando sullo S_3 fisso dal polo A di questo spazio, avremo anche in S_3 una involuzione I_n invariante rispetto a Γ [generata dal gruppo (P) proiezione di (P')]. Ora noi abbiamo veduto come si possa costruire in S_3 una congruenza lineare di rette, di direttrici u, v, invariante rispetto a Γ, e appartenente alla I_n. Una tale congruenza verrà proiettata da A su Q_3 secondo una congruenza di coniche, pure del 1.° ordine, appartenente alla I'_n e invariante rispetto a Γ': la congruenza delle coniche sezioni di Q_3 coi piani per A che si appoggiano alle rette (unisecanti) u e v.

L'esistenza di una siffatta congruenza relativa all'involuzione I'_n su Q_3 permette di ritenere stabilito anche pei gruppi di 2.ª specie lo stesso teorema enunciato al principio di questo §, in forza delle medesime (ovvie) osservazioni che abbiamo fatte pei gruppi di 1.ª specie.

22. *Discussione dei casi ulteriori.* La discussione del caso diedrico e dei casi dei poliedri regolari (relativi soltanto, come sappiamo, a gruppi di 1.ª specie) si esaurirà più speditamente ricorrendo a più convenienti rappresentazioni canoniche, che equivalgono d'altronde (e devono equivalere) a quella data innanzi (§ 18).

Abbiamo veduto che i gruppi di 1.ª specie sono birazionalmente isomorfi al gruppo proiettivo binario. E quest'ultimo si può a sua volta rappresentare sul gruppo Γ delle omografie che trasformano in sè una curva razionale normale di un ordine qualunque n, appartenente ad uno spazio S_n.

Supponiamo ora che si abbia in S_3 un gruppo cremoniano ∞^3, tale che le operazioni di esso che lasciano fermo un punto generico M formino un certo gruppo finito G.

A G corrisponderà in Γ un gruppo oloedricamente isomorfo G', le cui omografie lasceranno invariata la curva C_n, nonchè determinati gruppi di punti sopra questa. Per una conveniente scelta dell'ordine n, potremo dunque supporre che rimanga fisso sulla curva precisamente un gruppo di n punti, ossia il gruppo (P) sezione di essa con un certo iperpiano α. Indichiamo con A il polo di α rispetto alla C_n; anche A sarà fisso per le operazioni di G'. Ora le ∞^3 omografie di Γ porteranno (P) in certi ∞^3 gruppi di punti su C_n, ed A nei punti di una varietà (razionale) V_3. Noi potremo riferire questa varietà allo spazio S_3 da cui siamo partiti, assumendo anzitutto come omologhi il punto A (che è fisso per G') e il punto M (fisso per G); e facendo poi corrispondere fra loro due altri punti qualunque A' (di V_3) e M' (di S_3) quando A e M si possono portare rispett. in essi con operazioni che a lor volta si corrispondono nell'isomorfismo fra Γ e il gruppo cremoniano proposto. Questa corrispondenza fra lo spazio S_3 e la varietà V_3 trasforma evidentemente il gruppo cremoniano proposto nel gruppo proiettivo subordinato da Γ su V_3; epperò questo secondo gruppo sarà equivalente al primo ogni qualvolta la corrispondenza veduta fra V_3 e S_3 sia birazionale (ossia univoca in ambo i sensi). Quando questa condizione sia soddisfatta, è chiaro che una qualunque (ulteriore) rappresentazione spaziale di V_3 ci darà in S_3 un *tipo* a cui potrà ricondursi il gruppo ∞^3 proposto.

Ora, una volta scelto il punto A invariante rispetto a G' (e sceltolo pure ad arbitrio, se ve n'è più d'uno invariante per questo stesso gruppo), è chiaro che ad ogni punto M' di S_3 corrisponderà su V_3 un solo punto A'; ma perchè anche, inversamente, ad ogni punto A' corrisponda un solo M' (in particolare dunque ad A il solo punto M), è necessario (e sufficiente) che A — e con esso il gruppo (P) su C_n — non risultino fissi per nessuna trasformazione di Γ che sia fuori di G'. Questa condizione è però soddisfatta per ogni insieme (P) di $n\,(>2)$ punti di C_n invariante rispetto a un gruppo G' diedrico o del tipo di uno dei poliedri regolari (fatta solo eccezione per $n=6$ nel caso tetraedrico); non importerà dunque tenerne conto (nel caso tetraedrico faremo $n=4$). Essa non potrebbe però rendersi soddisfatta nel caso ciclico, donde appunto la necessità di trattare questo caso a parte (come abbiamo fatto).

Pertanto, dato il gruppo finito G e supposto che il suo corrispondente nel campo binario lasci fermo un insieme di n elementi, converrà scegliere una curva razionale normale avente precisamente l'ordine n, e su questa tra gli ∞^n gruppi di n punti (sezioni iperpiane) prenderne uno (P) che sia invariante (soltanto) rispetto a G (omologo di G in Γ). Considerando poi il polo A di questa sezione iperpiana, applicheremo ad A stesso tutte le ∞^3 omografie che lasciano fissa la C_n, ottenendo così una varietà (razionale) V_3, che cercheremo di rappresentare sopra S_3 nel modo più opportuno. Il gruppo che così verrà a corrispondere a Γ sarà il *tipo* cercato (a cui potrà ricondursi il gruppo proposto).

23. *Caso diedrico. Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo diedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.*

Per dimostrare questo teorema, cominciamo col costruire, nel modo indicato innanzi, un gruppo proiettivo equivalente al gruppo cremoniano proposto. E dimostriamo precisamente che, se un punto generico di S_3 risulta fisso per un gruppo diedrico G_{2n} d'ordine $2n (> 4)$, possiamo ridurci al gruppo proiettivo che le ∞^3 omografie di S_n trasformanti in sè stessa una data C_n (razionale, normale) subordinano sulla varietà V_3 delle corde di questa curva. Infatti, sopra la C_n ogni G_{2n} diedrico lascia fissi due gruppi di n punti, che sempre appartengono ad una (stessa) involuzione g_n^1 (ciclica) dotata di due punti n^{pli}. L'iperpiano determinato da uno qualunque di quei gruppi di n punti (su C_n) appartiene dunque al fascio di due iperpiani osculatori; e il polo di esso sarà perciò un punto di una corda della C_n.

Con ciò il teorema enunciato può ritenersi dimostrato, perchè la V_3 delle corde di C_n può appunto rappresentarsi sopra S_3 in modo che alle corde stesse corrispondano le rette di una stella (che sarà invariante rispetto al gruppo ∞^3).

In particolare per $n = 3$, si trova anche come tipo il gruppo proiettivo ∞^3 di una cubica gobba.

La dimostrazione precedente cade in difetto per $n = 2$, ma anche in questo caso si può costruire una congruenza del 1.° ordine invariante e con superficie unisecante. Basta procedere nel modo che brevemente accenniamo.

Poichè un G_4 diedrico in una forma di 1.ª specie è costituito dalle quattro proiettività che mutano in sè stessa una quaderna di elementi (non armonica, nè equiarmonica, e senza elementi multipli), così siamo condotti, in questo caso, a rappresentare il gruppo proposto (di S_3) sul gruppo proiettivo Γ di una C_4 razionale normale in S_4, facendo corrispondere birazionalmente ai punti dello spazio S_3 i punti di una varietà V_3 (del 6.° ordine) generata per effetto delle operazioni del gruppo Γ da un punto generico di S_4.

Ora affermiamo che vi sono sulla V_3 *tre* congruenze di coniche, ciascuna delle quali è del primo ordine, e invariante rispetto a Γ.

Consideriamo sulla V_3 un punto generico P; il suo iperpiano polare segherà la C_4 in quattro punti $A\,B\,C\,D$. Separiamo i quattro punti in due coppie, p. e. nelle coppie $A\,B$, $C\,D$, e costruiamo su C_4 la coppia $M\,N$ che le separa armonicamente entrambe. È facile verificare che il punto P apparterrà al piano proiettante $M\,N$ dal punto O intersezione dei due piani osculatori alla C_4 rispett. in M e in N. Questo piano $M\,N\,O$ resta fermo per ∞^1 omografie di Γ, le quali subordinano su di esso un gruppo del pari ∞^1 avente come traiettorie delle coniche (mutuamente tangenti nei due punti M e N); vi sarà quindi nel piano stesso una conica (traiettoria del gruppo) passante per P e giacente sulla V_3. Siccome la quaderna $A\,B\,C\,D$ può essere divisa in coppie in tre modi diversi, così si ottengono per P *tre* coniche giacenti su V_3; e per separarle occorre l'introduzione di una irrazionalità cubica. Ma una volta separate le tre coniche passanti per un (particolare) punto P di V_3, si possono separare *razionalmente* le tre coniche passanti per ogni altro punto, giacchè ognuna di queste proviene da *una* di quelle che contengono P, per effetto di ∞^1 omografie di Γ. Si avranno dunque sulla V_3 tre congruenze del 1.° ordine di coniche, invarianti rispetto a Γ.

Resta da costruire per ciascuna di esse una superficie unisecante.

A tal fine, fissata l'attenzione sopra una (χ) delle nominate congruenze, si consideri il sottogruppo ∞^2 Γ_1 di Γ ottenuto fissando un certo punto H di C_4. Una conica generica γ di χ è mutata in sè stessa da una sola operazione (non identica) di Γ_1, cioè dall'involuzione che scambia i punti comuni a γ e alla C_4 ed ha H come punto doppio; tale involuzione lascia fermi *due* punti R, S, su γ. Ora, per effetto delle ∞^2 operazioni di Γ_1, ciascuno dei due punti R, S, descrive una diversa superficie irriducibile giacente su V_3, la quale incontra in *un* punto (di contatto) le coniche di χ. Ognuna delle due superficie così ottenute ci fornisce la varietà unisecante della congruenza, di cui andavamo in cerca.

24. *Irriducibilità dei casi ulteriori.* Da quanto precede risulta che ogni gruppo cremoniano ∞^3 (algebrico, transitivo, semplice) nel quale le operazioni che lasciano fermo un punto formano un gruppo ciclico o diedrico (incluso il caso della sola identità) si può ridurre birazionalmente ad un gruppo che lascia invariata una stella di rette.

Una tale riduzione non è più possibile nei casi ulteriori; si dimostra infatti che *un gruppo cremoniano ∞^3 (Γ) corrispondente ad uno dei tre gruppi dei poliedri regolari non lascia invariata alcuna congruenza (algebrica, di curve razionali) del 1.° ordine.*

Infatti, supposto che sia invariante una congruenza siffatta, le trasformazioni del gruppo Γ che lasciano fermo un punto generico P dovranno anche lasciar ferma *la* curva di quella congruenza che passa per questo punto. Queste stesse trasformazioni saranno dunque contenute nel gruppo (algebrico) ∞^1, continuo o misto, formato da tutte le trasformazioni di Γ che lasciano ferma la curva considerata (per P). Il gruppo delle trasformazioni di Γ che lasciano fermo P risulta quindi contenuto (come sottogruppo finito) in un gruppo ∞^1, e perciò deve essere ciclico o diedrico, contro l'ipotesi.

Osservazione. Il ragionamento precedente non esclude che per un gruppo ∞^3 di uno dei tipi dei poliedri regolari si abbia una congruenza invariante d'ordine $h > 1$; ma esso prova altresì che in tal caso il gruppo G_n (d'ordine $n = 12, 24, 60$) ottenuto col fissare un punto generico di S_3 deve contenere un sottogruppo ciclico o diedrico d'ordine $\frac{n}{h}$. Si trae di qui che l'ordine di una qualsiasi congruenza invariante per il gruppo considerato è ≥ 3 nei primi due casi (tetraedrico e ottaedrico), e ≥ 6 nel caso icosaedrico. Questi valori minimi (3, 3, 6) sono effettivamente raggiunti.

Accertato così che i gruppi ∞^3 corrispondenti ai casi dei poliedri regolari non si possono ridurre (come gli altri gruppi ∞^3) ad avere una stella invariante di rette, converrà cercare anzitutto se è possibile ricondurli a qualcuno degli altri tipi di gruppi che ci si sono già presentati (gruppi con un fascio invariante di piani, gruppi proiettivi e conformi).

Possiamo però vedere subito che *i gruppi ∞^3 corrispondenti ai tre casi dei poliedri regolari non posseggono alcun fascio invariante di superficie* (algebriche), e però non possono certo ridursi ad avere un fascio invariante di piani.

Infatti, nell'ipotesi contraria, ogni superficie del fascio invariante sarebbe fissa per un sottogruppo ∞^2 Γ_1 del gruppo proposto (Γ). In Γ_1 sarebbe a sua volta contenuto *un* sottogruppo invariante ∞^1, il quale determinerebbe sulla superficie un fascio di traiettorie razionali. Ora questo fascio, per effetto delle ∞^3 operazioni del gruppo totale Γ, descriverebbe (come si vede facilmente) una congruenza del 1.° ordine, invariante rispetto a Γ; e noi abbiamo già riconosciuto che una tale congruenza non può esistere.

Dunque *i nostri gruppi ∞^3 residui non sono riducibili (birazionalmente) a gruppi di Jonquières generalizzati.* Potranno essi ridursi a gruppi proiettivi o conformi (dello spazio S_3)? È facile rispondere alla domanda, perchè i gruppi ∞^3 (semplici) proiettivi e conformi dello spazio S_3 (questi ultimi equivalenti a gruppi proiettivi di una quadrica non specializzata in S_4) sono completamente noti (*). Dalla enumerazione di essi risulta subito che

(*) Fano, Mem. cit. (Acc. di Torino), §§ 5, 6.

nessun gruppo proiettivo semplice di S_3 corrisponde (nel senso fissato) ad uno dei tre casi dei poliedri regolari. Si trova invece un gruppo conforme (e precisamente un gruppo che lascia invariata una quartica di 2.ª specie) come corrispondente al caso tetraedrico; questo gruppo costituisce anzi, come vedremo fra poco, il tipo più generale relativo al detto caso. Ma neppure tra i gruppi conformi non si ha alcun gruppo semplice ∞^3 corrispondente ad uno dei casi dell'ottaedro o dell'icosaedro. Concludiamo perciò che *i gruppi cremoniani* (algebrici, semplici, transitivi) ∞^3 *del tipo ottaedrico ed icosaedrico si staccano in modo essenziale da tutti gli altri gruppi cremoniani primitivi ed imprimitivi*, in quanto essi (soltanto) sono irriducibili a gruppi di Jonquières generalizzati, oppure a gruppi proiettivi o conformi.

25. *Caso tetraedrico. Ogni gruppo cremoniano* ∞^3 *del tipo tetraedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo conforme che lascia invariata una quartica di 2.ª specie.*

Per ottenere questa riduzione, costruiamo nel modo già indicato (§ 22) un gruppo proiettivo equivalente al gruppo proposto.

Poichè si hanno in una forma di 1.ª specie delle *quaderne* di punti (*equianarmoniche*) invarianti rispetto ad un gruppo proiettivo tetraedrico G_{12} (e non per altre trasformazioni proiettive), possiamo riferirci ad una curva C_4 razionale normale in S_4. Su questa curva le ∞^3 quaderne equianarmoniche determinano iperpiani (S_3), i cui poli hanno per luogo la quadrica fondamentale della polarità rispetto alla C_4 stessa. Questo fatto si può considerare come noto; e si può anche verificare facilmente in modo diretto, ricordando che la condizione perchè una forma binaria biquadratica risulti equianarmonica è data dall'annullarsi del suo invariante quadratico.

Del resto l'ordine della varietà luogo dei poli delle quaderne equianarmoniche su C_4 può essere valutato *a priori* col procedimento seguente, che ci servirà anche negli altri casi.

Anzitutto l'ordine (x) di questa varietà di punti equivale alla classe dell'inviluppo degli iperpiani polari. Ora, se applichiamo ad un S_{n-1} qualunque di S_n le ∞^3 trasformazioni proiettive che lasciano fissa una data C_n, abbiamo un inviluppo di iperpiani (S_{n-1}) la cui classe è data in generale dal numero degli elementi (S_{n-1}) che passano per 3 punti qualunque di S_n, in particolare per 3 punti di C_n. E questo numero vale

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)}{s},$$

designando con s il numero delle trasformazioni del gruppo che lasciano fermo lo spazio S_{n-1} considerato da principio. Nel nostro caso si ottiene dunque (essendo $n=4$, $s=12$):

$$x = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{12} = 2. \qquad \text{c. d. d.}$$

Il gruppo cremoniano proposto, equivalendo ad un gruppo proiettivo di una quadrica di S_4 (contenente una C_4 fissa), sarà anche equivalente ad un gruppo conforme di S_3, come afferma l'enunciato.

26. *Caso ottaedrico.* Poichè ogni gruppo ottaedrico (G_{24}) in una forma di 1.ª specie trasforma in sè *un* insieme di *sei* elementi ripartibili in tre coppie mutuamente armoniche, così potremo ora riferirci ad una C_6 razionale normale di S_6, e considerare su questa le ∞^3 sezioni iperpiane costituite da terne di coppie due a due armoniche: il gruppo cremoniano proposto sarà equivalente al gruppo che le ∞^3 proiettività di S_6 che lasciano fissa la C_6 subordinano sulla varietà V_3 luogo dei poli di quegli ∞^3 iperpiani (S_5).

Poichè il gruppo ottaedrico contiene 24 operazioni, l'ordine della varietà V_3, valutato col procedimento del § prec., sarà:

$$x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 5.$$

La teoria delle forme binarie ci dà il modo di scrivere le equazioni della detta V_3 e di assegnarne quindi la rappresentazione in S_3, costruendo così un tipo del nostro gruppo cremoniano (*).

(*) Così dovremo poi fare nel caso icosaedrico. Qui, valendosi delle condizioni perchè una forma binaria sestica sia ottaedrica — sia cioè covariante sestico T di una e quindi di ∞^1 forme biquadratiche — (Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, pagine 440, 447), si troverebbe che la nostra V_3^5 è intersezione di cinque quadriche:

$$x_0 x_4 - 4 x_1 x_3 + 3 x_2^2 = 0 \qquad x_2 x_6 - 4 x_1 x_5 + 3 x_2^2 = 0$$
$$x_0 x_5 - 3 x_1 x_4 + 2 x_2 x_3 = 0 \qquad x_1 x_6 - 3 x_2 x_5 + 2 x_3 x_4 = 0$$
$$x_0 x_6 - 9 x_2 x_4 + 8 x_3^2 = 0,$$

e può rappresentarsi su S_3 (per proiezione da un piano osculatore alla C^6) col sistema lineare ∞^6 di superficie cubiche:

$$k_0 x_0^3 + x_0^2 (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)$$
$$+ k_4 x_0 (4 x_1 x_3 - 3 x_2^2)$$
$$+ k_5 (12 x_1^2 x_3 - 9 x_1 x_2^2 - 2 x_0 x_2 x_3) + k_6 (36 x_1 x_2 x_3 - 27 x_2^3 - 8 x_0 x_3^2) = 0.$$

Ma poichè la V_3 è del 5.° ordine e su di essa non può esistere alcun fascio (invariante) di piani (§ 24), essa avrà le curve sezioni (cogli S_4) ellittiche, e rientrerà quindi in una categoria di varietà già studiata (*). Così potremo concludere *a priori* che la V_3 dovrà venire proiettata univocamente sopra uno spazio S_3 da una sua conica (certo esistente) (**), e che in questa rappresentazione le immagini delle superficie sezioni iperpiane della V_3 saranno superficie cubiche. Ora, vi sono in S_3 più tipi di sistemi lineari ∞^6 di superficie cubiche, ad intersezioni ellittiche, capaci di rappresentare una V_3 del 5.° ordine di S_6; ma fra questi tipi ve n'è uno solo cui corrisponde una V_3 non contenente una congruenza del 1.° ordine di rette. Siccome la nostra V_3 non può contenere una siffatta congruenza, che certo risulterebbe invariante pel gruppo proiettivo ∞^3 — (§ 24) —, così concludiamo che la rappresentazione della V_3 deve precisamente condurre a quel tal caso, cioè al caso di un sistema lineare di superficie cubiche definito da una quartica base di 2.ª specie.

Si trae di qui, che: *Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo ottaedrico può ricondursi birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni cubiche caratterizzato dal trasformare in sè stesso il sistema lineare delle superficie di 3.° ordine passanti per una quartica di 2.ª specie.*

Osservazione. Sopra la nostra V_3 di S_6 esiste una congruenza di rette del *3.° ordine* invariante rispetto al gruppo proiettivo considerato; essa viene rappresentata in S_3 dalla congruenza delle corde della quartica fondamentale, che è a sua volta invariante pel gruppo cubico di S_3.

Le rette di quella congruenza del 3.° ordine su V_3 contengono rispett. i poli dei gruppi delle ∞^2 involuzioni I_6^1 di forme ottaedriche, del tipo $x_1 x_2 (k_1 x_1^4 + k_2 x_2^4)$, sulla curva C^6. La congruenza è del 3.° ordine, corrispondentemente al fatto analitico che ogni forma ottaedrica può ridursi al tipo $x_1 x_2 (k_1 x_1^4 + k_2 x_2^4)$ — o anche $x_1 x_2 (x_1^4 + x_2^4)$ — in tre modi diversi (scegliendo cioè una qualunque delle tre coppie armoniche che ne sono parte come coppia di riferimento $x_1 = 0$, $x_2 = 0$).

(*) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* Rend. Accad. dei Lincei, 1894 (pag. 481 e 536). Cfr. anche Mathem. Annalen, Bd. 46.

(**) Quando la V_3 si proietti da un piano osculatore alla C^6 [cfr. la nota (*), a pagina precedente], questa conica si riduce a una retta (tangente alla C^6) contata due volte.

27. *Caso icosaedrico.* Poichè ogni gruppo icosaedrico (G_{60}) in una forma di 1.ª specie è definito dal trasformare in sè stesso un certo gruppo di 12 elementi di questa forma, potremo riferirci in questo caso alla curva C_{12} razionale normale di S_{12}. Dovremo considerare le ∞^3 sezioni iperpiane di essa che costituiscono gruppi *icosaedrici* (cioè invarianti per gruppi proiettivi icosaedrici sulla C_{12}), e la varietà V_3 luogo dei poli di questi iperpiani.

Il gruppo cremoniano proposto dovrà operare nello spazio come il gruppo proiettivo della C_{12} opera sopra questa V_3.

· L'*ordine della* V_3, valutato secondo la formola del § 25, è:

$$x = \frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10}{60} = 22.$$

Della V^3_{22} possiamo scrivere le equazioni, mediante la teoria delle forme binarie. Valendoci di queste equazioni dimostreremo che:

La V_3 *viene proiettata univocamente* (sopra uno spazio S_3) *da ogni* S_8 *osculatore alla* C_{12}. *Le immagini delle sue sezioni iperpiane risultano superficie del 7.º ordine componenti un sistema lineare* ∞^{12}.

Ne dedurremo quindi che il gruppo cremoniano proposto si può ridurre birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni del 7.º ordine, che lascia invariato il detto sistema lineare.

Rappresentata la nostra C_{12} colle equazioni parametriche ($i = 0, 1, 2, \ldots, 12$)

$$x_i = \lambda^{12-i} \mu^i,$$

è noto che ogni punto (x) dello spazio S_{12} ha come iperpiano polare rispetto a questa curva l'iperpiano di coordinate

$$\xi_i = (-1)^i \binom{12}{i} x_{12-i},$$

il quale sega la C_{12} nei 12 punti rappresentati dall'equazione

$$\sum_i (-1)^i \binom{12}{i} x_i \,.\, \lambda^i \mu^{12-i} = 0\,.$$

I punti della nostra V^3_{22} sono i poli degli iperpiani le cui sezioni con C_{12} costituiscono gruppi icosaedrici. Ora le condizioni perchè sia icosaedrico il gruppo di 12 punti (di C_{12}) rappresentato dall'ultima equazione, ovvero (cambiando λ in $-\lambda$) dalla:

$$f(\lambda, \mu) \equiv \sum \binom{12}{i} x_i \lambda^i \mu^{12-i} = 0. \tag{1}$$

sono espresse simbolicamente da

$$(f f)^4 \equiv 0,$$

e portano alle 17 equazioni (*)

$$\left.\begin{array}{c}\sum_\lambda \binom{8}{\lambda}\binom{8}{\rho-\lambda}\left\{x_\lambda\, x_{\rho+4-\lambda} - 4\, x_{\lambda+1}\, x_{\rho+3-\lambda} + 3\, x_{\lambda+2}\, x_{\rho+2-\lambda}\right\} = 0 \\ (\rho = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ 16),\end{array}\right\} \tag{2}$$

dove la somma va estesa a quei valori di λ (zero incluso) che sono $\leqq \rho$ e $\leqq 8$, e tali ancora che $\rho - \lambda \leqq 8$.

Si può dunque affermare che *le 17 equazioni* (2) *rappresentano la* V_3^{22}, la quale (in particolare) riesce intersezione parziale delle 9 quadriche (le cui equazioni sono ottenute dalla (2) per $\rho = 0,\ 1, \dots,\ 8$):

$$\left.\begin{aligned}
&x_0 x_4 - 4\, x_1 x_3 + 3\, x_2^2 = 0\\
&x_0 x_5 - 3\, x_1 x_4 + 2\, x_2 x_3 = 0\\
&7\, x_0 x_6 - 12\, x_1 x_5 - 15\, x_2 x_4 + 20\, x_3^2 = 0\\
&x_0 x_7 - 6\, x_2 x_5 + 5\, x_3 x_4 = 0\\
&5\, x_0 x_8 + 12\, x_1 x_7 - 42\, x_2 x_6 - 20\, x_3 x_5 + 45\, x_4^2 = 0\\
&x_0 x_9 + 6\, x_1 x_8 - 6\, x_2 x_7 - 28\, x_3 x_6 + 27\, x_4 x_5 = 0\\
&x_0 x_{10} + 12\, x_1 x_9 + 12\, x_2 x_8 - 76\, x_3 x_7 - 21\, x_4 x_6 + 72\, x_5^2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$x_0 x_{11} + 24 x_1 x_{10} + 90\, x_2 x_9 - 130\, x_3 x_8 - 405\, x_4 x_7 + 420\, x_5 x_6 = 0$$

$$x_0 x_{12} + 60\, x_1 x_{11} + 534\, x_2 x_{10} + 380\, x_3 x_9 - 3195 x_4 x_8 - 720\, x_5 x_7 + 2940 x_6^2 = 0.$$

Si consideri ora lo spazio $(S_8)\ \sum$ di equazioni: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, osculatore alla C_{12} nel punto $x_0 = \cdots = x_{11} = 0$. Vedremo facilmente che l'intersezione delle 9 quadriche (3) (esclusa la parte che sta nell'iperpiano $x_0 = 0$) viene proiettata univocamente da $\sum$; ne seguirà che tale intersezione (residua) è irriducibile e quindi, contenendo la V_3^{22}, coincide con questa. La stessa V_3^{22} risulterà perciò proiettata univocamente (da $\sum$, e quindi) da ogni S_8 osculatore a C_{12}.

Un S_9 generico passante per $\sum$ si rappresenta con equazioni del tipo

$$\frac{x_0}{a_0} = \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3},$$

dove le a sono certe costanti. Ora, queste equazioni, congiunte alle (3), danno un sistema che è soddisfatto da un solo gruppo di valori dei mutui rapporti delle x_i ($x_0 \neq 0$), poichè dalle stesse (3) seguono (per $x_0 \neq 0$) le $x_4,\ x_5, \dots,\ x_{12}$

(*) Gordan-Kerschensteiner, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Bd. II, s. 212.

espresse razionalmente mediante x_0, x_1, x_2, x_3. La varietà intersezione delle nove quadriche (3) è dunque incontrata da un S_9 generico passante per Σ in *un* (solo) punto esterno allo spazio $x_0 = 0$. Escludendo pertanto da questa varietà la parte di essa (certo esistente) che è contenuta in $x_0 = 0$, dovrà restare una varietà a tre dimensioni proiettata univocamente da Σ, ad es. sullo S_3 fondamentale opposto ($x_4 = \cdots = x_{12} = 0$). Questa parte sarà appunto, come già abbiamo notato, la nostra V_3^{22}.

La corrispondenza biunivoca che così risulta stabilita fra la varietà V_3^{22} e lo spazio S_3 ($x_4 = \cdots = x_{12} = 0$) sul quale l'abbiamo proiettata (da Σ) sarà rappresentata dalle stesse equazioni che, in forza delle (3), esprimono le $x_4, \ldots, x_{12}$ mediante x_0, x_1, x_2, x_3; vale a dire ogni punto di questo S_3 sarà proiezione di quel punto di V_{22}^3 (completamente individuato, finchè $x_0 \neq 0$) che ha le stesse x_0, x_1, x_2, x_3, e per cui le $x_4, \ldots, x_{12}$ sono così definite:

$$x_4 = \frac{1}{x_0} \left\{ 4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2 \right\}$$

$$x_5 = \frac{1}{x_0^2} \left\{ 3\, x_1 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - 2\, x_0 x_2 x_3 \right\}$$

$$x_6 = \frac{1}{7\, x_0^3} \left\{ 36\, x_1^2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) + 9\, x_0 x_2 (4\, x_1 x_3 - 5\, x_2^2) - 20\, x_0^2 x_3^2 \right\}$$

$$x_7 = \frac{1}{x_0^3} \left\{ 18\, x_1 x_2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - x_0 x_3 (20\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) \right\}$$

$$x_8 = \frac{1}{x_0^3} \left\{ - 3\, (4\, x_1 x_3 - 15\, x_2^2)(4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - 32\, x_0 x_2 x_3^2 \right\}$$

$$x_9 = \frac{1}{x_0^4} \left\{ - 27\, x_1 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2 + 108\, x_0 x_2 x_3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - 80\, x_0^2 x_3^3 \right\}$$

$$\begin{aligned} x_{10} = \frac{1}{x_0^5} \Big\{ & - 216\, x_1^2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2 + 225\, x_0 x_2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2 \\ & + 288\, x_0 x_1 x_2 x_3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - 8\, x_0^2 x_3^2 (100\, x_1 x_3 - 63\, x_2^2) \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} = \frac{1}{x_0^6} \Big\{ & - 1296\, x_1^3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2 + 1620\, x_0 x_1 x_2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2 \\ & + 1728\, x_0 x_1^2 x_2 x_3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) + 285\, x_2^0 x_3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2 \\ & - 2400\, x_0^2 x_1 x_3^2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - 576\, x_0^2 x_1 x_2^2 x_3^2 + 640\, x_0^3 x_2 x_3^3 \Big\} \end{aligned}$$

$$x_{12} = \frac{1}{x_0^6} \Big\{ -7776\, x_1^2 x_2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2$$

$$- 3375\, x_0 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^3 + 15120\, x_0 x_1 x_3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)^2$$

$$+ 10368\, x_0 x_1 x_2^2 x_3 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2)$$

$$- 16128\, x_0^2 x_2 x_3^2 (4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2) - 4608\, x_0^2 x_1 x_2 x_3^3$$

$$+ 6400\, x_0^3 x_3^4 \Big\}.$$

Ciò posto, è pur chiaro che il sistema lineare rappresentativo della V_3^{22} si otterrà ponendo nell'equazione lineare generale:

$$\sum k_i x_i = 0,$$

in luogo di $x_4, \ldots, x_{12}$ le loro espressioni mediante x_0, x_1, x_2, x_3. Moltiplicando ancora tutti i termini dell'equazione per la potenza massima x_0^6 che compare a denominatore, e ponendo per brevità:

$$f = 4\, x_1 x_3 - 3\, x_2^2,$$

avremo:

$$k_0 x_0^7 + x_0^6 \Big\{ k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \Big\}$$

$$+ k_4 x_0^5 f + k_5 x_0^4 \Big\{ 3\, x_1 f - 2\, x_0 x_2 x_3 \Big\}$$

$$+ x_0^3 \Big\{ k_6 \Big[36\, x_1^2 f + 9\, x_0 x_2 (f - 2\, x_2^2) - 20\, x_0^2 x_3^2 \Big]$$

$$+ k_7 \Big[18\, x_1 x_2 f - x_0 x_3 (5\, f + 12\, x_2^2) \Big]$$

$$+ k_8 \Big[3\, f (12\, x_2^2 - f) - 32\, x_0 x_2 x_3^2 \Big] \Big\}$$

$$+ k_9 x_0^2 \Big\{ -27\, x_1 f^2 + 108\, x_0 x_2 x_3 f - 80\, x_0^2 x_3^3 \Big\}$$

$$+ k_{10} x_0 \Big\{ -216\, x_1^2 f^2 + 9\, x_0 x_2 f (25\, f + 32\, x_1 x_3) - 8\, x_0^2 x_3^2 (25\, f + 12\, x_2^2) \Big\}$$

$$+ k_{11} \Big\{ -1296\, x_1^3 f^2 + 108\, x_0 x_1 x_2 f (15\, f + 16\, x_1 x_3)$$

$$- 9\, x_0^2 x_3 (35\, f^2 + 200\, x_2^2 f + 64\, x_1 x_2^2 x_3) + 640\, x_0^3 x_2 x_3^3 \Big\}$$

$$+ k_{12} \Big\{ -7776\, x_1^2 x_2 f^2 + 27\, x_0 f (-125\, f^2 + 560\, x_1 x_3 f + 384\, x_1 x_2^2 x_3)$$

$$- 2304\, x_0^2 x_2 x_3^2 (7\, f + 2\, x_1 x_3) + 6400\, x_0^3 x_3^4 \Big\} = 0.$$

Alle sezioni iperpiane della varietà V_3^{22} corrispondono dunque superficie del 7.° ordine aventi a comune una conica doppia $x_0 = f = 0$ e una retta (semplice) $x_0 = x_1 = 0$ tangente a questa conica; lungo questa retta tutte le superficie del sistema sono toccate dallo stesso piano $x_0 = 0$. L'intersezione loro con questo piano, all'infuori di quella conica e di questa retta (ciascuna contata due volte), comprende una retta variabile del fascio $x_0 = x_1 + \lambda x_2 = 0$.

Il punto fondamentale $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ è triplo per tutte queste superficie, e il relativo cono tangente si riduce al piano $x_0 = 0$ contato tre volte.

Concludiamo dunque: *Ogni gruppo cremoniano ∞^3 del tipo icosaedrico si può ricondurre birazionalmente ad un gruppo di trasformazioni del 7.° ordine che lasciano invariato un sistema lineare ∞^{12} di superficie d'ordine 7, le quali si toccano convenientemente nei punti di una curva base costituita da una conica doppia e da una retta semplice* (tangente alla conica in un punto che è triplo per quelle superficie).

Il gruppo tipico contiene entro di sè un gruppo proiettivo ∞^2 che lascia invariata una cubica gobba ed un punto di essa. Questa circostanza permetterebbe di andare più innanzi nello studio del gruppo.

Bologna-Roma, Maggio 1897.

INDICE

Formole per la composizione di più movimenti finiti.

(*Di* R. Marcolongo, *a Messina.*)

Le formole e i procedimenti coi quali si compongono i moti elicoidali infinitesimi presentano, com'è noto, la più stretta analogia col problema della riduzione di un sistema di forze ad una forza e ad una coppia, o a due forze uniche, ecc.

Tali procedimenti si fondano sostanzialmente sulla invertibilità dei moti infinitesimi e sulla proprietà che le rotazioni infinitesime intorno ad assi concorrenti si compongono e decompongono come le forze applicate ad uno stesso punto. Ciò non ha più luogo per le rotazioni finite, e quindi non si possono assegnare con pari speditezza le formole che fanno conoscere gli elementi del moto elicoidale risultante di più moti elicoidali.

Mi propongo, in questa nota, di stabilire tali formole.

Notazioni.

Ogni retta uscente dall'origine degli assi (raggio) è individuata dai tre coseni degli angoli che essa forma cogli assi; ogni altra retta (asse) è individuata da sei coordinate omogenee e cioè dai suoi coseni direttori (α, β, γ) e dai suoi tre momenti (λ, μ, ν) rispetto agli assi coordinati, definiti dalle:

$$\lambda = \gamma y - \beta z; \qquad \mu = \alpha z - \gamma x; \qquad \nu = \beta x - \alpha y,$$

dove x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque dell'asse; tra le coordinate omogenee hanno luogo le due relazioni:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Dati n assi (raggi) distinti, che indicheremo coi numeri $k_1 k_2 \dots k_n$, accenniamo con:

$$(k_r\, k_s) \qquad \text{e} \qquad [k_r\, k_s] \qquad (r < s),$$

rispettivamente: il coseno dell'angolo formato dai due assi k_r e k_s, ed il sestuplo volume del tetraedro che ha per spigoli opposti due segmenti eguali ad uno sui due assi, cioè il momento dei due assi; per modo che:

$$(k_r\, k_s) = \cos(k_r\, k_s) = \alpha_r\, \alpha_s + \beta_r\, \beta_s + \gamma_r\, \gamma_s,$$

$$[k_r\, k_s] = \alpha_r\, \lambda_s + \beta_r\, \mu_s + \gamma_r\, \nu_s + \alpha_s\, \lambda_r + \beta_s\, \mu_r + \mu_s\, \nu_r\,.$$

Poniamo ancora per compendio:

$$(k_i\, k_r\, k_s) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix};$$

$$(i < r < s)$$

$$[k_i\, k_r\, k_s] = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \lambda_r & \mu_r & \nu_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \lambda_s & \mu_s & \nu_s \end{vmatrix}.$$

Com'è noto, il determinante $(k_i\, k_r\, k_s)$ dicesi seno dell'angolo triedro formato da tre raggi i cui coseni sono $\alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i$, ecc., oppure seno dell'angolo di tre assi rispettivamente paralleli ai raggi considerati in quel determinato ordine.

Ciò posto consideriamo $2\,r$ assi (raggi) e con i coseni dei loro angoli due a due formiamo i prodotti r ad r in modo che in uno stesso prodotto non sia ripetuto un medesimo numero; assumiamo quindi un tal prodotto positivo o negativo secondo che la successione dei numeri presenta un numero pari o dispari di inversioni. La somma algebrica dei prodotti così ottenuti sarà indicata con:

$$(k_1\, k_2 \ldots k_{2r}).$$

Essa conterrà $1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2\,r - 1)$ termini e il numero dei termini positivi supera di uno quello dei negativi.

Accenneremo invece con:

$$[k_1\, k_2 \ldots k_{2\,r}]\,,$$

la somma algebrica dei prodotti formati con $r - 1$ coseni e con uno dei tetraedri $[k_r\, k_s]$, seguendo le stesse norme di prima. Per esempio abbiamo:

$$(1\,2\,3\,4) = \cos(1\,2)\cos(3\,4) - \cos(1\,3)\cos(2\,4) + \cos(1\,4)\cos(2\,3),$$

$$[1\,2\,3\,4] = \cos(1\,2)\,[3\,4] - \cos(1\,3)\,[2\,4] + \cos(1\,4)\,[2\,3] + \cos(2\,3)\,[1\,4] - \cos(2\,4)\,[1\,3] + \cos(3\,4)\,[1\,2].$$

Consideriamo $2r+1$ assi e, colle stesse norme, formiamo i prodotti r ad r con $r-1$ coseni degli assi due a due e con uno dei seni degli assi tre a tre. La somma algebrica dei prodotti così ottenuta sarà indicata con:

$$(k_1\, k_2 \ldots k_{2r+1}),$$

e conterrà $1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2r+1)\frac{r}{3}$ termini.

Finalmente accenneremo con:

$$[k_1\, k_2 \ldots k_{2r+1}],$$

la somma algebrica dei prodotti formati con $r-1$ coseni e con una delle espressioni $[k_i\, k_r\, k_s]$; con $r-2$ coseni, uno dei tetraedri $[k_i\, k_r]$ ed uno dei seni di tre degli assi, tenendo sempre ferme le stesse convenzioni riguardo ai numeri che figurano nel prodotto e riguardo ai segni dei singoli prodotti. Così è per esempio:

$$\begin{aligned}(1\,2\,3\,4\,5) = {} & \operatorname{sen}(1\,2\,3)\cos(4\,5) - \operatorname{sen}(1\,2\,4)\cos(3\,5) + \operatorname{sen}(1\,2\,5)\cos(3\,4)\\ & + \operatorname{sen}(1\,3\,4)\cos(2\,5) - \operatorname{sen}(1\,3\,5)\cos(2\,4) - \operatorname{sen}(2\,3\,4)\cos(1\,5)\\ & + \operatorname{sen}(2\,3\,5)\cos(1\,4) - \operatorname{sen}(2\,4\,5)\cos(1\,3) + \operatorname{sen}(3\,4\,5)\cos(1\,2)\\ & + \operatorname{sen}(1\,4\,5)\cos(2\,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1\,2\,3\,4\,5] = {} & \cos(1\,2)\,[3\,4\,5] - \cos(1\,3)\,[2\,4\,5] + \cdots\\ & + [1\,2]\,(3\,4\,5) - \cdots\end{aligned}$$

Composizione di più rotazioni finite intorno ad assi concorrenti.

Due rotazioni eguali e dello stesso senso effettuate intorno ad assi paralleli si diranno equipollenti. Per esprimere che la rotazione 2ω è effettuata intorno ad un asse di coordinate $(\alpha,\ \beta, \ldots \nu)$, oppure intorno ad un raggio i cui coseni sono $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, scriveremo brevemente:

$$2\,\omega\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots \nu) \qquad \text{oppure} \qquad 2\,\omega\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Parimenti per indicare che un moto elicoidale di parametri 2τ, 2ω, cioè tale che la traslazione è 2τ e la rotazione 2ω, è effettuato intorno ad un asse $(\alpha, \beta, \ldots \nu)$ scriveremo:

$$2\tau, \quad 2\omega \quad (\alpha, \beta, \ldots \nu);$$

e così ancora per indicare che la traslazione 2τ è effettuata in una direzione i cui coseni sono (a, b, c) scriveremo:

$$2\tau(a, b, c).$$

Consideriamo la rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$; diciamo x, y, z le coordinate di un punto, distante di uno dall'origine, prima della rotazione e poniamo:

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - iy}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

$$l = \alpha \operatorname{tang} \omega; \qquad m = \beta \operatorname{tang} \omega; \qquad n = \gamma \operatorname{tang} \omega.$$

Dopo la rotazione x, y, z, ζ, diventino rispettivamente x', y', z', ζ'; è noto che:

$$\zeta' = \frac{(1 + in)\zeta + i(l + im)}{1 - in + i(l - im)\zeta}. \tag{1}$$

Siano ora da comporre n rotazioni $2\omega_r(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots n)$ e poniamo:

$$\cos\omega_r = c_r; \qquad \operatorname{sen}\omega_r = s_r;$$

$$a_r = c_r + i\gamma_r s_r; \qquad d_r = c_r - i\gamma_r s_r;$$

$$b_r = i(\alpha_r + i\beta_r)s_r; \qquad e_r = i(\alpha_r - i\beta_r)s_r.$$

Diciamo infine A_n, D_n, B_n, E_n, le quantità analoghe relative alla rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ risultante in quelle n date. L'applicazione successiva della trasformazione (1) conduce facilmente al seguente:

Teorema 1.° Le quantità A_n, D_n, B_n, E_n, dipendono dalle a_r, b_r, c_r, e_r in modo che:

$$\begin{vmatrix} A_n & E_n \\ B_n & D_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_n & e_n \\ b_n & d_n \end{vmatrix},$$

avvertendo di eseguire il prodotto del secondo membro nell'ordine stabilito, moltiplicando le linee del primo determinante per le colonne del secondo; poi le linee del determinante prodotto dei primi due, per le colonne del terzo e così di seguito.

Da questo teorema generale, oppure da facili considerazioni dirette, discende subito quest'altro:

Teorema 2.º A due rotazioni $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ si può sostituire una rotazione unica $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ tale che:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\omega &= c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\,2)\\
\alpha \operatorname{sen}\omega &= c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 \mp (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) s_1 s_2\\
\beta \operatorname{sen}\omega &= c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 \mp (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) s_1 s_2\\
\gamma \operatorname{sen}\omega &= c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2 \mp (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) s_1 s_2,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

in cui è da tenere il segno $-$, se le rotazioni sono effettuate nell'ordine 1, 2; il segno $+$, se nell'ordine inverso.

Possiamo ora stabilire le formole generali per la composizione di più rotazioni, componendo successivamente colle (2), tre, quattro, ecc., rotazioni.

Poniamo:

$$a(1) = \alpha_1, \qquad b(1) = \beta_1, \qquad c(1) = \gamma_1,$$

e poi in generale:

$$\begin{aligned}
a(1\,2\,3\ldots 2r) &= \alpha_1(2\,3\ldots 2r-1) - \alpha_2(1\,3\ldots 2r-1) + \cdots\\
&\quad + \alpha_{2r-1}(1\,2\,3\ldots 2r-2)\\
a(1\,2\,3\ldots 2r) &= \beta_1 c(2\,3\ldots 2r) - \beta_2 c(1\,3\ldots 2r) + \cdots\\
&\quad - \beta_{2r} c(1\,2\,3\ldots 2r-1) = \sum(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1(3\,4\ldots 2_r),
\end{aligned}$$

e due espressioni analoghe ottenute da queste con permutazioni circolari. È palese la regola con la quale si succedono i segni.

Tra queste quantità e le altre già definite, hanno luogo alcune relazioni; noteremo le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{n+1} a(1\,2\,3\ldots k) + \beta_{n+1} b(1\,2\,3\ldots k) + \gamma_{n+1} c(1\,2\,3\ldots k)\\
&\qquad = (1\,2\,3\ldots k, n+1)\\
&\alpha_{n+1}(1\,2\,3\ldots 2r) + \beta_{n+1} c(1\,2\,3\ldots 2r) - \gamma_{n+1} b(1\,2\,3\ldots 2r)\\
&\qquad = a(1\,2\,3\ldots 2r, n+1)\\
&\alpha_{n+1}(1\,2\,3\ldots 2r+1) + \gamma_{n+1} b(1\,2\,3\ldots 2r+1) - \beta_{n+1} c(1\,2\,3\ldots 2r+1)\\
&\qquad = a(1\,2\,3\ldots 2r+1, n+1).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Teorema 3.º A più rotazioni $2\,\omega_r(\alpha_r,\ \beta_r,\ \gamma_r)$, $(r = 1,\ 2,\ldots\ n)$ si può sostituire una rotazione unica $2\,\omega(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$; ed è:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega = c_1 c_2 \ldots c_n - \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_n (1\,2) + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_n (1\,2\,3\,4) - \cdots \\ + \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n (1\,2\,3) - \sum s_1 s_2 \ldots s_5 c_6 \ldots c_n (1\,2\,3\,4\,5) + \cdots \\ \pm s_1 s_2 \ldots s_n (1\,2\,3 \ldots n);\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha \operatorname{sen} \omega = \sum s_1 c_2 c_3 \ldots c_n\, a(1) - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n\, a(1\,2\,3) + \cdots \\ - \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_n\, a(1\,2) + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \ldots c_n\, a(1\,2\,3\,4) - \cdots \\ \pm s_1 s_2 \ldots s_n\, a(1\,2\,3 \ldots n);\end{aligned}\right\} \quad (4^*)$$

e due altre analoghe che si ottengono con permutazioni circolari. Nell'ultimo termine delle formole precedenti è da ritenere il segno $+$, se $n = 4\,h$, oppure $4\,h - 1$; il segno $-$ negli altri casi. Le rotazioni si intendono effettuate nell'ordine $1,\ 2,\ldots\ n$ (*). Ammesse vere queste formole per n rotazioni, col sussidio delle formole (2) e colle relazioni (3) si dimostrano vere per $n + 1$. L'ampiezza e l'asse della rotazione risultante dipendono, a parità di altre condizioni, dall'ordine con cui si compongono le rotazioni singole; infatti i primi due termini del valore di $\cos\omega$ non dipendono dall'ordine di composizione; tutti gli altri invece dipendono da questo ordine. Così per esempio per $n = 3$, qualunque sia l'ordine con cui si compongono le rotazioni, $\cos\omega$ non può avere che due valori soli cioè:

$$c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 \cos(2\,3) - c_2 s_3 s_1 \cos(1\,3) - c_3 s_1 s_2 (1\,2) \pm s_1 s_3 s_3 \operatorname{sen}(1\,2\,3).$$

Supponendo le rotazioni infinitesime si ottengono formole note.

Composizione di due rotazioni finite intorno ad assi non concorrenti.

Premettiamo i seguenti teoremi, la cui dimostrazione non presenta difficoltà:

Teorema 4.º Ad una rotazione $2\,\omega(\alpha,\ \beta,\ldots\ \nu)$ si può sostituire una rotazione equipollente $2\,\omega(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda',\ \mu',\ \nu')$ seguita da una traslazione $2\,\tau(a,$

(*) Coll'espressione abbreviata $\Sigma\, s_1 s_2 c_3 \ldots c_n (12)$ intendiamo la somma:

$$s_1 s_2 c_3 \ldots c_n (12) + s_1 s_3 c_4 \ldots c_n (13) + \ldots + s_{n-1} s_n c_1 c_2 \ldots c_{n-2} (n-1,\ n)$$

e così per tutte le altre.

b, c) in cui, detta ρ la distanza tra i due assi, è:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \rho \operatorname{sen} \omega \\ \rho\, a &= \operatorname{sen} \omega \left\{ \beta (\nu - \nu') - \gamma (\mu - \mu') \right\} + \cos \omega (\lambda - \lambda') \\ \rho\, b &= \operatorname{sen} \omega \left\{ \gamma (\lambda - \lambda') - \alpha (\nu - \nu') \right\} + \cos \omega (\mu - \mu') \\ \rho\, c &= \operatorname{sen} \omega \left\{ \alpha (\mu - \mu') - \beta (\lambda - \lambda') \right\} + \cos \omega (\nu - \nu') \,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La direzione della traslazione è normale agli assi di rotazione.

Teorema 5.º Ad una rotazione $2\,\omega\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu,\ \nu)$ e ad una traslazione $2\,\tau\,(a,\ b,\ c)$ si può sostituire un moto elicoidale $2\,\tau_1$, $2\,\omega\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda',\ \mu',\ \nu')$, in cui:

$$\tau_1 = \tau\,(a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma) \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda' \operatorname{sen} \omega &= \lambda \operatorname{sen} \omega \pm \tau\,(\gamma\, b - \beta\, c) + \tau\, a \cos \omega - \tau_1\, \alpha \cos \omega \\ \mu' \operatorname{sen} \omega &= \mu \operatorname{sen} \omega \pm \tau\,(\alpha\, c - \gamma\, a) + \tau\, b \cos \omega - \tau_1\, \beta \cos \omega \\ \nu' \operatorname{sen} \omega &= \nu \operatorname{sen} \omega \pm \tau\,(\beta\, a - \alpha\, b) + \tau\, c \cos \omega - \tau_1\, \gamma \cos \omega \,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

È da assumere il segno $+$, se nei movimenti componenti precede la rotazione; il $-$, se precede la traslazione.

Proponiamoci ora di comporre due rotazioni $2\,\omega_1\,(\alpha_1,\ \beta_1,\ ..\ \nu_1)$, $2\,\omega_2\,(\alpha_2,\ \beta_2, \ldots\ \nu_2)$.

Al sistema di queste due rotazioni potremo sostituire: la rotazione $2\,\omega_1$, una rotazione $2\,\omega'_2\,(\alpha_2,\ \beta_2, \ldots\ \gamma_2\ \lambda'_2,\ \mu'_2, \ldots\ \nu'_2)$ equipollente alla seconda, intorno ad un asse parallelo passante per un punto $(x,\ y,\ z)$ del primo, seguita da una traslazione: $2\,\rho\, s_3\,(a,\ b,\ c)$. Le a, b, c sono date dalle (5). Alle due rotazioni possiamo sostituire una rotazione unica; l'ampiezza e i coseni direttori dell'asse sono dati dalle formole (2); finalmente valendoci del teorema 5º troveremo gli elementi del moto elicoidale risultante. La traslazione $2\,\tau$ è quindi espressa, per la (6), da:

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_2 \sum \left\{ s_2 \left[\beta_2 (\nu_2 - \nu'_2) - \gamma_2 (\mu_2 - \mu'_2) \right] + c_2 (\lambda_2 - \lambda'_2) \right\}$$

$$\left\{ c_2\, s_1\, \alpha_1 + c_1\, s_2\, \alpha_2 - (\beta_1\, \gamma_2 - \beta_2\, \gamma_1)\, s_1\, s_2 \right\}.$$

Inoltre abbiamo:

$$\alpha_1 \lambda'_2 + \beta_1 \mu'_2 + \gamma_1 \nu'_2 + \alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_2 \nu_1 = 0.$$

e però, riducendo, si trova:

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 [1\ 2].$$

Colle (7) si trovano le coordinate λ, μ, ν, dell'asse di moto elicoidale risultante; di guisa che abbiamo:

Teorema 6.º A due rotazioni $2\omega_1 (\alpha_1 \dots \nu_1)$, $2\omega_2 (\alpha_2 \dots \nu_2)$ si può sostituire un moto elicoidale 2τ, $2\omega (\alpha, \beta, \dots \nu)$ i cui elementi sono:

$$\cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (1\ 2), \qquad \tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 [1\ 2], \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s, \\ &\lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \left\{ (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) \right\} s_1 s_2, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

e formole analoghe.

Inversamente possiamo sostituire ad un dato moto elicoidale, ed in infiniti modi, il sistema di due rotazioni intorno a due assi. Fissato ad arbitrio uno di questi, per esempio $(\alpha_1 \dots \nu_1)$ restano determinate le due rotazioni e l'altro asse. Infatti dalle (9) deduciamo:

$$(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \operatorname{sen} \omega + \tau (\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \cos \omega$$
$$= c_1 s_2 [1\ 2] = \tau \operatorname{sen} \omega \operatorname{cotg} \omega_1,$$

d'onde si ricava ω_1 e quindi c_1 ed s_1. Le sei equazioni (9) e una delle (8) possono quindi riguardarsi come sette equazioni lineari in c_2, $s_2 \alpha_2, \dots$, $s_2 \nu_2$; sarà quindi individuata l'altra rotazione e le coordinate dell'altro asse. Non tutte le rette possono assumersi come assi della prima rotazione; occorre escludere quelle che appartengono al complesso lineare:

$$(\alpha \lambda_1 + \cdots \gamma_1 \nu) \operatorname{sen} \omega + \tau (\alpha \lambda_1 + \cdots) \cos \omega = 0 .$$

Questi due assi di rotazione non sono rette coniugate rispetto al complesso, a meno che le rotazioni siano infinitesime.

Possiamo dunque concludere che:

Teorema 7.º Si può in infiniti modi sostituire ad un dato moto elicoidale il sistema di due rotazioni intorno a due assi; scelto ad arbitrio uno di questi, resta, in generale, determinato l'altro e le ampiezze delle due rotazioni; il sestuplo volume del tetraedro che ha per spigoli opposti due segmenti rispettivamente eguali ad s_1 e s_2 sui due assi di rotazione, è costante.

Composizione di due e più moti elicoidali.

Supponiamo ora più generalmente di dover comporre un moto elicoidale $2\tau_1$, $2\omega_1$ $(\alpha_1 \ldots \nu_1)$ con una rotazione $2\omega_2$ $(\alpha_2 \ldots \nu_2)$. Al sistema della traslazione e delle rotazioni possiamo sostituire, come nel caso precedente, il sistema equivalente $2\tau_1$, $2\omega_1$, $2\omega'_2$, 2τ, in cui $\tau = \rho s_2$ e la direzione di τ è definita dalle (5); componendo $2\omega_1$ con $2\omega'_2$ otterremo un'unica rotazione $2\omega(\alpha, \beta, \ldots \nu')$ e quindi il sistema $2\tau_1$, 2ω, 2τ. Decomponiamo τ_1 in due, una τ'' lungo l'asse della 2ω e l'altra normale, che insieme colla 2ω dà luogo ad una rotazione equipollente intorno ad un asse $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda'', \mu'', \nu'')$ e per le (7) avremo:

$$\lambda'' \operatorname{sen}\omega = \lambda' \operatorname{sen}\omega - \tau_1(\gamma\beta_1 - \beta\gamma_1)\operatorname{sen}\omega$$
$$+ \tau_1 \cos\omega \left\{ \alpha_1 - \alpha(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) \right\}.$$

Il sistema primitivo è dunque equivalente all'altro $2\omega, 2\tau'', 2\tau$, e, potendo invertire le traslazioni, all'altro $2\omega, 2\tau, 2\tau''$. Decomponiamo infine 2τ come si è decomposto $2\tau_1$ ed otterremo il moto elicoidale 2τ, $2\omega(\alpha, \beta, \ldots \nu)$, in cui:

$$\tau \operatorname{sen}\omega = \tau_1 \left\{ c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2) \right\} + s_1 s_2 [1\,2]$$

e:

$$\lambda \operatorname{sen}\omega = \lambda'' \operatorname{sen}\omega + \tau(\gamma b - \beta c)\operatorname{sen}\omega$$
$$+ \tau\cos\omega \left\{ a - \alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma) \right\},$$

e quindi procedendo come nel caso di prima si ha:

Teorema 8.° Ad un moto elicoidale $2\tau_1, 2\omega_1(\alpha_1 \ldots \nu_1)$ e ad una rotazione $2\omega_2(\alpha_2 \ldots \nu_2)$ si può sostituire un unico moto elicoidale $2\tau, 2\omega(\alpha, \beta, \ldots \nu)$; ed è:

$$\left.\begin{aligned} \tau \operatorname{sen}\omega &= \tau_1(c_2 s_1 + c_1 s_2 (1\,2)) + s_1 s_2 [1\,2] \\ \lambda \operatorname{sen}\omega + \tau\alpha\cos\omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \left\{ (\beta_1\nu_2 - \beta_2\nu_1) - (\gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1) \right\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_1 \left\{ \alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) \right\}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

e due formole analoghe, mentre $\omega, \alpha, \beta, \gamma$ sono definiti dalle stesse formole del teorema 6.°

È collo stesso metodo:

Teorema 9.° A due moti elicoidali $2\tau_1, 2\omega_1(\alpha_1\ldots\nu_1)$; $2\tau_2, 2\omega_2(\alpha_2\ldots\nu_2)$ si può sostituire un unico moto elicoidale $2\tau, 2\omega(\alpha\ldots\nu)$; ed è:

$$\left.\begin{aligned}\tau \operatorname{sen}\omega &= s_1 c_2(\tau_1+\tau_2(1\,2))+s_2c_1(\tau_1(1\,2)+\tau_2)+s_1s_2[1\,2].\\ \lambda\operatorname{sen}\omega+\tau\alpha\cos\omega &= c_2s_1\lambda_1+c_1s_2\lambda_2\\ &-\left\{(\beta_1\nu_2-\beta_2\nu_1)-(\gamma_1\mu_2-\gamma_2\mu_1)\right\}s_1s_2\\ &+\tau_1\left\{\alpha_1c_1c_2-\alpha_2s_1s_2+c_1s_2(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)\right\}\\ &+\tau_2\left\{\alpha_2c_1c_2-\alpha_1s_1s_2+c_2s_1(\beta_2\gamma_1-\beta_1\gamma_2)\right\},\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

e due formole analoghe.

Applicando successivamente i teoremi 6.° e 8.°, potremo comporre tre, quattro, ecc., rotazioni intorno ad assi qualunque, e stabilire le formole generali per la composizione di n rotazioni.

Poniamo:

$$a[1]=\lambda_1;\qquad b[1]=\mu_1;\qquad c[1]=\nu_1,$$

e poi in generale:

$$\begin{aligned}a[1\,2\,3\ldots 2r-1]&=\alpha_1[2\,3\ldots 2r-1]-\alpha_2[1\,3\ldots 2r-1]+\cdots\\ &\quad+\alpha_{2r-1}[1\,2\,3\ldots 2r-2]\\ &\quad+\lambda_1(2\,3\ldots 2r-1)-\lambda_2(1\,3\ldots 2r-1)+\cdots\\ &\quad+\lambda_{2r-1}(1\,2\,3\ldots 2r-2),\end{aligned}$$

e due espressioni analoghe per $b[1\,2\,3\ldots 2r-1]$ e $c[1\,2\,3\ldots 2r-1]$ formate rispettivamente colle β e μ e colle γ e ν. Pongasi ancora:

$$\begin{aligned}a[1\,2\,3\ldots 2r]&=\beta_1c[2\,3\ldots 2r]-\beta_2c[1\,3\ldots 2r]+\cdots\\ &\quad-\beta_{2r}c[1\,2\,3\ldots 2r-1]\\ &\quad-\left\{\gamma_1b[2\,3\ldots 2r]-\gamma_2b[1\,3\ldots 2r]+\cdots\right.\\ &\quad\left.-\gamma_{2r}b[1\,2\,3\ldots 2r-1]\right\},\end{aligned}$$

e due espressioni analoghe per $b[1\,2\,3\ldots 2r]$ e $c[1\,2\,3\ldots 2r]$.

Hanno luogo le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{c} a\,[1\,2\ldots r]\,\alpha_{n+1}+b\,[1\,2\ldots r]\,\beta_{n+1}+c\,[1\,2\ldots r]\,\gamma_{n+1} \\ +\,a\,(1\,2\ldots r)\,\lambda_{n+1}+b\,(1\,2\ldots r)\,\mu_{n+1}+c\,(1\,2\ldots r)\,\nu_{n+1} \\ =[1\,2\ldots r,\ n+1], \end{array}\right\}\quad(12)$$

$$\left.\begin{array}{c} [1\,2\,3\ldots 2r-1]\,\alpha_{n+1}+b\,[1\,2\,3\ldots 2r-1]\,\gamma_{n+1}-c\,[1\,2\,3\ldots 2r-1]\,\beta_{n+1} \\ +\,(1\,2\,3\ldots 2r-1)\,\lambda_{n+1}+b\,(1\,2\,3\ldots 2r-1)\,\nu_{n+1}-c\,(1\,2\,3\ldots 2r-1)\,\mu_{n+1} \\ =a\,[1\,2\,3\ldots 2r-1,\ n+1], \end{array}\right\}\quad(13)$$

ed inoltre:

$$\left.\begin{array}{c} [1\,2\,3\ldots 2r]\,\alpha_{n+1}+c\,[1\,2\ldots 2r]\,\beta_{n+1}-b\,[1\,2\,3\ldots 2r]\,\gamma_{n+1} \\ +\,(1\,2\,3\ldots 2r)\,\lambda_{n+1}+c\,(1\,2\ldots 2r)\,\mu_{n+1}-b\,(1\,2\ldots 2r)\,\nu_{n+1} \\ =a\,[1\,2\,3\ldots 2r,\ n+1]. \end{array}\right\}\quad(14)$$

Ciò posto possiamo enunciare il seguente:

Teorema 10.° Ad n rotazioni $2\,\omega_r\,(\alpha_r\ldots\nu_r)\,(r=1,\,2,\ldots\,n)$ si può sostituire un unico moto elicoidale $2\,\tau$, $2\,\omega\,(\alpha\ldots\nu)$; le grandezze $2\,\omega$, α, β, γ sono definite dalle formole (4); per le altre valgono le formole seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} \tau \operatorname{sen}\omega=\sum s_1\,s_2\,c_3\ldots c_n\,[1\,2]-\sum s_1\,s_2\,s_3\,s_4\,c_5\ldots c_n\,[1\,2\,3\,4]+\cdots \\ \qquad -\sum s_1\,s_2\,s_3\,c_4\ldots c_n\,[1\,2\,3]+\sum s_1\ldots s_5\,c_6\ldots c_n\,[1\,2\,3\,4\,5]-\cdots \\ \qquad\qquad \pm\, s_1\,s_2\ldots s_n\,[1\,2\,3\ldots n]; \end{array}\right\}\quad(15)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\operatorname{sen}\omega+\tau\,\alpha\cos\omega=\sum s_1\,c_2\ldots c_n a\,[1]-\sum s_1\,s_2\,s_3\,c_4\ldots c_n\,a\,[1\,2\,3]+\cdots \\ \qquad -\sum s_1 s_2 c_3\ldots c_n a\,[1\,2]+\sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5\ldots c_n a\,[1\,2\,3\,4]-\cdots \\ \qquad\qquad \pm\, s_1\,s_2\ldots s_n\,a\,[1\,2\ldots n]; \end{array}\right\}\quad(16)$$

e due formole analoghe. Le rotazioni si compongono nell'ordine $1,\,2,\ldots\,n$.

Queste formole si provano vere per $n+1$ rotazioni ammettendole vere per n e tenendo presenti le (12) (13) e (14).

Colle formole e coi metodi precedenti è ancora facilissima la composizione di n moti elicoidali $2\,\tau_r$, $2\,\omega_r\,(\alpha_r\ldots\nu_r)\,(r=1,\,2,\ldots\,n)$.

Le formole che danno ω, α, β, γ, relative al moto elicoidale risultante restano le stesse, mentre le (15) e (16) vengono aumentate di funzioni lineari ed omogenee nelle τ_r e che per brevità non trascriviamo; così, per esempio, il valore (15) di $\tau \operatorname{sen} \omega$ viene aumentato della espressione:

$$\sum s_1 c_2 c_3 \ldots c_n \left\{ \tau_1 + \tau_2 (1\,2) + \cdots + \tau_n (1\,n) \right\}$$

$$- \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \ldots c_n \left\{ \tau_1 (2\,3) - \tau_2 (1\,3) + \tau_3 (1\,2) \right\}$$

$$- \sum s_1 s_2 c_3 \ldots c_n \tau_1 (1\,2\,3) + \cdots$$

Se è nullo il secondo membro della (15), abbiamo:

$$\tau \operatorname{sen} \omega = 0,$$

e quindi il moto risultante si riduce ad una traslazione unica, o ad una rotazione unica. Ha luogo il primo caso, se il secondo membro della (4) è eguale a ± 1.

Messina, Maggio 1897.

Sulle vibrazioni dei solidi elastici.

(Di Giuseppe Lauricella, *a Pesaro.)*

Nella mia Memoria: *Sulle equazioni del moto dei corpi elastici* (*), trattando della quistione dell'esitenza delle soluzioni eccezionali delle equazioni indefinite, dalle quali si può fare dipendere l'integrazione delle equazioni del moto dei solidi elastici, non riuscii a dimostrare in modo completo l'esistenza di una serie indefinita di queste soluzioni eccezionali nel caso in cui le corrispondenti espressioni delle tensioni si annullano alla superficie del corpo, il qual caso è appunto quello dal quale dipende effettivamente il problema del moto. Ora ho potuto osservare che modificando un po' i calcoli di tale Memoria, si può completare questa quistione (**).

(*) *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Serie II, Tom. XLV.

(**) Tale modificazione è necessario farla pure nella Memoria richiamata sopra per il caso di soluzioni eccezionali che si annullano nei punti della superficie del corpo; e per questo basterà sostituire al § 3 del Cap. I il § 4 del presente lavoro (ciò che porta a lievi modificazioni di simboli nei paragrafi seguenti) e osservare che, dipendentemente dalla natura della funzione f scelta ad arbitrio (Cap. II, § 3), può darsi che la serie delle soluzioni eccezionali, delle quali si viene a dimostrare l'esistenza sia finita. Allora per completare la quistione, ossia per provare che vi sono effettivamente infinite soluzioni eccezionali, si può fare la seguente dimostrazione, analoga ad una dimostrazione, fatta per un caso simile, che mi è stata comunicata dal Ch.$^{\text{mo}}$ prof. Volterra.

Data una funzione f qualsiasi, si ha sempre una soluzione eccezionale almeno p_1, q_1, r_1. Le tre funzioni p_1, q_1, r_1, sono i rispettivi residui delle funzioni u, v, w nel polo semplice k_1. Ciò posto, si prenda una funzione f_1 tale che:

$$\int_S f_1 (p_1 + q_1 + r_1)\, dS = 0,$$

e si considerino le corrispondenti funzioni u', v', w', analoghe alle u, v, w. Queste funzioni devono ammettere per lo meno un polo semplice k_2, il quale non può coincidere

Faccio notare che tale modificazione rende assai generale il metodo da me adoperato, ed è facile comprendere come esso con la massima facilità possa estendersi, pur non facendolo io qui espressamente, al caso di soluzioni eccezionali relativi al problema delle membrane elastiche e ad altri simili della fisica-matematica (*).

In questo lavoro veramente non mi preoccupo di dimostrare senz'altro l'esistenza di infinite soluzioni eccezionali; ma, prendendo di mira l'origine della quistione stessa, dimostro anzitutto che, date tre funzioni arbitrarie dei punti del corpo elastico, esiste sempre una corrispondente serie finita od infinita di soluzioni eccezionali. Allora, prese una volta per funzioni arbitrarie le componenti degli spostamenti iniziali ed un'altra le componenti delle velocità iniziali ottengo due serie di soluzioni eccezionali e quindi due corrispondenti serie di vibrazioni elementari dei punti del corpo elastico. Quando queste serie sono finite il moto corrispondente agli spostamenti iniziali ed alle velocità iniziali è rappresentato dalla sovrapposizione delle due serie finite di vibrazioni elementari ottenute, nel caso contrario, che è poi il più generale, in cui tutti o alcune delle serie di soluzioni eccezionali sono infinite, il moto del corpo elastico sarà dato ancora dalla sovrapposizione delle due corrispondenti serie di vibrazioni elementari, tutte le volte che le serie che si vengono a

---

con k_1; perchè altrimenti i corrispondenti residui delle funzioni u', v', w' sarebbero:

$$p_2 = p_1 \int_S f_1 (p_1 + q_1 + r_1)\, dS = 0, \qquad q_2 = q_1 \int_S f_1 (p_1 + q_1 + r_1)\, dS = 0,$$

$$r_2 = r_1 \int_S f_1 (p_1 + q_1 + r_1)\, dS = 0.$$

Dunque il polo k_2 è distinto da k_1 è così la corrispondente soluzione eccezionale p_2, q_2, r_2 sarà distinta dall'altra p_1', q_1, r_1.

Similmente prendiamo una funzione f_2 tale che:

$$\int_S f_2 (p_1 + q_1 + r_1)\, dS = \int_S f_2 (p_2 + q_2 + r_2)\, dS = 0.$$

Troveremo tre nuove funzioni u'', v'', w'' che avranno un polo k_3 diverso da k_1 e da k_2, e quindi una nuova soluzione eccezionale p_3, q_3, r_3 distinta dalle due precedenti.

Seguitando in questa guisa risulterà l'esistenza di infiniti poli distinti e quindi di infinite soluzioni eccezionali.

(*) Vedi la mia Memoria: *Sull'equazione delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino. Gennaio, 1896).

considerare sono da per tutto convergenti in egual grado e derivabili, e che le componenti degli spostamenti iniziali e delle velocità iniziali sono sviluppabili in serie delle corrispondenti soluzioni eccezionali.

Quanto alla dimostrazione di quest' ultima quistione, della quale io qui non mi occupo, faccio notare soltanto che la via più naturale da seguire è quella da me indicata nella quistione analoga delle vibrazioni delle piastre elastiche (*) e che i risulati preliminari ivi stabiliti si estendono al caso nostro senza difficoltà alcuna.

1. L'integrazione delle equazioni generali del moto di un corpo elastico isotropo soggetto a forze esterne indipendenti dal tempo, si può ridurre, come è noto (**), all'integrazione di equazioni della stessa specie, nelle quali le forze esterne sono nulle e ad un problema di equilibrio. Ammesso risoluto quest'ultimo problema, se chiamiamo u, v, w gli spostamenti dei punti (x, y, z) del corpo S vibrante, t il tempo, ρ la densità, L e K le note costanti di isotropia, n la direzione interna della normale nei punti della superficie σ, e se poniamo:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

il problema del moto dei solidi elastici si può far dipendere così dall'integrazione delle equazioni indefinite:

$$\left.\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= L \Delta^2 u + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= L \Delta^2 v + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= L \Delta^2 w + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(*) *Nuovo Cimento.* Settembre, 1896.

(**) Vedi ad es.: CESÀRO. *Introduzione alla teoria matematica della elasticità.* Parte prima, Cap. VII, § 2.

con le condizioni al contorno σ:

$$\left.\begin{aligned}
&(K\theta + 2L\gamma_{11})\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma_{12}\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma_{13}\frac{\partial z}{\partial n} = 0\\
&L\gamma_{21}\frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta + 2L\gamma_{22})\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma_{23}\frac{\partial z}{\partial n} = 0\\
&L\gamma_{31}\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma_{32}\frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta + 2L\gamma_{33})\frac{\partial z}{\partial n} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vediamo se esistono integrali delle equazioni precedenti della forma:

$$u = p(x, y, z)\,.\,\varphi(t), \quad v = q(x, y, z)\,.\,\varphi(t), \quad w = r(x, y, z)\,.\,\varphi(t). \tag{3}$$

Per questo, posto:

$$\theta' = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}, \qquad \gamma'_{11} = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \gamma'_{22} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \gamma'_{33} = \frac{\partial r}{\partial z},$$

$$\gamma'_{23} = \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial y}, \qquad \gamma'_{31} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \gamma'_{12} = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x},$$

si dovrà avere nei punti di S:

$$-\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{\rho p}\left\{L\Delta^2 p + (L+K)\frac{\partial\theta'}{\partial x}\right\}$$

$$-\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{\rho q}\left\{L\Delta^2 q + (L+K)\frac{\partial\theta'}{\partial y}\right\}$$

$$-\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{\rho r}\left\{L\Delta^2 r + (L+K)\frac{\partial\theta'}{\partial z}\right\},$$

nei punti di σ:

$$\left.\begin{aligned}
&(K\theta' + 2L\gamma'_{11})\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{12}\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{13}\frac{\partial z}{\partial n} = 0\\
&L\gamma'_{21}\frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{22})\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{23}\frac{\partial z}{\partial n} = 0\\
&L\gamma'_{31}\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{32}\frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{33})\frac{\partial z}{\partial n} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

e se si indica con k una quantità costante, risulta per la φ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\varphi, \tag{4}$$

per le funzioni p, q, r:

$$\left.\begin{aligned} L\,\Delta^2 p + (L+K)\frac{\partial\theta'}{\partial x} &= k\rho p \\ L\,\Delta^2 q + (L+K)\frac{\partial\theta'}{\partial y} &= k\rho q \\ L\,\Delta^2 r + (L+K)\frac{\partial\theta'}{\partial z} &= k\rho r, \end{aligned}\right\} \qquad (1)'$$

con le condizioni (2') nei punti di σ.

Ora dalla (4) si ha per la forma più generale della funzione φ:

$$\varphi = \lambda \cos(t\sqrt{k}) + \mu \operatorname{sen}(t\sqrt{k}), \qquad (5)$$

con λ e μ costanti arbitrarie; quindi (*) *le funzioni* (3) *soddisfano alle equazioni* (1), (2) *tutte le volte che* φ *abbia la forma* (5) *e che le funzioni* p, q, r *siano integrali delle* (1)', (2)'.

2. Vediamo ora in che modo si può determinare un sistema di integrali delle equazioni (1)', (2)'.

Posto:

$$\frac{L+K}{L} = A, \qquad -\frac{k\rho}{L} = h, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} (K\theta' + 2L\gamma'_{11})\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{12}\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{13}\frac{\partial z}{\partial n} &= X' \\ L\gamma'_{21}\frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{22})\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{23}\frac{\partial z}{\partial n} &= Y' \\ L\gamma'_{31}\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{32}\frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{33})\frac{\partial z}{\partial n} &= Z', \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

le equazioni (1)', (2)' divengono:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 p + A\frac{\partial\theta'}{\partial x} + hp &= 0 \\ \Delta^2 q + A\frac{\partial\theta'}{\partial y} + hq &= 0 \\ \Delta^2 r + A\frac{\partial\theta'}{\partial z} + hr &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)''$$

$$X' = Y' = Z' = 0. \qquad (2)''$$

(*) Cesàro; l. c., § 3.

Ciò posto, indichiamo con f', f'', f''' tre funzioni arbitrarie dei punti del corpo S sottoposte alle condizioni:

$$\int_S f'\,dS = \int_S f''\,dS = \int_S f'''\,dS = \int_S (z f' - y f''')\,dS =$$

$$= \int_S (x f''' - z f')\,dS = \int_S (y f' - x f'')\,dS = 0,$$

e consideriamo le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta^2 u_0 + A \dfrac{\partial \theta_0}{\partial x} + f' = 0 \\
\Delta^2 v_0 + A \dfrac{\partial \theta_0}{\partial y} + f'' = 0 \\
\Delta^2 w_0 + A \dfrac{\partial \theta_0}{\partial z} + f''' = 0\,, \\
X_0 = Y_0 = Z_0 = 0\,; \\
\Delta^2 u_1 + A \dfrac{\partial \theta_1}{\partial x} + u_0 = 0 \\
\Delta^2 v_1 + A \dfrac{\partial \theta_1}{\partial y} + v_0 = 0 \\
\Delta^2 w_1 + A \dfrac{\partial \theta_1}{\partial z} + w_0 = 0\,, \\
X_1 = Y_1 = Z_1 = 0\,; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\,,
\end{array}\right\} \qquad (8)$$

dove:

$$\theta_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z},$$

e X_i, Y_i, Z_i sono le espressioni (7) corrispondenti alle funzioni u_i, v_i, w_i. Queste funzioni sono determinate a meno di un movimento rigido (*), e noi ci serviremo delle *sei* costanti arbitrarie relative a questo movimento per sod-

(*) Vedi la mia Mem.: *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Cap. I, § 2. (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, anno 1894.)

disfare alle condizioni:

$$\left.\begin{aligned}&\int_S u_i\, d\, S = \int_S v_i\, d\, S = \int_S w_i\, d\, S = \int_S (z\, v_i - y\, w_i)\, d\, S = \\ &= \int_S (x\, w_i - z\, u_i)\, d\, S = \int_S (y\, u_i - x\, v_i)\, d\, S = 0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Gli integrali di uno qualunque dei sistemi di equazioni (8) in un punto qualsiasi di S o di σ si possono esprimere mediante le formole (*):

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_i &= u_i - (C_2^{(i)} z - C_3^{(i)} y + K_1^{(i)}) = \int_S \sum g_1\, u_{i-1}\, d\, S \\ \bar{v}_i &= v_i - (C_3^{(i)} x - C_1^{(i)} z + K_2^{(i)}) = \int_S \sum g_2\, u_{i-1}\, d\, S \\ \bar{w}_i &= w_i - (C_1^{(i)} y - C_2^{(i)} x + K_3^{(i)}) = \int_S \sum g_3\, u_{i-1}\, d\, S,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

dove g_1, g'_1, g''_1; $g_2, \ldots g_3, \ldots$ sono funzioni della natura della funzione $\frac{1}{r}$, la cui ricerca dipende dall'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici.

3. Posto qui:

$$\gamma_{11}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \ldots, \qquad \gamma_{23}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y}, \ldots$$

$$W_{m \cdot n} = \int_S (u_m\, u_n + v_m\, v_n + w_m\, w_n)\, d\, S,$$

$$\begin{aligned}V_{m \cdot n} = \int_S \Big\{ &(A-1)\, \theta_m\, \theta_n + 2\, \gamma_{11}^{(m)} \gamma_{11}^{(n)} + 2\, \gamma_{22}^{(m)} \gamma_{22}^{(n)} + 2\, \gamma_{33}^{(m)} \gamma_{33}^{(n)} + \\ &+ \gamma_{23}^{(m)} \gamma_{23}^{(n)} + \gamma_{31}^{(m)} \gamma_{31}^{(n)} + \gamma_{12}^{(m)} \gamma_{12}^{(n)} \Big\}\, d\, S,\end{aligned}$$

si dimostra, come al § 3 (Cap. II) della cit. Mem., che le espressioni $W_{m \cdot n}$, $V_{m \cdot n}$ dipendono soltanto dalla somma degli indici e, posto:

$$W_{m \cdot n} = W_{m+n}, \qquad V_{m \cdot n} = V_{m+n},$$

(*) Form. (9), Cap. I della Memoria: *Sulle equazioni del moto elastico.*

che sussiste la relazione:

$$W_{m+n} = V_{m+n+1}.$$

Da questa e dalle (10) risulta come ai §§ 4, 5 (Cap. II) della stessa Memoria:

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \cdots < \frac{W_m}{W_{m-1}} < \cdots,$$

$$(\overline{u}_i)^2 = (u_i - C_2^{(i)} z + C_3^{(i)} y - K_1^{(i)})^2 < R\, W_{2i-2}$$

$$(\overline{v}_i)^2 = (v_i - C_3^{(i)} x + C_1^{(i)} z - K_2^{(i)})^2 < R\, W_{2i-2}$$

$$(\overline{w}_i)^2 = (w_i - C_1^{(i)} y + C_2^{(i)} x - K_3^{(i)})^2 < R\, W_{2i-2}.$$

Queste tre ultime formole e le (9) ci dànno poi:

$$W_{2i} + \int_S (C_2^{(i)} z - C_3^{(i)} y + K_1^{(i)})^2\, dS + \int_S (C_3^{(i)} x - C_1^{(i)} z + K_2^{(i)})^2\, dS +$$

$$+ \int_S (C_1^{(i)} y - C_2^{(i)} x + K_3^{(i)})^2\, dS < K\, W_{2i-2},$$

ossia:

$$W_{2i} < K\, W_{2i-2},$$

$$\int_S (C_2^{(i)} z - C_3^{(i)} y + K_1^{(i)})^2\, dS < K\, W_{2i-2},$$

$$\int_S (C_3^{(i)} x - C_1^{(i)} z + K_2^{(i)})^2\, dS < K\, W_{2i-2},$$

$$\int_S (C_1^{(i)} y - C_2^{(i)} x + K_3^{(i)})^2\, dS < K\, W_{2i-2},$$

dove K ha il significato che gli si è dato al § 5 della cit. Memoria.

Supposta l'origine degli assi nell'interno di S, si indichi con S_1 una sfera che abbia il centro in questa origine e che sia tutta interna ad S. Si avrà:

$$\int_{S_1} x\, dS = \int_{S_1} y\, dS = \int_{S_1} z\, dS = \int_{S_1} zy\, dS = \int_{S_1} xz\, dS = \int_{S_1} yx\, dS = 0,$$

e quindi posto:

$$\int_{S_1} dS = I, \qquad \int_{S_1} x^2\, dS = \int_{S_1} y^2\, dS = \int_{S_1} z^2\, dS = H,$$

risulterà dalle tre ultime disuguaglianze precedenti:

$$(K_1^{(i)})^2 < \frac{K}{I} W_{2i-2}, \qquad (K_2^{(i)})^2 < \frac{K}{I} W_{2i-2}, \qquad (K_3^{(i)})^2 < \frac{K}{I} W_{2i-2},$$

$$(C_1^{(i)})^2 < \frac{K}{H} W_{2i-2}, \qquad (C_2^{(i)})^2 < \frac{K}{H} W_{2i-2}, \qquad (C_3^{(i)})^2 < \frac{K}{H} W_{2i-2}.$$

Dalla disuguaglianza:

$$W_{2i} < K\, W_{2i-2},$$

risulta poi come al § 5 (l. c.)

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \cdots < \frac{W_m}{W_{m-1}} < \cdots < c,$$

con c quantità finita ed uguale a $\lim\limits_{m=\infty} \dfrac{W_m}{W_{m-1}}$; e perciò si avrà come al § 6 (l. c.) che le serie:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1^{(0)} + K_1^{(1)} k + K_1^{(2)} k^2 + \cdots \\ K_2 &= K_2^{(0)} + K_2^{(1)} k + K_2^{(2)} k^2 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 &= C_1^{(0)} + C_1^{(1)} k + C_1^{(2)} k^2 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

e le altre:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_0 + \bar{u}_1 k + \bar{u}_2 k^2 + \cdots \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 + \bar{v}_1 k + \bar{v}_2 k^2 + \cdots \\ \bar{w} &= \bar{w}_0 + \bar{w}_1 k + \bar{w}_2 k^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

convergono per $|k| < \frac{1}{c}$.

Lo stesso accadrà allora delle tre serie:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots \\ v &= v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots \\ w &= w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

le quali, non potendo convergere per $|k| = \frac{1}{c}$, rappresenteranno tre funzioni regolari in tutto S e σ (*) per $|k| < \frac{1}{c}$ e presenteranno una qualche singolarità per $|k| = \frac{1}{c}$.

4. Si ponga ora:

$$A = \int_{S'} (u^2 + v^2 + w^2)\, d\, S',$$

$$B = \int_{S'} ((A-1)\,\theta^2 + 2\,\gamma_{11}^2 + 2\,\gamma_{22}^2 + 2\,\gamma_{33}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2)\, d\, S',$$

$$C = \int_{S'} u\, d\, S', \qquad C' = \int_{S'} v\, d\, S', \qquad C'' = \int_{S'} w\, d\, S',$$

$$C''' = \int_{S'} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right) d\, S',$$

dove u, v, w e le loro derivate prime sono funzioni regolari dei punti di un certo spazio S', le quali soddisfano alle condizioni:

$$C = C' = C'' = C''' = 0,$$

e θ, γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{23}, γ_{31}, γ_{12} sono le solite espressioni relative alle funzioni u, v, w.

Si ha ovviamente:

$$B = \int_{S'} \Big\{ (A-1)\,\theta^2 + \gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big\}\, d\, S';$$

e quindi avuto riguardo all'ultima delle precedenti condizioni ed al fatto che l'espressione:

$$A - 1 = \frac{L}{K}$$

(*) Nella Memoria dell'Acc. di Torino veramente non si è tenuto conto dei punti di σ; del resto nessuna speciale osservazione è da farsi nella considerazione di questi punti. Così pure non si è avuto riguardo alle condizioni (9) a cui devono soddisfare le u_i, v_i, w_i nel caso di $X_i = Y_i = Z_i = 0$; ma la considerazione di queste condizioni, come vedremo, non muta i risultati. Analoga osservazione è da farsi relativamente ai calcoli dei §§ 1, 4 al Cap. III della stessa Memoria nel caso delle equazioni (3), (4).

varia fra 0 e ∞ (*), si potrà scrivere:

$$B > \int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} d S' + \int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cdots \right\} d S' +$$

$$+ \int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \cdots \right\} d S'.$$

Ora se si indica con l' la massima dimensione dello spazio S' e si ha riguardo alle prime tre delle precedenti condizioni, risulta (**):

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} d S'}{\int_{S'} u^2 \, d S'} > \frac{16}{9 l'^2},$$

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots \right\} d S'}{\int_{S'} v^2 \, d S'} > \frac{16}{9 l'^2},$$

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \cdots\cdots\cdots \right\} d S'}{\int_{S'} w^2 \, d S'} > \frac{16}{9 l'^2};$$

per cui sarà:

$$\frac{B}{A} > \frac{16}{9 l'^2}.$$

5. Si abbiano $4p$ terne di funzioni:

$$\varphi_1, \psi_1, \chi_1; \qquad \varphi_2, \psi_2, \chi_2; \; \ldots \; \varphi_{4p}, \psi_{4p}, \chi_{4p}, \tag{12}$$

dei punti del corpo elastico S della stessa natura delle precedenti funzioni u, v, w e $4p$ costanti:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{4p}.$$

(*) Vedi: Mem. cit.; Cap. I, § 3.

(**) POINCARÉ. *Sur les équations de la physique mathématique.* Rendic. del Circ. Mat. di Palermo; t. VIII, anno 1894. (Cfr. § III).

Vediamo se si possono determinare queste costanti in modo che, preso:

$$u = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_{4p} \varphi_{4p}$$
$$v = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \cdots + \alpha_{4p} \psi_{4p}$$
$$w = \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \cdots + \alpha_{4p} \chi_{4p}$$

risulti:

$$\frac{B}{A} > \frac{16}{9\, l^2},$$

essendo l la massima dimensione dei $p-1$ spazi convessi:

$$S_1, S_2, \ldots S_{p-1},$$

in cui supponiamo si possa decomporre lo spazio S.

Osserviamo anzitutto che, posto:

$$A_i = \int_{S_i} (u^2 + v^2 + w^2)\, d\, S_i\,, \qquad B_i = \int_{S_i} \Big\{ (A-1)\, \theta^2 + 2\, \gamma_{11}^2 +$$
$$+ 2\, \gamma_{22}^2 + 2\, \gamma_{33}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2 \Big\}\, d\, S_i\,,$$

$$C_i = \int_{S_i} u\, d\, S_i\,, \qquad C'_i = \int_{S_i} v\, d\, S_i, \qquad C''_i = \int_{S_i} w\, d\, S_i,$$

$$C'''_i = \int_{S_i} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\, S_i\,,$$

si può determinare un sistema di valori non tutti nulli delle $4\,p$ costanti α in modo che siano soddisfatte le $4\,p-4$ equazioni:

$$C_i = 0\,, \qquad C'_i = 0 \qquad C''_i = 0\,, \qquad C'''_i = 0\,. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots p-1)$$

Il risultato del paragrafo precedente ci dà allora per questi valori delle α_i:

$$\frac{B_i}{A_i} > \frac{16}{9\, l^2}\,; \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots p-1)$$

sicchè si avrà:

$$\frac{B}{A} = \frac{B_1 + B_2 + \ldots + B_{p-1}}{A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1}} > \frac{16}{9\, l^2}\,.$$

Di qui segue subito, come al § 5 (Cap. I) della cit. Mem., che, *se si ha un numero comunque grande di sistemi di funzioni analoghe alle* (12) *ed è data una quantità positiva qualsiasi* λ, *si può determinare il numero* *intero p in modo che sia:*

$$\frac{B}{A} > \lambda . \tag{13}$$

6. Data una grandezza positiva ad arbitrio λ e determinato il corrispondente numero p, si considerino le $4p$ terne di funzioni:

$$f_1', f_1'', f_1'''; f_2', f_2'' f_2'''; \ldots ; f'_{4p}, f''_{4p}, f'''_{4p} \tag{14}$$

e si indichino con

$$u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}; u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}; \ldots ; u^{(4p)}, v^{(4p)}, w^{(4p)}$$

le $4p$ terne di funzioni, analoghe alle funzioni u, v, w del § 3, che si ottengono sostituendo nelle equazioni (8) alle funzioni f', f'', f''' le (14).

Posto:

$$u^{(i)} = u_0^{(i)} + u_1^{(i)} k + u_2^{(i)} k^2 + \ldots$$
$$v^{(i)} = v_0^{(i)} + v_1^{(i)} k + v_2^{(i)} k^2 + \ldots$$
$$w^{(i)} = w_0^{(i)} + w_1^{(i)} k + w_2^{(i)} k^2 + \ldots ,$$
$$\theta_r^{(i)} = \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial w_r^{(i)}}{\partial z}$$

ed indicati con $X_r^{(i)}, Y_r^{(i)}, Z_r^{(i)}$ le espressioni (7) relative alle funzioni $u_r^{(i)}, v_r^{(i)}, w_r^{(i)}$, sarà:

$$\left.\begin{array}{c}
\Delta^2 u_r^{(i)} + A \dfrac{\partial \theta_r^{(i)}}{\partial x} + u_{r-1}^{(i)} = 0 \\[2ex]
\Delta^2 v_r^{(i)} + A \dfrac{\partial \theta_r^{(i)}}{\partial y} + v_{r-1}^{(i)} = 0 \\[2ex]
\Delta^2 w_r^{(i)} + A \dfrac{\partial \theta_r^{(i)}}{\partial z} + w_{r-1}^{(i)} = 0 \\[2ex]
X_r^{(i)} = Y_r^{(i)} = Z_r^{(i)} = 0 ;
\end{array}\right\} \tag{15}$$

e se si prende:

$$u' = \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \cdots + \alpha_{4p} u^{(4p)} = u'_0 + u'_1 k + u'_2 k^2 + \cdots$$
$$v' = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \cdots + \alpha_{4p} v^{(4p)} = v'_0 + v'_1 k + v'_2 k^2 + \cdots$$
$$w' = \alpha_1 w^{(1)} + \alpha_2 w^{(2)} + \cdots + \alpha_p w^{(4p)} = w'_0 + w'_1 k + w'_2 k^2 + \cdots$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{4p}$ costanti per ora indeterminate, risulterà:

$$\left.\begin{array}{l}
u'_r = \alpha_1 u_r^{(1)} + \alpha_2 u_r^{(2)} + \cdots + \alpha_{4p} u_r^{(4p)} \\
v'_r = \alpha_1 v_r^{(1)} + \alpha_2 v_r^{(2)} + \cdots + \alpha_{4p} v_r^{(4p)} \\
w'_r = \alpha_1 w_r^{(1)} + \alpha_2 w_r^{(2)} + \cdots + \alpha_{4p} w_r^{(4p)}
\end{array}\right\} \tag{16}$$

e dalle (15):

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 u'_r + A\frac{\partial \theta'_r}{\partial x} + u'_{r-1} = 0 \\ \Delta^2 v'_r + A\frac{\partial \theta'_r}{\partial y} + v'_{r-1} = 0 \\ \Delta^2 w'_r + A\frac{\partial \theta'_r}{\partial z} + w'_{r-1} = 0 \\ X'_r = Y'_r = Z'_r = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8)'$$

dove θ'_r, X'_r, Y'_r, Z'_r hanno il solito significato. Allora, posto:

$$\gamma_{11}^{(i)'} = \frac{\partial u'_i}{\partial x}, \qquad \gamma_{22}^{(i)'} = \frac{\partial v'_i}{\partial y}, \qquad \gamma_{33}^{(i)'} = \frac{\partial w'_i}{\partial z}, \qquad \gamma_{23}^{(i)'} = \frac{\partial v'_i}{\partial z} + \frac{\partial w'_i}{\partial y}, \dots$$

$$W'_{m\cdot n} = \int_S (u'_m u'_n + v'_m v'_n + w'_m w'_n)\, dS,$$

$$V'_{m\cdot n} = \int_S \Big\{ (A-1)\theta'_m \theta'_n + 2\gamma_{11}^{(m)'}\gamma_{11}^{(n)'} + 2\gamma_{22}^{(m)'}\gamma_{22}^{(n)'} + 2\gamma_{33}^{(m)'}\gamma_{33}^{(n)'}$$

$$+ \gamma_{23}^{(m)'}\gamma_{23}^{(n)'} + \gamma_{31}^{(m)'}\gamma_{31}^{(n)'} + \gamma_{12}^{(m)'}\gamma_{12}^{(n)'} \Big\} dS,$$

avremo come al § 3:

$$W'_{m\cdot n} = V'_{m\cdot n+1} = W'_{m+n} = V'_{m+n+1},$$

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \frac{W'_2}{W'_1} < \cdots < \frac{W'_r}{W'_{r-1}} < \cdots$$

7. Dai risultati del § 5 si ha intanto che si possono determinare le $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{4p}$ in modo che sia:

$$\frac{V'_{2r}}{W'_{2r}} = \frac{\int_S \Big\{ (A-1)\theta_r'^2 + 2(\gamma_{11}^{(r)'})^2 + 2(\gamma_{22}^{(r)'})^2 + \cdots \Big\} dS}{\int_S (u_r'^2 + v_r'^2 + w_r'^2)\, dS} > \lambda;$$

allora si avrà:

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \frac{W'_2}{W'_1} < \cdots < \frac{W'_{2r}}{W'_{2r-1}} < \frac{1}{\lambda};$$

e quindi, ripetendo i ragionamenti fatti alla fine del § 6 (Cap. I) della citata Memoria,

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \frac{W'_2}{W'_1} < \cdots < \frac{W'_m}{W'_{m-1}} < \cdots < \frac{1}{\lambda} \cdot$$

Questo risultato ci dice che le espressioni crescenti e positive:

$$\frac{W'_1}{W'_0}, \quad \frac{W'_2}{W'_1}, \ldots \frac{W'_m}{W'_{m-1}}, \ldots$$

ammettono un limite finito e positivo c' minore od uguale ad $\frac{1}{\lambda}\cdot$ Si ha dunque che *le funzioni* u', v', w' *sono regolari in tutto* S *e* σ *per* $|k| < \frac{1}{c'}$ *ed a fortiori per* $|k| < \lambda$.

8. Premesso questo teorema, si prenda:

$$\lambda > \frac{1}{c},$$

si determini il corrispondente numero p e si faccia:

$$\begin{array}{llll} f_1' = f', & f_2' = u_0, & f_3' = u_1, \ldots & f'_{4p} = u_{4p-2} \\ f_1'' = f'', & f_2'' = v_0, & f_3'' = v_1, \ldots & f''_{4p} = v_{4p-2} \\ f_1''' = f''', & f_2''' = w_0, & f_3''' = w_1, \ldots & f'''_{4p} = w_{4p-2}. \end{array}$$

Si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_0 + u_1 k + u_2 k^2 + \cdots \\ v^{(1)} &= v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + \cdots \\ w^{(1)} &= w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \cdots \\ u^{(2)} &= u_1 + u_2 k + u_3 k^2 + \cdots \\ v^{(2)} &= v_1 + v_2 k + v_3 k^2 + \cdots \\ w^{(2)} &= w_1 + w_2 k + w_3 k^2 + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u^{(4p)} &= u_{4p-1} + u_{4p} k + u_{4p+1} k^2 + \cdots \\ v^{(4p)} &= v_{4p-1} + v_{4p} k + v_{4p+1} k^2 + \cdots \\ w^{(4p)} &= w_{4p-1} + w_{4p} k + w_{4p+1} k^2 + \cdots, \end{aligned}$$

Applicando dunque il teorema del paragrafo precedente risulta che *le funzioni u', v', w', che così vengono determinate, sono regolari in tutto S e σ anche quando, essendo $|k| < \lambda$, sia $|k| > \frac{1}{c}$.*

9. Si ponga:

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= \alpha_1 f' + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 u_1 + \cdots + \alpha_{4p} u_{4p-2} \\
f^{(2)} &= \alpha_1 f'' + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \cdots + \alpha_{4p} v_{4p-2} \\
f^{(3)} &= \alpha_1 f''' + \alpha_2 w_0 + \alpha_3 w_1 + \cdots + \alpha_{4p} w_{4p-2} \\
\varphi' &= f^{(1)} + k u' = f^{(1)} + u'_0 k + u'_1 k^2 + u'_2 k^3 + \cdots \\
\varphi'' &= f^{(2)} + k v' = f^{(2)} + v'_0 k + v'_1 k^2 + v'_2 k^3 + \cdots \\
\varphi''' &= f^{(3)} + k w' = f^{(3)} + w'_0 k + w'_1 k^2 + w'_2 k^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Le tre serie φ', φ'', φ''' convergono evidentemente come le altre u', v', w'; onde si potrà scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
\int_S \Sigma g_1 \varphi' \, dS &= \int_S \Sigma g_1 f^{(1)} \, dS + k \int_S \Sigma g_1 u'_0 \, dS + k^2 \int_S \Sigma g_1 u'_1 \, dS + \cdots \\
&= \overline{u}'_0 + \overline{u}'_1 k + \overline{u}'_2 k^2 + \cdots \\
&= \overline{u}', \\
\int_S \Sigma g_2 \varphi' \, dS &= \overline{v}', \\
\int_S \Sigma g_3 \varphi' \, dS &= \overline{w}',
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

dove:

$$\begin{aligned}
\overline{u}'_r &= \alpha_1 \overline{u}_r + \alpha_2 \overline{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_{4p} \overline{u}_{4p+r-1} \\
\overline{v}'_r &= \alpha_1 \overline{v}_r + \alpha_2 \overline{v}_{r+1} + \cdots + \alpha_{4p} \overline{v}_{4p+r-1} \\
\overline{w}'_r &= \alpha_1 \overline{w}_r + \alpha_2 \overline{w}_{r+1} + \cdots + \alpha_{4p} \overline{w}_{4p+r-1} .
\end{aligned}$$

10. Le (8)', (10) ci dànno:

$$\overline{u}'_{n+1} = \int_S \Sigma g_1 u'_n \, dS, \qquad \overline{v}'_{n+1} = \int_S \Sigma g_2 u'_n \, dS, \qquad \overline{w}'_{n+1} = \int_S \Sigma g_3 u'_n \, dS;$$

e derivando si ha:

$$\frac{\partial \overline{u}'_{n+1}}{\partial x} = \int_S \Sigma \frac{\partial g_1}{\partial x} u'_n \, d\,S, \qquad \frac{\partial \overline{v}'_{n+1}}{\partial x} = \int_S \Sigma \frac{\partial g_2}{\partial x} u'_n \, d\,S,$$

$$\frac{\partial \overline{w}'_{n+1}}{\partial x} = \int_S \Sigma \frac{\partial g_3}{\partial x} u'_n \, d\,S;$$

donde:

$$\left| \frac{\partial \overline{u}'_{n+1}}{\partial x} \right| \leqq \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| \cdot | u'_n | \, d\,S, \qquad \left| \frac{\partial \overline{v}'_{n+1}}{\partial x} \right| \leqq \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \cdot | u'_n | \, d\,S,$$

$$\left| \frac{\partial \overline{w}'_{n+1}}{\partial x} \right| \leqq \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| \cdot | u'_n | \, d\,S.$$

Ora dalle formole:

$$(\overline{u}'_n)^2 = (u'_n - C_2^{(n)'} z + C_3^{(n)'} y - K_1^{(n)'})^2 < R' \; W'_{2n-2},$$

$$(\overline{v}'_n)^2 = (v'_n - C_3^{(n)'} x + C_1^{(n)'} z - K_2^{(n)'})^2 < R' \; W'_{2n-2},$$

$$(\overline{w}'_n)^2 = (w'_n - C_1^{(n)'} y + C_2^{(n)'} x - K_3^{(n)'})^2 < R' \; W'_{2n-2},$$

$$(K_1^{(n)'})^2 < \frac{K'}{I} W'_{2n-2}, \qquad (K_2^{(n)'})^2 < \frac{K'}{I} W'_{2n-2}, \qquad (K_3^{(n)'})^2 < \frac{K'}{I} W'_{2n-2},$$

$$(C_1^{(n)'})^2 < \frac{K'}{H} W'_{2n-2}, \qquad (C_2^{(n)'})^2 < \frac{K'}{H} W'_{2n-2}, \qquad (C_3^{(n)'})^2 < \frac{K'}{H} W'_{2n-2},$$

analoghe a quelle stabilite al § 3, risulta facilmente:

$$| u'_n | < \sqrt{R'' \; W'_{2n-2}}, \qquad | v'_n | < \sqrt{R'' \; W'_{2n-2}}, \qquad | w'_n | < \sqrt{R'' \; W'_{2n-2}};$$

per cui sarà:

$$\left| \frac{\partial \overline{u}'_{n+1}}{\partial x} \right| \leqq \sqrt{R' \; W'_{2n-2}} \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| d\,S, \qquad \left| \frac{\partial \overline{v}'_{n+1}}{\partial x} \right| \leqq \sqrt{R'' \; W'_{2n-2}} \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| d\,S,$$

$$\left| \frac{\partial \overline{w}'_{n+1}}{\partial x} \right| \leqq \sqrt{R'' \; W'_{2n-2}} \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| d\,S,$$

e poichè le espressioni $\left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|$, $\left| \frac{\partial g'_1}{\partial x} \right|$,... hanno un solo polo del secondo ordine in un punto isolato di S ne segue che gli integrali

$$\int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| d\,S, \qquad \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| d\,S, \qquad \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| d\,S,$$

sono proprii e si può quindi fissare una quantità finita S alla quale saranno sempre inferiori. Allora posto:

$$T = S\sqrt{R''},$$

avremo:

$$\left| \frac{\partial \overline{u}'_{n+1}}{\partial x} \right| < T\sqrt{W'_{2n-2}}, \quad \left| \frac{\partial \overline{v}'_{n+1}}{\partial x} \right| < T\sqrt{W'_{2n-2}}, \quad \left| \frac{\partial \overline{w}'_{n+1}}{\partial x} \right| < T\sqrt{W'_{2n-2}}.$$

Si ha poi:

$$\left| C_i^{(n+1)'} \right| < \sqrt{\frac{K'}{H}}\sqrt{W'_{2n}} = \sqrt{\frac{K'}{H}}\sqrt{\frac{W'_{2n}}{W'_{2n-2}}}\sqrt{W'_{2n-2}} < \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{K'}{H}}\sqrt{W'_{2n-2}};$$

abbiamo dunque:

$$\left| \frac{\partial u'_{n+1}}{\partial x} \right| < \left(T + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{K'}{H}}\right)\sqrt{W'_{2n-2}}, \qquad \left| \frac{\partial v'_{n+1}}{\partial x} \right| < \left(T + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{K'}{H}}\right)\sqrt{W'_{2n-2}},$$

$$\left| \frac{\partial w'_{n+1}}{\partial x} \right| < \left(T + \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{K'}{H}}\right)\sqrt{W'_{2n-2}}.$$

Da qui risulta che le serie dei valori assoluti dei termini delle tre serie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} &= \frac{\partial f^{1)}}{\partial x} + \frac{\partial u'_0}{\partial x}k + \frac{\partial u'_1}{\partial x}k^2 + \cdots \\ \frac{\partial \varphi''}{\partial x} &= \frac{\partial f^{2)}}{\partial x} + \frac{\partial v'_0}{\partial x}k + \frac{\partial v'_1}{\partial x}k^2 + \cdots \\ \frac{\partial \varphi'''}{\partial x} &= \frac{\partial f^{3)}}{\partial x} + \frac{\partial w'_0}{\partial x}k + \frac{\partial w'_1}{\partial x}k^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

convergono come l'altra:

$$\sqrt{W'_0} + k\sqrt{W'_2} + k^2\sqrt{W'_4} + \cdots$$

e quindi (cfr. Mem. cit.; Cap. II, § 6) che le (18) stesse convergono come le u', v', w'. Lo stesso si può evidentemente ripetere per le serie:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{\partial f^{1)}}{\partial y} + \frac{\partial u'_0}{\partial y}k + \frac{\partial u'_1}{\partial y}k^2 + \cdots$$

. . . .

. . . .

11. Ciò posto, è chiaro che le funzioni $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, soddisfano alle condizioni ordinariamente richieste per l'applicazione agli integrali (17) del teorema analogo a quello del POISSON (*); sicchè si potrà scrivere:

$$\Delta^2 u' + A\frac{\partial \theta'}{\partial x} + \varphi' = 0$$

$$\Delta^2 v' + A\frac{\partial \theta'}{\partial y} + \varphi'' = 0$$

$$\Delta^2 w' + A\frac{\partial \theta'}{\partial z} + \varphi''' = 0\,,$$

$$X' = Y' = Z' = 0\,,$$

dove θ', X', Y', Z' sono le solite espressioni relative alle funzioni u', v', w'.

Le precedenti equazioni si possono ancora scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^2 u' + A\frac{\partial \theta'}{\partial x} + k u' + \alpha_1 f' + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 u_1 + \cdots + \alpha_{4p} u_{4p-2} = 0\\
&\Delta^2 v' + A\frac{\partial \theta'}{\partial y} + k v' + \alpha_1 f' + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \cdots + \alpha_{4p} v_{4p-2} = 0\\
&\Delta^2 w' + A\frac{\partial \theta'}{\partial z} + k w' + \alpha_1 f'' + \alpha_2 w_0 + \alpha_3 w_1 + \cdots + \alpha_{4p} w_{4p-2} = 0\\
&X' = 0\,, \qquad Y' = 0\,, \qquad Z' = 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Dalle equazioni (8)' risulta poi che le tre serie:

$$\Delta^2 u' + A\frac{\partial \theta'}{\partial x} = \Delta^2 u'_0 + A\frac{\partial \theta'_0}{\partial x} + \left(\Delta^2 u'_1 + A\frac{\partial \theta'_1}{\partial x}\right)k + \cdots$$

$$\Delta^2 v' + A\frac{\partial \theta'}{\partial y} = \Delta^2 v'_0 + A\frac{\partial \theta'_0}{\partial y} + \left(\Delta^2 v'_1 + A\frac{\partial \theta'_1}{\partial y}\right)k + \cdots$$

$$\Delta^2 w' + A\frac{\partial \theta'}{\partial z} = \Delta^2 w'_0 + A\frac{\partial \theta'_0}{\partial z} + \left(\Delta^2 w'_1 + A\frac{\partial \theta'_1}{\partial z}\right)k + \cdots$$

(*) Vedi ad es. la mia Nota *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei; Vol. II, anno 1893, oppure: *Nuovo Cimento;* Vol. XXXIV, anno 1893). Le funzioni $g_1, g_1', g_1''; g_2, \ldots; g_3, \ldots$, a meno di un fattore costante, differiscono dalle funzioni $u_1, v_1, w_1; u_2, \ldots; u_3, \ldots$ di questa Nota per l'aggiunta delle funzioni $a_1', b_1', c_1'; a_2', \ldots; a_3', \ldots$ (Cfr. mia cit. Mem.; Cap. I, § 2), che sono regolari in tutto S e soddisfano alle equazioni indefinite dell'equilibrio per forze esterne nulle.

convengono in ugual grado in tutto S come le serie u', v', w'; infatti si ha:

$$\left| \Delta^2 u'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial x} \right| = | u'_{r-1} |$$

$$\left| \Delta^2 v'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial y} \right| = | v'_{r-1} |$$

$$\left| \Delta^2 w'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial z} \right| = | w'_{r-1} | .$$

12. Posto ora:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ 1 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix}, \quad P_1 = \begin{vmatrix} u' & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ u_0 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{4p-2} & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix},$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} v' & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ v_0 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{4p-2} & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix}, \quad P_3 = \begin{vmatrix} w' & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ w_0 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ w_1 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{4p-2} & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^r P_1}{\partial k^r} = P_1^{(r)}, \qquad \frac{\partial^r P_2}{\partial k^r} = P_2^{(r)}, \qquad \frac{\partial^r P_3}{\partial k^r} = P_3^{(r)},$$

$$\theta_P'^{(r)} = \frac{\partial P_1'^{(r)}}{\partial x} + \frac{\partial P_2'^{(r)}}{\partial y} + \frac{\partial P_3'^{(r)}}{\partial z},$$

risulta come ai §§ 9, 10, 11, 12 (Cap. II) della cit. Memoria:

$$u = \frac{P_1}{D}, \qquad v = \frac{P_2}{D}, \qquad w = \frac{P_3}{D}, \tag{20}$$

ed inoltre che per ogni radice k dell'ordine $i + 1$ dell'equazione:

$$D = 0 \tag{21}$$

si ha identicamente:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P'_1 = P'_2 = P'_3 = \dots = P_1^{(i-1)} = P_2^{(i-1)} = P_3^{(i-1)} = 0$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2 P_1^{(i)} + A\frac{\partial \theta_P^{(i)}}{\partial x} + k P_1^{(i)} = 0\\ \Delta^2 P_2^{(i)} + A\frac{\partial \theta_P^{(i)}}{\partial y} + k P_2^{(i)} = 0\\ \Delta^2 P_3^{(i)} + A\frac{\partial \theta_P^{(i)}}{\partial z} + k P_3^{(i)} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$X_P^{(i)} = Y_P^{(i)} = Z_P^{(i)} = 0\,, \tag{22$'$}$$

dove $X_P^{(i)}$, $Y_P^{(i)}$, $Z_P^{(i)}$ sono le espressioni (7) corrispondenti alle funzioni $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$.

Di qui segue che le funzioni u, v, w per $|k| < \lambda$ non possono avere che poli semplici soltanto corrispondenti alle radici dell'equazione (21) e che per ognuno di questi poli si ha un sistema di integrali $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$ delle equazioni (22), (22)'.

Finalmente, collegando questo risultato con quello del § 3 e ricordando che per valori negativi o complessi di k (*) non si hanno integrali regolari delle (22), (22)', risulta che *le funzioni* u, v, w *hanno un polo semplice per* $k = \frac{1}{c}$ che *questo valore di* k *è radice dell'equazione* (21) e che *se questa radice è dell'ordine* $i+1$ *le funzioni* $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$ *non sono identicamente nulle e soddisfano nei punti di* S *alle equazioni* (22), *nei punti di* σ *alle equazioni* (22)'.

13. Se si pone:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} &= k_1\,,\\ D &= D_1 (k_1 - k)^{i+1}\\ P_1 &= R_1 (k_1 - k)^i + S_1 (k_1 - k)^{i+1}\\ P_2 &= R_2 (k_1 - k)^i + S_2 (k_1 - k)^{i+1}\\ P_3 &= R_3 (k_1 - k)^i + S_3 (k_1 - k)^{i+1}\end{aligned}$$

con D_1 funzione di k che non si annulla per $k = k_1$ e con R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, funzioni di k e dei punti di S e di σ regolari per $|k| < \lambda$, le prime

(*) Vedi: Mem. cit.; Cap. II, §§ 1 e 2. — Si osservi che la costante di isotropia L è negativa.

tre delle quali non sono identicamente nulle per $k=k_1$, si avrà:

$$(P_1^{(i)})_{k=k_1} = \Pi(i)\,(R_1)_{k=k_1},$$
$$(P_2^{(i)})_{k=k_1} = \Pi(i)\,(R_2)_{k=k_1},$$
$$(P_3^{(i)})_{k=k_1} = \Pi(i)\,(R_3)_{k=k_1},$$
$$u = \frac{R_1 + (k_1 - k)\,S_1}{(k_1 - k)\,D_1},$$
$$v = \frac{R_2 + (k_1 - k)\,S_2}{(k_1 - k)\,D_1},$$
$$w = \frac{R_3 + (k_1 - k)\,S_3}{(k_1 - k)\,D_1};$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{k=k_1}(k_1 - k)\,u &= \left(\frac{R_1}{D_1}\right)_{k=k_1} = \frac{1}{\Pi(i)}\left(\frac{P_1{}^{i}}{D_1}\right)_{k=k_1} = p_1,\\
\lim_{k=k_1}(k_1 - k)\,v &= \left(\frac{R_2}{D_1}\right)_{k=k_1} = \frac{1}{\Pi(i)}\left(\frac{P_2{}^{i}}{D_1}\right)_{k=k_1} = q_1,\\
\lim_{k=k_1}(k_1 - k)\,w &= \left(\frac{R_3}{D_1}\right)_{k=k_1} = \frac{1}{\Pi(i)}\left(\frac{P_3{}^{i}}{D_1}\right)_{k=k_1} = r_1.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Posto dunque:

$$h_1 = -\frac{k_1 L}{\rho}, \qquad \theta_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial r_1}{\partial z}$$

ed indicate con X_1, Y_1, Z_1 le espressioni (7) relative alle funzioni p_1, q_1, r_1, si ha che *le funzioni* p_1, q_1, r_1, *sono i residui delle funzioni* u, v, w *nel polo* k_1 *e soddisfano,* come risulta delle (22), (22)' (23), *nei punti di* S *alle equazioni*:

$$\left.\begin{aligned}
L\,\Delta^2 p_1 + (L+K)\frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= h_1\,\rho\,p_1\\
L\,\Delta^2 q_1 + (L+K)\frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= h_1\,\rho\,q_1\\
L\,\Delta^2 r_1 + (L+K)\frac{\partial \theta_1}{\partial z} &= h_1\,\rho\,r_1,
\end{aligned}\right\} \tag{1)'$$

nei punti di σ *alle altre*:

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0. \tag{2)''$$

14. Gli integrali p_1, q_1, r_1 possono anche dedursi direttamente dai coefficienti delle serie (11)'. Per questo osserviamo primieramente che si può

scrivere :

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{p_1}{k_1 - k} + l_0 + l_1 k + l_2 k^2 + \dots \\ v &= \frac{q_1}{k_1 - k} + m_0 + m_1 k + m_2 k^2 + \dots \\ w &= \frac{r_1}{k_1 - k} + n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \dots\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

con

$$\left.\begin{aligned}l &= l_0 + l_1 k + l_2 k^2 + \dots \\ m &= m_0 + m_1 k + m_2 k^2 + \dots \\ n &= n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \dots\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

serie convergenti in ugual grado in tutto S e σ per qualunque valore di k di modulo inferiore ed un certo limite $k_2 > k_1$.

Il confronto della serie (24) con la (11)′ ci dà:

$$u_i = l_i + \frac{p_1}{k_1^{i+1}}, \qquad v_i = m_i + \frac{q_1}{k_1^{i+1}}, \qquad w_i = n_i + \frac{r_1}{k_1^{i+1}}; \tag{26}$$

e queste, osservando che si ha:

$$\lim_{i=\infty} (l_i k_1^i) = 0, \qquad \lim_{i=\infty} (m_i k_1^i) = 0, \qquad \lim_{i=\infty} (n_i k_1^i) = 0,$$

ci danno finalmente:

$$p_1 = k_1 \lim_{i=\infty} (u_i k_1^i), \qquad q_1 = k_1 \lim_{i=\infty} (v_i k_1^i), \qquad r_1 = k_1 \lim_{i=\infty} (w_i k_1^i).$$

15. Dalle (8), (1)″, (2)″ e (26) risulta ovviamente, supposto che le espressioni $f' - p_1$, $f'' - q_1$, $f''' - r_1$ non siano indenticamente nulle da per tutto,

$$\Delta^2 l_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + f' - p_1 = 0$$

$$\Delta^2 m_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + f'' - q_1 = 0$$

$$\Delta^2 n_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + f''' - r_1 = 0,$$

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0;$$

$$\Delta^2 l_i + A \frac{\partial \theta_i}{\partial x} + l_{i-1} = 0$$

$$\Delta^2 m_i + A \frac{\partial \theta_i}{\partial y} + m_{i-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\Delta^2 n_i + A \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + n_{i-1} = 0$$

$$X_i = Y_i = Z_i = 0 ,$$

dove i simboli θ_i, X_i, Y_i, Z_i hanno i soliti significati e corrispondono alle funzioni l_i, m_i, n_i.

Partendo da queste equazioni e ragionando come precedentemente si trova facilmente il valore di k_2 e si dimostra che per questo valore di k le funzioni l, m, n hanno un polo semplice, i cui residui sono dati dalle formole:

$$p_2 = k_2 \lim_{i=\infty} (l_i k_2^i) , \qquad q_2 = k_2 \lim_{i=\infty} (m_i k_2^i) , \qquad r_2 = k_2 \lim_{i=\infty} (n_i k_2^i)$$

e soddisfano nei punti di S alle equazioni:

$$\Delta^2 p_2 + A \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + k_2 p_2 = 0$$

$$\Delta^2 q_2 + A \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + k_2 q_2 = 0$$

$$\Delta^2 r_2 + A \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + k_2 r_2 = 0 ,$$

nei punti di σ alle altre:

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0 ,$$

essendo θ_2, X_2, Y_2, Z_2 relative alle funzioni p_2, q_2, r_2.

Seguitando nella stessa guisa risulta dunque che, corrispondentemente ad una terna di funzioni arbitrarie, *esiste in generale una serie infinita di valori positivi e crescenti:*

$$k_1, \ k_2, \ k_3, \dots \tag{27}$$

del parametro k ed una corrispondente serie di terne di funzioni regolari:

$$p_1, q_1, r_1; \qquad p_2, q_2, r_2; \qquad p_3, q_3, r_3; \dots \tag{28}$$

per le quali, posto:

$$h_i = -\frac{k_i L}{\rho} ,$$

ed introdotti i soliti simboli θ_i, X_i, Y_i, Z_i relativi alle funzioni p_i, q_i, r_i, *si ha nei punti di* S:

$$L\Delta^2 p_i + (L+K)\frac{\partial \theta_i}{\partial x} = h_i \rho p_i$$

$$L\Delta^2 q_i + (L+K)\frac{\partial \theta_i}{\partial y} = h_i \rho q_i$$

$$L\Delta^2 r_i + (L+K)\frac{\partial \theta_i}{\partial z} = h_i \rho r_i ,$$

nei punti di σ:

$$X_i = Y_i = Z_i = 0.$$

I valori $k_1, k_2, k_3 \ldots$ si dicono *valori eccezionali* del parametro k, le terne di funzioni (28) si dicono *soluzioni eccezionali* delle equazioni (1)', (2)'.

16. Il primo valore eccezionale k_1 è inferiore alla costante λ introdotta al § 8; sicchè possiamo dire che *per* k *variabile tra* 0 *e* λ *esiste almeno un valore eccezionale.* Ora fra 0 e λ vi potranno essere in generale più valori eccezionali, alcuni dei quali possono anche non comparire nella serie (27); però si può dimostrare che *fra* 0 *e* λ *non ci possono essere più di* $4+p-1$ *valori eccezionali.*

Ammesso infatti che ne esistessero $4p$:

$$k'_1,\ k'_2, \ldots\ k'_{4p},$$

corrispondenti alle soluzioni eccezionali:

$$p'_1,\ q'_1,\ r'_1; \qquad p'_2,\ q'_2,\ r'_2; \ldots \qquad p'_{4p},\ q'_{4p},\ r'_{4p},$$

posto:

$$f_i' = p_i', \qquad f_i'' = q_i', \qquad f_i''' = r_i', \qquad (i = 1,\ 2, \ldots\ 4p),$$

avremo secondo i risultati del § 6:

$$u^{(i)} = \frac{p'_i}{k'_i - k}, \qquad v^{(i)} = \frac{q'_i}{k'_i - k}, \qquad w^{(i)} = \frac{r'_i}{k'_i - k},$$

$$u' = \sum_1^{4p} {}_i \frac{\alpha_i p'_i}{k'_i - k}, \qquad v' = \sum_1^{4p} {}_i \frac{\alpha_i q'_i}{k'_i - k}, \qquad w' = \sum_1^{4p} {}_i \frac{\alpha_i r'_i}{k'_i - k}.$$

Queste formole ci dicono che per qualsiasi sistema di valori non tutti nulli delle α_i le funzioni u', v', w' debbono avere per $|k| < \lambda$ un polo semplice almeno; e questo risultato è in contradizione col teorema del § 7, secondo il quale si dovrebbero poter determinare le α_i in modo che le funzioni u', v', w' risultino regolari per $|k| < \lambda$.

Di qui segue, poichè ad ogni valore comunque grande e finito di λ corrisponde un valore finito di p, che *i punti dell'asse reale e positivo di variabilità di k, i quali corrispondono a valori eccezionali, formano un gruppo di punti G di prima specie, avente per punto limite il punto all'infinito.*

17. È facile dimostrare che le soluzioni eccezionali (27) godono delle proprietà (*):

$$\int_S (p_m p_n + q_m q_n + r_m r_n)\, d\, S \begin{cases} = 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ \neq 0 & \text{se} \quad m = n\,; \end{cases}$$

e da questa si può subito dedurre che le soluzioni eccezionali (28) sono tutte linearmente indipendenti (**).

Questo risultato accoppiato con quello del § 1, ci dice poi che corrispondentemente ad una terna di funzioni arbitrarie *esiste in generale una serie infinita di integrali regolari linearmente indipendenti delle equazioni* (1), (2) *della forma:*

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \left\{ \lambda_i \cos (t \sqrt{h_i}) + \mu_i \operatorname{sen} (t \sqrt{h_i}) \right\} p_i\,, \\ v_i &= \left\{ \lambda_i \cos (t \sqrt{h_i}) + \mu_i \operatorname{sen} (t \sqrt{h_i}) \right\} q_i\,, \\ w_i &= \left\{ \lambda_i \cos (t \sqrt{h_i}) + \mu_i \operatorname{sen} (t \sqrt{h_i}) \right\} r_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Aggiungiamo qui che se invece di partire dalle funzioni f', f'', f''' si fosse partiti da tre altre φ', φ'', φ''', avremmo ottenuta un'altra serie (finita od infinita) di *valori eccezionali*:

$$k'_1,\ k'_2,\ k'_3, \ldots$$

facente parte del gruppo G ed una corrispondente serie di *soluzioni eccezionali:*

$$p'_1,\ q'_1,\ r'_1; \qquad p'_2,\ q'_2,\ r'_2; \qquad p'_3,\ q'_3,\ r'_3; \ldots;$$

e quindi un' altra serie di integrali regolari linearmente indipendenti delle

(*) Vedi ad es.: CESÀRO; l. c. § 4.

(**) Vedi ad es.: CESÀRO; l. c. § 14.

equazioni (1), (2) della forma:

$$\left.\begin{aligned} u'_i &= \left\{\lambda'_i \cos(t\sqrt{h'_i}) + \mu'_i \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i})\right\} p'_i, \\ v'_i &= \left\{\lambda'_i \cos(t\sqrt{h'_i}) + \mu'_i \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i})\right\} q'_i, \\ w'_i &= \left\{\lambda'_i \cos(t\sqrt{h'_i}) + \mu'_i \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i})\right\} r'_i, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

con

$$h'_i = -\frac{k'_i L}{\rho}.$$

Se facciamo:

$$\lambda_i = 1, \qquad \mu_i = 0, \qquad \lambda'_i = 0, \qquad \mu'_i = \frac{1}{\sqrt{h'_i}},$$

le serie di integrali (29), (30) divengono rispettivamente:

$$u_i = p_i \cos(t\sqrt{h_i}), \qquad v_i = q_i \cos(t\sqrt{h_i}), \qquad w_i = r_i \cos(t\sqrt{h_i}). \tag{29)'$$

$$u'_i = \frac{p'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}), \qquad v'_i = \frac{q'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}), \qquad w'_i = \frac{r'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}). \tag{30)'$$

18. Se le espressioni:

$$\left.\begin{aligned} &f' - \sum_1^r{}_i p_i, \qquad f'' - \sum_1^r{}_i q_i, \qquad f''' - \sum_1^r{}_i r_i, \\ &\varphi' - \sum_1^s{}_i p'_i, \qquad \varphi'' - \sum_1^s{}_i q'_i, \qquad \varphi''' - \sum_1^s{}_i r'_i, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

per particolari valori di r ed s si annullano identicamente in tutti i punti del corpo elastico, gli integrali (29)$'$ saranno r soltanto e quelli (30)$'$ saranno s, e le funzioni:

$$\begin{aligned} u\,(x, y, z, t) &= \sum_1^r{}_i p_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^s{}_i \frac{p'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}), \\ v\,(x, y, z, t) &= \sum_1^r{}_i q_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^s{}_i \frac{q'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}), \\ w\,(x, y, z, t) &= \sum_1^r{}_i r_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^s{}_i \frac{r'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}), \end{aligned}$$

rappresenteranno evidentemente il moto del corpo elastico corrispondente agli spostamenti iniziali arbitrarii

$$u\,(x, y, z, 0) = f', \qquad v\,(x, y, z, 0) = f'', \qquad w\,(x, y, z, 0) = f''',$$

e alle velocità iniziali arbitrarie

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi', \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi'', \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi'''.$$

Nel caso contrario, che è il più generale, in cui le (31) non sono mai identicamente nulle in tutto S, gli integrali (29)', (30)' saranno infiniti e le espressioni:

$$\left.\begin{aligned} u\,(x,\ y,\ z,\ t) &= \sum_1^\infty{}_i\, p_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^\infty{}_i \frac{p'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}) \\ v\,(x,\ y,\ z,\ t) &= \sum_1^\infty{}_i\, q_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^\infty{}_i \frac{q'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}) \\ w\,(x,\ y,\ z,\ t) &= \sum_1^\infty{}_i\, r_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^\infty{}_i \frac{r'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

rappresenteranno il moto del corpo elastico, corrispondente agli spostamenti iniziali arbitrarii f', f'', f''' ed alle velocità iniziali arbitrarie φ', φ'', φ''', tutte le volte che le serie ai secondi membri delle (32) siano convergenti in ugual grado in tutto S e σ e derivabili da per tutto due volte rispetto a t, due volte rispetto ad x, y, z prese anche insieme, e che si abbia:

$$\left.\begin{aligned} u\,(x,\ y,\ z,\ 0) = \sum_1^\infty{}_i\, p_i = f', \qquad v\,(x,\ y,\ z,\ 0) = \sum_1^\infty{}_i\, q_i = f'', \\ w\,(x,\ y,\ z,\ 0) = \sum_1^\infty{}_i\, r_i = f'''. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty{}_i\, p'_i = \varphi', \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty{}_i\, q'_i = \varphi'', \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty{}_i\, r'_i = \varphi'''. \tag{34}$$

S'intende poi che, ove si sappia che soltanto le prime tre delle (31) oppure soltanto le altre tre si annullano identicamente in tutto S, le prime tre serie ai secondi membri delle (32) oppure soltanto le altre tre si ridurranno a somme e quindi le (33) oppure le (34) saranno certamente vere.

19. I precedenti ragionamenti suppongono che le due terne di funzioni:

$$f',\ f'',\ f''';\qquad \varphi',\ \varphi'',\ \varphi'''$$

soddisfino rispettivamente alle *sei* condizioni poste al § 2 per la prima terna. Nel caso contrario dovremo sostituire alle funzioni precedenti le altre:

$$f_1' = f' + C_2 z - C_3 y + K_1, \qquad f_1'' = f'' + C_3 x - C_1 z + K_2,$$
$$f_1''' = f''' + C_1 y - C_2 x + K_3$$
$$\varphi_1' = \varphi' + C'_2 z - C'_3 y + K'_1, \qquad \varphi_1'' = \varphi'' + C'_3 x - C_1' z + K_2',$$
$$\varphi_1''' = \varphi''' + C_1' y - C_2' x + K_3',$$

dove le costanti C_1, C_2, C_3; K_1, K_2, K_3; C_1', ...; K_1' ... saranno determinate dai due sistemi di equazioni lineari che si ottengono esprimendo che le f_1', f_1'', f_1'''; φ_1', φ_1'', φ_1''' soddisfano alle rammentate condizioni del § 2. Allora invece delle (32) avremo le formole:

$$\left.\begin{aligned}
u &= (C_3 y - C_2 z - K_1) + t(C_3' y - C_2' z - K_1') + \sum_1^\infty{}_i\, p_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \\
&\qquad + \sum_1^\infty{}_i \frac{p'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}) \\
v &= (C_1 z - C_3 x - K_2) + t(C_1' z - C_3' x - K_2') + \sum_1^\infty{}_i\, q_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \\
&\qquad + \sum_1^\infty{}_i \frac{q'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}) \\
w &= (C_2 x - C_1 y - K_3) + t(C_2' x - C_1' y - K_3') + \sum_1^\infty{}_i\, r_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \\
&\qquad + \sum_1^\infty{}_i \frac{r'_i}{\sqrt{h'_i}} \operatorname{sen}(t\sqrt{h'_i}),
\end{aligned}\right\} \quad (32)'$$

ed invece delle (33), (34) le altre:

$$\left.\begin{aligned}
u\,(x, y, z, 0) &= (C_3 y - C_2 z - K_1) + \sum_1^\infty{}_i\, p_i = (C_3 y - C_2 z - K_1) + f'_1 = f' \\
v\,(x, y, z, 0) &= (C_1 z - C_3 x - K_2) + \sum_1^\infty{}_i\, q_i = (C_1 z - C_3 x - K_2) + f_1'' = f'' \\
w\,(x, y, z, 0) &= (C_2 x - C_1 y - K_3) + \sum_1^\infty{}_i\, r_i = (C_2 x - C_1 y - K_3) + f_1''' = f'''
\end{aligned}\right\} \quad (33)'$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= (C_3' y - C_2' z - K_1') + \sum_1^\infty{}_i\, p_i' = (C_3' y - C_2' z - K_1') + \varphi_1' = \varphi' \\
\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} &= (C_1' z - C_3' x - K_2') + \sum_1^\infty{}_i\, q_i' = (C_1' z - C_3' x - K_2') + \varphi_1'' = \varphi'' \\
\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} &= (C_2' x - C_1' y - K_3') + \sum_1^\infty{}_i\, r_i' = (C_2' x - C_1' y - K_3') + \varphi_1''' = \varphi'''.
\end{aligned}\right\} \quad (34)'$$

Pesaro, Maggio 1897.

Sui derminanti d'ordine infinito.

(*Di* TITO CAZZANIGA, *a Pavia.*)

L'argomento è relativamente nuovo nella scienza. Al pari di altre, questa teoria presentavasi agli analisti come studio necessario alla trattazione di problemi pratici, o come trasformazione di problemi apparentemente di natura affatto disforme.

Così l'astronomo HILL in uno studio sul movimento del perigeo lunare (*Act. Math.*, B. 8) imbattevasi in un sistema di infinite equazioni, tra un numero infinito d'incognite, la risoluzione del quale egli trattava a seconda delle regole ordinarie, valide per un sistema finito. Per tal modo giungeva a risultati esatti senza dubbio, in quanto coincidevano con quelli sperimentali: ma non cessava per questo la necessità di stabilire analiticamente e con rigore la validità del metodo usato.

Il prof. PINCHERLE poi in una sua memoria pubblicata sugli *Ann. di Mat.*, 1884 (Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi) si dà allo studio di un metodo che, in certo modo presentasi quale estensione della ordinaria teoria sui sistemi di equazioni lineari, quando in essi tanto il numero delle equazioni come quello delle incognite diventa infinito. A questo ufficio l'autore introduce due gruppi doppiamente infiniti di numeri, che chiama « associati », i quali si comportano come il sistema degli elementi di un determinante D, col sistema degli elementi reciproci divisi per D. Però il caso trattato dal PINCHERLE è molto speciale.

Anche l'attenzione del POINCARÉ a proposito di un metodo di calcolo usato dall'APPEL fu richiamata su tale argomento (*Bull. d. l. Soc. Math. de F.*, T. XIII); e più tardi leggendo appunto la memoria di HILL ebbe occasione di riprenderne lo studio, e di trattare direttamente in una sua nota speciale (*Bull. d. l. Soc. Math. de F.*, T. XIV) l'argomento di quei determinanti di ordine infinito in cui la diagonale è tutta di elementi uguali all'unità positiva, e la serie doppia degli elementi non diagonali converge assolutamente. A questo proposito dimostra alcuni teoremi assai notevoli.

Il sig. Helge v. Koch nel 1891 in una ricerca sulle equazioni differenziali (*Act. Math.*, B. XV) si imbatte a sua volta in determinanti infiniti del tipo di quelli studiati dal Poincaré, e nell'anno successivo ritornando sulle proprie ricerche, premette uno studio piuttosto ampio di una certa classe di determinanti infiniti che comprendono quelli del Poincaré e che l'autore chiama della « forma normale ». Ivi è realmente tutta l'ossatura per una teoria completa di tali determinanti (*Act. Math.*, XVI).

Dicesi della forma normale un determinante infinito i cui elementi soddisfanno alla seguente condizione:

« Il prodotto degli elementi diagonali converge assolutamente, e così pure la serie doppia degli elementi non diagonali. »

Tale condizione è sufficiente per stabilire la convergenza del determinante secondo un criterio molto opportuno già enunciato dal Poincaré. Quindi l'A. nella memoria in discorso estende ai normali le proprietà di quei determinanti di cui già parlammo, ne fissa gli sviluppi, estensione diretta di quelli che valgono per determinanti d'ordine finito, e stabilisce il teorema della moltiplicazione. Egli tratta anche di una certa classe di determinanti più generali dei precedenti, e fa un breve cenno di quelli i cui elementi sono funzioni di una variabile indipendente.

In una seconda parte della memoria si occupa, come applicazione, della risoluzione dei sistemi infiniti di equazioni lineari omogenee.

Per la storia del soggetto restami da far notare soltanto che il primo Trattato nel quale esso fu presentato in rapida sintesi è quello eccellente del prof. Ernesto Pascal pubblicato di recente.

Nella presente Memoria (consigliatami dal prof. Ernesto Pascal) io mi propongo in certo modo di generalizzare e integrare i pochi lavori fin qui comparsi sull'argomento i quali in sostanza si restringono solo intorno a certi punti essenziali della teoria. Parvemi utile a questo scopo di seguire quello stesso ordinamento che tiene la teoria dei determinanti d'ordine finito, e di ricercare quei metodi che ne sono la diretta estensione.

Anzitutto però mi fu necessario introdurre un criterio di convergenza più restrittivo di quello adoperato dal von Koch. Questo autore nella sua Memoria, per la convergenza di un determinante.

$$D = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = -\infty \cdots -1,\ 0,\ 1,\ 2 \ldots \infty),$$

pone la condizione che sia:

$$| D_{m+p} - D_m | < \sigma ,$$

essendo:

$$D_m = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = -m \ldots 0 \ldots + m).$$

Da ciò è chiaro che D risulta come limite dei valori che assumono i det. d'ordine dispari formati con $2m+1$ linee e colonne del dato e aventi per elemento centrale a_{00}.

Ma è chiaro d'altra parte che i determinanti costruiti analogamente e d'ordine $2m$ possono tendere a un limite diverso. Per questo ho stimato opportuno di modificare l'enunciato criterio stabilendo che debba essere soddisfatta la relazione:

$$| D_{m+p-n+q} D_{m,n} | < \sigma ,$$

dove:

$$D_{m,n} = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = -n \ldots 0 \ldots + m),$$

per m, n abbastanza grandi e p, q interi qualunque.

Secondo tale definizione alcuni determinanti, innanzi considerati come convergenti, vanno a formare una classe speciale che diciamo *indeterminati*. Ma la vera utilità sta in ciò « che è sempre possibile per essa di trasformare un convergente le cui linee e colonne si estendono da $-\infty$ a $+\infty$ in un altro per il quale si estendono da 1 ad ∞ ». Tutti i teoremi adunque assumono una forma più semplice ed evidente.

Nei due primi capitoli tratto delle proprietà generali comuni a tutti i convergenti; in quelli che seguono, fino all'XI sviluppo l'intera teoria dei normali. In essi riporto i notevolissimi risultati del von Koch, nel fine di riuscire per quanto è possibile compiuto. Di molte proprietà che l'autore accennava soltanto là, dove lo stringeva il bisogno, diedi la dimostrazione e raggruppai in modo opportuno con altre ch'io ebbi a trovare.

Fu quindi introdotto un capitolo sui minori, un altro sopra certi sviluppi assolutamente convergenti, un terzo sul prodotto dalle matrici, ecc. E questo argomento insieme con quello dei reciproci e dei determinanti nulli, mi parvero essenziali a rendere completa e rigorosa la nostra ricerca.

In quel capitolo a parte in cui si tratta di speciali identità fra minori, è presentata l'espressione più generale di certe identità, di cui è d'uopo nella risoluzione dei sistemi infiniti di equazioni. Di esse il von Koch non avvertiva, o non si è curato di dare che una forma particolare assai, non in tutto sufficiente allo scopo.

I risultati del prof. Pincherle studiai brevemente in un capitolo a parte. Essi mi portarono alla determinazione di una speciale classe di det. nulli senza che gli elementi di essi sieno legati da relazioni speciali.

Da ultimo sui sistemi infiniti estendendo il procedimento del von Koch per le equaz. lineari omogenee, è data la soluzione per sistemi lineari quali si vogliano; anzi, all'enunciato del teorema, coll'introduzione del concetto di *caratteristica*, ebbi modo di attribuire quella forma elegante e concisa che inferiva il Capelli al teorema analogo sopra i sistemi finiti.

1.°

Definizioni, notazioni ed esempi.

1. Sia:

$$a_{ik}, \qquad (i,\ k = -\infty \cdots +\infty),$$

un gruppo doppiamente infinito di quantità reali o complesse.

Se ne formiamo la matrice con la legge ordinaria, si ottiene una tabella di numeri composta di infinite linee e di infinite colonne che sarà chiamata per definizione: *determinante d'ordine infinito.*

2. Si formi il determinante:

$$D_{m,n} = [a_{ik}]\ ; \qquad (i,\ k = -n \cdots +m),$$

se tale determinante per valori indefinitamente crescenti di m ed n tende ad un limite unico e determinato D, questo limite lo indicheremo con:

$$D = [a_{ik}]\ ; \qquad (i,\ k = -\infty \cdots +\infty),$$

e diremo che il determinante infinito è *convergente* e ha D per valore.

Se tal limite non esiste, il determinante è *divergente;* se infine il limite cambia con la legge con la quale m ed n tendono all' infinito, esso è *indeterminato.*

3. Applicando l'ordinario criterio per la ricerca del limite di una funzione a due variabili m ed n, risulta:

« Il determinante delle quantità a_{ik} è convergente quando per ogni σ piccolo ad arbitrio si possa determinare un intero positivo N tale che la diseguaglianza:

$$| D_{m+p,n+q} - D_{m,n} | < \sigma,$$

per tutti gli m, n maggiori di N e per qualsivogliano valori interi e positivi di p e q, resti verificata. »

Fissata poi l'esistenza di questo limite, per determinarlo sarà indifferente la legge con la quale faremo tendere m ed n all' infinito.

In particolare potremo porre:

$$m = n, \qquad D_{m,n} = D_m,$$

e determinare:

$$D = \lim D_m.$$

4. Nel determinante D la diagonale degli elementi a_{ii} la chiameremo *diagonale principale* e gli elementi stessi li diremo *diagonali*; gli altri a_{ik} per i diverso da k si diranno *non-diagonali.* In particolare l'elemento a_{00}, che è necessario fissare per procedere alla ricerca del limite, sarà detto, *origine.*

Un determinante resta definito, quando, conosciuta la matrice dei suoi elementi se ne fissi l'origine e la diagonale principale.

5. La definizione posta di determinante infinito è certamente assai generale. Però è bene osservare che i determinanti infiniti del tipo:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \infty),$$

sono tali che, a priori, non si possono considerare come casi particolari di quelli definiti in precedenza.

Quindi, per ora, è necessario ritenerli come un tipo a sè, estendendo ad essi tutte le poste convenzioni e definizioni opportunamente modificate.

È chiaro poi che in tali determinanti l'origine e la diagonale principale restano fissate e che ogni matrice rappresenta quindi un solo determinante.

6. Raccogliamo qualche esempio numerico di determinanti infiniti di ambo i tipi considerati.

a) Si abbia il determinante:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i, k = -\infty \cdots + \infty),$$

nel quale:

$$a_{ik} = \frac{1}{2}, \qquad a_{ii} = 1.$$

Un determinante d'ordine r, finito, costruito nello stesso modo, ha per valore:

$$D_r = \frac{r+1}{2^r},$$

Costruendo allora $D_{m+p,\,n+q}$, e $D_{m,n}$ e facendo la differenza, risulta:

$$\left| D_{m+p,\,n+q} - D_{m,n} \right| = \left| \frac{m+n+2}{2^{m+n+1}} \left(\frac{1}{2^{p+q}} - 1 \right) + \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{p+q}{2^{p+q}} \right|.$$

Tale espressione, come è facile verificare, al crescere indefinito di m ed n diventa più piccola di qualsivoglia quantità σ, quindi il determinante D è *convergente.*

Ponendo allora:

$$D = \lim D_m = \lim \frac{2(m+1)}{2^{2m+1}},$$

risulta subito:

$$D = 0.$$

b) Si consideri ora il determinante di elementi:

$$a_{ik} = 0, \qquad a_{ii} = -1, \qquad (i,\ k = -\infty \cdots + \infty).$$

Si ottiene senz'altro:

$$| D_{m+p,\,n+q} - D_{m,n} | = | (-1)^{p+q} - 1 |.$$

Ora l'espressione fra parentesi è nulla per $(p+q)$ pari, ed è uguale a -2 per $(p+q)$ dispari; quindi la differenza del primo membro non può rendersi minore di σ che per una scelta opportuna di p e q. Il determinante D è dunque *indeterminato.*

Infatti è facile verificare che:

$$D = \lim D_{m,m} = -1$$

$$D = \lim D_{m,m-1} = +1.$$

c) Si consideri ancora il determinante D di elementi:

$$a_{ik} = 1, \qquad a_{ii} = 0, \qquad (i,\ k = -\infty \cdots + \infty).$$

Il valore di un determinante di ordine r finito, costruito nello stesso modo è:

$$D_r = (r-1)(-1)^{r-1},$$

onde:

$$|D_{m+p,\,n+q} - D_{m,n}| = |(m+n)[(-1)^{p+q} - 1](-1)^{m+n} + (p+q)(-1)^{m+n+p+q}|.$$

Questa differenza non è possibile renderla minore di un σ piccolo ad arbitrio, al crescere di m ed n; il determinante D è dunque *divergente.*

7. Presentiamo infine qualche esempio di determinanti infiniti per i quali gli indici i, k si estendono da 1 a $+\infty$ e che realmente si presentano come l'estensione più diretta dei determinanti ordinari:

a') Si abbia il determinante di fattoriali:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots 0 \dots \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{\overline{n-1}!} & \frac{1}{\overline{n-2}!} & \dots 1 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

È noto che per r finito si ottiene:

$$D_r = \frac{1}{r!},$$

onde applicando il criterio della convergenza, opportunamente semplificato per determinanti di questo tipo, risulta:

$$\left| D_{m+p} - D_m \right| = \frac{1}{m!} \left| \frac{1}{(m+1)\dots(m+p)} - 1 \right|,$$

quantità che tende a zero col crescere di m.

Il determinante D *converge* adunque ed ha per valore:

$$D = \lim D_m = \lim \frac{1}{m!} = 0.$$

b') Il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

è invece *indeterminato.* Poichè infatti:

$$D_r = (-1)^{r-1},$$

si ha:

$$| D_{m+p} - D_m | = | \{ (-1)^p - 1 \} (-1)^{m-1} | .$$

Questa differenza va a zero quando p sia pari, ed è uguale a $+2$ quando p sia dispari. Del resto poi per $m = 2s + 1$:

$$D = \lim D_m = +1,$$

per $m = 2s$:

$$D = \lim D_m = -1.$$

c') Da ultimo il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

è *divergente.* Infatti per r finito si ha:

$$D_r = \sum_1^r \frac{1}{r},$$

Ma è noto che la serie:

$$\sum \frac{1}{r},$$

è divergente, quindi il suo resto non tende a zero, onde la differenza:

$$| D_{m+p} - D_m |,$$

non tende a zero al crescere di m.

c. d. d.

2.°

Determinanti convergenti — Proprietà generali.

1. La costruzione di determinanti infiniti convergenti, che abbiamo effettuata nel capitolo che precede, ci dispensa dal dimostrare l'effettiva esistenza di tali determinanti.

Ora, come per le serie, così per i determinanti infiniti, ammessa, a priori, la convergenza, è possibile di mettere in luce alcune proprietà generali che non dipendono dalla speciale natura del determinante, e che sono la diretta estensione di quelle presentate dai determinanti di ordine finito.

In questo capitolo esporremo le più comuni tra esse, riserbandoci di stabilire più innanzi alcuni criteri *sufficienti* a dimostrare la convergenza supposta.

2. *Il valore di un determinante convergente non cambia quando si prenda per origine un elemento diagonale arbitrario.*

Sia D' il determinante che si ottiene da D assumendo come origine l'elemento $a_{\lambda\lambda}$; dimostriamo anzitutto che esso converge.

Infatti l'ammessa convergenza di D ci dà:

$$|D_{m+p,\,n+q} - D_{m,\,n}| < \sigma ,$$

per m, n maggiori di un certo numero N. Se allora scegliamo $m, n, > \lambda$, ciò che è sempre possibile, e si pone:

$$m - \lambda = m_1, \qquad n + \lambda = n_1,$$

la precedente disuguaglianza diventa:

$$|D'_{m_1+p,\,n_1+q} - D'_{m_1,\,n_1}| < \sigma ,$$

e sussiste per qualunque valore di p e q interi, e per valori di $m_1, n_1 > N + \lambda$, il che prova appunto la convergenza di D'.

Per quanto precede allora possiamo ritenere D, come limite tanto di:

$$D_m = D_{m,\,m} ,$$

quanto di:

$$\Delta_m = D_{m-\lambda,\,m+\lambda} ,$$

per m crescente all'infinito. Ma nello stesso modo che la successione:

$$D_0,\ D_1, \ldots,\ D_m, \ldots$$

definisce come suo limite D, l'altra successione:

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\dots\ \Delta_m,\dots$$

definisce come suo limite D', quindi, poichè il limite è unico:

$$D = D'.$$

Per tal modo un determinante convergente resta definito dalla sua matrice e dalla diagonale principale.

3. *Se in un determinante convergente si scambiano le linee con le colonne esso non muta di valore, quando però nel nuovo determinante si conservi la diagonale principale del primitivo.*

Sia D il dato e D' il determinante che si deduce da esso scambiando le linee con le colonne. Assumendo in essi la medesima origine a_{00} è subito visto che la disuguaglianza:

$$| D_{m+p,n+q} - D_{m\,n} | < \sigma ,$$

porta l'altra:

$$| D'_{m+p,\,n+q} - D'_{m,n} | < \sigma .$$

Quindi la convergenza di D' è dimostrata

Allora per ogni σ piccolo ad arbitrio si può sempre determinare un numero intero N tale che per ogni $m, n > N$ si abbia insieme:

$$| D - D_{m,n} | < \frac{\sigma}{2}, \qquad | D' - D'_{m,n} | < \frac{\sigma}{2} \cdot$$

Ma essendo:

$$D_{m,n} = D'_{m,n},$$

risulta:

$$| D - D' | = | (D - D_{m,n}) - (D' - D'_{m,n}) | < \sigma .$$

Dunque:

$$D = D',$$

c. d. d.

4. *In un determinante convergente scambiando fra loro due linee o due colonne, il determinante cambia segno.*

Nei determinanti D e D' che si ottengono l'uno dall'altro con lo scambio di due colonne, assumiamo come dianzi la stessa origine. Per valori di m, n opportunamente grandi e per tutti quelli maggiori si ha:

$$D_{mn} + D'_{mn} = 0,$$

onde resta subito dimostrata la convergenza di D'.

Ma per ogni σ piccolo a piacere, è possibile allora fissare un intero N positivo, tale che per ogni $m, n, > N$ si abbia insieme:

$$|D - D_{m,n}| < \frac{\sigma}{2}, \qquad |D' - D'_{m,n}| < \frac{\sigma}{2}.$$

E sommando e rinforzando la diseguaglianza:

$$|(D + D') - (D_{m,n} + D'_{m,n})| < \sigma,$$

relazione che diventa:

$$|D + D'| < \sigma \quad .\because. \quad D = -D' \qquad\qquad c.\ d.\ d.$$

Segue subito:

Se in un determinante convergente due linee o due colonne sono uguali, il determinante è nullo.

5. *Ogni determinante convergente di cui gli indici delle linee e delle colonne si estendono da* $-\infty$ *a* $+\infty$ *può essere trasformato in un nuovo convergente per il quale i detti indici si estendono da* 1 *ad* ∞.

Infatti nel determinante:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = -\infty \cdots + \infty).$$

trasportiamo tutte le linee e colonne di indice negativo rispettivamente al disotto e a destra della linea e colonna di indice zero, per modo che nel nuovo determinante la successione:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ 2n,\ 2n+1, \ldots$$

delle sue linee o colonne, sia data dalla successione:

$$0,\ -1,\ 1, \ldots\ -n,\ n, \ldots$$

delle linee o colonne in D. Risulterà così un determinante:

$$D' = [b_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots + \infty),$$

il quale è pure convergente, come risulta subito in modo analogo a quanto si è fatto nei precedenti teoremi. E poichè il determinante D'_m ammette un limite per m crescente all' infinito, questo limite sarà sempre lo stesso qualunque sia la legge con la quale si fa crescere m. Ponendo allora:

$$m = 2n + 1,$$

si potrà sempre fissare per ogni σ arbitrario, un numero intero positivo N', in modo che per tutti i valori di $n > N'$, sia:

$$|D' - D'_{2n+1}| < \frac{\sigma}{2}.$$

Ma per una scelta opportunamente grande di n:

$$|D - D_{n,n}| < \frac{\sigma}{2};$$

e poichè:

$$D'_{2n+1} = D_{n,n},$$

procedendo come dianzi risulta proprio:

$$D = D'. \qquad c. \ d. \ d.$$

In sostanza la trasformazione così effettuata è analoga a quella con cui da una serie o prodotto infinito estesi fra $-\infty$ e $+\infty$ si passa ad una serie o ad un prodotto estesi fra 1 e ∞.

Possiamo ancora osservare:

a) In forza del teorema 2° in luogo della linea e colonna d'indice zero, possiamo scegliere qualunque linea e colonna del medesimo indice, come prima linea e colonna del nuovo determinante.

b) Per il teorema 4° alla disposizione:

$$0, -1, 1, -2, 2, \ldots \ .$$

possiamo sostituire una disposizione arbitraria delle linee o colonne senza alterare il valore assoluto del determinante. In particolare adunque, fissata una legge ad arbitrio, e disposte tanto le linee quanto le colonne secondo la stessa legge, si ottiene un determinante in segno ed in valore identico al primitivo. Ma con questa trasformazione gli elementi a_{ii} sono situati sulla diagonale principale, dunque:

Se in un determinante convergente si scambiano fra loro le linee e fra di loro le colonne per modo che gli elementi diagonali rimangano tali, il determinante non muta di valore.

Quella adunque che fu chiamata *convergenza assoluta* del determinante non è altro che la convergenza ordinaria da noi definita.

Risulta ancora che: *comunque si scambino fra loro linee e colonne di un determinante divergente o indeterminato, esso non potrà mai trasformarsi in un convergente.*

In seguito, per semplicità di trattazione, parleremo sempre di determinanti trasformati secondo il teor. 5, cioè di determ.:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots \infty),$$

salvo quando sia detto espressamente il contrario.

In virtù del teorema pocanzi stabilito, i risultati conserveranno tutta la propria generalità.

6. *Se in un determinante convergente si moltiplicano tutti gli elementi di una linea o colonna per un numero finito K, il valore del determinante resta moltiplicato per K.*

Sia D il dato e D' il determinante che si ottiene da esso moltiplicando per K gli elementi della linea α^{ma}. È chiaro che la convergenza di D porta quella di D'. Allora per ogni δ piccolissimo potremo sempre determinare un valore intero $m' > \alpha$ tale che per ogni $m > m'$ si abbia quindi:

$$K \mid D - D_m \mid < \delta K, \qquad \mid D' - D'_m \mid < \delta,$$

$$K D_m = D'_m.$$

Ma:

$$\mid K D - D' \mid = \mid (K D - K D_m) - (D' - D'_m) \mid < K \mid D - D_m \mid + \mid D' - D'_m \mid.$$

Onde:

$$\mid K D - D' \mid < \delta (K + 1),$$

e posto:

$$\delta < \frac{\sigma}{K+1},$$

risulta:

$$\mid K D - D' \mid < \sigma \;\therefore\; K D = D'.$$

Ponendo in relazione questo teorema col teorema enunciato in fine del n.° 6, segue subito:

Se un determinante ha gli elementi d'una linea (colonna) equimultipli di quelli di una linea (colonna) parallela, esso è nullo identicamente.

Analogamente poi risulta ancora:

Se un determinante ha una linea (colonna) di zeri, esso è nullo identicamente.

7. Il teorema precedente è generalizzabile come segue:

Se in un determinante D convergente si moltiplicano le linee per delle quantità μ_i $(i = 1, 2, \ldots \infty)$, e le colonne per delle quantità ν_i $(i = 1, 2, \ldots \infty)$

tali che i prodotti infiniti:

$$p = \prod_i \mu_i, \qquad q = \prod_i \nu_i,$$

siano assolutamente convergenti e diversi da zero, il determinante D' che ne risulta è ancora convergente ed uguale in valore al primitivo moltiplicato per $\prod_i (\mu_i \nu_i)$.

Poniamo anzitutto:

$$p_m = \prod_1^m \mu_i, \qquad q_m = \prod_1^m \nu_i,$$

e osserviamo che in virtù della convergenza di D, p, q, si può per ogni δ arbitrario, fissare un valore m' tale che per qualsivoglia valore di $m > m'$ e per r qualunque, sia:

$$| p\, q - p_m\, q_m | < \delta, \qquad | D - D_m | < \delta,$$
$$| p_{m+r}\, q_{m+r} - p_m\, q_m | < \delta, \qquad | D_{m+r} - D_m | < \delta,$$

giacchè il prodotto:

$$p\, q = \prod (\mu_i\, \nu_i),$$

è anch'esso convergente in modo assoluto.

Formiamo allora la differenza:

$$| D'_{m+r} - D'_m | = | p_{m+r}\, q_{m+r}\, D_{m+r} - p_m\, q_m\, D_m | .$$

Aggiungendo e togliendo un termine opportuno, essa diventa:

$$| D_{m+r} (p_{m+r}\, q_{m+r} - p_m\, q_m) + p_m\, q_m (D_{m+r} - D_m) | ,$$

od anche:

$$| D'_{m+r} - D'_m | < | D_{m+r} | \, | p_{m+r}\, q_{m+r} - p_m\, q_m | + | p_m\, q_m | \, | D_{m+r} - D_m | ,$$

che, in virtù delle precedenti disuguaglianze, si trasforma nella seguente:

$$| D'_{m+r} - D'_m | < \delta \{ | D_{m+r} | + | p_m\, q_m | \} < \delta\, M,$$

per M opportunamente grande ma finito.

Se dunque si pone $\delta < \frac{\sigma}{M}$ si avrà da ultimo:

$$| D'_{m+r} - D'_m | < \sigma,$$

il che prova la convergenza di D'.

Ma dalla:

$$| p\, q - p_m\, q_m | < \delta,$$

si ha:

$$|D_m||pq - p_m q_m| < \sigma;$$

od anche:

$$|pq D_m - D'_m| < \sigma.$$

Ma:

$$|pq||D - D_m| < \sigma,$$

e così:

$$|D' - D'_m| < \sigma,$$

quindi:

$$|D' - pq D| < |D' - D'_m| + |pq||D - D_m| + |pq D_m - D'_m| < 3\sigma,$$

o infine:

$$D' = pq D. \qquad \text{c. d. d.}$$

3.°

Criteri di convergenza. — Determinanti normali.

1. Procediamo alla ricerca di qualche criterio di convergenza e facciamo uno studio compiuto, per quanto è possibile, di quelle classi di determinanti che vi soddisfanno.

Diremo, col v. Koch, della *forma normale* ogni determinante infinito tale che il prodotto degli elementi diagonali converga in modo assoluto e sia pure convergente assolutamente la serie doppia degli elementi non diagonali.

2. *Ogni determinante di forma normale è convergente.*

Poniamo:

$$a_{ik} = a'_{ik} \qquad \text{per} \quad i \neq k$$

$$a_{ii} = 1 + a'_{ii} \qquad \text{»} \quad i = k.$$

La convergenza assoluta del prodotto infinito:

$$\Pi_i (1 + a'_{ii}), \qquad (i = 1, 2, \ldots \infty),$$

equivale a quella della serie semplice:

$$\sum_i a_{ii};$$

ma poichè la serie doppia degli elementi non diagonali converge in modo assoluto, converge pure la serie:

$$\sum_i \sum_k | a_{ik} |,$$

e quindi anche il prodotto:

$$\overline{P} = \prod_i (1 + \sum_k | a_{ik} |).$$

Si noti poi che il determinante:

$$D_m = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

si può ottenere dal prodotto:

$$\overline{P}_m = \prod_1^m \left(1 + \sum_1^m | a_{ik} |\right), \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

sviluppandolo e ponendo opportunamente a coefficienti dei vari termini i numeri $+1$, -1, o zero.

Risulta adunque:

$$| D_m | \leq \overline{P}_m,$$

poichè ad ogni termine di D_m corrisponde un termine di $\overline{P}_m$ eguale ad esso in valore assoluto e sempre positivo.

Formiamo ora le espressioni:

$$D_{m+p}, \qquad \overline{P}_{m+p},$$

ed osserviamo che quando in esse venga sostituito lo zero alle quantità a'_{ik}, per i, $k = m+1, m+2, \ldots m+p$, le dette espressioni diventano rispettivamente:

$$D_m, \qquad \overline{P}_m,$$

e fra i termini che si annullano in $\overline{P}_{m+p}$, si trovano certo quelli che si annullano in D_{m+p}.

Ma i termini che vanno a zero nel detto prodotto sono:

$$\overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m,$$

quelli che vanno a zero nel corrispondente determinante sono:

$$D_{m+p} - D_m,$$

e inoltre tutti i termini della prima differenza sono positivi il che in generale non avviene di quelli della seconda, quindi:

$$| D_{m+p} - D_m | < \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m.$$

Ora, per quanto si è visto, il prodotto $\bar{P}$ è convergente, onde per ogni σ piccolo ad arbitrio si potrà fissare un intero m' positivo tale che per tutti gli $m > m'$ e per qualunque p, si abbia:

$$\bar{P}_{m+p} - \bar{P}_m < \sigma \quad \therefore \quad | D_{m+p} - D_m | < \sigma. \qquad c.\ d.\ d.$$

Questo teorema, per il caso di $a_{ii} = 1$ è dovuto a POINCARÉ; nel caso più generale ora esposto appartiene al v. KOCH.

È chiaro sin d'ora che la condizione di essere normale, per un determinante infinito, è sufficiente, ma non necessaria, per stabilirne la convergenza.

3. Nel numero precedente si è ottenuto che:

$$| D_m | \leq \bar{P}_m,$$

per qualunque valore di m, onde è facile dedurre:

$$| D | \leq \bar{P}.$$

E così possiamo anche affermare che dato un σ piccolo ad arbitrio è possibile sempre determinare un numero intero m' tale che per ogni $m > m'$ risulti:

$$P - P_m < \sigma, \qquad | D - D_m | < \sigma,$$

relazioni che vengono direttamente dalla convergenza di P e D.

Per i determinanti or ora definiti, in virtù della loro convergenza stanno tutti i teoremi generali del capitolo precedente.

4. *Un determinante normale resta convergente se al posto degli elementi di una sua linea si pone una successione di elementi a_{ii} i quali, in valore assoluto non superino un numero positivo dato a.*

Poichè ogni linea di un determinante D si può ridurre al posto della linea zero, sarà sufficiente dimostrare il teorema per il caso che nel posto degli elementi:

$$a_{11},\ a_{12}, \ldots\ a_{1n}, \ldots$$

si pongano gli elementi:

$$a_1,\ a_2, \ldots\ a_n, \ldots$$

tali che:

$$| a_i | \leq a \quad \text{per} \quad a \geq 0.$$

Sia D' il determinante così costituito, ed abbiano D_m e D'_m l'ordinario significato. Inoltre indichiamo con $\bar{P}'$, $\bar{P}'_m$ i prodotti che si ottengono rispettivamente da $\bar{P}$, $\bar{P}_m$ colla soppressione del fattore corrispondente all'indice 1.

Allora è chiaro che ad ogni termine di D'_m corrisponde un termine non minore e sempre positivo di $a\,\overline{P}'_m$, e quindi con ragionamento analogo a quello ottenuto più addietro possiamo stabilire:

$$| D'_{m+p} - D'_m | < a\,(\overline{P}'_{m+p} - \overline{P}'_m),$$

e questa disuguaglianza è sufficiente per dimostrare l'asserto.

Il teorema può essere generalizzato come segue:

Se in un determinante normale D al posto degli elementi di un numero qualsivoglia, ma finito, di linee, si pongono altri elementi ad arbitrio ma inferiori in valore assoluto ad un certo numero positivo finito a, il nuovo determinante è ancora convergente.

5. Chiudiamo queste prime notizie con un esempio di determinante normale.

Si costruisca il determinante:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

ponendo:

$$a_{ii} = 1 + \frac{1}{i^4}, \qquad a_{ik} = \frac{1}{i^2 k^2}.$$

Tale determinante è normale perchè il prodotto infinito:

$$\Pi_i \left(1 + \frac{1}{i^4}\right),$$

converge assolutamente e così pure la serie doppia degli elementi non diagonali:

$$\sum_i \sum_k \frac{1}{i^2 k^2}, \qquad (i \neq k).$$

Per determinare il valore di D determiniamo il valore di D_m, indi passiamo al limite per m crescente all' infinito.

Sviluppando D_m per dimensioni si ha:

$$D_m = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i^4} + \sum_{i<k<m} \begin{vmatrix} \frac{1}{i^4} & \frac{1}{i^2 k^2} \\ \frac{1}{k^2 i^2} & \frac{1}{k^4} \end{vmatrix} + \cdots$$

Ma tutti i sommatori dopo il primo sono identicamente zero, dunque:

$$D_m = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i^4}.$$

E passando al limite:

$$D = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = 1 + \frac{\pi^4}{90}.$$

4.°

Minori di un determinante normale.

1. In un determinante D:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

scegliamo ad arbitrio un certo numero r di linee:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha, \ldots \alpha_r,$$

ed altrettante colonne:

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3, \ldots \beta_r,$$

e al posto degli elementi $a_{\alpha_p \beta_q}$ delle linee e colonne indicate poniamo lo zero se $p \neq q$, e l'unità se $p = q$. Il determinante che così risulta lo diremo *un sottodeterminante o minore infinito di ordine r,* e sarà indicato con la notazione:

$$D^{(r)} = agg. \begin{vmatrix} a_{\alpha\beta_1} & \ldots & a_{\alpha_1\beta_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_r\beta_1} & \ldots & a_{\alpha_r\beta_r} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_r \end{pmatrix}.$$

In esso la diagonale principale è quella stessa di D modificata dalle poste sostituzioni.

Le r linee ed r colonne considerate si incrociano poi in r^2 elementi che non appartengono al nostro minore infinito e che a loro volta formano *un minore finito d'ordine r.* Questo si dirà complementare o aggiunto dell'altro, e reciprocamente.

In particolare diremo diagonali quei minori finiti o infiniti sulla cui diagonale principale non compare alcun elemento non-diagonale del dato determinante.

Dalle definizioni risulta subito:

Tutti i minori infiniti di un determinante normale sono pure normali.

2. *Il minore:*

$$D^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_r \end{pmatrix},$$

del normale D, è uguale al determinante $D'^{(r)}$ che si ottiene sopprimendo in D le linee $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r$ e le colonne $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r$, quindi attribuendo al nuovo determinante il segno:

$$(-1)^{(\alpha_1\ \beta_1)+\cdots+(\alpha_r\ \beta_r)}.$$

È utile osservare che in $D'^{(r)}$ deve ritenersi per diagonale principale quella di D. Allora tanto $D^{(r)}$ quanto $D'^{(r)}$ hanno un valore determinato perchè sono normali. Scelgasi un m finito, ma grande così da soddisfare alle condizioni:

$$m > \alpha_n, \qquad m > \beta_n, \qquad\qquad (n = 1,\ 2, \ldots\ r),$$

e indichiamo con $D^{(r)}_m$ il determinante che si ottiene da D_m ponendo l'unità per gli elementi $a_{\alpha_s \beta_s}$ $(s = 1, 2, \ldots r)$ e zero per gli elementi restanti delle linee α e colonne β; indichiamo poi con $D'^{(r)}_m$ il minore di D_m che si ottiene sopprimendo in esso le linee e le colonne accennate. È chiaro che fissato con σ un numero arbitrariamente piccolo, si può sempre fissare un m' intero tale che per ogni $m > m'$ si abbia:

$$| D^{(r)} - D^{(r)}_m | < \frac{\sigma}{2}, \qquad | D'^{(r)} - D'^{(r)}_m | < \frac{\sigma}{2}.$$

Ma per m finito:

$$D^{(r)}_m = D'^{(r)}_m (-1)^{(\alpha_1\ \beta_1)+\cdots+(\alpha_r\ \beta_r)},$$

onde:

$$| D^{(r)} - D'^{(r)} (-1)^{(\alpha_1 - \beta_1)+\cdots+(\alpha_r\ \beta_r)} | < | D^{(r)} - D^{(r)}_m | + | D'^{(r)} - D'^{(r)}_m |,$$

che per le precedenti relazioni ci dà:

$$| D^{(r)} - D'^{(r)} (-1)^{(\alpha_1 - \beta_1)+\cdots+(\alpha_r\ \beta_r)} | < \sigma,$$

od anche:

$$D^{(r)} = D'^{(r)} (-1)^{(\alpha_1 - \beta_1)+\cdots+(\alpha_r - \beta_r)}. \qquad\qquad c.\ d.\ d.$$

3. *Se da un minore:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_r \\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_r \end{pmatrix},$$

di un normale D si deduce un altro minore:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{t_1}\ \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_r} \\ \beta_{t_1}\ \beta_{t_2} \ldots \beta_{t_r} \end{pmatrix},$$

con lo scambio di p indici α fra di loro e di q indici β fra loro, il nuovo minore è uguale al primo moltiplicato per $(-1)^{p+q}$.

Immaginiamo infatti in D di scambiare le linee:

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_r ,$$

con le:

$$\alpha_{t_1}\, \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_r} ,$$

e le colonne:

$$\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_r ,$$

con le:

$$\beta_{t_1}\, \beta_{t_2} \ldots \beta_{t_r} .$$

in cui $t_1\ t_2 \ldots t_r$ è una permutazione arbitraria dei numeri $1, 2, \ldots r$.

Otterremo così un determinante D' tale che:

$$D' = D\,(-1)^{p+q}.$$

Sostituendo ora l'unità al posto degli elementi $a_{\alpha_s \beta_s}$ $(s = 1, 2, \ldots r)$ e zero per gli altri elementi delle linee e colonne in discorso, la precedente relazione diventa:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{t_1} \ldots \alpha_{t_r} \\ \beta_{t_1} \ldots \beta_{t_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \end{pmatrix} (-1)^{p+q}.$$

In particolare adunque, se in un minore:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \end{pmatrix},$$

si scambiano due α o due β fra loro, il minore cambia di segno.

Quindi anche:

Se due α o due β coincidono il minore è nullo.

4. Sia:

$$a_{1\alpha_1},\ a_{2\alpha_2}, \ldots\ a_{n\alpha_n} \ldots$$

un gruppo di elementi che possono mediante scambio di linee e di colonne essere trasportati a costruire la diagonale principale, nei quali cioè:

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots\ \alpha_n \ldots$$

rappresenta una permutazione dei numeri:

$$1,\ 2, \ldots\ n \ldots$$

Allora, come conseguenza diretta di quanto precede si ha:

Il minore che si ottiene dal normale D ponendo l'unità per gli elementi:

$$a_{1\alpha_1},\ a_{2\alpha_2}, \ldots\ a_{n\alpha_n} \ldots$$

e lo zero per gli altri, è uguale a $(-1)^{(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\cdots}$

5. *Il minore:*

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix},$$

al crescere di n tende all'unità.

Poniamo:

$$(1, 2, \dots n) = \prod_{n+1}^{\infty}\left(1 + \sum_{n+1}^{\infty} |a'_{ik}|\right).$$

Si ottiene subito:

$$1 \leq (1, 2, \dots n) \leq \prod_{n+1}^{\infty}\left(1 + \sum_{n+1}^{\infty} |a'_{ik}|\right).$$

Ma $\overline{P}$ è convergente quindi per ogni σ piccolissimo si può determinare un intero positivo n' tale che per $n > n'$ sia:

$$1 \leq (1, 2, \dots n) \leq 1 + \sigma,$$

il che vuol dire che la quantità:

$$(1, 2, \dots n) - 1,$$

al crescere di n si può rendere in valore assoluto minore di qualsivoglia quantità assegnabile. Ma il minore:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix},$$

come il prodotto:

$$(1, 2, \dots n),$$

ammettono (come vedremo poi) l'unità quali termini del loro sviluppo, e dippiù ad ogni termine del minore corrisponde un termine e sempre positivo del prodotto, quindi risulta:

$$\left|\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix} - 1\right| \leq |(1, 2, \dots n) - 1| \leq \sigma,$$

per qualunque σ positivo. Di qui infine:

$$1 + \sigma \geq \left|\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix}\right| \geq 1 - \sigma,$$

il che dimostra il teorema.

Poichè le colonne e le linee si possono ordinare ad arbitrio in un determinante convergente è chiaro poi che questo teorema vale per qualsivoglia minore:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 \, \beta_2 \dots \beta_n \end{pmatrix},$$

non identicamente nullo quando n cresca oltre ogni limite. Notiamo da ultimo che esistendo un limite di:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix},$$

al crescere di n, si potrà sempre assegnare un intero n' tale, per ogni σ, che si verichi la relazione:

$$\left| \begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n+p \\ 1, & 2, \dots & n+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix} \right| < \sigma,$$

per $n > n'$ e per un valore di p positivo qualunque.

6. A chiarire qualche concetto raccogliamo qui alcune osservazioni:

a) Per *ordine di un minore infinito* si intende il numero delle linee o colonne che si debbono sopprimere nel dato determinante (o sulle quali è necessario operare quella speciale sostituzione d'elementi onde abbiamo parlato) per ottenere il minore che si considera.

Invece per *ordine di un minore finito* intendiamo come nell'ordinaria teoria il numero effettivo di linee e colonne costituenti il minore.

b) Un minore finito e in generale qualsivoglia determinante può sempre mettersi sotto la forma di determinante infinito *normale.* Basta infatti continuare la sua diagonale principale con elementi uguali all'unità positiva, e porre zero per tutti gli altri elementi.

c) I determinanti infiniti:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i\, k = 1, \ 2, \dots \infty),$$

che noi studiamo ora si possono a loro volta considerare come minori diagonali di quelli le cui linee e colonne vanno da $-\infty$ a $+\infty$. In particolare adunque sono riducibili a quella forma nel modo ora descritto.

5.°

Sviluppi dei determinanti normali.

1. Sia dato il determinante:

$$D = [a_{ik}], \qquad [i, k = 1, 2, \ldots \infty],$$

e formiamo l'indentità:

$$\Delta_m = \Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + \cdots + (\Delta_m - \Delta_{m-1}),$$

ove:

$$\Delta_r = [a_{ik}], \qquad [i, k = 1, 2, \ldots r].$$

Poniamo come sempre:

$$a_{ik} = a'_{ik}, \qquad a_{ii} = 1 + a'_{ii},$$

e:

$$\Delta_r - \Delta_{r-1} = \nabla_r.$$

Risulta allora:

$$\nabla_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a'_{rr} \end{vmatrix}.$$

Quindi se nella espressione della Δ_m facciamo crescere la m oltre ogni limite si ha:

$$D = \nabla_1 + \nabla_2 + \cdots + \nabla_m + \cdots \tag{1}$$

dove la serie del secondo membro converge in modo assoluto.

Infatti paragonandola con la serie convergente a termini positivi:

$$\overline{P} = \overline{\Pi}_1 + (\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_1) + \cdots + (\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}) + \cdots$$

ove:

$$\overline{\Pi}_r = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \sum_{k=1}^{r} | a_{ik} |\right).$$

si ha:

$$| \nabla_m | = | \Delta_m - \Delta_{m-1} | \leq \overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}. \qquad c. \ d. \ d.$$

2. Ogni espressione $\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}$ può essere scritta come una somma di termini positivi. Ogni termine dello sviluppo di ∇_m trova in questo sviluppo un termine corrispondente (che lo eguaglia in valore assoluto e sempre positivo; quindi se si esprime il determinante ∇_m come la somma algebrica di:

$$M = m\,!$$

termini, e se poi ad ognuno di questi è sostituito il suo valore assoluto, la serie D resta ancora convergente. Posto adunque:

$$\nabla_m = \sum_{k=1}^{M} \nabla_{mk},$$

la serie doppia:

$$D = \sum_m \sum_k \nabla_{mk}, \tag{2}$$

converge assolutamente.

3. Di qui risulta subito lo sviluppo:

$$D = \sum a_{1\beta_1}\, a_{2\beta_2} \ldots a_{m\beta_m} \ldots (-1)^{(\beta_1-1)+(\beta_2-2)+\cdots+(\beta_m-m)+\cdots}, \tag{3}$$

che è l'estensione dello sviluppo ordinario dei determinanti d'ordine finito, intendendo che il sommatorio sia esteso a tutte le permutazioni:

$$\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_m \ldots \beta_\infty,$$

dei numeri:

$$1,\ 2, \ldots\ m, \ldots\ \infty.$$

Ed infatti ogni termine dello sviluppo (3) si ottiene raggruppando opportunamente alcuni termini dello sviluppo (2), e reciprocamente ogni termine della (2), entra a far parte di un termine dalla (3), onde l'ultima formula scritta è effettivamente lo sviluppo di D, ed il suo valore è indipendente dall'ordine dei termini.

4. Cerchiamo ora l'estensione delle altre forme che assume lo sviluppo di un determinante finito.

Se nella serie (3) raccogliamo gli elementi $a_{\alpha\beta}$ della linea α^m e indichiamo con $A_{\alpha\beta}$ i rispettivi coefficenti che non dipendono più da tali elementi, risulta:

$$D = \sum_{\beta=1}^{\infty} A_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta}.$$

Ma se nella precedente identità pongo $a_{\alpha\beta} = 1$ e zero per tutti gli altri elementi α^{ma}, si ottiene:

$$\binom{\alpha}{\beta} = A_{\alpha\beta},$$

onde:

$$D = \sum \binom{\alpha}{\beta} a_{\alpha\beta}, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \infty), \tag{4}$$

ed è chiaro che questo sviluppo converge assolutamente. Tale convergenza può essere direttamente dimostrata:

Infatti poniamo per semplicità:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^\infty &= \sum_{\beta=1}^\infty \left| \binom{\alpha}{\beta} a_{\alpha\beta} \right| \\ \sum_1^m &= \sum_{\beta=1}^m \left| \binom{\alpha}{\beta} a_{\alpha\beta} \right| . \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Lo sviluppo (4) convergerà in modo assoluto quando per ogni σ piccolo a piacere si possa determinare un numero m' tale che per ogni $m > m'$ sia:

$$R_m = \left(\sum_1^\infty - \sum_1^m \right) < \sigma.$$

Si indichi con:

$$R_{\alpha m} = \sum_{\beta=m+1}^\infty | a_{\alpha\beta} |,$$

il resto della serie dei moduli degli elementi che formano la linea α^{ma}, e si rammenti che per la data convergenza assoluta della serie doppia, costituita dagli elementi non diagonali a_{ik} $(i \neq k)$, per ogni δ piccolo ad arbitrio possiamo scegliere un valore di m' tale che per ogni $m > m'$ risulti:

$$| R_{\alpha m} | < \delta.$$

Ma poichè i minori di un normale sono alla loro volta normali, dovrà pure trovarsi un numero positivo K tale che per ogni β sia:

$$\left| \binom{\alpha}{\beta} \right| \leq K.$$

Di qui abbiamo:

$$\left| R_m \right| = \left| \sum_1^\infty - \sum_1^m \right| = \left| \sum_{\beta=m+1}^\infty \binom{\alpha}{\beta} a_{\alpha\beta} \right|,$$

onde:

$$\left| R_m \right| \leq K \left| \sum_{\beta=m+1}^\infty a_{\alpha\beta} \right| \leq K R_{\alpha m} < K \delta.$$

E scegliendo:

$$\delta = \frac{\alpha}{K},$$

risulta infine:

$$| R_m | < \sigma. \qquad\qquad c.\ d.\ d.$$

Se ora nel posto della linea α poniamo gli elementi della linea γ si ottiene un normale identicamente zero. Sviluppandolo per gli elementi della linea sostituita si ha:

$$\sum_{\beta} \binom{\alpha}{\beta} a_{\gamma\beta} = 0,$$

che coll'altra:

$$\sum_{\beta} \binom{\alpha}{\beta} a_{\alpha\beta} = D, \qquad (\beta = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

ci dà le due relazioni fondamentali ordinarie.

Notiamo come i minori $\binom{\alpha}{\beta}$ quando si intendessero dedotti dal normale D con la soppressione della linea α^{ma} e della colonna β^{ma} si dovrebbero moltiplicare rispettivamente per $(-1)^{\alpha+\beta}$.

5. Procedendo affatto analogamente, dallo sviluppo fondamentale si possono ottenere le due relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} D &= \sum_{(\beta)} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & \ldots & a_{\alpha_1\beta_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_r\beta_1} & \ldots & a_{\alpha_r\beta_r} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (\beta) = \beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_r \ldots \\ 0 &= \sum_{(\beta)} \begin{vmatrix} a_{\gamma_1\beta_1} & \ldots & a_{\gamma_1\beta_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\gamma_r\beta_1} & \ldots & a_{\gamma_r\beta_r} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

dove $\gamma_1 \ldots \gamma_r$ rappresenta un sistema di m linee che almeno per una, differisce dal sistema $\alpha_1 \ldots \alpha_r$, e i sommatori vanno estesi a *tutti* i sistemi (β) di r colonne, presi tra le infinite colonne del determinante.

Anche la convergenza assoluta di questi sviluppi si può dimostrare direttamente ricordando che le serie:

$$\begin{gathered} | a_{\alpha_1\beta_1} | + | a_{\alpha_1\beta_2} | + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ | a_{\alpha_r\beta_1} | + | a_{\alpha_r\beta_2} | + \cdots, \end{gathered}$$

convergono assolutamente. Si procede a questo scopo come nel numero 4.

6. Il determinante D può essere sviluppato anche secondo gli elementi di una linea e di una colonna qualsivogliano.

Prendiamo per esempio la linea e la colonna 1. Il coefficiente di a_{11} è $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, e quello di $a_{\alpha 1}\, a_{1\beta}$, è:

$$\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 1 & \beta\end{pmatrix}, \tag{6'}$$

e quindi sarà lecito scrivere:

$$D = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} a_{11} - \sum_{(\alpha\beta)} a_{1\beta}\, a_{\alpha 1} \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 1 & \beta\end{pmatrix}. \qquad c.\ d.\ o. \tag{6'}$$

7. Dallo sviluppo:

$$D = \nabla_1 + \nabla_2 + \cdots + \nabla_m + \cdots,$$

possiamo dedurre uno sviluppo di D per *dimensioni.*

Infatti ricordando la formula che ci dà lo sviluppo di un determinante del tipo:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+1 & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

dove all'ultimo elemento diagonale non fu aggiunta l'unità, e applicandolo a ∇_1 risulta subito:

$$D = 1 + \sum_i a'_{ii} + \sum_{ij} \begin{vmatrix} a'_{ii} & a'_{ij}\\ a'_{ji} & a'_{jj}\end{vmatrix} + \sum_{ijh} \begin{vmatrix} a'_{ii} & a'_{ij} & a'_{ih}\\ a'_{ij} & a'_{jj} & a'_{jh}\\ a'_{hi} & a'_{hj} & a'_{hh}\end{vmatrix} + \cdots, \tag{7}$$

dove gli indici assumono tutti i valori interi positivi che soddisfano alle disuguaglianze:

$$i < j < h < \cdots$$

Dallo sviluppo ora ottenuto risulta che l'unità entra nello sviluppo di D, principio di cui ci siamo giovati più addietro.

6.°

Altre proprietà dei determinanti normali.

1. Passiamo ad alcune conseguenze dei precedenti sviluppi:

Il determinante D' che si ottiene da D sostituendo agli elementi della linea α delle quantità $a_i (i = 1, 2, \dots \infty)$ minori in valore assoluto di un certo intero a, finito, può essere sviluppato nel modo seguente:

$$D' = \nabla'_1 + \nabla'_2 + \cdots + \nabla'_m + \cdots,$$

in cui ∇'_m è il determinante in cui si trasforma ∇_m con la sostituzione indicata.

Infatti sia ∇'_m l'analoga quantità di ∇_m calcolata per il nuovo determinante, e sieno $\overline{P}'$ e $\overline{\Pi}'_m$ ciò che diventano rispettivamente $\overline{P}$ e $\overline{\Pi}_m$ sopprimendo in essi il fattore corrispondente alla linea α. Allora nella serie convergente:

$$\overline{P}' = a\, \overline{\Pi}' + \sum_m a\, (\overline{\Pi}'_m - \overline{\Pi}'_{m-1}),$$

ogni termine è una somma di termini positivi, e ciascun d'essi uguale o maggiore in valore assoluto del corrispondente nello sviluppo:

$$\nabla'_m = \Delta'_m - \Delta'_{m-1},$$

quindi *la serie:*

$$D' = \sum \nabla'_m,$$

converge assolutamente.

Con ragionamento analogo si dimostra, che lo sviluppo in parola è valido e converge in modo assoluto, anche allora che la sostituzione si effettui sopra un numero finito di linee.

2. Sia in particolare $A_{\alpha\beta} = \binom{\alpha}{\beta}$ un minore infinito di primo ordine del normale:

$$D = [a_{ik}], \qquad [i, k = 1, 2, \dots \infty],$$

e immaginiamo di svilupparlo secondo la formola (1). Scegliendo notazioni opportune risulta:

$$A_{\alpha\beta} = A^{(1)}_{\alpha\beta} + A^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots + A^{(m)}_{\alpha\beta} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)}_{\alpha\beta},$$

e la serie del secondo membro converge in modo assoluto, perchè $A_{\alpha\beta}$ a sua volta è un determinante normale.

Dippiù gli $A_{\alpha\beta}^{(m)}$ per un m compreso tra α e β sono zero identicamente.

Dal determinante D si deduca ora D', sostituendo l'unità al posto degli elementi della linea α, e lo si sviluppi nella serie convergente:

$$D' = \nabla'_1 + \nabla'_2 + \cdots + \nabla'_m + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \nabla'_m .$$

Ma tenendo le precedenti notazioni e sviluppando ∇'_m secondo gli elementi della linea α^{ma} (quando la contiene) risulta ancora:

$$\nabla'_m = \sum_{\beta=1}^{m} A_{\alpha\beta}^{(m)}, \qquad (m \geqq \alpha),$$

onde:

$$D' = \sum_m \sum_\beta A_{\alpha\beta}^{(m)} .$$

E poichè questa serie converge assolutamente si ha:

$$D' = \sum_\beta \sum_m A_{\alpha\beta}^{(m)} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} = \sum_\beta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Dunque:

La serie dei minori infiniti di primo ordine, corrispondenti agli elementi di una linea (colonna) converge assolutamente.

Ricordando poi che i minori di un normale sono pure normali, risulta anche che *tutti gli sviluppi:*

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum_\beta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta \end{pmatrix} \\ S_2 &= \sum_\beta \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta \end{pmatrix} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_r &= \sum_\beta \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} & \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_{r-1} & \beta \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

convergono in modo assoluto. Identità analoghe si ottengono scambiando le linee con le colonne.

Se ora indichiamo con D' il determinante che si ottiene dal normale D, operando una sostituzione di elementi tutti inferiori ad un certo intero finito, sopra un numero finito di linee, si dimostra, con procedimento identico, che i precedenti sviluppi sono convergenti anche se formati coi minori:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix},$$

di tale determinante D'.

3. Di qui si possono dedurre sviluppi convergenti ancora più generali. *Si può infatti dimostrare la convergenza assoluta delle serie seguenti:*

$$\left.\begin{array}{l} S_1^{(\beta)} = \sum \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ S_2^{(\beta)} = \sum \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots \\ S_r^{(\beta)} = \sum \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

dove $(\beta) = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r)$ rappresenta una combinazione di classe r degli indici $1, 2, \dots \infty$, ed il sommatorio si intende esteso a tutte le dette combinazioni.

La prima delle formule scritte appartiene a quelle del numero precedente, quindi è nota la sua convergenza.

Consideriamo la 2.ª Per un teorema fondamentale sulle serie doppie si sa che condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta di:

$$\sum_{(\beta)} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

è che le due serie a termini positivi:

$$V_{\beta_2} = \sum_{\beta_1} \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \right|$$

$$V = \sum_{\beta_2} V_{\beta_2},$$

siano convergenti.

Ma V_{β_2} non è altro che lo sviluppo di $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ quando al posto degli elementi della linea α_1 si metta l'unità positiva o negativa, opportunamente, in modo da rendere positivi tutti quanti i suoi termini $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, quindi è convergente ed uguale al minore:

$$\binom{\alpha_2}{\beta_2}',$$

di un determinante D'.

Infine in virtù del numero precedente:

$$V = \sum_{\beta_2} V_{\beta_2} = \sum_{\beta_2} \binom{\alpha_2}{\beta_2}',$$

converge pure assolutamente. *c. d. d.*

Con diretta estensione è facile poi mostrare che gli sviluppi dati se sono convergenti per minori infiniti di ordine $r = n$ lo sono pure quando l'ordine sia $r = n + 1$, ovvero per un r qualsivoglia.

4. Parallelamente alle serie che precedono, riguardanti i minori infiniti di un normale, è utile porre qui altre serie riguardanti i minori finiti. *Vogliamo notare cioè che le serie:*

$$\left.\begin{aligned}
s_1^{(\beta)} &= \sum_{(\beta)} a_{\alpha_1\beta_1} \\
s_2^{(\beta)} &= \sum_{(\beta)} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} \\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} \end{vmatrix} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (\beta) = (\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r) \\
s_r^{(\beta)} &= \sum \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & \dots & a_{\alpha_1\beta_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_r\beta_1} & \dots & a_{\alpha_r\beta_r} \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

sono pure assolutamente convergenti, ciò che risulta direttamente dalla nota convergenza delle serie:

$$\begin{gathered}
|a_{\alpha_1 1}| + |a_{\alpha_1 2}| + \dots + |a_{\alpha_1 r}| + \dots \\
|a_{\alpha_2 1}| + |a_{\alpha_2 2}| + \dots + |a_{\alpha_2 r}| + \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
|a_{\alpha_r 1}| + |a_{\alpha_r 2}| + \dots + |a_{\alpha_r r}| + \dots,
\end{gathered}$$

e anche della serie che ne definisce il prodotto.

Se tali sviluppi riguardano un determinante D' ottenuto operando sopra n linee di D la sostituzione più addietro indicata, in generale non si potrà inferire che le serie ultime scritte convergono assolutamente, se non a partire dalle $s_r^{(\beta)}$ per $r > n$.

Si potrà tuttavia affermare che lo sono anche quando $r \leqq n$ se fra le linee $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$, ve n'ha almeno una che formi con i suoi elementi, una serie convergente in modo assoluto.

5. Combinando i precedenti risultati si ha:

Se in un determinante normale D, si scelgono r linee (per r qualunque, anche infinito) e si formano tutti i possibili determinanti d'ordine massimo, compatibili con la loro matrice, la serie di tali determinanti converge assolutamente.

A maggior ragione poi, convergeranno assolutamente le serie dedotte da quelle che precedono, estendendo in esse i sommatori non a tutte, ma ad una certa infinità di combinazioni $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r)$ scelta con una legge ad arbitrio.

Da ultimo va notato che tutte le serie doppie o multiple ora ottenute, in virtù della loro convergenza assoluta, si potranno considerare come serie semplicemente infinite nelle quali i termini si seguono in un ordine speciale.

6. La *convergenza assoluta* degli sviluppi (4′) e (5) resta ora per altra via assodata. Anzi, risulta di qui, che le condizioni per la convergenza loro sovrabbondano, il che non era fatto evidente dal modo con il quale furono stabiliti.

Ed invero per la convergenza di:

$$\sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} a_{\gamma\beta}, \qquad \left(\gamma \overset{=}{\underset{=}{|}} \alpha\right),$$

non è necessaria quella di ambo le serie:

$$s_1^{(\gamma)}, \qquad S_1^{(\beta)},$$

ma è sufficiente che l'una converga in modo assoluto e l'altra sia comunque, anche divergente, purchè i suoi termini, in valore assoluto, non possano superare un numero positivo fissato grande ad arbitrio. Del pari avviene per gli sviluppi (5). Ma si ha ancora:

Il determinante D′ che si ottiene da D (normale) sostituendo ad n sue linee le n successioni di elementi $|\bar{a}_{ik}| < a$ $(i = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$, $(k = 1, 2, \dots \infty)$, *per n finito, ed a positivo e finito, è convergente e può essere sviluppato come il determinante D* (Sviluppo (3) (4′) (5)).

6. *Se in un determinante normale si sostituiscono agli elementi* $a_{\sigma\beta}$ *di una linea* α *delle successioni (finite o infinite) di elementi:*

$$\mu_\beta = \sum_k \mu_{k\beta}.$$

tali che per ogni valore di β *si abbia* $\mu_\beta < \mu$, *per* μ *positivo e finito, il* *determinante si spezza in una somma finita o infinita di determinanti convergenti.*

Sia:

$$D = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} a_{\alpha\beta},$$

e si faccia la sostituzione per gli elementi della linea α. Si avrà:

$$D' = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \sum_k \mu_{k\beta} = \sum_{(\beta k)} \binom{\alpha}{\beta} \mu_{k\beta} = \sum_k \left[\sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \mu_{k\beta}\right],$$

ciò che dimostra l'asserto.

Questo teorema è generalizzabile per il caso che la sostituzione avvenga sopra un numero finito di linee o di colonne.

7. Sia D un normale; indichiamo con $[c_k]$ un gruppo di numeri finiti, e formiamo l'espressione:

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \sum_k c_k \, a_{k\beta}, \qquad (k \neq \alpha),$$

indi agli elementi $a_{\alpha\beta}$ per $(\beta = 1, 2, \ldots \infty)$ si sostituiscano in D gli elementi $b_{\alpha\beta}$, ciò che è legittimo: Risulterà un determinante D' pure convergente e sviluppabile per gli elementi della linea α, onde:

$$D' = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} b_{\alpha\beta} = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \left(a_{\alpha\beta} + \sum_k c_k \, a_{k\beta}\right) = D + \sum_k c_k \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} a_{k\beta}.$$

E poichè per $k \neq \alpha$ l'ultimo termine è zero:

$$D' = D.$$

Un normale non si altera di valore, se agli elementi di una linea si aggiunge la stessa combinazione lineare degli elementi di un numero qualsivoglia di linee parallele.

7.°

Moltiplicazione dei determinanti normali.

1. Si abbiano i due normali:

$$A = [a_{ik}], \qquad B = [b_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \infty),$$

e si formi il determinante:

$$C = [c_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \infty),$$

ponendo:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij}\, b_{kj}\,.$$

Allora si può dimostrare che:

a) *Il determinante C è normale.*

b) *Per esso sta la relazione:*

$$C = A\,.\,B.$$

Si ponga come di consueto:

$$a_{ik} = a'_{ik}, \qquad a_{ii} = 1 + a'_{ii},$$

$$b_{ik} = b'_{ik}, \qquad b_{ii} = 1 + b'_{ii},$$

$$c_{ik} = c'_{ik}, \qquad c_{ii} = 1 + c'_{ii},$$

Risulta allora:

$$c'_{ik} = a'_{ik} + b'_{ik} + \sum_j a'_{ij}\, b'_{kj}\,,$$

$$c_{ii} = a'_{ii} + b'_{ii} + \sum_j a'_{ij}\, b'_{ij}\,.$$

Ma per dato:

$$S_a = \sum_{(ik)} |\, a'_{ik}\,|, \qquad S_b = \sum_{(ik)} |\, b'_{ik}\,|,$$

sono convergenti, quindi anche la serie:

$$S_{ab} = \sum_{(i,\,k,\,j)} |\, a'_{ij}\, b'_{kj}\,|,$$

e a fortiori la serie:

$$S_c = \sum_{(ij)} |\, c_{ij}\,|,$$

sarà convergente. Resta così dimostrato che C è un determinante normale. Ma si ponga ancora:

$$\mu_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{kj}, \qquad r_{ik} = c_{ik} - \mu_{ik} = \sum_{j=m+1}^{\infty} a'_{ij}\, b'_{kj}\,.$$

Dove le r sono in sostanza i resti delle serie c_{ik}. Indichiamo poi con:

$$A_m = [a_{ik}], \quad B_m = [b_{ik}],$$

$$C_m = [c_{ik}], \quad C_m^m = [\mu_{ik}], \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots\ m),$$

i soliti determinanti finiti. Per definizione si ha:

$$C_m^m - A_m\, B_m = 0.$$

E poichè A, B, C essendo normali convergono, per m abbastanza grande si potrà stabilire:

$$A - A_m = \alpha_m , \qquad B - B_m = \beta_m , \qquad C - C_m = \gamma_m , \tag{a}$$

dove al crescere di m le α_m, β_m, γ_m, diventano più piccole di qualsivoglia quantità δ.

Ciò premesso, si osservi che C_m è decomponibile nella somma di $m + 1$ determinanti finiti, nel modo che segue:

$$C_m = (\mu_{00} \cdots \mu_{0m}) + (\mu_{00} \ldots \mu_{0m-1}\, c_{0m}) + (\mu_{00} \ldots r_{0m-1}\, c_{0m}) + \cdots + (r_{00}\, c_{01} \ldots c_{0m}),$$

rappresentando ogni determinante con la sua linea zero. Ma:

$$C_m^m = [\mu_{00} \ldots \mu_{0m}],$$

e dippiù i minori corrispondenti alle r_{ik} sono tutti finiti e quindi inferiori ad un certo numero positivo $R \leq \overline{P}$, quindi:

$$| C_m - C_m^m | < R \sum_i \sum_k | r_{ik} | , \qquad (i, \ k = 1, \ 2, \ldots \ m). \tag{b}$$

E siccome per le fatte posizioni:

$$\left| r_{ik} \right| \leq \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \left| a'_{ij}\, b'_{kj} \right| \right| ,$$

si ha pure:

$$\sum_1^m \sum_1^m | r_{ik} | \leq \sum_{m+1}^{\infty}{}_j \sum_1^m{}_i \sum_1^m | a'_{ij}\, b'_{ij} | .$$

dove il secondo membro che è il resto della serie S_{ab}, per m abbastanza grande, diventa minore di qualsivoglia quantità assegnabile. Il primo membro quindi della relazione (b):

$$C_m - C_m^m = \gamma_m^m , \tag{a'}$$

tende a zero col crescere di m. Così resta dimostrato che per ogni δ piccolo ad arbitrio si può determinare un m' tale che per $m > m'$ sieno contemporaneamente:

$$| A - A_m | , \qquad | B - B_m | , \qquad | C - C_m | , \qquad | C_m - C_m^m | ,$$

minori di δ. Se Q allora ci rappresenta una quantità finita, opportunamente grande, si ottiene:

$$| A\, B - A_m\, B_m | = | A_m\, \beta_m + B_m\, \alpha_m + \alpha_m\, \beta_m | < \delta\, Q + \delta^2$$
$$| C - C_m | < \delta , \qquad | C_m - C_m^m | < \delta ,$$

onde:

$$| C - C_m^m | < 2\delta ,$$

che insieme alla precedente ci dà:

$$| (A B - C) - (A_m B_m - C_m) | < \delta (Q + \delta + 2) ,$$

la quale per:

$$\sigma \geqq \delta (Q + \delta + 2) ,$$

si trasforma infine in:

$$| A B - C | < \sigma \quad \therefore \quad A B = C . \qquad \textit{c. d. d.}$$

È chiaro poi, dal modo col quale si è proceduto, che tale prodotto di determinanti può avvenire in 4 modi diversi.

2. Prendiamo ora a considerare quei determinanti, che si ottengono da un normale operando una sostituzione di elementi finiti sopra un numero finito di linee.

Distinguiamo i due casi:

a) Prodotto di un normale per un det. del tipo indicato.

b) Prodotto di due determinanti di questo tipo.

Riterremo in quanto segue tutte le precedenti notazioni.

a) Immaginiamo nel normale A di sostituire agli elementi delle prime n linee le quantità:

$$| \bar{a}_{ik} | < a , \qquad (k = 1, 2, \dots \infty, \; i = 1, 2, \dots n),$$

in cui a è un certo numero finito e positivo.

Otteniamo così un determinante A' convergente.

Dato allora un normale B, si definisca come pocanzi un determinante C', tale che sia:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} \, b_{kj} , \qquad (i \mp 1, 2, \dots n),$$

$$\bar{c}_{ik} = \sum_j \bar{a}_{ij} \, b_{kj} , \qquad (i = 1, 2, \dots 2).$$

Possiamo dimostrare che:

1.°) *C' è convergente e dello stesso tipo di A'*

2.°) *Per esso sta la relazione:*

$$C' = A' B .$$

Infatti le c_{ik} $(i \mp 1, 2, \dots n)$ soddisfanno a tutte le condizioni degli elementi di un determinante prodotto di due normali, e:

$$\bar{c}_{ik} = \sum_j \bar{a}_{ij} \, b_{kj} \leqq a \sum_j b_{kj} < N ,$$

in cui N è un numero indipendente da k, positivo, finito e opportunamente grande. Dunque è vera la 1.ª parte del teorema.

Ma si ha dippiù:

$$r_{ik} = c_{ik} - \mu_{ik} = \sum_{m+1}^{\infty} a'_{ij}\, b'_{kj}\,, \qquad (i \doteq 1,\ 2, \dots n),$$

$$\overline{r}_{ik} = \overline{c}_{ik} - \overline{\mu}_{ik} = \sum_{m+1}^{\infty} \overline{a}_{ij}\, b_{kj} \leq a \sum_{m+1}^{\infty} b_{kj}\,, \qquad (i = 1,\ 2, \dots n).$$

Quindi si ha ancora che r_{ik}, $\overline{r}_{ik}$ si possono rendere piccoli a piacere col crescere di m.

Operando allora analogamente al numero che precede, si ottiene in modo ovvio:

$$C' = A'\, B\,. \qquad \text{c. d. d.}$$

Se poi il prodotto si effettuasse combinando le colonne di A' con le linee di B si verrebbe a definire un certo determinante Γ' di elementi:

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\, b_{kj} + \sum_{n+1}^{\infty} a_{ji}\, b_{kj} < a \sum_{1}^{n} b_{kj} + \sum_{n+1} a_{ij}\, b_{kj}\,,$$

il quale non è della forma normale, nè può dedursi da un normale con la consueta sostituzione di elementi.

Si può tuttavia dimostrare che:

$$\Gamma' = C' = A'\, B\,.$$

Infatti, usando delle precedenti notazioni si ha per $m > n$:

$$r_{ik} = \gamma_{ik} - \mu_{ik} = \sum_{m+1}^{\infty} a'_{ij}\, b'_{kj}\,,$$

espressione che, per quanto sappiamo dal numero 1.° di questo capitolo, ci permette di determinare per ogni δ un certo $m' > n$ tale che per tutti gli $m > m'$ sia:

$$|\, \Gamma'_m - \Gamma'^{m}_{m} \,| < \frac{\delta}{2}\,.$$

Ma si ha pure:

$$|\, C'_m - C'^{m}_{m} \,| < \frac{\delta}{2}\,,$$

onde:

$$|\, (C'_m - C'^{m}_{m}) - (\Gamma'_m - \Gamma'^{m}_{m} \,| < \delta\,,$$

o poichè:

$$C'^{m}_{m} = \Gamma'^{m}_{m}\,,$$

risulta ancora:

$$|C'_m - \Gamma'_m| < \delta .$$

Ricordando la convergenza di C', di qui si deduce facilmente:

$$|\Gamma'_{m+p} - \Gamma'_m| < 3\,\delta ,$$

relazione che stabilisce la convergenza di Γ. Allora:

$$|\Gamma' - \Gamma'_m| < \sigma , \qquad |C' - C'_m| < \sigma ,$$

onde:

$$|(\Gamma' - C') - (\Gamma'_m - C'_m)| < 2\,\sigma ,$$

e per $\sigma \geqq \delta$:

$$|\Gamma' - C'| < 3\,\sigma \qquad .\dot{}. \qquad \Gamma' = C' = A' B . \qquad \textit{c. d. d.}$$

Dunque i quattro determinanti che si ottengono facendo il prodotto di A' per B nei quattro modi diversi, risultano tutti convergenti e coincidono in valore. Qualche proprietà analoga deve sussistere per il prodotto di un convergente per un normale.

b) Supponiamo ora d'avere due determinanti $A',\ B'$, ottenuti da due normali, sostituendo agli elementi delle prime n linee dell'uno una successione $\overline{a}_{ik}\,(i = 1,\ 2, \ldots\ n)$ di elementi minori in valore assoluto di un certo numero a, ed alle n' prime linee dell'altro una successione di elementi $\overline{b}_{ik}\,(i = 1,\ 2 \ldots\ n')$ minori in valore assoluto di un certo numero b positivo finito. Si potrebbe allora presentare il problema: *Con uno dei quattro modi indicati per formare il prodotto di due normali, si può definire un determinante C'', convergente ed uguale ad $(A' B)$?*

Se immaginiamo di effettuare il prodotto per linee, risultano sempre finiti gli elementi c_{ik}, eccetto il caso che sia contemporaneamente:

$$i \leqq n , \qquad k \leqq n' ,$$

perchè, in tal caso la c_{ik} possono, in generale, presentarsi come serie divergenti, essendo:

$$c_{ik} = \sum \overline{a}_{ij}\, \overline{b}_{kj} .$$

In C'' quindi si presenterebbe una matrice di $n\,n'$ elementi i quali sono, o possono essere infiniti; ed il ragionamento usato in precedenza per stabilire la convergenza del determinante prodotto, cade interamente.

Se invece si fosse definito Γ'' come determinante prodotto, che si ottiene combinando le *linee di A'* per *le colonne B'*, sarebbe ovvio il dimostrare che tutti gli elementi γ_{ik} sono finiti, e che anzi al crescere di i tendono a zero. Risulterebbe ancora che Γ'' *si può dedurre da* Γ' *appunto come da* A, *normale, si dedusse il convergente* A'.

Da ultimo poi, se facciamo il prodotto per colonne di A', e B', risulterebbe un determinante di cui tutti gli elementi sono inferiori ad un certo intero positivo finito.

Però nulla possiamo indurre con ciò sulla convergenza dei determinanti così costruiti. Abbandonando quindi, questo argomento speciale, osserviamo come queste brevi considerazioni fanno nascere il dubbio che la regola ordinaria del prodotto non sia valida in generale per due convergenti comunque, o che, applicandola nei quattro modi diversi, si possa pervenire a quattro determinanti diversi fra loro.

8.°

Prodotto di due matrici.

1. Una tabella di numeri:

$$[a_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \infty)$$

la diremo *una matrice ad infinite linee e colonne.* Essa potrà essere considerata come un determinante infinito quando se ne fissi l'origine e la diagonale principale; colla soppressione arbitraria poi di linee e colonne potrà dare origine ad un numero infinito di determinanti infiniti.

Una tabella di numeri:

$$[a_{ik}], \quad (i = 1, 2, \ldots n; \; k = 1, 2, \ldots \infty),$$

la diremo *una matrice infinita ad n colonne.*

Indichiamo poi con:

$$D(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r); \qquad D((\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r)),$$

le matrici che si ottengono da un dato determinante infinito D sopprimendo in esso rispettivamente le linee α o le colonne β, e questo, analogamente a quanto si è fatto per i minori, le diremo *matrici infinite d'ordine* r. I minori che da essi derivano, sopprimendo rispettivamente r colonne od r linee sono minori infiniti d'ordine r del determinante D.

2. Sieno ora A e B due determinanti normali, e definiamo il loro prodotto:

$$C = A\,B\,,$$

di elementi:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij}\, b_{kj}\,.$$

Consideriamo allora i due minori:

$$C_m = [c_{ik}]\,, \qquad (i = \alpha_1 \ldots \alpha_m\; k = \beta_1 \ldots \beta_m),$$

e:

$$c_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_m \\ \beta_1 \ldots \beta_m \end{pmatrix},$$

Questi minori si potranno rappresentare rispettivamente, come prodotto delle matrici infinite ad m linee:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 1} \ldots a_{\alpha_1 r} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\alpha_m 1} \ldots a_{\alpha_m r} \ldots \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_{\beta_1 1} \ldots b_{\beta_1 r} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{\beta_m m} \ldots b_{\beta_m r} \ldots \end{vmatrix},$$

o delle matrici infinite d'ordine m:

$$A(\alpha_1\, \alpha_3 \ldots \alpha_m)\,, \qquad B(\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_m)\,,$$

l'una dedotta da A sopprimendo le linee α, l'altra da B sopprimendo le β.

Per istabilire questa proprietà imaginiamo di fare il prodotto delle due matrici considerandole come determinanti; così, nei due casi considerati otterremo rispettivamente o m^2 od ∞^2 elementi che sono proprio quelli dei minori C_m e c_m di C. *Per definizione* tali minori li diremo il prodotto delle date matrici. Risulta:

Ogni minore, finito o infinito, del prodotto di due normali è rappresentabile come prodotto di due matrici infinite.

Nel caso di C_m le due matrici hanno lo stesso numero m di linee, nel caso di c_m si deducono da A e B colla soppressione dello stesso numero m di linee. Se nell'uno e nell'altro caso le linee delle due matrici hanno lo stesso indice, esse diconsi *omologhe*, e il loro prodotto è un minore diagonale.

3. Se studiamo il prodotto di due matrici infinite ad m linee:

$$[a_{ik}]; \qquad [b_{ik}] \qquad (i, = 1 \ldots m; \qquad k = 1 \ldots \infty),$$

con diretta estensione dell'ordinaria teoria risulta:

a) Il prodotto C_m di due matrici infinite ad m linee, effettuato per linee, è formalmente espresso per la serie dei prodotti dei minori di ordine m contenuti nell'una per gli omologhi dell'altra matrice.

b) Il prodotto per colonne di due matrici infinite ad m linee è nullo identicamente

Siccome finora non si è posta alcuna restrizione intorno alla grandezza ed al segno degli elementi, è chiaro che la serie di cui è parola in *a*) può essere comunque anche divergente.

4. *Diremo normale la matrice infinita ad m linee, di cui la serie degli elementi converge in modo assoluto.*

Qualunque matrice di m linee scelte fra quelle di un determinante normale, è normale. Risulta:

Il determinante C_m, prodotto di due matrici normali, è dato da una serie convergente. Questa è la serie dei prodotti dei minori omologhi nelle matrici date.

Dimostriamo direttamente questo teorema. Sieno:

$$A_1,\ A_2, \ldots\ A_r \ldots$$

$$B_1,\ B_2, \ldots\ B_r\ \ldots$$

i determinanti d'ordine m omologhi, che si possono dedurre rispettivamente dalle date matrici. Allora, per i teoremi sviluppati nel capitolo precedente si ha che:

$$S_a = \sum_r |A_r|, \qquad S_b = \sum_r |B_r|,$$

sono serie convergenti, quindi lo sarà anche la serie:

$$S_{ab} = \sum_r |A_r B_r|.$$

Ma dimostriamo ora che anche in valore si ha:

$$C_m = \sum_r A_r B_r.$$

Indichiamo con n un numero grande ad arbitrio e sempre maggiore di m; con S la somma della serie $\sum A_r B_r$, e con S_μ per $\mu = \binom{n}{m}$ la somma di μ termini, che si ottengono moltiplicando fra loro gli omologhi determinanti formati con le prime n colonne delle date matrici.

Poichè la serie S converge assolutamente si potrà sempre imaginare una disposizione di termini tali che:

$$S_{\binom{m}{m}}, \qquad S_{\binom{m+1}{m}}, \ldots \qquad S_{\binom{m+r}{m}} \ldots,$$

rappresentino rispettivamente i prodotti delle matrici:

$$\left\{\begin{array}{l}[a_{ik}]_{\substack{m\\m}} \\ [b_{ik}]_{\substack{m\\m}}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}[a_{ik}]_{\substack{m\\m+1}} \ldots \\ [b_{ik}]_{\substack{m\\m+1}} \ldots\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}[a_{ik}]_{\substack{m\\m+r}} \ldots \\ [b_{ik}]_{\substack{m\\m+r}} \ldots\end{array}\right.$$

Allora se C^n_m è il determinante prodotto delle due matrici:

$$[a_{ik}]_{\substack{m\\n}}, \qquad [b_{ik}]_{\substack{m\\n}},$$

si sa che, per ogni δ piccolissimo, si può sempre stabilire un intero $n' > m$ per modo che per ogni $n > n'$, si abbia insieme:

$$| C_m - C^n_m | < \delta, \qquad | S - S_\mu | < \delta,$$

onde:

$$| (C_m - S) - (C^n_m - S_\mu) | < 2\,\delta,$$

ma:

$$C^n_m = S_\mu,$$

dunque:

$$C_m = S = \sum_r A_r\, B_r\,.$$

È degno di nota che la precedente proprietà sussiste anche allora che una sola delle matrici sia normale, purchè l'altra si conservi ad elementi finiti. Ciò non è possibile affermare se ambedue non fossero normali.

Da queste considerazioni poi ne derivano altre riguardanti i minori finiti del prodotto di due determinanti del tipo A', B' (Cap. prec.).

Supposto per es. che la sostituzione d'elementi abbia avuto luogo in A, B, per colonne, facciamo il prodotto per linee di A', B'. Otteniamo così un determinante C' di cui non conosciamo il valore e le proprietà, ma che *ammette minori finiti tutti convergenti.*

Basta infatti osservare che le matrici le quali definiscono tali minori come loro prodotto sono normali ambedue.

Se poi il prodotto di A', B' avviene combinando linee con colonne, ogni minore sarà definito come prodotto di due matrici di cui una sola è normale, e l'altra è ad elementi finiti; ancora in questo caso dunque il determinante Γ'' ammette *minori finiti tutti convergenti.*

Non così avviene quando si effettui il prodotto per colonne.

5. Passiamo alle matrici infinite d'ordine r.

Diremo normale la matrice infinita d'ordine r quando sia dedotta da un determinante normale con la soppressione di r linee (colonne). In ogni caso queste matrici si potranno considerare in doppio modo:

come *determinanti infiniti*; e allora fissata l'origine e la diagonale assumono un valore e delle proprietà speciali;

come *matrici;* e allora non hanno nessun significato di quantità, ma restano individuate dalla legge seguita nel dedurle dal determinante D.

Così per esempio: *una matrice normale generalmente non rappresenta un determinante normale.*

Si abbiano ora due normali A e B; mediante soppressione di linee m se ne deducano rispettivamente le matrici:

$$A\,(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m)\,; \qquad B\,(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_m)\,,$$

infinite di ordine m. In virtù di relazioni stabilite nel capitolo (6) si sa che le serie:

$$S_\alpha = \sum_{(r)} \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_m \\ r_1 \ldots r_m \end{pmatrix} \right|, \qquad S_\beta = \sum_{(r)} \left| \begin{pmatrix} \beta_1 \ldots \beta_m \\ r_1 \ldots r_m \end{pmatrix} \right|,$$

dove $(r) = (r_1 \ldots r_m)$ va esteso a tutte le combinazioni dei minori $1\,2\ldots\infty$ di classe m, sono convergenti. Sarà quindi convergente anche la serie:

$$S_{\alpha\beta} = \sum_{(r)} \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_m \\ r_1 \ldots r_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \ldots \beta_m \\ r_1 \ldots r_m \end{pmatrix} \right|,$$

formata moltiplicando termine a termine le precedenti.

Vogliamo ora dimostrare che il minore infinito:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_m \\ \beta_1 \ldots \beta_m \end{pmatrix},$$

del prodotto C per linee di A e B, che è definito come prodotto delle due matrici considerate, può rappresentarsi con la serie:

$$S = \sum_{(r)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_m \\ r_1 \ldots r_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \ldots \beta_m \\ r_1 \ldots r_m \end{pmatrix}.$$

Infatti indichiamo con $C^n_{\alpha\beta}$ un determinante d'ordine n di $C_{\alpha\beta}$, e con S^n la somma della serie che lo definisce, per modo che qualunque sia n risulta:

$$C^n_{\alpha\beta} = S^n.$$

E se poi S_m ed S_m^n stanno a rappresentare le somme di m termini, rispettivamente delle due serie S e S^n, prese così che i due determinanti, il cui prodotto costituisce un termine di S_m^n sieno rispettivamente i minori dei determinanti il cui prodotto costituisce il termine corrispondente in S_m, allora qualunque sia m si potrà sempre scegliere un n opportunamente grande per modo che sia:

$$|S - S_m| < \frac{\delta}{3}, \qquad |S_m - S_m^n| < \frac{\delta}{3}, \qquad |S^n - S_m^n| < \frac{\delta}{3},$$

per δ piccolo a piacere. Di qui risulta:

$$|S - S^n| < \delta.$$

E quindi ricordando il valore di S^n, con l'ordinario procedimento arriviamo di nuovo alla conseguenza:

$$C_{\alpha\beta} = S.$$

Questa formula generalizza come segue un precedente teorema:

Il minore $C_{\alpha\beta}$, prodotto per linee di due matrici normali infinite di ordine m, è uguale alla serie dei prodotti dei minori infiniti di ordine m di A, per gli omologhi contenuti nell'altra matrice B.

Il teorema che tratta del prodotto per colonne di due matrici finite qui non trova il suo corrispondente, poichè il numero delle linee e delle colonne è del pari infinito. In particolare anzi, se le matrici, considerate come determinanti, sono normali, il prodotto per colonne dà origine ad un nuovo normale $\Gamma_{\alpha\beta}$ per modo che sia:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}.$$

9.°

Determinanti reciproci.

1. Sia:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots \infty),$$

un qualsivoglia determinante infinito. Indichiamo con:

$$A_{ik} = \binom{i}{k},$$

i suoi minori infiniti di primo ordine, e formiamo il determinante:

$$R = [A_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots \infty).$$

Qualunque sia il suo valore, diremo che R è il *reciproco di* D.

2. Sia D un determinante normale. Allora se poniamo che R sia anche normale (o deducibile da un normale con la nota sostituzione di elementi) sta per esso e per D la regola del prodotto. Indicando con:

$$M = m_{ik}, \qquad (i,\ k = 1 \ldots \infty),$$

tale prodotto, si ha in valore:

$$M = [R\, D],$$

Ma:

$$m_{ik} = \sum_j A_{kj}\, a_{ij} = 0, \qquad \text{per } i \neq k,$$

$$m_{ii} = \sum_j A_{ij}\, a_{ij} = A, \qquad \text{» } i = k.$$

Quindi:

$$M = R\, D = \lim_{m=\infty} D^m,$$

donde:

$$R = \lim_{m=\infty} D^{m-1}.$$

Ma si è supposto R convergente, quindi il secondo membro della precedente uguaglianza non può crescere oltre ogni limite, il che porta necessariamente:

$$0 \leqq |D| \leqq 1,$$

e quindi:

$$R = 0, \qquad R = \pm 1.$$

Dunque:

a) Perchè un determinante ammetta un reciproco convergente e tale che per esso valga la regola del prodotto, è necessario che D, in valore assoluto, sia uguale o minore di 1.

b) Il reciproco di un normale è zero, più o meno uno, oppure divergente.

Potrebbe parere che la condizione *a*) fosse anche *sufficiente* a stabilire che R converge e gode delle poste proprietà, in virtù della relazione:

$$R = \lim_{m=\infty} D^{m-1}.$$

Ma tale ragionamento è facile persuadersi, che rappresenta un circolo vizioso.

3. Comunque sia, poichè D è normale, i minori finiti del suo reciproco hanno sempre un certo valore finito.

Si abbia un minore:

$$R_n = \begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ A_{n1} \dots A_{nn} \end{vmatrix},$$

d'ordine n di R. Si formi quindi la matrice delle prime n linee di R e aggiungiamole infinite linee, ponendo l'unità sulla continuazione della diagonale di R_n, e zero al posto degli altri elementi. Otterremo così il determinante:

$$R_n = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & A_{1n+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & A_{nn+1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

di ordine infinito e normale. Moltiplicandolo per D, (linee con linee) e chiamando:

$$N = [n_{ik},] \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \dots \infty),$$

il determinante prodotto:

$$N = D\, R_n,$$

risulta subito:

$$\begin{aligned} n_{ik} &= 0 && \text{per } i \neq k \quad i \leq n \\ n_{ik} &= D && \text{»} \quad i = k \quad i \leq n \\ n_{ik} &= a_{ik} && \text{in tutti gli altri casi.} \end{aligned}$$

Ricordando quindi le proprietà dei minori si ha:

$$N = D\, R_n = \begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix} D^n,$$

per cui:

$$R_n = D^{n-1} \begin{pmatrix} 1, & 2, \dots & n \\ 1, & 2, \dots & n \end{pmatrix}.$$

Tale risultato si può estendere ad un minore qualsivoglia finito di R. Infatti con opportuno spostamento di linee e di colonne possiamo fare in modo che un minore qualunque venga al posto di R_n, tutto al più cambiando R di segno. Ma spostando similmente linee e colonne in D anche questo cambia o conserva il medesimo segno come R, dunque moltiplicandolo per il nuovo R_n ridotto sotto forma di determinante normale si giunge all'identico risultato. Si ottiene cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & \dots & a_{\alpha_1\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_n\beta_1} & \dots & a_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix} = D^{n-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

e questa è più generale dell'altra formula ottenuta.

4. Di qui risulta ancora:

La condizione:

$$0 \leqq |D| \leqq 1,$$

escluso $D = -1$, *è anche sufficiente perchè* D *ammetta un reciproco* R *convergente, e tale che per esso (e per un normale) valga la regola del prodotto.* Infatti:

$$R_{n+p} = D^{n+p-1}\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n+p \\ 1, & 2, & \dots & n+p \end{pmatrix},$$

$$R_n = D^{n-1}\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n \\ 1, & 2, & \dots & n \end{pmatrix},$$

e quindi:

$$|R_{n+p} - R_n| = |D^{n-1}| \left| \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n+p \\ 1, & 2, & \dots & n+p \end{pmatrix} D^p - \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n \\ 1, & 2, & \dots & n \end{pmatrix} \right|.$$

Onde:

$$\text{per} \quad D = 0, \qquad |R_{n+p} - R_n| = 0,$$

qualunque sia n. Quindi anche $R = 0$.

$$\text{Per} \quad |D| < 1, \qquad |R_{n+p} - R_n| \leqq \delta,$$

qualunque sia δ poichè il termine fra parentesi nella precedente relazione è sempre finito, e D^{n-1} al crescere di n può diventare più piccolo di qualsivoglia quantità. E ancora in questo caso $R = 0$.

Infine:

$$\text{per} \quad |D| = 1, \quad |R_{n+p} - R_n| = \left| \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n+p \\ 1, & 2, & \dots & n+p \end{pmatrix} (\pm 1)^p - \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n \\ 1, & 2, & \dots & n \end{pmatrix} \right|,$$

quindi se $D = +1$ in virtù di un teorema già posto, R ammette un limite ed è uguale all'unità; se $D = -1$ la differenza scritta diventa infinitesima o meno, al crescere di p, a seconda che p sia pari o dispari.

Quindi R è indeterminato

5. Facciamo un'ultima osservazione.

Se R è divergente o indeterminato non possiamo parlare de' suoi minori infiniti. Ma se D è compreso fra $+1$ e -1 (escluso il limite -1) e quindi R converge, il teorema del n.° 3 è valido anche per $n = \infty$.

Risulta quindi:

a) *Se* $D < 1$ *tutti i minori infiniti del suo reciproco sono nulli.*

b) *Se* $D = 1$ *i minori finiti o infiniti del suo reciproco sono uguali ai complementari dei loro omologhi in* D, *dunque gli sviluppi* (4) (5) *di* D *valgono anche per* R.

10.°

Alcune speciali identità fra i minori di un normale.

1. Ricordiamo dai precedenti numeri che la serie:

$$\sum_m \left| \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \, m \\ \beta_1 \dots \beta_r \, \beta \end{pmatrix} \right| ,$$

è convergente. E così pure la serie:

$$\sum_\lambda \left| \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} a_{m\lambda} \right| ,$$

converge, perchè risulta come prodotto termine a termine di due serie assolutamente convergenti.

2. Consideriamo la serie doppia:

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \, m \\ \beta_1 \dots \beta_r \, \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} a_{m\lambda} .$$

Per quanto precede essa converge in modo assoluto, quindi è legittimo scrivere:

$$\sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \, m \\ \beta_1 \dots \beta_r \, \beta \end{pmatrix} \sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} a_{m\lambda} = \sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \, m \\ \beta_1 \dots \beta_r \, \beta \end{pmatrix} a_{m\lambda} , \tag{11}$$

e poichè:

$$\sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} a_{m\lambda} = \left| \begin{array}{lll} D & \text{per} & m = \alpha \\ 0 & \text{»} & m \neq \alpha \end{array} \right\} \tag{12}$$

e l'altra:

$$\sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \, m \\ \beta_1 \dots \beta_r \, \beta \end{pmatrix} a_{m\lambda} = \left| \begin{array}{lll} \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} & \text{»} & \lambda = \beta \\ - \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_{\nu-1} \, \alpha_\nu \, \alpha_{\nu+1} \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_{\nu-1} \, \beta \;\; \beta_{\nu+1} \dots \beta_r \end{pmatrix} & \text{»} & \lambda = \beta_\nu \\ 0 & \text{»} & \lambda \neq \beta, \; \beta_\nu \end{array} \right\} \tag{13}$$

(dove la ν deve assumere tutti i valori $(1, 2, \ldots r)$, sostituendo nella (11) risulta la seguente identità:

$$\binom{\alpha}{\beta}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-1}\,\alpha_\nu\,\alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_{\nu-1}\,\beta\,\beta_{\nu+1} \ldots \beta_r\end{pmatrix}\binom{\alpha}{\beta_\nu} + \begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\,\alpha\\ \beta_1 \ldots \beta_r\,\beta\end{pmatrix} D, \quad (14)$$

e scambiando colonne e linee:

$$\binom{\alpha}{\beta}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-1}\,\alpha\,\alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_{\nu-1}\,\beta_\nu\,\beta_{\nu+1} \ldots \beta_r\end{pmatrix}\binom{\alpha_r}{\beta} + \begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\,\alpha\\ \beta_1 \ldots \beta_r\,\beta\end{pmatrix} D. \quad (15)$$

In particolare se nella prima si pone $\alpha = \alpha_1$ e nell'altra $\beta = \beta_1$ i coefficienti di D si annullano e si ottengono le identità:

$$\binom{\alpha_1}{\beta}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta \ldots \beta_r\end{pmatrix} + \binom{\alpha_1}{\beta_2}\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, \ldots \alpha_r\\ \beta_1, & \beta, \ldots \beta_r\end{pmatrix} + \cdots + \binom{\alpha_1}{\beta_r}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta\end{pmatrix}, \quad (14')$$

e l'altra:

$$\binom{\alpha}{\beta_1}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\begin{pmatrix}\alpha \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \alpha_r\end{pmatrix} + \binom{\alpha_2}{\beta_1}\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha, \ldots \alpha_r\\ \beta_1, & \beta_2, \ldots \beta_r\end{pmatrix} + \cdots + \binom{\alpha_r}{\beta_1}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}. \quad (15')$$

A schiarimento poi della formula (13), della cui deduzione non si è parlato a suo luogo, per non interrompere il procedimento, va notato che:

$$\sum_m \begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\, m\\ \beta_1 \ldots \beta_r\, \beta\end{pmatrix} a_{m\beta_\nu} = -\sum_m \begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_r\, m\\ \beta_1 \ldots \beta \ldots \beta_r\, \beta_\nu\end{pmatrix} a_{m\beta_\nu} = -\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_\nu \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta \ldots \beta_\nu\end{pmatrix},$$

ed è questa appunto la trasformazione di cui ci siamo giovati.

Le identità (14), (15), (14'), (15') sono dovuti al v. Koch il quale però non faceva rilevare o non avvertiva come esse fossero casi particolari di altre categorie di identità, sulle quali ci intratteremo nei numeri seguenti.

3. Poniamo che D a sua volta sia il minore:

$$\binom{\alpha_1}{\beta_1}.$$

di un certo normale Δ.

Se Δ è normale, lo è pure D quindi anche per un determinante così considerato stanno le quattro precedenti identità.

Imaginiamo anzitutto che in dette formule gli indici delle α e β variino da 2 ad r e teniamo presente che il minore:

$$\begin{pmatrix}m\, n\, p \ldots\\ r\; s\; t \ldots\end{pmatrix},$$

di D coincide col minore:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\, m\, n\, p \dots \\ \beta_1\, r\, s\, t \dots \end{pmatrix},$$

di Δ.

Allora le (14) e (15) espresse per minori di Δ diventano:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_r \\ \beta, \beta_1, \dots \beta_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=2}^{r} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta_\nu & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_\nu \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta \dots \beta_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_r \\ \beta. \beta_1, \dots \beta_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=2}^{r} \begin{pmatrix} \alpha_\nu & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix}.$$

4. Supponendo ora più generalmente che D sia il minore:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s \\ \beta_1 \dots \beta_s \end{pmatrix},$$

di Δ e procedendo nello stesso modo arriviamo alle identità più generali:

$$\begin{pmatrix} \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_s \\ \beta, \beta_1, \dots \beta_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \dots \alpha_r \\ \beta \dots \beta_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s \\ \beta_1 \dots \beta_s \end{pmatrix} + \sum_{\nu=s+1}^{r} \begin{pmatrix} \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_s \\ \beta_\nu, \beta_1, \dots \beta_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_\nu \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta \dots \beta_r \end{pmatrix}, \quad (14')$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_s \\ \beta, \beta_1, \dots \beta_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \dots \alpha_r \\ \beta \dots \beta_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s \\ \beta_1 \dots \beta_s \end{pmatrix} + \sum_{\nu=s+1}^{r} \begin{pmatrix} \alpha_\nu, \alpha_1, \dots \alpha_s \\ \beta, \beta_1, \dots \beta_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix}, \quad (15')$$

le quali sono valide per $s \leq r$.

Se poi nella prima si pone $\alpha = \alpha_\nu$ e nella seconda $\beta = \beta_\nu$ per $\nu = s + 1 \dots r$ si determinano altre identità analoghe ma più generali della (14) e 15).

Ponendo per esempio nella prima $\alpha = \alpha_{s+1}$ e nella seconda $\beta = \beta_{s+1}$ si hanno le formule:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s\, \alpha_{s+1} \\ \beta_1 \dots \beta_s\, \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=s+1}^{r} \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s\, \alpha_{s+1} \\ \beta_1 \dots \beta_s\, \beta_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_\nu \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta \dots \beta_r \end{pmatrix}, \quad (14'_1)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s\, \alpha \\ \beta_1 \dots \beta_s\, \beta_{s+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=s+1}^{r} \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_s\, \alpha_\nu \\ \beta_1 \dots \beta_s\, \beta_{s+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix}. \quad (15'_1)$$

5. Veniamo ora ad un' altro tipo di identità che comprende tutte le precedenti.

Per semplicità di scrittura si convenga di indicare con:

$$(\alpha)_p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p),$$

una combinazione di classe p degli elementi α.

Dagli sviluppi del capitolo 6.°, analogamente a quanto si è già fatto, si ha che la serie multipla:

$$\sum_{(k)_s}\begin{pmatrix}\gamma_1\dots\gamma_s\\ k_1\dots k_s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{n_1k_1}\dots a_{n_1k_s}\\ \dots\dots\\ \dots\dots\\ a_{n_sk_1}\dots a_{n_sk_s}\end{vmatrix},$$

converge assolutamente, e quindi si conserva sempre inferiore a un certo numero positivo finito.

Così pure la serie:

$$\sum_{(n)_s}\left|\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\; n_1\dots n_s\\ \beta_1\dots\beta_r\;\delta_1\dots\delta_s\end{pmatrix}\right|,$$

estendendo il sommatorio a tutte le combinazioni $(n)_s$ dei numeri $1, 2, \dots \infty$ è convergente.

E allora sarà convergente in modo assoluto anche la serie multipla (che potrà considerarsi come doppia):

$$S=\sum_{(n)_s}\sum_{(k)_s}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\; n_1\dots n_s\\ \beta_1\dots\beta_r\;\delta_1\dots\delta_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\dots\gamma_s\\ k_1\dots k_s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{n_1k_1}\dots a_{n_1k_s}\\ \dots\dots\\ a_{n_sk_1}\dots a_{n_sk_s}\end{vmatrix},$$

da cui si deduce l'identità:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{(n)_s}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\; n_1\dots n_s\\ \beta_1\dots\beta_r\;\delta_1\dots\delta_s\end{pmatrix}\sum_{(k)_s}\begin{pmatrix}\gamma_1\dots\gamma_s\\ k_1\dots k_s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{n_1k_1}\dots a_{n_1k_s}\\ \dots\dots\\ a_{n_sk_1}\dots a_{n_sk_s}\end{vmatrix}=\\ &=\sum_{(k)_s}\begin{pmatrix}\gamma_1\dots\gamma_s\\ k_1\dots k_s\end{pmatrix}\sum_{(n)_s}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\; n_1\dots n_s\\ \beta_1\dots\beta_r\;\delta_1\dots\delta_s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{n_1k_1}\dots a_{n_1k_s}\\ \dots\dots\\ a_{n_sk_1}\dots a_{n_sk_s}\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Ma:

$$\left.\sum_{(k)_s}\begin{pmatrix}\gamma_1\dots\gamma_s\\ k_1\dots k_s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{n_1k_1}\dots a_{n_1k_s}\\ \dots\dots\\ a_{n_sk_1}\dots a_{n_sk_s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}D & \text{per } (n)_s=(\gamma)_s\\ 0 & \text{» } (n)_s \neq (\gamma)_s\end{vmatrix}\right\}\quad(17)$$

e:

$$\left.\sum_{(n)_s}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\; n_1\dots n_s\\ \beta_1\dots\beta_r\;\delta_1\dots\delta_s\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{n_1k_1}\dots a_{n_1k_s}\\ \dots\dots\\ a_{n_sk_1}\dots a_{n_sk_s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_r\\ \beta_1\dots\beta_r\end{pmatrix} & \text{» } (k)_s=(\delta)_s\\ (-1)^s\begin{pmatrix}\alpha_1\dots\alpha_{\nu_1}\dots\alpha_{\nu_s}\dots\alpha_r\\ \beta_1\dots\delta_{\nu_1}\dots\delta_{\nu_s}\dots\beta_r\end{pmatrix} & \text{» } (k)_s=(\beta)_s\\ 0 & \text{» } (k)_s\neq(\delta)_s,\ (\beta)_s\end{vmatrix}\right\}\quad(18)$$

Sostituendo quindi e ordinando opportunamente risulta:

$$\left.\begin{aligned}&\binom{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_r}\binom{\gamma_1 \dots \gamma_s}{\delta_1 \dots \delta_s} = \binom{\alpha_1 \dots \alpha_r\ \gamma_1 \dots \gamma_s}{\beta_1 \dots \beta_r\ \delta_1 \dots \delta_s} D + \\ &+ (-1)^{s-1} \sum_{(\nu)_s} \binom{\gamma_1 \dots \gamma_s}{\beta_{\nu_1} \dots \beta_{\nu_s}}\binom{\alpha_1 \dots \alpha_{\nu_1} \dots \alpha_{\nu_s} \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \delta_{\nu_1} \dots \delta_{\nu_s} \dots \beta_r},\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

analogamente:

$$\left.\begin{aligned}&\binom{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_r}\binom{\gamma_1 \dots \gamma_s}{\delta_1 \dots \delta_s} = \binom{\alpha_1 \dots \alpha_r\ \gamma_1 \dots \gamma_s}{\beta_1 \dots \beta_r\ \delta_1 \dots \delta_s} D + \\ &+ (-1)^{s-1} \sum_{(\nu)_s} \binom{\alpha_{\nu_1} \dots \alpha_{\nu_s}}{\delta_1 \dots \delta_s}\binom{\alpha_1 \dots \gamma_{\nu_1} \dots \gamma_{\nu_s} \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_{\nu_1} \dots \beta_{\nu_s} \dots \beta_r}.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

È da notarsi però che i sommatorï nelle scritte identità sono da estendersi a tutte le combinazioni $(\nu)_s$ dei numeri:

$$1, 2, 3, \dots r,$$

ed è chiaro quindi che tali formule stanno solo per:

$$s \leqq r.$$

Con una sostituzione opportuna per le γ e δ si può dedurre dalle precedenti la generalizzazione delle (14') (15').

Le omettiamo per brevità.

Infine è ovvio che considerando D come un minore infinito di ordine p di un normale Δ, si giunge a formule che corrispondono alle $(14'_1)$ e $(15'_1)$ e più generali ancora delle precedenti.

Ma di quelle non abbiamo bisogno.

11.°

Determinanti e matrici nulle.

1. Si abbia un normale:

$$D = 0\,.$$

Di tale determinante potranno essere nulli anche tutti i minori infiniti di ordine $1, 2, \dots h-1$.

Se esiste un numero h finito e tale che non tutti i minori infiniti di ordine h sieno zero, essendo zero però tutti quelli d'ordine inferiore, diremo che D è di *caratteristica h*.

Una matrice infinita (dedotta da un determinante D) di ordine r si dirà *nulla* quando sono zero tutti i minori infiniti di ordine r (appartenenti a D) che si possono dedurre da essa. Ognuno di questi minori poi ammette una caratteristica; la più piccola fra tali caratteristiche, sarà detta *caratteristica della matrice*. Un determinante ed una matrice non nulli hanno caratteristica zero.

Notiamo qui per ragione di chiarezza che nel classificare i determinanti infiniti per la loro caratteristica si procede in senso inverso di quanto avviene per i determinanti finiti, così appunto come si è proceduto nella classificazione dell'ordine dei loro minori.

2. *Un normale nullo ammette sempre per caratteristica un numero finito.*

Infatti nel capitolo riguardante i minori si è dimostrato che:

Fissato con δ un numero positivo, piccolo a piacere, è sempre possibile di stabilire un numero n' tale che per ogni $n > n'$:

$$1 - \delta \leq \left| \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots & n \\ 1, & 2, \ldots & n \end{pmatrix} \right| \leq 1 + \delta,$$

e questo è vero per un normale qualunque.

In particolare se fissiamo per δ un valore minore di 1 si deduce che qualunque sia D, e quindi anche per $D = 0$ nella successione dei minori:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots & n \\ 1, & 2, \ldots & n \end{pmatrix},$$

al crescere di n si potrà sempre determinare un minore diverso da zero.

3. *In un determinante normale, se gli elementi di una linea (colonna) sono le stesse combinazioni lineari degli elementi omologhi delle linee (colonne) parallele, il determinante è nullo.*

Poniamo infatti che sia:

$$a_{ik} = \sum_{\lambda} c_\lambda a_{\lambda k}, \qquad (\lambda \neq i),$$

dove il sommatorio può essere anche esteso ad un numero infinito di termini, purchè le serie scritte convergano assolutamente. Sostituendo tali espressioni nello sviluppo di D effettuato rispetto agli elementi della i^{ma} linea:

$$D = \sum_{k} A_{ik} a_{ik} = \sum_{k} A_{ik} \sum_{\lambda} c_\lambda a_{\lambda k} = \sum_{\lambda} c_\lambda \sum_{k} A_{ik} a_{\lambda k} = 0,$$

perchè λ è sempre diverso da i.

Analogamente per una matrice normale.

4. Reciprocamente: *Se un determinante normale è nullo gli elementi delle linee sono legati da una stessa relazione lineare omogenea.*

Si escluda il caso che D presenti una linea di zeri, e si tratti anzitutto di quello in cui D abbia una caratteristica uguale all'unità.

Riduciamo allora in D, ad occupare il posto di $\binom{1}{1}$, un minore di primo ordine diverso da zero, e lo si orli al disopra della linea 1 con la linea soppressa per ottenere il minore, e a sinistra della colonna 1 si metta una colonna qualsivoglia di D. Risulta così un determinante certamente nullo.

Qualunque sia dunque la colonna r con la quale abbiamo orlato il determinante minore, sviluppando il determinante che ne risulta per gli elementi di tale colonna, si ha:

$$\sum_k M_k\, a_{kr} = 0\,,$$

dove le M non dipendono da r.

Questa dimostrazione è quella stessa che vale per i determinanti di ordine finito: così pure è estensibile l'altra per il caso della caratteristica maggiore di uno.

La cosa non varia in sostanza trattandosi di una matrice.

5. *Sia D un determinante nullo* e:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_r\\ \beta_1 \dots \beta_r\end{pmatrix}, \qquad (r < 1)\,,$$

un suo minore diverso da zero. Se questo minore è tale che tutti i minori:

$$\begin{pmatrix}\bar\alpha_1 \dots \bar\alpha_\nu\\ \bar\beta_1 \dots \bar\beta_\nu\end{pmatrix},$$

di ordine $\nu < r$ e formati prendendo per:

$$(\bar\alpha_1 \dots \bar\alpha_\nu)\,, \qquad (\bar\beta_1 \dots \bar\beta_\nu)\,,$$

rispettivamente tutte le combinazioni possibili dei numeri:

$$(\alpha_1 \dots \alpha_r)\,, \qquad (\beta_1 \dots \beta_r)\,,$$

sieno zero, allora D è di caratteristica r.

Infatti le identità (19), (20) si semplificano per $D = 0$ e la prima fra esse diventa:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_r\\ \beta_1 \dots \beta_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 \dots \gamma_s\\ \delta_1 \dots \delta_s\end{pmatrix} = (-1)^{s-1}\sum_{(\nu)_s}\begin{pmatrix}\gamma_1 \dots \gamma_s\\ \beta_{\nu_1} \dots \beta_{\nu_s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_{\nu_1} \dots \alpha_{\nu_s} \dots \alpha_r\\ \beta_1 \dots \delta_{\nu_1} \dots \delta_{\nu_s} \dots \beta_r\end{pmatrix},$$

onde per $s=1, 2,\ldots r-1$, per $(\gamma)_s$ combinazione arbitraria di classe s delle $\alpha,\ldots\alpha_r$ e per $(\delta)_s$ combinazione arbitraria dei numeri $1,\ldots 2\infty$, si ha:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 \ldots \gamma_s\\ \delta_1 \ldots \delta_s\end{pmatrix}=0.$$

Ma per l'altra identità si ha pure:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \alpha_r\\ \beta_1 \ldots \beta_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1 \ldots \gamma_s\\ \delta_1 \ldots \delta_s\end{pmatrix}=(-1)^{s-1}\sum_{(\nu)_s}\begin{pmatrix}\alpha_{\nu_1} \ldots \alpha_{\nu_s}\\ \delta_1 \ldots \delta_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 \ldots \gamma_{\nu_1} \ldots \gamma_{\nu_s} \ldots \gamma_r\\ \beta_1 \ldots \beta_{\nu_1} \ldots \beta_{\nu_s} \ldots \beta_r\end{pmatrix},$$

che combinato col precedente risultato ci dà infine:

$$\begin{pmatrix}\gamma_1 \ldots \gamma_s\\ \delta_1 \ldots \delta_s\end{pmatrix}=0,$$

per $s=1, 2,\ldots r-1$ e per $(\gamma)_s$, $(\delta)_s$ combinazioni di classe s dei numeri 1, 2, 3,... ∞.

Questo teorema fu dimostrato già dal v. Koch in modo incompiuto non avendo egli stabilite tutte le relazioni di cui è necessario servirsi.

6. Dalle proprietà dei determinanti reciproci si ha:

$$\begin{vmatrix}A_{ih} & A_{ik}\\ A_{jh} & A_{jk}\end{vmatrix}=D\begin{pmatrix}i & j\\ h & k\end{pmatrix}.$$

Quindi se $D=0$:

$$\frac{A_{ih}}{A_{ik}}=\frac{A_{jh}}{A_{jk}}.$$

Se il determinante ha caratteristica maggiore di uno, tale relazione diventa illusoria. Dunque:

In un determinato nullo di caratteristica 1 i minori di 1º ordine corrispondenti agli elementi di una linea, sono proporzionali a quelli corrispondenti agli elementi omologhi di una sua parallela.

E allora, come generalizzazione diretta che omettiamo, si ha pure:

In un determinante normale nullo, di caratteristica h, i complementi algebrici corrispondenti ai minori formati con una matrice di h linee, sono proporzionali ai complementi algebrici dei minori di ugual posto, formati con un'altra matrice di h linee, scelte nello stesso determinante.

7. *Se un determinante D è normale, nullo, e di caratteristica h, tutti i minori finiti di ordine h, formati con le medesime colonne, sono legati da*

una stessa relazione lineare omogenea. E infatti poichè D è nullo si ha:

$$0 = \sum_{(\alpha)_h} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} \dots a_{\alpha_1\beta_h} \\ \dots\dots\dots \\ a_{\alpha_h\beta_1} \dots a_{\alpha_h\beta_h} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_h \\ \gamma_1 \dots \gamma_h \end{pmatrix},$$

relazione che resta la stessa comunque scelgasi $(\beta)_h$ fra i numeri 1, 2,... ∞. Quindi è vero l'asserto.

Questo teorema e il precedente valgono anche per determinanti del tipo D' dedotti da un normale.

8. Possiamo ora enunciare come evidente la proprietà fondamentale della caratteristica.

Dato un determinante infinito (od una matrice) diremo che un altro è da esso *derivato* quando sia deducibile dal dato:

a) scambiando due linee o due colonne;

b) moltiplicando gli elementi di una qualunque linea o colonna per un numero fisso;

c) aggiungendo agli elementi di una linea o colonna una qualunque combinazione lineare degli elementi di tutte od alcune fra le sue parallele.

E allora sta il teorema:

Due determinanti (o matrici) normali derivati hanno la stessa caratteristica.

Il che risulta ovvio dopo quello che precede.

12.°

Studio di una classe di determinanti convergenti non della forma normale.

1. Fin qui si sono studiati i determinanti normali e quelli che ne derivano mediante una speciale sostituzione di elementi. Abbiamo visto le proprietà che essi presentano comuni con tutti i convergenti, e quelle speciali della loro classe. Ora passiamo a studiare un'altra famiglia di determinanti convergenti, più generale dei normali, e che già in parte fu considerata dal v. Koch.

2. *Si abbia il determinante:*

$$D'' = [a_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots \infty),$$

tale che il prodotto:

$$\prod_i a_{ii},$$

degli elementi diagonali converga in modo assoluto, e gli altri elementi sieno sottoposti alla condizione, che esista una successione di numeri x_i tali che il determinante:

$$D = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right], \qquad (i,\ k = 1 \ldots \infty),$$

sia normale. Tale determinante converge ed è uguale a D.

Si osservi infatti che per ogni m finito:

$$D_m = D''_m,$$

e quindi ad un δ piccolo a piacere si può sempre far corrispondere un m' tale che, per $m > m'$ sia:

$$| D''_{m+p} - D''_m | = | D_{m+p} - D_m | < \delta,$$

essendo p arbitrario, intero. Questa formula stabilisce la convergenza di D''. Ma allora:

$$| D - D'' | = | (D - D_m) - (D'' - D''_m) | < \delta,$$

per δ piccolo ad arbitrio, e quindi anche:

$$D = D''. \qquad \textit{c. d. d.}$$

Di qui emerge che per D'' valgono tutti i teoremi generali già stabiliti per un convergente comunque.

Il teorema ora esposto ci dà la seguente proprietà di un normale.

Moltiplicando le linee e dividendo le colonne di un normale per certe quantità fisse x_i $(i = 1, 2, \ldots \infty)$ ordinatamente, il normale conserva il proprio valore.

In particolare ponendo:

$$x_i = (-1)^i,$$

risulta: *Non si altera il valore di un normale cambiando segno agli elementi di posto dispari.*

3. Supponiamo che nessuno tra i numeri x_i possa annullarsi o diventar infinito. Allora se nell'uguaglianza:

$$D'' = D,$$

poniamo l'unità al posto degli elementi:

$$a_{\alpha_1\beta_1},\ a_{\alpha_2\beta_2},\dots\ a_{\alpha_r\beta_r},$$

e zero per tutti gli altri elementi delle linee α e delle colonne β, tra i minori di D' e di D risulta la relazione:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, \dots & \alpha_r\\ \beta_1, & \beta_2, \dots & \beta_r\end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, \dots & \alpha_r\\ \beta_1, & \beta_2, \dots & \beta_r\end{pmatrix}\frac{x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\dots\ x_{\alpha_r}}{x_{\beta_1},\ x_{\beta_2},\dots\ x_{\beta_r}}.$$

Onde:

I minori di D'' sono pure convergenti.

In particolare i minori diagonali di D'' coincidono con gli omologhi in D.

4. Veniamo agli sviluppi:

a) Sviluppando D (normale) per gli elementi della linea α abbiamo:

$$D = \sum_\beta \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\frac{x_\alpha}{x_\beta}a_{\alpha\beta}.$$

Ma per il numero precedente:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}''\frac{x_\beta}{x_\alpha},$$

onde:

$$D = \sum_\beta \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}'' a_{\alpha\beta}.$$

Ma questo è appunto lo sviluppo di $D'' = D$ quindi:

$$D'' = \sum_\beta \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}'' a_{\alpha\beta},$$

e analogamente:

$$0 = \sum_\beta \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}'' a_{\gamma\beta}. \qquad \gamma \div \alpha.$$

Nello stesso modo si può stabilire la validità di tutti gli altri sviluppi che ometteremo.

b) Se sviluppiamo D' come segue:

$$D'' = \nabla_1'' + \nabla_2'' + \cdots + \nabla''_m + \cdots$$

ed osserviamo che:

$$\nabla''_m = \nabla_m,$$

risulta evidente la validità dello sviluppo ora scritto, perchè la serie del secondo membro converge in modo assoluto.

Di qui si deduce che pure lo sviluppo per dimensioni di D'' è valido, e termine a termine coincide con quello di D.

5. La proprietà enumerata per i normali nel cap. 3.°, n. 4, resta modificata.

Indichiamo con $\overline{D}$ il determinante che si ottiene da D ponendo per gli elementi della linea α^{ma} gli elementi:

$$\overline{a}_\beta = \frac{x_\alpha}{x_\beta} a_\beta, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \infty),$$

dove le a_β debbono essere date in modo, che le $\overline{a}_\beta$, in valore assoluto, non possano superare un certo numero positivo finito.

Si ha:

$$\overline{D} = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} \overline{a}_\beta .$$

Ma se $\overline{D}''$ è il determinante che si ottiene da D'' sostituendo per gli elementi della linea α i numeri $a_\beta\,(\beta = 1, 2, \ldots \infty)$, ricordando che:

$$\binom{\alpha}{\beta}'' = \binom{\alpha}{\beta} \frac{x_\alpha}{x_\beta} .$$

si ottiene:

$$\overline{D} = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta}'' a_\beta = \overline{D}'' .$$

Dunque sta il teorema:

Se nel determinante D'' (definito più indietro) in luogo degli elementi $a_{\alpha\beta}$ della linea α, si pongono delle quantità $a_\beta\,(\beta = 1, 2, \ldots \infty)$ tali che i numeri:

$$\overline{a}_\beta = a_\beta \frac{x_\alpha}{x_\beta},$$

sieno minori di un certo numero positivo e finito **a**, *il determinante così ottenuto converge, e può essere sviluppato per gli elementi della linea sostituita.*

6. Dimostriamo che anche la regola del prodotto sussiste per determinanti di questo tipo.

È ovvio il dimostrare l'asserto nel caso che uno dei fattori sia un normale; veniamo quindi al caso generale.

Sieno:

$$A'' = [a_{ik}], \qquad B'' = [b_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \infty),$$

due determinanti definiti così, che esistano rispettivamente le due successioni infinite di numeri:

$$x < |x_1|,\ |x_2| \cdots |x_n| \cdots < X, \qquad (X,\ x \neq 0,\ \infty),$$

$$y < |y_1|,\ |y_2| \cdots |y_n| \cdots < Y, \qquad (Y,\ y \neq 0,\ \infty),$$

tali che i determinanti:

$$A = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right], \qquad B = \left.\frac{y_i}{y_k} b_{ik}\right], \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

risultino della forma normale.

Sia allora:

$$C'' = [c_{ik}], \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

il determinante di elementi:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{kj};$$

e dimostriamo:

a) *che C'' è convergente;*

b) *che il suo valore è dato da $C'' = A'' B''$.*

Si ponga:

$$\bar{a}_{ik} = a_{ik} \frac{x_i}{x_k},$$

$$\bar{b}_{ik} = b_{ik} \frac{y_i}{y_k},$$

ed anche:

$$\bar{c}_{ik} = \sum_j \bar{a}_{ij} \bar{b}_{kj},$$

onde:

$$C = [\bar{c}_{ik}], \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

mi definisce il prodotto $A \,.\, B$.

Si facciano poi le seguenti posizioni:

$$\mu_{ik} = \sum_1^m a_{ij} b_{kj}, \qquad r_{ik} = c_{ik} - \mu_{ik} = \sum_{m+1}^\infty a_{ij} b_{kj},$$

e:

$$A''_m = [a_{ik}], \quad B''_m = [b_{ik}], \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

$$C''_m = [c_{ik}], \quad C''^m_m = [\mu_{ik}],$$

e analogamente, con lettere segnate, per A, B, C; indi si osservi che:

$$r_{ik} = \sum_{m+1}^\infty a_{ij} b_{kj} = \sum_{m+1}^\infty \frac{x_j y_j}{x_i x_k} \bar{a}_{ij} \bar{b}_{kj} \leq \frac{XY}{xy} \sum_{m+1}^\infty \bar{a}_{ij} \bar{b}_{kj},$$

ossia:

$$r_{ik} \leqq \frac{X\,Y}{x\,y} \overline{r}_{ik}.$$

Osserviamo che nei precedenti sommatorii l'indice variabile è sempre j. Allora decomponendo come nel Cap. 7 il determinante C''_m in $m+1$ determinanti, tenuto conto del precedente risultato, si ottiene:

$$| C''_m - C''^m_m | < \delta,$$

per δ piccolo ad arbitrio ed m opportunamente grande. Di qui:

$$| C''_{m+p} - C''^{m+p}_{m+p} | < \delta,$$

per cui:

$$|(C''_{m+p} - C''_m) - (C''^{m+p}_{m+p} - C''^m_m)| < 2\,\delta.$$

Ma per qualunque m:

$$C''^m_m = C^m_m,$$

onde:

$$| C''^{m+p}_{m+p} - C''^m_m | = | C^{m+p}_{m+p} - C^m_m | < \delta,$$

e da ultimo:

$$| C''_{m+p} - C''_m | < 3\,\delta;$$

dunque C'' è convergente.

Ma dalle relazioni precedenti si ha pure:

$$| C'' - C''^m_m | < 2\,\delta,$$

$$| C - C^m_m | < 2\,\delta,$$

quindi:

$$| C'' - C | < 4\,\delta \;\therefore\; C'' = C = A''\,B''.$$

7. Così restano fissate le principali proprietà di questi determinanti. Ommettendo ogni ulteriore ricerca, la quale del resto si presenterebbe ovvia per quanto precede, osserviamo che gli sviluppi del Cap. 6.° valgono anche per determinanti del tipo D'', onde anche le identità del Cap. 10.°, sono vere, quando i minori che in esse compaiono, sieno considerati quali minori di D''.

Ciò ha importanza in rapporto alle applicazioni del Cap. 14.°

13.°

Una classe di determinanti nulli.

1. Si abbia il determinante:

$$D = [a_{ik}] \,, \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \dots \infty),$$

i cui elementi sieno soggetti alle condizioni che esistono tre numeri A, r, s, tali che per ogni valore di i, k sia:

$$| a_{ik} | \leqq \frac{A}{r^i s^k} \,,$$

essendo:

$$| r s | \geqq \gamma^2 > 1 \,.$$

Sotto queste condizioni il determinante converge a zero.

Si sviluppi infatti D_m e si faccia la somma dei valori assoluti de' suoi termini; si avrà:

$$D_m \leqq \sum_{(\alpha)_m} | a_{1\alpha_1} , a_{2\alpha_2} , \dots a_{m\alpha_m} | \,.$$

E sostituendo per le a il loro limite superiore, e ricordando che:

$$\alpha_1,\ \alpha_1, \dots \alpha_m,$$

è una permutazione dei numeri:

$$1,\ 2, \dots m,$$

risulta:

$$D_m \leqq \left| \frac{A^m m!}{(r s)^{\frac{1}{2} m(m+1)}} \right| \leqq \left| \frac{A^m m!}{\gamma^{m\, m+1)}} \right| \,.$$

Costruendo D_{m+p} e facendo la differenza dei primi, e la somma dei secondi termini, si ha:

$$\left| D_{m+p} - D_m \right| \leqq \left| \frac{A^m m!}{\gamma^{m\, m+1)}} \right| \left| \frac{A^p (m+1) \dots (m+p)}{\gamma^{p(2m+1)+p^2}} + 1 \right| .$$

Ma:

$$m! < m^m; \qquad (m+1)(m+2) \dots (\mathrm{m}+p) < (m+p)^p,$$

quindi:

$$| D_{m+p} - D_m | \leqq \left| \frac{m\, A}{\gamma^{m+1}} \right|^m \left| \left\{ \frac{(m+p)\, A}{\gamma^{2m+p+1}} \right\}^p + 1 \right| .$$

Ora dico che l'espressione:

$$\frac{A\,m}{\gamma^{m+1}}.$$

tende a zero col crescere di m. Infatti essa può scriversi:

$$\frac{A}{\gamma}\left\{\frac{\sqrt[m]{m}}{\gamma}\right\}^m,$$

e poichè:

$$\lim_{m=\infty}\sqrt[m]{m}=1,$$

e;

$$|\gamma|>1,$$

per ogni $m>m'$ essendo m' scelto opportunamente sarà:

$$\sqrt[m]{m}<|\gamma| \quad \therefore \quad \left|\frac{\sqrt[m]{m}}{\gamma}\right|<1.$$

Risulta quindi:

$$\lim\frac{m\,A}{\gamma^{m+1}}=\frac{A}{\gamma}\lim\left\{\frac{\sqrt[m]{m}}{\gamma}\right\}^m=0.$$

Possiamo di qui affermare che fissato con δ un numero piccolo a piacere si può sempre determinare un intero m' tale che, per ogni $m>m'$, sia:

$$\left|\frac{m\,A}{\gamma^{m+1}}\right|^m<\delta,$$

e insieme:

$$\left|\left\{\frac{(m+p)\,A}{\gamma^{m+p+1}}\right\}^p+1\right|<1+\delta,$$

onde:

$$|D_{m+p}-D_m|<\delta(1+\delta).$$

Quindi il determinante considerato converge. Ma d'altra parte dalla disuguaglianza:

$$|D_m|\leq\left|\frac{A^m\,m!}{\gamma^{m(m+1)}}\right|,$$

emerge tosto:

$$D=\lim D_m=0.$$

È chiaro poi che la condizione:

$$|r\,s|\geqq\gamma^2>1,$$

richiede che almeno una delle due quantità r, s sia maggiore dell'unità, l'altra potendo anche essere minore di uno.

Se quindi il determinante in discorso presenta le linee tali che i moduli dei loro elementi formino delle serie convergenti, le sue colonne potranno anche formare delle serie divergenti, che al crescere dell'indice della colonna tendono a convergere.

2. Per tali determinanti intanto stanno tutte le proprietà del Cap. 2.° Inoltre è facile convincersi, con una semplice osservazione, che tutti i minori infiniti dedotti da essi, con la soppressione di uno stesso numero di linee e di colonne, godono identiche proprietà. Anche gli sviluppi (3), (4), (5) sono applicabili ai nostri determinanti.

Omettendo le moltissime considerazioni che si potrebbero fare in proposito si osservi da ultimo che ponendo:

$$\frac{\binom{i}{k}}{D} = \alpha_{ik}, \qquad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots \infty),$$

se tali rapporti esistono, si possono stabilire le relazioni:

$$\sum_k \alpha_{ik}\, a_{ik} = 0,$$

$$\sum_k \alpha_{ik}\, a_{jk} = 0,$$

ed anche:

$$\sum_i \alpha_{ik}\, a_{ik} = 0,$$

$$\sum_i \alpha_{ik}\, a_{ih} = 0.$$

Ora fissati due numeri ρ, σ per modo che:

$$|r\rho| > 1, \qquad |s\sigma| > 1,$$

è sempre possibile determinare un numero B finito, per cui:

$$|\alpha_{ik}| \leqq \frac{B}{\rho^i\, \sigma^k}, \tag{1}$$

a partire da un certo valore degli indici in poi.

E infatti se tale condizione è soddisfatta si ottiene:

$$\sum_k \alpha_{ik}\, a_{ik} \leqq \sum_k \frac{A}{r^i\, s^k}\, \frac{B}{\rho^i\, \sigma^k} \leqq \frac{AB}{(r\rho)^i} \sum_k \frac{1}{(s\sigma)^k},$$

Ma la serie:

$$\sum_k \frac{1}{(s\,\sigma)^k},$$

converge in quanto:

$$|s\,\sigma| > 1,$$

quindi, per qualunque valore di B finito, lo sviluppo considerato, e quindi anche gli altri, convergono quando al posto di α_{ik} si pongano quantità che soddisfano alle date condizioni.

Supponiamo invece che data una coppia di numeri ρ, σ definiti come dianzi, non esista nessun numero B tale che:

$$|\alpha_{ik}| \leqq \frac{B}{\rho^i\,\sigma^k},$$

per qualunque valore di k maggiore di un certo intero m. Allora fissato con B un numero grande ad arbitrio, da un certo indice m in poi dovrà essere:

$$\alpha_{ik} > \frac{B}{\rho^i\,\sigma^k}, \tag{2}$$

per infiniti valori di k.

Ma il determinante D resta convergente quando al posto degli elementi di una linea si sostituiscano i loro massimi valori (ciò che è facile verificare); e dippiù è sviluppabile per gli elementi della linea sostituita, quindi la serie:

$$\sum \alpha_{ik}\,a_{ik},$$

estesa a tutti i valori di k per i quali è soddisfatta la disuguaglianza (2), converge ponendo per a_{ik}:

$$\frac{A}{r^i\,s^k}.$$

Si ha dunque che:

$$\sum_k \frac{A}{r^i\,s^k}\,\alpha_{ik},$$

deve assumere un valore finito.

Ma:

$$\sum \frac{A}{r^i\,s^k}\,\alpha_{ik} \geqq \frac{A\,B}{(r\,\rho)^i} \sum_k \frac{1}{(\sigma\,s)^k} \geqq M\,\frac{A\,B}{(r\,s)^i},$$

dove M è finito, ma B può crescere oltre ogni limite. Risulta quindi nella fatta ipotesi che il primo membro può crescere oltre ogni quantità assegnabile, ossia, contrariamente all'ipotesi, dovrebbe divergere. Per questo verso adunque veniamo a stabilire che i gruppi di numeri:

$$\alpha_{ik}, \qquad a_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots \infty),$$

soddisfanno alle condizioni per essere *associati*, e le presenti notizie si legano direttamente a quelle date dal chiar. prof. PINCHERLE su tale soggetto.

Sarebbe molto utile a questo proposito, di ripetere sui determinanti in discorso lo studio particolareggiato che abbiamo sviluppato per i normali (*).

14.°

Sui sistemi lineari infiniti (applicazione).

1. Sia:

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k = y_i, \qquad (i = 1, 2, \dots \infty), \qquad (a)$$

un sistema lineare di infinite equazioni tra infinite incognite, e suppongasi il determinante:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \dots \infty),$$

della forma normale e diversa da zero, e le y_i costanti e di valore inferiore ad un certo numero finito Y. Ci proponiamo sotto queste ipotesi di determinare i sistemi di valori x_k $(k = 1, 2, \dots \infty)$ i quali rendano identicamente:

$$u_i = y_i,$$

e che in valore assoluto non risultino maggiori di qualunque numero X positivo, finito.

Fissiamo con X un numero opportunamente grande; per tutti i sistemi di valori:

$$|x_k| \leqq X,$$

(*) Esistono due altri lavori del v. KOCH sui determinanti d'ordine infinito. Il primo: *Bidrag till theorie oëndliga determinanter*, 1891, non ci fu possibile consultarlo; l'altro: *Sopra la convergenza, ecc.*, Compt. R., vol. 120, 1895, per quanto riguarda quella parte dei det. infiniti da noi studiata non ha molta importanza. Esso tratta di uno speciale normale in rapporto alla frazione continua da esso generata.

la serie:

$$S=\sum_i \sum_\lambda \binom{i}{k} a_{ik}\, x_k\,,$$

converge assolutamente perchè si ha:

$$\sum_\lambda | a_{i\lambda}\, x_\lambda | < U\,,$$

dove U è positivo finito. Ma allora possiamo scrivere:

$$S=\sum_i \binom{i}{k} \sum_\lambda a_{i\lambda}\, x_\lambda = \sum_i \binom{i}{k} y_i.$$

E d'altra parte:

$$\sum_i \sum_\lambda \binom{i}{k} a_{i\lambda}\, x_\lambda = \sum_\lambda x_\lambda \sum_i \binom{i}{k} a_{i\lambda} = D\, x_k\,,$$

onde:

$$D\, x_k = \sum_i \binom{i}{k} y_i\,.$$

Sotto le ipotesi date il sistema delle u_i *ammette dunque un sistema unico di soluzioni.*

2. Ancora nell'ipotesi che:

$$D \neq 0\,,$$

supponiamo nulle tutte le y_i, ossia consideriamo un sistema omogeneo di infinite equazioni. Allora:

$$D\, x_k = \sum_i \binom{i}{k} y_i = 0\,,$$

risulta cioè, che in tal caso il sistema è soddisfatto da valori delle incognite tutti nulli, ossia in generale *non ammette soluzioni.*

3. Vediamo il caso generale nell'ipotesi che:

$$D = 0\,,$$

sia di caratteristica r, supponendo che non tutte le y_i siano zero.

Si sa che è sempre possibile determinare almeno un minore infinito di D, di ordine r, diverso da zero:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_r \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_r \end{pmatrix}.$$

Allora possiamo dimostrare che i primi membri delle equazioni:

$$u_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}\,, \qquad u_{\alpha_2} = y_{\alpha_2}\,, \ldots\ u_{\alpha_r} = y_{\alpha_r}\,,$$

risultano combinazioni lineari omogenee delle altre u_i.

Infatti, sotto le ipotesi dei numeri precedenti la serie doppia:

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_{\nu-1}\, m\, \alpha_{\nu+1} \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_{\nu-1}\, \beta_\nu\, \beta_{\nu+1} \dots \beta_r \end{pmatrix} a_{m\lambda}\, x_\lambda .$$

converge assolutamente, quindi si potrà ordinarla come segue:

$$S = \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots m \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix} \sum_\lambda a_{m\lambda}\, x_\lambda = \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots m \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix} u_m =$$

$$= \sum_\gamma x_\lambda \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots m \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix} a_{m\lambda} .$$

Ma in quest' ultima espressione i termini del sommatorio esteso ad m sono zero tanto per:

$$\lambda \neq (\beta_1,\ \beta_2, \dots\ \beta_r),$$

quanto per:

$$\lambda = (\beta_1,\ \beta_2, \dots\ \beta_r),$$

perchè nel secondo caso gli corrisponde un termine che è un minore di ordine $(r - 1)$, e quindi zero per ipotesi, nell'altro un minore con due colonne identiche. Risulta adunque:

$$\sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_{\nu-1} \dots m\, \alpha_{\nu+1} \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_{\nu-1} \dots \beta_\nu\, \beta_{\nu+1} \dots \beta_r \end{pmatrix} u_m = 0 .$$

Ma nella serie scritta i coefficenti di:

$$u_{\alpha_1},\ u_{\alpha_2},\ u_{\alpha_3}, \dots u_{\alpha_{\nu-1}},\ u_{\alpha_{\nu+1}}, \dots\ u_{\alpha_r},$$

sono tutti zero, mentre è diverso da zero per ipotesi quello di u_{α_ν} ed i coefficienti di u_m per:

$$m \neq \alpha_1, \dots\ \alpha_r,$$

quindi si avrà:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_\nu \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix} u_{\alpha_\nu} = - \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots m \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_\nu \dots \beta_r \end{pmatrix} u_m, \qquad [m \neq (\alpha)_r].$$

E questa formula che vale per:

$$\nu = 1,\ 2, \dots\ r,$$

dimostra appunto che i primi membri delle equazioni:

$$u_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_r} = y_{\alpha_r},$$

sono funzioni lineari delle restanti u_i.

Di qui si rende chiaro che se i valori delle incognite x rendono:

$$u_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_r} = y_{\alpha_r},$$

ed anche:

$$u_m = y_m, \qquad m \div (\alpha_r),$$

identicamente, la soprascritta relazione fra le u_i deve sussistere anche fra le y_i corrispondenti affinchè il sistema sia compatibile. Quando ciò non avvenga, il sistema è *incompatibile*, ossia non ammette soluzioni.

Supposta dunque verificata la condizione necessaria per la compatibilità del sistema, è chiaro che le $u_{\alpha_\nu} = y_{\alpha_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \dots r)$ sono conseguenza delle altre, e quindi superflue.

Volendo poi effettuare la determinazione delle incognite basta notare che la serie doppia:

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r\, m \\ \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r\, \beta \end{pmatrix} a_{m\lambda}\, x_\lambda,$$

converge assolutamente, e quindi:

$$\sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r\, m \\ \beta_1 \dots \beta_r\, \beta \end{pmatrix} a_{m\lambda}\, x_\lambda = \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r\, m \\ \beta_1 \dots \beta_r\, \beta \end{pmatrix} y_m,$$

la quale in forza delle identità (13) del Cap. 10 diventa:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} x_\beta = \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r\, m \\ \beta_1 \dots \beta_r\, \beta \end{pmatrix} y_m + \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta \dots \beta_r \end{pmatrix} x_{\beta_1} + \dots + \begin{pmatrix} \gamma_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta \end{pmatrix} x_{\beta_r}, \; [m \div (\alpha_r)].$$

Il sistema è dunque r volte indeterminato.

Reciprocamente se tra le x_i stanno le ultime relazioni scritte, il sistema dato è soddisfatto dai valori delle incognite che si deduce da esse; *cioè tali relazioni sono necessarie e sufficienti* perchè *il sistema sia compatibile ed r volte indeterminato.*

Eseguendo infatti la sostituzione, per esempio nella α^{ma} equazione data, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} \sum_\beta a_{\alpha\beta}\, x_\beta = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \sum_m \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r\, m \\ \beta_1 \dots \beta_r\, \beta \end{pmatrix} y_m + \cdots$$

dove i termini seguenti sono identicamente nulli.

Ma il primo membro è proprio:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix} y_\alpha,$$

ed il secondo membro si può ridurre a:

$$\sum_m y_m \sum_\beta \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r\, m \\ \beta_1 \dots \beta_r\, \beta \end{pmatrix} a_{\alpha\beta}.$$

Per cui osservando che la serie estesa a β è sempre zero, eccetto per il caso di $m = \alpha$, in cui diventa:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix},$$

l'equazione resta verificata.

Possiamo quindi riassumerci nel teorema:

Se (a) è un sistema di equazioni lineari non omogenee, di cui il determinante è normale, nullo di caratteristica r, e si determinano gli indici:

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \dots\ \alpha_r;\ \beta_1,\ \beta_2, \dots\ \beta_r,$$

in modo che il minore infinito:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix},$$

sia diverso da zero, e poniamo la condizione che le incognite in valore assoluto non possono superare qualunque numero X positivo, grande a piacere, allora le equazioni:

$$u_{\alpha_1} = y_{\alpha_1},\ u_{\alpha_2} = y_{\alpha_2}, \dots\ u_{\alpha_r} = y_{\alpha_r},$$

risultano superflue, le incognite:

$$x_{\beta_1} \dots x_{\beta_r},$$

restano indeterminate, e le rimanenti incognite sono espresse come funzioni lineari dei termini cogniti, e delle indeterminate x_{β_r}.

4. Per il caso in cui le y sieno tutte zero, ossia si tratti di un sistema omogeneo il cui determinante D sia di caratteristica r, il procedimento per la determinazione del valore dell'incognite, e la corrispondente discussione, sono affatto analoghi a quanto si è trattato finora. Anche in questo caso adunque ogni incognita è funzione lineare di r indeterminate. È ovvio poi che in tale sistema il caso della *incompatibilità* non si possa presentare.

Il teorema per questo caso fu esposto dal v. Koch, e il contenuto del numero precedente è la pura estensione del suo metodo.

5. La condizione del numero 3, necessaria e sufficiente per la compatibilità fra le equazioni di un sistema ad infinite incognite, può assumere una forma assai più concisa.

Formiamo il minore di D:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r\end{pmatrix},$$

diverso da zero, *sopprimendo in A le linee con le colonne indicate;* indi lo si orli a destra con la colonna delle y_i $(i \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r)$ e al disopra della prima linea con la linea α, ponendo nell'origine, incrocio della linea con la colonna aggiunta, l'elemento y_α. Così otteniamo un determinante Δ_{r-1}, sempre convergente, perchè le y_i soddisfano alla disuguaglianza:

$$y_i \leqq Y,$$

per Y finito. Tale minore per:

$$i \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r,$$

è zero perchè in esso due linee vengono a coincidere, e per:

$$i = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r,$$

sarà ancora nullo, in virtù delle relazioni che sussistono identicamente fra le y_i, le quali fanno sì che nel minore Δ_{r-1} gli elementi della linea aggiunta sieno le stesse combinazioni lineari omogenee degli elementi omologhi nelle linee parallele. Se ciò non fosse, per quanto si è veduto, il sistema sarebbe incompatibile. Dunque si ha sempre:

$$\Delta_{r-1} = 0.$$

Reciprocamente poi se tutti i Δ_{r-1} così ottenuti sono zero, vuol dire che in essi gli elementi p. es. della linea i sono le stesse combinazioni lineari degli altri omologhi nelle linee parallele; quindi facendo variare i da α_1 ad α_r si ritorna appunto alle relazioni fra le y_i onde siamo partiti, relazioni che si presentano necessarie e sufficienti perchè nel dato sistema le equazioni siano compatibili, ed r di esse si presentino come combinazioni lineari delle restanti. Riassumendo:

Le relazioni:

$$\Delta_{r-1} = 0,$$

sono necessarie e sufficienti perchè il sistema risulti indeterminato d'ordine r, e si presentino tutte compatibili le equazioni che lo compongono.

6. Ma questo criterio è a sua volta trasformabile.

Immaginiamo di costruire la matrice infinita:

$$M = \begin{matrix} y_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Sopprimendo in essa una colonna ad arbitrio, il determinante che ne risulta è almeno di caratteristica r.

Infatti se la colonna soppressa è quella delle y si ottiene il determinante D che per ipotesi è di caratteristica r.

Se la colonna soppressa è una fra le $\beta = \beta_1 \dots \beta_r$, il determinante che risulta ammette come minore di ordine r il minore considerato poc'anzi:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_r \\ \beta_1 \dots \beta_r \end{pmatrix},$$

supposto diverso da zero. Ma poichè tutti i Δ_{r-1} sono uguali a zero, per un teorema dimostrato saranno zero tutti i minori d'ordine $r-1$, $r-2, \dots$ 3, 2, 1 del determinante costruito e quindi esso è di caratteristica r.

Infine se la colonna soppressa fosse diversa dalle $\beta_1 \dots \beta_r$ e il determinante fosse di caratteristica $p < r$, esso dovrebbe ammettere almeno un minore di ordine r (e formato con le a_{ik}) diverso da zero. Ma tale minore è anche un minore di D diverso da zero, quindi tutti i minori di ordine $r-1$ deducibili da esso, orlandolo con la colonna delle y ed un'altra linea qualunque, sono zero, e così pure quelli d'ordine $r-1$ formati con le a_{ik}, *per ipotesi;* è dunque assurdo che il determinante in questione abbia caratteristica minore di r.

Con questo resta dimostrato che i determinanti dedotti da M con la soppressione di una colonna sono almeno di caratteristica r. Viceversa poi se tale condizione è soddisfatta è ovvio che $\Delta_{r-1} = 0$.

Allora considerando la M come una matrice rettangolare con una colonna *in eccesso* sul numero delle linee, in modo che da essa si debbano dedurre determinanti infiniti, sopprimendo una colonna ad arbitrio, potremo da ultimo conchiudere:

Perchè le equazioni del sistema dato siano compatibili è necessario e sufficiente che il determinante D e la matrice M abbiano la stessa caratteristica r.

E questa appunto è la diretta estensione del teorema sulla compatibilità dei sistemi finiti di equazioni lineari, sotto la forma elegante e concisa che gli inferiva il prof. Capelli.

7. Per la validità dei precedenti risultati non è necessario che D sia della forma normale.

Infatti se poniamo attenzione a tutti i teoremi e alle formole di cui ci siamo valsi finora, vediamo che gli uni e le altre, sono estesi od estensibili ai determinanti che si deducono da un normale colla nota sostituzione di elementi finiti agli elementi di n linee od n colonne, ed agli altri che si deducono pure da un normale moltiplicandone le linee per $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ rispettivamente, e dividendo le colonne per le stesse quantità.

Dunque i risultati precedenti valgono per sistemi d'equazioni più generali di quelli dianzi studiati.

8. A complemento di queste ricerche supponiamo di avere un sistema infinito:

$$\sum a_{ik} x_k = y_i, \qquad (a')$$

il cui determinante:

$$D = [a_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots \infty),$$

sia tale che esistono tre numeri A, r, s per cui:

$$a_{ik} \leqq \frac{A}{r^i s^k},$$

per A finita ed:

$$|rs| > 1.$$

Allora dico che se esiste ed è determinabile un numero finito Y tale che:

$$y_i \leqq \frac{Y}{r^i},$$

dal dato sistema è sempre deducibile un sistema di soluzioni:

$$x_i \leqq X s'^i, \qquad (s' < s),$$

(dove X è un numero grande a piacere ma finito) le quali sono espresse per funzioni lineari delle y_i.

Infatti ricordiamo dal cap. precedente che le quantità α_{ik}, se esistono, sono tali che:

$$\alpha_{ik} \leqq \frac{B}{\rho^i \sigma^k},$$

per B finito e:

$$|r\rho| > 1, \qquad |s\sigma| > 1.$$

Allora se poniamo:

$$X_k = \sum_i \alpha_{ik}\, y_i \,. \tag{1}$$

e nella serie del secondo membro si pone al posto delle α_{ik} ed y_i i loro massimi valori si ha:

$$|X_k| < \frac{X}{\sigma^k} \leq X\, s'^k \,.$$

Dove X è un numero oppurtunamente grande, onde risulta anche il criterio che per $s \leq 1$ le X_k tendono ad un limite finito, e le serie che le rappresentano sono assolutamente convergenti per qualunque valore degli indici.

Ponendo ora nella formola (1) al posto delle y_i i loro valori si ottiene:

$$x_k = \sum_i \alpha_{ik} \sum_h a_{ih}\, x_h \,,$$

e questa serie converge assolutamente.

Infatti poichè vogliamo determinare dei valori:

$$x_i \leq X\, s'^i \,, \qquad s' < s, ,$$

la serie scritta si presenta termine a termine minore dell'altra:

$$\frac{A\, B\, X}{\sigma^k} \sum_{(ih)} \frac{1}{(r\, \rho)^i} \left(\frac{s'}{s}\right)^h .$$

la quale converge.

Dunque ordinando opportunamente i termini della x_k si ha:

$$x_k = \sum_h x_h \sum_i \alpha_{ik}\, a_{ih} \,,$$

che per le note relazioni ci dà:

$$X_k = x_k \,.$$

Dunque sotto le note ipotesi il sistema dato ammette una soluzione unica per le x_i.

È questo il risultato più importante che il chiar. prof. Pincherle nella memoria citata stabiliva per mezzo dei gruppi di numeri associati.

Per questa via è chiaro che si giunge a risultati analoghi, non identici, a quelli che si otterrebbero ammettendo rigorosa e applicando al caso nostro l'ordinaria teoria dei sistemi lineari.

Pavia, 25 ottobre 1896.

INDICE

Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche.

(Di Beppo Levi, *a Torino.)*

Memoria prima.

Un noto teorema relativo alle funzioni algebriche di una variabile dovuto al Weierstrass e, particolarmente per la sua interpretazione geometrica e per le importanti applicazioni, al sig. Noether (*) stabilisce la possibilità di trasformare l'intorno di un punto singolare qualunque di una curva piana algebrica (non multipla) nell'insieme degli intorni di un numero finito (che può essere 1) di punti semplici di un'altra curva algebrica piana, per mezzo di un numero finito di trasformazioni quadratiche piane.

Si presenta naturale la domanda se esista un teorema analogo per le superficie algebriche dello spazio ordinario, e in generale per le M_{r-1} immerse in un S_r. Limitandoci allo spazio ordinario la questione fu toccata dapprima dal sig. Noether (**) il quale affermò la possibilità di *abbassare* la singolarità di un punto o di una linea di una superficie assumendoli come

---

(*) Göttinger Nachrichten 1871, pag. 267, 2.ª Nota: *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln* e Math. Ann. IX-1875: *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die sing. Punkte einer alg. Curve.* Cfr. pure gli analisti: p. es. Hamburger, Zeitschrift für Mathematik u. Physik, XVI-1871. Biermann, *Theorie der analitischen Functionen*, 1887 (pag. 215 e seg.). Per la dimostrazione sintetica v. Bertini: *Sopra alcuni teoremi fondamentali sulle curve algebriche piane* (Rend. Ist. Lombardo (2)-21-1888) e un recente lavoro del sig. De Franchis: *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana* (Rend. Circ. Mat. Palermo XI-1897).

(**) Nella citata Nota nelle Göttinger Nachrichten.

elementi fondamentali di una trasformazione Cremoniana dello spazio. Ma il problema non era interamente risolto con ciò; mancava la dimostrazione che il procedimento indicato bastasse a risolvere ogni punto singolare.

Molto tempo dopo ritornarono sull'argomento i signori Del Pezzo (*) e Kobb (**), e, ricorrendo l'uno a trasformazioni monoidali, l'altro a trasformazioni quadratiche, proposero due dimostrazioni della possibilità di rappresentare l'intorno di un punto (o linea) singolare di una superficie per mezzo degli intorni di un numero finito di punti (o linee) semplici di una o più nuove superficie. Della proposizione del sig. Kobb fece applicazione geometrica il sig. prof. Segre nella sua Memoria: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (***).

Avendo avuto l'onore di coadiuvare il prof. Segre nella revisione delle bozze di questa Memoria, mi occupai della suddetta questione, ed ottenni fin d'allora con metodo sintetico alcuni risultati che il prof. Segre volle gentilmente annunziare alla fine del suo lavoro (p. 53).

Nello sviluppo dei concetti che mi guidarono, la materia mi venne crescendo in mano, tanto da superare ogni previsione che su quel breve cenno potesse farsi. Di questa prolissità, che va attribuita all'argomento (e da cui mi pare non possano per ora liberarsi anche altre ricerche affini) chiedo venia al lettore, che oso sperare si compiacerà dei risultati ottenuti; tanto più che, se mal non mi appongo, non sono interamente esatti i due lavori sullo stesso argomento, ultimi citati: — questo confermerò, per quanto riguarda la Memoria del sig. Kobb, nel breve esame critico che premetto alla presente Memoria.

Relativamente al lavoro del prof. Del Pezzo mi limiterò a ricordare i giudizi e le discussioni cui esso diede luogo (****); riferendomi in particolare al principio della seconda Nota del prof. Segre per l'esposizione di quei dubbi che possono far ritenere incompleto il lavoro del citato autore.

(*) *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Rend. Circ. Palermo VI-1892).

(**) *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de Mathématiques (4) VIII, 1892, pag. 385). Indicherò brevemente questa Memoria con: Kobb. Essa si chiude con un rapido cenno alla questione più generale relativa alle M_{r-1} di S_r: ad esso pure debbono estendersi le osservazioni del n.° 1 del presente scritto.

(***) *Annali di Matematica* (2) XXV (dicembre 1896) pag. 1. Indicherò questa Memoria con: Segre.

(****) Del Pezzo, *Per difesa*, Stockholm, 1894. *Osservazioni sopra una Memoria del prof. Corrado Segre*, ecc. Atti dell'Acc. Pontaniana, 27 (maggio 1897). — Segre, *Intorno*

§ 1.

1. I fatti enunciati dal sig. KOBB come risultati del suo lavoro, si raccolgono nelle tre seguenti proposizioni:

a) « Sia (0, 0, 0) un punto m^{plo} della superficie algebrica:

$$F(u, v, w) = 0 .$$

« Con una sostituzione della forma:

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_1 \tau + \beta_1 \sigma + \gamma_1) \zeta \\ v &= (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2) \zeta \\ w &= (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3) \zeta , \end{aligned}$$

« facciamo corrispondere a questo punto un certo numero di punti $(a_\nu, b_\nu, 0)$
« di una superficie:

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0 ,$$

« in modo che l'insieme degli intorni *(domaines)* dei punti $(a_\nu, b_\nu, 0)$ rap-
« presenti tutto l'intorno del punto (0, 0, 0) della superficie $F(u, v, w) = 0$.
« Operiamo quindi allo stesso modo su ogni punto multiplo della serie:

$$(a_\nu, b_\nu, 0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots , r),$$

« e perverremo infine a un numero finito di punti semplici:

$$(a_\mu^{(\lambda)}, b_\mu^{(\lambda)}, 0) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots , r),$$

« in un numero finito di superficie:

$$\Phi_\lambda(\tau_\lambda, \sigma_\lambda, \zeta_\lambda,) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots , s),$$

« i cui intorni, presi assieme, rappresentano tutto l'intorno del punto multiplo
« (0, 0, 0) della superficie $F(u, v, w) = 0$. » (l. c. p. 414-415.)

b) Le coordinate dei punti della superficie $F(u, v, w) = 0$ nell'intorno del punto multiplo (0, 0, 0) si possono sempre rappresentare con un numero finito di serie di potenze di due variabili (p. 415).

---

ad una mia Memoria « Sulla scomposizione, ecc. ». Atti di Torino, 32 (adun. 23 maggio 1897). — DEL PEZZO, *Replica ad una Nota del prof. Corrado Segre in risposta ad alcune mie osservazioni,* Atti Acc. Pontaniana, 27 (giugno 1897). — SEGRE, *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie,* Atti di Torino, 32 (27 giugno 1897).

c) Le coordinate di tutti i punti della superficie $F(u, v, w) = 0$ si possono rappresentare con un numero finito di serie di potenze di due variabili (p. 415-419).

L'enunciato *b)* è immediata conseguenza di *a)*; ed ammesso *b)*, si deduce senza grandi difficoltà l'enunciato *c)*.

Io mi occuperò quindi solo del primo.

Si noti in primo luogo che la sostituzione (1) è il prodotto della sostituzione relativa ad un cambiamento di assi coordinati (conservante l'origine) e di una sostituzione del tipo:

$$x = x' z', \qquad y = y' z', \qquad z = z', \tag{2}$$

relativa ad una trasformazione quadratica speciale, avente l'origine delle coordinate come punto fondamentale isolato ed avente per conica fondamentale una retta doppia non passante per questo punto. (Nello spazio del punto (x, y, z) questa retta doppia è la retta all'infinito di $z = 0$, il piano della conica (retta doppia) è il piano all'infinito; nello spazio del punto (x', y', z') il punto fondamentale isolato è il punto all'infinito dell'asse delle z', la retta doppia fondamentale è la retta all'infinito del piano $z' = 0$, il piano della conica è il piano $z' = 0$.) Chiamerò nel seguito *trasformazione quadratica speciale* ogni trasformazione di questo tipo (*); e poichè non mi occuperò di operazioni analitiche, non avrò riguardo alla posizione particolare degli elementi fondamentali della trasformazione rispetto agli assi coordinati. La sostituzione (1) rappresenta adunque ancora una trasformazione quadratica speciale.

Ciò posto, si effettui col sig. Kobb sulla $F = 0$, la trasformazione quadratica speciale (1) la quale muti la superficie $F = 0$ nella $\overline{\Phi} = 0$; all'intorno del punto $A \equiv (0, 0, 0)$ di F corrisponde l'intorno di una linea $\varphi(\tau, \sigma) = 0$, $\zeta = 0$, di $\overline{\Phi}$. Su questa curva si debbono distinguere i punti multipli per la $\overline{\Phi}$. Per quanto riguarda l'enunciato *a)*, basta esaminare gli

(*) Questa trasformazione si presenta particolarmente utile negli sviluppi analitici (Cfr. oltre al lavoro del Kobb la succitata Memoria del prof. Segre), e talora anche nelle considerazioni sintetiche (Cfr. Segre n.[i] 23 e 25, pag. 30-31 e 33-35). Più proprio del nome di *trasformazione quadratica speciale* sarebbe forse quello di *trasformazione quadratica doppiamente specializzata nella conica fondamentale*, chiamando *semplicemente specializzata nella conica fondamentale* la trasformazione in cui questa conica degenera in una coppia di rette distinte ed il punto fondamentale non è su alcuna di queste rette; per brevità di linguaggio evito tali locuzioni e chiamerò semplicemente *trasformazione quadratica* l'ultima nominata.

ultimi punti (ed i loro intorni); si noti che questi punti sono in numero finito se $\varphi = 0$ non contiene parti multiple per la $\overline{\Phi}$; sono infiniti e costituiscono una curva in caso contrario. Se l'enunciato *a)* può dimostrarsi per questi punti della $\overline{\Phi}$ risulterà pure provato per il punto considerato di F. Ma i nuovi punti multipli sono *generalmente* di multiplicità minore di quella di questo punto; così la trasformazione quadratica abbassa *generalmente* la difficoltà della dimostrazione dell'enunciato *a)*. (Nel caso che φ contenga una parte multipla per $\overline{\Phi}$ occorre qualche ulteriore considerazione; io non mi soffermo su questo punto. V. Kobb, p. 402-405.)

Converrà quindi studiare il solo caso in cui, trasformando con una trasformazione quadratica un punto multiplo di F, si ottengano punti trasformati di $\overline{\Phi}$ aventi la stessa multiplicità.

Il sig. Kobb applica un procedimento analogo a quello con cui il Weierstrass dimostra l'analogo teorema per le curve piane.

La curva φ contenga il punto $\overline{A}$ m^{plo} per $\overline{\Phi}$ come A per F; essa si comporrà di rette distinte o no, per $\overline{A}$ (*). Sono allora possibili tre casi:

1.° φ si compone di più rette; allora A non è uniplanare; se inoltre si trasforma $\overline{\Phi}$ con una nuova trasformazione quadratica (p. es. speciale) avente il punto fondamentale in $\overline{A}$ ed i rimanenti elementi fondamentali convenientemente generici, la linea trasformata di $\overline{A}$ non può ridursi a un'unica retta; così $\overline{A}$ si comporta per $\overline{\Phi}$ come A per F, e non è uniplanare (**).

2.° φ si riduce ad un'unica retta; $\overline{A}$ non è uniplanare; se si assume $\overline{\Phi}$ come superficie F si ritorna al caso precedente (***).

3.° φ si riduce ad un'unica retta; $\overline{A}$ è uniplanare. Operando su $\overline{\Phi}$ come si è detto in 1.° si ottiene una superficie Φ_1 e su essa una retta φ_1 trasformata di $\overline{A}$, la quale può ancora contenere punti m^{pli} (e può esser m^{pla} essa stessa) per Φ_1; ed in particolare può avere m^{plo} il punto corrispondente alla direzione uscente da $\overline{A}$ secondo φ, senza che necessariamente questo punto sia generico per la φ_1 (in particolare può questo punto essere m^{plo} senza che lo sia un punto generico della φ_1).

(*) Cfr. Kobb, pag. 405 e Segre, pag. 3.
(**) Kobb, pag. 408-409.
(***) Id., pag. 409-410.

Ciò posto il Kobb trasforma la $\overline{\Phi}$, come si è detto sopra, nella Φ_1, questa in modo analogo in una nuova superficie Φ_2, e questa in una Φ_3 e così via, scegliendo come punti fondamentali successivamente un conveniente punto A_1 della φ_1, un punto della linea trasformata di questo e così via, e si propone di dimostrare che la successione di queste superficie su cui esistono punti trasformati di A m^{pli} è finita. A tal uopo egli suppone dapprima esplicitamente che il punto A_1 non corrisponda alla direzione uscente da $\overline{A}$ secondo φ; ed analoghe restrizioni pone ai punti analoghi ad $\overline{A}$ e ad A_1 nelle trasformazioni successive (*). Ora tali restrizioni non mi paiono giustificate; per vero, effettuando la trasformazione di $\overline{\Phi}$ in Φ_1 (p. es.) si viene a trasformare l'intorno di $\overline{A}$ nell'intorno di φ_1; quest'intorno si scompone poi nell'insieme degli intorni di un numero finito di punti di φ_1 applicando un noto teorema di Weierstrass e Poincaré (**), per modo che in ciascuno di questi intorni deve valere una stessa scomposizione del polimonio Φ_1, quale risulta da questo teorema. I centri di questi intorni (i punti quali A_1) non sono adunque interamente arbitrari e fra essi debbono certamente contarsi, p. es., i punti di φ_1 che hanno per Φ_1 multiplicità superiori a quella dei punti generici, e tale, per un'osservazione precedente (3.°), può essere il punto di φ_1 corrispondente alla direzione uscente da $\overline{A}$ secondo φ.

Ad ogni modo, ammettiamo queste restrizioni, e vediamo come il signor Kobb prosegue nella sua dimostrazione (***):

Dalla F si siano ottenute nel modo suindicato le superficie:

$$\overline{\Phi}=0\,,\ \Phi_1=0\,,\ \Phi_2=0\,,\ldots,\ \Phi_r=0\,;$$

siano $(\tau,\ \sigma,\ \zeta)$, $(\tau_1,\ \sigma_1,\ \zeta_1)$, $(\tau_2,\ \sigma_2,\ \zeta_2),\ldots,$ $(\tau_r,\ \sigma_r,\ \zeta_r)$ le coordinate dei punti di queste superficie corrispondenti a $(u,\ v,\ w)$ di $F=0$. Le formole di trasformazione della F nella Φ_r sono del tipo:

$$u=(\alpha_1\,\tau+\beta_1\,\sigma+\gamma_1)\,(\alpha'_3\,\tau_1+\beta'_3\,\sigma_1+\gamma'_3)\,(\alpha''_3\,\tau_2+\beta''_3\,\sigma_2+\gamma''_3)\ldots$$
$$\ldots(\alpha_3^{(r)}\,\tau_r+\beta_3^{(r)}\,\sigma_r+\gamma_3^{(r)})\,\zeta_r$$

(*) Kobb, 409.

(**) Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, pag. 107 e *Mathematische Werke*, vol. 2.° Poincaré, Thèse pour le doctorat, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, pag. 7.

(***) L. c., pag. 410-413.

$$v = (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)(\alpha''_3 \tau_2 + \beta''_3 \sigma_2 + \gamma''_3) \dots$$
$$\dots (\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)}) \zeta_r$$
$$w = (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)(\alpha''_3 \tau_2 + \beta''_3 \sigma_2 + \gamma''_3) \dots$$
$$\dots (\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)}) \zeta_r ,$$

ossia:

$$u = [\Gamma_1 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r)] \zeta_r \qquad \Gamma_1 = \gamma_1 \gamma'_3 \gamma''_3 \dots \gamma_3^{(r)}$$
$$v = [\Gamma_2 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r)] \zeta_r \qquad \Gamma_2 = \gamma_2 \gamma'_3 \gamma''_3 \dots \gamma_3^{(r)}$$
$$w = [\Gamma_3 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r)] \zeta_r \qquad \Gamma_3 = \gamma_3 \gamma'_3 \gamma''_3 \dots \gamma_3^{(r)} ,$$

dove i tre simboli $(\tau_r \sigma_r \zeta_r)$ stanno a rappresentare tre diverse funzioni algebriche intere (non forme) di τ_r, σ_r, ζ_r, prive di termine costante.

Se $\chi(v w) = 0$ è il cono circoscritto a F dal punto $(\infty 0 0)$ e $\overline{L}$ e $\overline{M}$ sono due convenienti polinomi in u, v, w si ha:

$$\overline{L} F + \overline{M} \frac{\partial}{\partial u} F = \chi.$$

In ambi i membri di questa identità si sostituiscano a u, v, w i loro valori in τ_r, σ_r, ζ_r; il primo membro verrà a contenere almeno il fattore $\zeta_r^{(r+1)(m-1)}$; quanto al secondo afferma l'A. che, se:

$$\chi(v w) = (v w)_\lambda + (v w)_{\lambda+1} + \dots + (v w)_n ,$$

conterrà invece il fattore $\zeta_r^{\lambda_1}$ $(n > \lambda_1 \geqq \lambda)$, potendosi supporre:

$$\chi(\Gamma_2 \Gamma_3) \gtrless 0 ,$$

« poichè $\chi(v, w)$ non è riduttibile ». Di qua la disuguaglianza $(r+1)(m-1) < n$, donde un limite superiore per r.

È qui da ricordare che, in conseguenza delle restrizioni annesse relativamente alla scelta di A_1 e dei punti analoghi, $\gamma'_3, \gamma''_3, \dots, \gamma_3^{(r)}$ non sono nulli. Inoltre si possono supporre non nulli γ_2 e γ_3 (*); quindi si possono supporre non nulli Γ_2 e Γ_3.

Ciò posto, affinchè sia $\chi(\Gamma_2 \Gamma_3) \neq 0$ per valori di Γ_2, Γ_3 corrispondenti a un r superiore a un dato intero è necessario e sufficiente che:

1.° $\chi(v, w) = 0$ non contenga il piano $\gamma_3 v - \gamma_2 w = 0$; questo si può sempre supporre verificato, al più facendo subire dapprima alla $F = 0$ una conveniente trasformazione, e assumendo come F la superficie trasformata.

(*) L. c., pag. 408.

2.° Γ_2 e Γ_3 non debbono assumere, da un certo r in poi, costantemente i valori rispettivamente di v e w per cui son soddisfatte le due equazioni:

$$\chi(v,\ w)=0, \qquad \gamma_3 v - \gamma_2 w = 0,$$

il che porta al più una nuova restrizione nella scelta dei numeri γ'_3, $\gamma''_3, \ldots$, cioè di A_1 e dei punti analoghi.

Non vedo però la necessità di considerare l'irreduttibilità o meno di $\chi(v,\ w)$; e noto che essa non ha generalmente luogo.

Quando poi la disuguaglianza $\chi(\Gamma_2 \Gamma_3) \neq 0$ sia soddisfatta, non si potrà ancora affermare che, dopo la sostituzione di τ_r, σ_r, ζ_r a u, v, w, si ottenga in $\chi(v,\ w)$ soltanto $\zeta_r^{\lambda_1}$ come fattore e non una potenza superiore di ζ_r; poichè, quando sia $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\lambda = 0$ (e ciò può esser conseguenza necessaria della singolarità di F in O (*)) non è ancor provato che non possa ridursi un termine del tipo $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\mu \zeta_r^\mu$ $(\mu = \lambda + 1, \ldots, n)$ (ed anche tutti questi termini) con uno o più termini simili provenienti dallo sviluppo di espressioni del tipo:

$$(\Gamma_2 + (\tau_r\, \sigma_r\, \zeta_r),\ \Gamma_3 + (\tau_r\, \sigma_r\, \zeta_r))_\nu\, \zeta_r^\nu, \qquad (\nu = \lambda + 1, \ldots, n)$$

(diversi necessariamente da $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\nu \zeta_r^\nu$).

2. Riprendendo nelle pagine seguenti il problema della riduzione delle singolarità delle superficie, non mi occuperò della *trasformazione delle curve singolari;* bensì studierò l'effetto di una successione di trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali isolati in un punto singolare e ne' suoi successivi trasformati *(trasformazione del punto singolare).* Per brevità dirò che si *applica una trasformazione quadratica ad un punto singolare* quando si trasforma la superficie o la curva cui il punto appartiene, per mezzo di una trasformazione quadratica avente il punto come punto fondamentale isolato; e supporrò in generale (quando non sia detto esplicitamente il contrario) gli altri elementi fondamentali in posizione generica; la trasformazione

(*) Si consideri ad es. un punto doppio uniplanare A di F; esistono in generale su φ tre punti parimenti doppi per $\overline{\Phi}$, e alle direzioni corrispondenti a questi tre punti è generalmente tangente la curva intersezione di F colla prima polare di un punto generico dello spazio rispetto alla F. Esistono bensì punti eccezionali per cui ciò non è vero, i punti cioè del piano tangente in A a F, ma, scelto un tal punto per $(\infty, 0, 0)$, $(v,\ w)_\lambda = 0$ è l'equazione del piano tangente a F in A, e quindi, per le ipotesi fatte (che $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$ sostituiti a $u\, v\, w$ annullino il primo termine dell'equazione $F=0$ (Kobb, pag. 408)$)$ $(\gamma_2\, \gamma_3)_\lambda = 0$ onde $(\Gamma_2\, \Gamma_3)_\lambda = 0$.

si potrà in generale supporre non speciale, e quando ciò non possa farsi sarà detto esplicitamente.

Dimostrerò che *se F è una superficie algebrica e A un suo punto* s^{plo}, *e se, applicata ad A una trasformazione quadratica, si ottiene come sua trasformata una curva a_1 di una superficie Φ_1 trasformata di F, sulla quale esistano punti* s^{pli} *per Φ_1; e se, detto A_1 uno di questi punti, si opera su esso come precedentemente su A, ottenendone una linea a_2 di una superficie Φ_2 su cui possono esistere punti* s^{pli} *per Φ_2 uno dei quali sia A_2, e così si prosegue: la successione delle superfieie $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ e dei punti $A_1, A_2, \ldots$ è finita, cioè esiste nella successione un' ultima superficie Φ_r su cui esiste una linea a_r trasformata di A_{r-1} su cui non esistono punti* s^{pli} *per Φ_r; purchè i punti $A_1, A_2, \ldots$ siano scelti in modo che, a cominciare da uno di essi in poi, non accada mai che uno di questi punti stia sulla linea trasformata di una linea* s^{pla} *passante pel punto precedente; ed in particolare da uno di essi in poi non stiano su una linea* s^{pla} *della superficie.*

Rilevo fin d'ora che si può sempre supporre che il punto dal quale in poi non accade mai ecc., sia A_1, poichè basterà in caso contrario assumere come superficie iniziale F una conveniente Φ; osservo inoltre che è evidente che i punti s^{pli} $A_1, A_2, \ldots$ sarebbero infiniti se, a cominciare da uno di essi in poi, appartenessero tutti alle successive trasformate di una stessa linea s^{pla} (linee tutte s^{ple} per le superficie cui rispettivamente appartengono); ma, e questo non mi pare evidente senz'altro, *può accadere che il numero dei punti* s^{pli} *$A_1, A_2, \ldots$ cresca oltre ogni limite quando si scelgono questi punti in modo che due o più (necessariamente consecutivi) appartengano a linee* s^{ple} *corrispondentisi* (trasformate l'una dell'altra) *delle superficie successive, pur essendo finito il numero dei punti che stanno su linee trasformate di una stessa linea* s^{pla}. La prova di questa proposizione è riservata alla Memoria seconda.

Non è necessario aggiungere che, dimostrato il suenunciato teorema, risulta pur provato, che sotto analoghe restrizioni, si può sempre, con una successione di trasformazioni quadratiche, passare dal punto O comunque singolare, ad un punto semplice. I ragionamenti relativi alla rappresentazione dell'intorno di un punto di una superficie contenuti nella Memoria del Kobb valgono allora a provare l'enunciato *a)* così modificato: — si operi come è detto in *a)* su tutti i punti $(a_\nu, b_\nu, 0)$ non eccezionali secondo il teorema suenunciato; si perverrà a rappresentare l'intorno del punto $(0, 0, 0)$ considerato di F per mezzo dell'insieme degli intorni di un numero finito di punti semplici su un numero finito di superficie e di quelli di un numero finito di nuovi punti singolari, appartenenti a linee singolari della stessa multiplicità.

La questione analitica della rappresentazione per mezzo di un numero finito di serie di potenze dell'intorno di un punto singolare di una superficie algebrica rimane per ora insoluta e precisamente rimane al punto a cui l'hanno portata l'HALPHEN (*) e il prof. DEL PEZZO (**).

§ 2.

Questo paragrafo ed il seguente sono destinati a considerazioni sulle curve sghembe e sull'intersezione di due superficie, necessarie per il seguito, ma che non potrebbero considerarsi come parte integrante della dimostrazione che ho in animo di dare.

3. Una curva sghemba C, d'ordine m, non multipla, abbia in A punto s^{plo}. Si applichi ad A una trasformazione quadratica; la curva C si trasformerà in una curva C' su cui si trovano uno o più punti corrispondenti ad A la somma delle cui multiplicità è $\leq s$; siano A'_1, $A'_2, \ldots$ questi punti. Se essi non sono tutti semplici, si applichi ad uno di essi A'_i multiplo per C', una nuova trasformazione quadratica. C' si trasformerà in una nuova curva C'' in cui al punto considerato corrispondono uno o più nuovi punti A''_{i1}, $A''_{i2}, \ldots$ e ai rimanenti punti A'_j $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots)$ altrettanti punti colle stesse multiplicità rispettive; questi ultimi punti si potranno rappresentare rispettivamente cogli stessi simboli dei corrispondenti punti di C'. Si assuma un punto qualunque fra gli A''_{ik} e gli A'_j di C'', che sia multiplo per C'' e si applichi ad esso una nuova trasformazione quadratica; e così via. *Dopo un numero conveniente, finito, di trasformazioni si giungerà ad una curva $C^{(r)}$ su cui i punti trasformati di A son tutti semplici* (***).

(*) *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques.* Annali di Matematica (2) IX-1878-79, pag. 68 (v. pag. 73 e seg.).

(**) L. c., pag. 146 e seg. Gli enunciati a cui mi riferisco sono validi, almeno nella loro dimostrazione, solo con opportune restrizioni. Cfr. la fine dell'introduzione al presente scritto.

(***) Questo teorema non è veramente una novità. Non saprei però citare un luogo ove lo si trovi precisamente sotto questa forma e con una dimostrazione simile a quella

Semplificherò la dimostrazione supponendo le trasformazioni quadratiche specializzate in quanto la conica fondamentale vi sia spezzata in una coppia di rette distinte (e complanari). Ricorderò che anche nello spazio trasformato la conica fondamentale è analogamente degenere e che le rette uscenti dal punto doppio della conica fondamentale sono trasformate nelle rette uscenti dal punto analogo del 2.° spazio e la corrispondenza che così resta stabilita fra le due stelle è quadratica con elementi fondamentali le rette delle coniche e le proiettanti i punti fondamentali isolati.

Sia V il punto doppio della conica fondamentale della prima trasformazione quadratica a cui si assoggetta C e sia scelto in posizione generica rispetto a C, cioè fuori di C, fuori dei vertici dei coni di corde di C e fuori

---

che segue. Crederei quindi di mancare di rigore (per le sue seguenti applicazioni) s'io non ne dessi qui brevemente la dimostrazione.

Una prima prova della possibilità di sciogliere i punti singolari di una curva algebrica sghemba con trasformazioni Cremoniane fu data dal sig. Del Pezzo (loco citato, pagina 144-145) riducendo la questione all'analoga per le curve piane, e senza nulla fissare sulle trasformazioni usate; una prova diretta fu data in seguito dal sig. Pannelli nella Nota: *Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba* (Rend. Istit. Lombardo (2), 1893, pag. 216-222) facendo uso di trasformazioni cubiche speciali (a tetraedro fondamentale). Basta ciò per affermare senz'altro che si può raggiungere lo scopo con trasformazioni Cremoniane qualunque aventi punti fondamentali isolati nei punti che si trasformano. (Questa proposizione rientra in una più generale che mi riservo di pubblicare prossimamente) — La dimostrazione che io darò nel seguito può esser raffrontata, pel principio a cui s'informa, col cenno di dimostrazione contenuto nel lavoro del prof. Segre (pag. 9) ed anche con quella del Pannelli. In essa mi valgo di trasformazioni quadratiche non assolutamente generali (a conica fondamentale degenere); ed il ragionamento si estende senz'altro a provare il teorema analogo per le curve immerse in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni; per questa parte mi limiterò però a questo cenno. Un'altra dimostrazione, valida pure per le curve immerse in ogni spazio, in cui non si fa questa restrizione relativamente alle trasformazioni quadratiche usate, ho dato nella mia dissertazione di laurea (luglio 1896). Altre cure mi hanno impedito finora di pubblicare i risultati di questa mia tesi; e mi astengo dal presentare qui la suddetta dimostrazione perchè le ipotesi più generali non darebbero alcun vantaggio, mentre dovrei forse entrare in taluni particolari che mi devierebbero dal principale oggetto del presente lavoro.

Con trasformazioni Cremoniane prive di punti fondamentali isolati, è anche possibile di trasformare ogni curva gobba in una priva di punti multipli. La possibilità di una tal riduzione con trasformazioni birazionali della curva (non Cremoniane) è nota. Cfr. Poincaré: *Sur les transformations birationelles des courbes algébriques* (Comptes Rendus, tom. 117, 3 juillet 1893) e Pieri: *Trasformazione di ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli* (Rivista di Matematica, 1894).

di ogni corda di C per A e di ogni tangente a C in A. Si proietti C da V e sia Γ il cono proiettante; la VA sarà s^{pla} per Γ. Sia V' il punto doppio della conica fondamentale dello spazio trasformato. Se su C' si ha un solo punto A' trasformato di A, ancora s^{plo}, la $V'A'$ sarà retta s^{pla} del cono Γ' trasformato di Γ e V' soddisferà rispetto a C' alla stessa condizione di trovarsi in posizione generica come V rispetto a C. Si effettui allora una nuova trasformazione quadratica avente A' come punto fondamentale isolato e V' come punto doppio della conica fondamentale: le stesse cose si potranno ripetere. E così si potrà proseguire finchè si otterranno trasformati di A ancora s^{pli}. Ma dopo un numero finito di trasformazioni si deve giungere ad un cono trasformato di Γ in cui a VA corrispondono una o più generatrici di multiplicità $< s$ (per il noto teorema relativo alle curve piane, analogo a quello che qui si tratta di stabilire); dunque, dopo un numero finito di trasformazioni, minore o al più uguale al suddetto, si deve giungere ad una curva trasformata di C, su cui ad A corrispondono uno o più punti di moltiplicità $< s$. Non si può più allora affermare che il punto doppio della conica fondamentale dell'ultimo spazio trasformato sia, rispetto all'ultima trasformata di C, in posizione generica come V rispetto a C; ma scegliendo un altro conveniente punto come punto doppio della conica fondamentale di un'ulteriore trasformazione applicata ad un punto multiplo trasformato di A, si potrà proseguire l'operazione e provare così l'asserto.

Il numero delle trasformazioni necessarie a trasformare il punto A in punti semplici avrà così un limite superiore che varierà colla curva considerata, e potrà crescere quanto si vuole, ma che, assegnata la particolar curva, sarà pure assegnato e finito; è anzi facile vedere che si può assegnare un limite superiore dipendente solo dall'ordine della curva (*).

(*) Modificando leggermente il precedente ragionamento sarebbe anche facile provare che si ha la relazione:

$$\Sigma s(s-1) < m(m-1),$$

ove con s si indichino le multiplicità di A e degli altri punti multipli di C e quelle dei punti trasformati successivi di questi e la Σ si estenda a tutte queste s. Questa formola anche più completa (assegnando il significato dell'eccesso dell'un membro sull'altro) ho dimostrato nella mia dissertazione già nominata.

§ 3.

4. Due superficie F e F_1 passino per un punto A colle multiplicità rispettive s e σ; è noto che il punto A sarà multiplo almeno secondo $s\sigma$ nell'intersezione di F e F_1; e tale sarà appunto questa multiplicità quando le due superficie non hanno in A un cono tangente comune. È facile estendere questo teorema a determinare i caratteri della curva intersezione di F e F_1 in A (le multiplicità dei punti A, $A'_i\,(i=1,\ldots)$, $A''_{ik}\,(i,\,k=1,\ldots),\ldots$ del paragrafo precedente (*)), o meglio le loro funzioni S che saranno definite in seguito.

Chiamerò, per semplicità, *multiplicità di un punto nell'intersezione di due superficie* — ovvero *multiplicità d'intersezione di due superficie in un punto* — la somma dei prodotti delle multiplicità di questo punto sulle diverse parti (curve algebriche irreduttibili) della curva intersezione delle due superficie, per le multiplicità rispettive di queste parti.

La multiplicità di A nell'intersezione di F e F_1 è il numero delle intersezioni in A delle sezioni piane f e f_1 di F e di F_1 fatte con un piano generico π per A. Si applichi ad A una trasformazione quadratica; le superficie F ed F_1 si mutino nelle Φ_1 e Ψ_1; il piano segante si muterà in un nuovo piano π_1 e le f e f_1 nelle intersezioni φ_1 e ψ_1 di questo piano con Φ_1 e Ψ_1. φ_1 e ψ_1 sono trasformate di f e f_1 con una trasformazione quadratica piana avente A per punto fondamentale; quindi i caratteri (multiplicità) dei punti immediatamente successivi ad A sulle curve f e f_1 (nel senso della teoria del sig. Noether) sono uguali alle multiplicità, su Φ_1 e Ψ_1 rispettivamente, dei punti in cui il piano π_1 interseca le curve che, su queste superficie, corrispondono al punto A.

Si applichino le stesse considerazioni alla determinazione delle multiplicità di φ_1 e ψ_1 nei punti successivi ai loro punti trasformati di A, e lo stesso si faccia per tutte le curve loro trasformate successive, e si ricordi un teorema del sig. Noether che dà il numero delle intersezioni di due curve piane in un loro punto comune (**); si otterrà la regola seguente per determinare la multiplicità di A nell'intersezione di F e F_1:

(*) In altri termini quelli fra i numeri s della nota precedente che si riferiscono ad A e ai suoi trasformati.

(**) Cfr.: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., 23, 1884) e Math. Ann., 9, 1875, l. c.

Le superficie Φ_1 e Ψ_1 abbiano comuni le curve a'_1, $a'_2, \ldots$ trasformate di A; siano A'_{11}, $A'_{12}, \ldots$, $A'_{21}, \ldots$ i punti d'intersezione di queste linee con π_1; s'_{11}, $s'_{12}, \ldots$, $s'_{21}, \ldots$ le loro multiplicità su Φ_1, σ'_{11}, $\sigma'_{12}, \ldots$, $\sigma'_{21}, \ldots$ quelle su Ψ_1 (essendo π_1 generico sarà $s'_{11} = s'_{12} = \ldots$; $s'_{21} = \ldots$;...; $\sigma'_{11} = \sigma'_{12} = \ldots$;...); si applichino ad A'_{11}, $A'_{12}, \ldots$ nuove trasformazioni quadratiche, e siano i numeri s''_{1111}, $s''_{1112}, \ldots$, $s''_{1121}, \ldots$, $s''_{1211}, \ldots$, σ''_{1111}, $\sigma''_{1112}, \ldots$ determinati analogamente ai precedenti numeri s'_{ik} e σ'_{ik}; e così via. La multiplicità cercata sarà espressa da:

$$\sum s\sigma,$$

ove la Σ è estesa alle multiplicità s e σ di A su F e F_1, e a tutti numeri s e σ ora definiti, in modo che siano accoppiati i numeri aventi gli stessi apici e indici.

5. Si considerino ora i numeri s del paragrafo precedente (*) corrispondenti alle diverse parti dell'intersezione di F e F_1 e a un determinato punto $A^{(r)}$, trasformato di A considerato come punto di queste curve; si indichi con $S^{(r)}$ la somma dei prodotti di questi numeri per le multiplicità delle curve cui appartengono. Si riuscirà facilmente a calcolare questo numero se si osserva che, per la precedente definizione della multiplicità d'intersezione di due superficie in un loro punto comune, questa multiplicità può scomporsi nella somma di più parti corrispondenti ciascuna ad una parte (curva algebrica, riduttibile o non) dell'intersezione delle due superficie passante pel punto considerato: detta C una qualunque di queste parti dell'intersezione di F e F_1 passante per A, la corrispondente parte della multiplicità d'intersezione di F e F_1 in A sarà la somma dei prodotti delle multiplicità di A sulle diverse parti (curve algebriche irreduttibili) di C per le multiplicità rispettive di queste parti nell'intersezione di F e F_1.

(*) Altrove sarà provato che, nella determinazione di questi numeri si possono togliere alcune delle restrizioni imposte alla trasformazione nel paragrafo precedente; fra l'altre quella che la trasformazione sia quadratica, bastando tener conto del comportamento degli elementi fondamentali della trasformazione rispetto alla linea, nelle vicinanze del punto che si trasforma (cfr. con un'analoga affermazione nella 1.ª nota relativa al n.º 3). Rimando la dimostrazione di questo teorema perchè, quantunque importante per le sue conseguenze, esso passa in seconda linea nella ricerca presente. Intanto mi permetterò, per brevità di linguaggio, di non tener conto nel seguito di talune fra le dette restrizioni. Ognuno potrà rilevare che in tutto quanto segue esse si potrebbero tutte mantenere senza nulla alterare del ragionamento (cfr. la nota al n.º 14).

Ciò posto, si assoggettino F e F_1 alla successione di trasformazioni quadratiche che conducono da A ad $A^{(r)}$, siano Φ_r e Ψ_r le ultime superficie trasformate rispettivamente di F e F_1. Φ_r e Ψ_r si intersecheranno secondo una linea composta della trasformata dell'intersezione di F e F_1 e di un sistema di linee corrispondenti ad A. La multiplicità d'intersezione di Φ_r e Ψ_r in $A^{(r)}$ sarà la somma di $S^{(r)}$ e della parte di detta multiplicità corrispondente alla linee comuni a Φ_r e Ψ_r, trasformate di A, e passanti per $A^{(r)}$. Si ricava da questa osservazione la regola seguente per calcolare $S^{(r)}$: Si distinguano le diverse parti (curve algebriche irreduttibili) della linea trasformata di A comune a Φ_r e a Ψ_r, passanti per $A^{(r)}$; per ciascuna di esse si determini la multiplicità di $A^{(r)}$ su di essa e la multiplicità d'intersezione di Φ_r e Ψ_r in un suo punto generico (questa multiplicità è la multiplicità della curva nell'intersezione di Φ_r e Ψ_r) e si faccia il prodotto di questi due numeri; si determini inoltre la multiplicità di intersezione Φ_r e Ψ_r in $A^{(r)}$. La differenza fra questa multiplicità d'intersezione e la somma di quei prodotti è il numero $S^{(r)}$.

Nel seguito le linee trasformate di A, passanti per $A^{(r)}$ saranno generalmente rette: allora $S^{(r)}$ è la differenza fra la multiplicità d'intersezione di Φ_r e Ψ_r in $A^{(r)}$ e la somma delle loro multiplicità d'intersezione nei punti generici di queste rette.

Queste considerazioni servono utilmente a stabilire alcuni legami fra il comportamento di F e F_1 in A e quello delle loro trasformate nei punti trasformati di A. È infatti evidente che $S^{(r)}$ è nullo sempre e solo quando per $A^{(r)}$ non passano curve trasformate di parti dell'intersezione di F e F_1, e che esso non può essere mai negativo; che inoltre si ha sempre, per un determinato punto $A^{(r)}$ e per un suo trasformato $A^{(r+1)}$, $S^{(r)} \geqq S^{(r+1)}$. In particolare $S^{(r)}$ è minore o al più uguale alla multiplicità d'intersezione di F e F_1 in A.

§ 4.

6. In questo paragrafo e nel seguente è contenuta la dimostrazione del teorema enunciato nel n.° 2. Si distinguono in esso due casi principali l'uno trattato completamente nel paragrafo presente ed enunciato esplicitamente al principio del n. 14, l'altro discusso ed esaurito nel paragrafo seguente ed enunciato alla fine dello stesso n.° 14.

Il concetto fondamentale della dimostrazione consiste nel determinare, nel primo caso, una linea d'ordine non superiore a un ordine assegnato, che passi per A con punto multiplo e le cui trasformate passino con punti multipli rispettivamente per $A', A'', \ldots$ e nell'applicare a questa linea la proposizione del § 2. Al secondo caso non sono applicabili i ragionamenti con cui dimostro pel primo l'esistenza di questa linea; ma esso si risolve distinguendovi due nuovi casi: 1.° questa linea esiste; il ragionamento del n.° 15 si applica immediatamente; — 2.° questa linea non esiste; si dimostra che da questa ipotesi consegue senz'altro un limite superiore al numero dei punti della successione $A', A'', \ldots$ che hanno per la superficie F la stessa multiplicità s di A.

Il secondo dei due casi principali nominati non ha nulla di paragonabile coi fatti che s'incontrano nello studio delle curve; vi si incontra una novità analoga a quella che si scorge nel caso d'eccezione enunciato nel n.° 2. Il primo invece offre qualche analogia coll'unico caso che s'incontra nello studio delle curve piane, e non sarà inutile un breve raffronto fra il metodo che io qua seguirò e quelli noti di Weierstrass e Noether (*). Userò in questo raffronto le locuzioni relative ai punti successivi di una varietà, note per le curve piane, introdotte per le curve gobbe e per le superficie dal prof. Segre (**) e che io ripeto per maggior chiarezza nel numero seguente.

Sia F una curva piana algebrica che abbia il punto A come punto s^{plo}. Si assoggetti F ad una trasformazione quadratica (piana) avente A come punto fondamentale, e gli elementi fondamentali rimanenti in posizione convenientemente generica; si otterrà una curva trasformata Φ_1 su cui ad A corrisponderanno uno o più punti; si otterrà un punto s^{plo} trasformato di A, solo (non sempre) quando esso sia l'unico punto di Φ_1 corrispondente ad A. Quando questo accada, sia A' il detto punto. Su Φ_1 e sul suo punto A' si ripeta l'operazione fatta su F e sul suo punto A, e così si prosegua: si deve provare che dopo un numero finito conveniente di operazioni non si potrà più ottenere un trasformato di A s^{plo} per la curva cui appartiene; altrimenti detto, si deve provare che il numero dei punti s^{pli} di F successivi ad A è finito (se F non è una curva s^{pla}). Si riesce in questa dimostrazione

(*) Cfr. le citazioni al principio della Memoria; io mi riferirò qua particolarmente al metodo del sig. Noether; quello del sig. Weierstrass non ne differisce sostanzialmente per la parte di cui qui si tratta.

(**) Loco citato, pag. 2-4.

considerando l'intersezione di F colla prima polare, rispetto ad essa, di un punto generico del piano (che si assume come unico ulteriore punto fondamentale della prima trasformazione quadratica, assumendo poi i suoi trasformati successivi — finchè ciò è possibile, il che è certamente finchè si ottengono punti trasformati di A s^{pli} — come punti analoghi per le trasformazioni successive); questa prima polare passa per A ed ha comuni con F tutti i punti successivi ad A e multipli per F. Secondo un teorema del NOETHER già citato (*), i punti comuni alle due curve, — effettivi o successivi a punti effettivi, — contano nel numero delle intersezioni delle due curve come altrettanti punti, a distanze finite fra loro, comuni alle due curve, ed aventi su esse le stesse multiplicità. Esprimendo che il numero di queste intersezioni di F e della sua prima polare in A e nei punti infinitamente prossimi ad A è $\leq n(n-1)$ (detto n l'ordine di F) si ha evidentemente un limite superiore al numero dei punti s^{pli} di F infinitamente prossimi ad A.

Per A e pei punti s^{pli} di F infinitamente prossimi ad A passano, oltre la prima polare di un punto generico del piano rispetto alla F, anche tutte le polari di un tal punto che hanno indice $< s$. Nel ragionamento precedente si può quindi alla prima polare sostituire una di queste e si può anche sostituire *un'altra* di queste polari a F. I limiti che allora si otterranno saranno generalmente (cioè se $s > 2$) superiori a quello ottenuto precedentemente, ma, pel solo scopo della dimostrazione che si ha in vista, hanno pari utilità.

Nel caso delle superficie si potrà tentare un metodo analogo a quello ora riassunto, sostituendo al gruppo delle intersezioni di due curve la linea intersezione di due superficie; ma nuove difficoltà si presentano. Per vero:

In primo luogo, se una superficie passa pel punto A della superficie F, la interseca certamente secondo una linea passante per A; ma non necessariamente il passaggio di detta superficie per un punto di F successivo ad A conduce seco il passaggio per questo punto della linea intersezione delle sue superficie. È facile persuadersene ritornando p. es. sull'ultimo numero del paragrafo precedente. Questo fatto è capitale nel seguito.

Appunto il bisogno di provare il passaggio di tale intersezione per determinati punti m'indusse a non far uso di una prima polare, bensì di una

(*) Nel ragionamento del WEIERSTRASS (cfr. BIERMANN, loco citato) in luogo di questo teorema si utilizza la rappresentazione del risultante di F e della sua prima polare come funzione appartenente al modulo determinato da queste due funzioni.

$s-1^{ma}$ che passa semplicemente (ed è questo l'essenziale) per A e pei punti s^{pli} di F successivi ad A. Inoltre ho sostituito alla F stessa una sua polare d'indice $\geqq 0$ e $< s-1$; mi si è presentata essenziale questa sostituzione nei ragionamenti dei n.i 10-13 (e 17 nel paragrafo seguente); non è forse essenziale per la dimostrazione del nostro teorema (cfr. una nota al n.° 14). Anzi, nel concetto fondamentale della dimostrazione, non è forse essenziale nemmeno l'uso della polare $s-1^{ma}$; la si potrebbe sostituire ad es. una superficie che passasse semplicemente per A, A',...; trovai però l'introduzione delle polari utile al rigore.

I numeri 10-12 sono destinati precisamente a dimostrare il passaggio dell'intersezione delle due polari di F sunnominate per i punti considerati. Il n.° 12 è forse il più gravoso alla lettura. Il lettore cui tale paresse, potrebbe abbandonarlo senz'altro (insieme col n.° 11 che solo in esso si applica) poichè espongo nel n.° 16 un ragionamento che si può sostituire a quello del n.° 12 per quanto riguarda il teorema a cui si tende. Ho dato la precedenza al metodo del n.° 12 perchè più diretto, più ricco di risultati e più consono col metodo del n.° 10 e con quello che si segue per le curve.

Nel n.° 13 ho enunciata una proposizione che non pare priva d'importanza, immediata conseguenza dei ragionamenti precedenti, ma che non trova applicazione nel seguito.

In secondo luogo, il passaggio dell'intersezione sunnominata pei punti considerati non è più sufficiente, come per le curve, a condurre a termine il ragionamento; convien conoscere le multiplicità dei detti punti su quell'intersezione. Il calcolo di queste multiplicità sarebbe tutt'altro che semplice; l'ho evitato sostituendo all'intersezione suddetta una sua proiezione sulla F. Come con ciò si riesca si vede nel n.° 14 e credo non richieda schiarimenti.

7. Come ho annunciato nel numero precedente, ricorderò anzitutto alcune locuzioni relative alla *scomposizione di un punto multiplo* introdotte, per quanto riguarda le varietà spaziali, dal prof. Segre nel citato lavoro (pag. 2-4) (*).

(*) Le presenti definizioni differiscono alcun poco nella forma da quelle a cui alludo, per evitare considerazioni di *punti infinitamente vicini* che servono a dar ragione delle definizioni stesse; tali considerazioni ho evitate per semplicità, essendo esse assolutamente estranee al presente lavoro. Ho invece introdotto la definizione nuova di varietà tangenti o secanti un'altra in un punto successivo a un dato.

Sia F una superficie, ovvero un ramo di curva algebrica, piana o gobba, e sia A un suo punto s^{plo}. Applicata ad A una trasformazione quadratica, F si muti in una nuova varietà Φ_1, su cui esista una varietà (piana: linea o punto) a_1 trasformata di A; dirò che a_1 *appartiene ad* F *essendovi successivo ad* A. Se a_1 è una linea, nel qual caso F è una superficie, *ogni punto di* a_1 *sarà pure successivo ad* A *su* F.

Su Φ_1 e sui punti di a_1 (linea o punto di Φ_1) si possono ripetere le stesse definizioni; dirò pure *successivi ad* A *di due posti su* F i punti e le linee di Φ_1 successivi ad a_1 secondo la definizione precedente; e dirò tali punti e linee successivi ad un punto A' di F successivo ad A quando sono successivi al punto A' (di a_1) di Φ_1. In modo analogo si definiranno i punti e le linee di F successive ad A di tre, quattro,... posti.

Una varietà tangente o secante Φ_1 in un punto trasformato di A si dirà *tangente o secante* F *nel corrispondente punto successivo ad* A. Analogamente si definiranno le varietà tangenti e secanti F in punti successivi di due, di tre,... posti ad A.

8. Una superficie F abbia in A punto s^{plo}. Sia V un punto qualunque dello spazio. La k^{ma} polare di V rispetto ad F $(k < s)$ passa sempre per A avendovi in generale e almeno la multiplicità $s-k$: sia F_k questa polare.

Si applichi ad A una trasformazione quadratica avente la conica fondamentale spezzata in due rette per V. Sia V' il punto doppio della conica fondamentale dello spazio trasformato. Ad una punteggiata su una retta per V la trasformazione fa corrispondere una punteggiata proiettiva su una retta per V', corrispondendosi nella proiettività i punti V e V'; quindi il gruppo dei punti d'intersezione di una retta generica per V con la F_k si trasforma nel gruppo dei punti d'intersezione di una retta per V' colla polare k^{ma} di V' rispetto alla Φ_1 trasformata di F; quindi la trasformata Φ_1^k della F_k è contenuta nella k^{ma} polare di V' rispetto a Φ_1 (e nel caso che questa polare contenga altre parti, queste son coni di vertice V'). È facile verificare, ad es. col calcolo degli ordini, che Φ_1^k è soltanto una parte della suddetta polare sempre e solo quando, le rette per V in cui si spezza la conica fondamentale del primo spazio essendo scelte in modo generico, A è per F_k multiplo secondo un numero $> s-k$. Il teorema delle polari miste dà immediatamente che condizione necessaria e sufficiente perciò è che la retta AV sia generatrice più che $s-k^{pla}$ per il cono tangente in A a F (*).

(*) Con considerazioni analoghe il prof. Segre studia il comportamento delle prime polari nei punti successivi di F (l. c., pag. 34).

Come si vedrà, ogni volta che dovremo richiamare queste considerazioni, questa condizione non sarà soddisfatta.

9. Nel seguito applicherò soltanto trasformazioni quadratiche a conica fondamentale spezzata in due rette che supporrò distinte, ma potrebbero anche essere coincidenti. Effettuando trasformazioni successive supporrò inoltre il punto doppio della conica fondamentale della prima trasformazione scelto in modo generico, e quelli delle trasformazioni successive coincidenti ciascuno col punto doppio della conica fondamentale dello spazio trasformato rispetto alla trasformazione precedente. Indicherò, come sopra, con V, V', V'',... questi punti.

10. La superficie F abbia in A punto s^{plo}. Applicata ad A una trasformazione quadratica (n.° 9) la F si trasformi nella superficie Φ_1, su cui ad A corrispondano punti non tutti s^{pli}; ma esista almeno un punto A' trasformato di A, s^{plo} per Φ_1. La linea trasformata di A si comporrà di rette per A' (n.° 1).

Distinguerò due casi:

1.° La linea a_1 trasformata di A su Φ_1 si compone di più rette per A'. Si consideri la p^{ma} polare di V' rispetto a Φ_1 e sia Φ_1^p; essa taglia il piano di a_1 (che passa per V'), fuori della conica fondamentale della trasformazione, secondo una curva a_1^p, composta di $s-p$ rette (quando ogni retta sia contata con conveniente multiplicità) per A', polare di V' rispetto alla intersezione di Φ_1 col piano di a_1 (il fascio a_1 le cui rette siano contate ciascuna con conveniente multiplicità). Si supponga di far assumere a p tutti i valori (intieri) fra 1 e $s-1$ (inclusi gli estremi); una stessa retta del fascio A' non potrà appartenere simultaneamente ad a_1 e a tutte le a_1^p (essendo ora escluso che a_1 si riduca ad una sola retta contata s volte); e poichè a_1^{s-1} si compone di una sola retta, esiste certamente una superficie Φ_1^p ($p=0, 1, \ldots, s-2$; $\Phi_1^0 \equiv \Phi_1$) che sega Φ_1^{s-1} sul piano di a_1 — e fuori della conica fondamentale — nel solo punto A'. Sia Φ_1^p questa superficie; per A' passa l'intersezione di Φ_1^p e Φ_1^{s-1}, senza passarvi con una parte giacente sul piano di a_1. Ma Φ_1^p e Φ_1^{s-1} sono le trasformate delle polari F_p e F_{s-1} di V rispetto a F ($F_0 \equiv F$) (n.° 8); dunque *A' è successivo ad A sull'intersezione di F_p e F_{s-1}*.

2.° La linea a_1 trasformata di A su Φ_1 si riduce ad una sola retta per A', di multiplicità $s' < s$. Il piano $a_1 V'$ è piano tangente a Φ_1 in tutti i punti di a_1 diversi da A' e dagli altri possibili punti s^{pli} di Φ_1 su a_1. Conti esso come $s'-k$ fra i piani tangenti a Φ_1 nei punti generici di a_1. La superficie $\Phi_1{}^k$, k^{ma} polare di V' rispetto a Φ_1, avrà a_1 come retta $s'-k^{pla}$ e nei punti generici di essa avrà $a_1 V'$ come unico piano tangente; avrà inoltre A' come punto $s-k^{plo}$. La superficie $\Phi_1{}^{s-1}$, $s-1^{ma}$ polare di V' rispetto a Φ_1, passerà invece semplicemente per a_1 senza avervi il piano $a_1 V'$ come piano tangente in punti non appartenenti alla conica fondamentale della trasformazione. La multiplicità di un punto generico di a_1 nell'intersezione di $\Phi_1{}^k$ e $\Phi_1{}^{s-1}$ è adunque $s'-k$ mentre la multiplicità di A' nell'intersezione medesima è $\geqq s-k$. Ricordando adunque che $\Phi_1{}^{s-1}$ e $\Phi_1{}^k$ sono le trasformate delle polari di ugual indice F_{s-1} e F_k di V rispetto ad F per la trasformazione applicata ad A, si ha che *A' è successivo ad A sull'intersezione di F_k e F_{s-1}.* (Anche qui potrebbe essere $k=0$; allora $\Phi_1{}^0 \equiv \Phi_1$, $F_0 \equiv F$.)

I risultati precedenti sono evidentemente applicabili al caso in cui alla superficie F si sostituisca una sua qualunque trasformata dopo una serie di trasformazioni quadratiche (del n.° 9). Quindi:

Sopra una superficie F si fissi una qualunque successione di punti A, A', A'',..., $A^{(r)}$, tutti s^{pli} per F; si trasformi F per mezzo di una successione di trasformazioni quadratiche applicate ad A, A',..., $A^{(r-1)}$, giungendo infine ad una superficie Φ_r su cui $A^{(r)}$ è punto effettivo; per $A^{(r)}$ passano una o più linee di Φ_r corrispondenti ad A per la trasformazione prodotto delle successive trasformazioni effettuate. Ad $A^{(r)}$ siano successive su Φ_r una o più rette di multiplicità minore di s, e su queste, fuori delle linee trasformate di A sunnominate, un punto s^{plo} $A^{(r+1)}$. Sia F_{s-1} la polare $s-1^{ma}$ di un punto generico V rispetto a F; esiste sempre un'altra polare F_p di V rispetto ad F $(0 \leqq p < s-1)$ che interseca F_{s-1} secondo una linea di cui A, A', A'',..., $A^{(r+1)}$ sono punti successivi.

Osservazione. Condizione essenziale dei precedenti ragionamenti è che a_1 si componga di rette passanti per A' — ovvero di parti irreduttibili di cui una sola (che però può esser multipla) passi per A' — e che A' abbia per Φ_1 multiplicità maggiore di quella dei punti generici di ciascuna parte di a_1 passante per A'; non è essenziale che la multiplicità di A' sia uguale a quella di A. A questo caso più generale si estendono adunque immediatamente i precedenti risultati; al numero s basterà sostituire la multiplicità di A' nell'intersezione di Φ_1 colla retta $A'\,V'$.

11. Nell'ultimo enunciato del numero precedente si può supporre, in particolare, che A, A', A'', . . . , $A^{(r)}$ si succedano su un ramo di sezione piana di F. Si faccia variare il piano secante in modo che assuma tutte le posizioni possibili per A, od anche soltanto per una retta passante per A, e non

appartenente al cono tangente in A ad F. Se per tutte le sezioni piane generiche (fra queste) si verificasse che $A^{(r)}$ avesse come successivo un fascio di rette, e su una retta di tal fascio esistesse un punto $A^{(r+1)}$ di multiplicità superiore a quella generica di essa, corrispondentemente ad ogni sezione piana dovrebbe esistere una coppia di superficie F_{s-1} e F_k, la cui intersezione avrebbe almeno i punti A, A',..., $A^{(r)}$ comuni con la detta sezione piana; ma, essendo i numeri s e k interi minori od al più uguali alla multiplicità di A su F, il numero di queste coppie di superficie F_{s-1} e F_k è finito, onde non può la detta proprietà verificarsi per tutte le sezioni piane considerate.

Se si ha riguardo al fatto che ad un punto di una linea multipla di una superficie, il quale non abbia per la superficie multiplicità maggiore dei punti generici della linea è sempre successivo sulla superficie un fascio di rette il cui centro sta sulla suddetta linea multipla, si conchiude che *su una sezione piana generica di una superficie, passante per un punto multiplo della superficie medesima, e successivamente a questo punto, esistono solo punti che non hanno multiplicità maggiore dei punti generici delle linee successive cui appartengono*; *e queste linee, eccezione fatta per la prima, sono tutte rette e non contengono punti di multiplicità maggiore della generica, ciascuna fuori della linea che la precede.* Le sezioni piane eccezionali passano per particolari generatrici (in numero finito) del cono tangente alla superficie nel punto multiplo considerato.

12. La superficie F abbia in A punto s^{plo}. Un piano generico per A sega F secondo una curva piana f avente in A punto s^{plo}. È noto che è finito il numero dei punti s^{pli} di f successivi ad A (*). Ma ogni punto s^{plo} di F successivo ad A ed appartenente a detto piano secante dà luogo ad un punto s^{plo} di f; dunque *se si considera un punto generico A' successivo ad A su F, un punto generico successivo a questo su F, e così via, la successione di quelli fra questi punti che sono s^{pli} per F è finita. — A questo riguardo si comportano come generici i punti successivi di una sezione piana generica.*

Ciò posto, ad A sia successiva su F una retta s^{pla} a'; su a' si considerino due punti: A'_1 fissato comunque purchè fuori dell'eventuale linea s^{pla} di F per A, ed A'_2 scelto in modo generico su a'. Ad A'_1 e ad A'_2 siano successive rispettivamente le rette s^{ple} a_1'' e a_2''; sia A''_{11} un punto fissato ad arbitrio su a_1'', purchè fuori di a' (cioè, considerati a_1'' e A''_{11} su una superficie Φ_2, trasformata di F dopo le due trasformazioni successive applicate

(*) Cfr. le citazioni al principio della Memoria.

l'una ad A e l'altra ad A'_1, A''_{11} non stia sull'incontro di a_1'' colla linea trasformata di a'); sia inoltre A''_{12} un punto generico di a_1'', e A_2'' il punto di a_2'' su un piano π_1 generico per $A\,A'_2$. Analogamente, ad A''_{11}, A''_{12}, A_2'' siano successive su F rispettivamente le rette s^{ple} a_{11}''', a_{12}''', a_2''' su cui si fissino i punti A'''_{111}, A'''_{112}, A_{12}''', A_2''' definiti in modo analogo ai precedenti punti A''_{11}, A''_{12}, A_2'' — cioè in modo che A'''_{111} sia fissato ad arbitrio su a''_{11} purchè fuori di a''_1, A'''_{112} sia generico su a'''_{11}, A'''_{12} sia su a'''_{12} e su un piano π_2 generico per A'_1 e A''_{12}, A_2'' sia l'intersezione di a_2''' con π_1 — e così via. Dopo un numero finito di operazioni si giungerà ad una retta s^{pla} $a_2^{(r)}$, al cui punto $A_2^{(r)}$ situato su π_1 non è successiva una retta s^{pla}. Ma i punti A', A'',... non possono essere più che s^{pli}; tutti quelli che appartengono a linee s^{ple} sono adunque s-planari; ed, in particolare, ad $A_2^{(r)}$ saranno successive più rette distinte (costituenti un fascio il cui centro è su $a_2^{(r)}$) ovvero una sola retta di multiplicità $<s$ e lungo la quale il piano fondamentale dell'ultima trasformazione è tangente ad F.

Si supponga che i punti A'_1, $A''_{11}, \ldots$, $A^{(r)}_{11\ldots 11}$ siano stati scelti in modo che all'ultimo di essi sia ancora successiva una retta s^{pla}. Allora fra i punti $A^{(r)}_{11\ldots 11}$, $A^{(r)}_{11\ldots 12}$, $A^{(r)}_{11\ldots 2}, \ldots$, $A_2^{(r)}$ ne esistono certamente due consecutivi (nell'ordine in cui qui sono scritti) tali che al primo è successiva una retta s^{pla}, al secondo una o più rette di multiplicità minore. Indicherò con $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$ e con $\mathbf{A}_2^{(r)}$ rispettivamente questi due punti. Per la legge seguita nella scelta dei punti A successivi, esiste un punto $A_{1\ldots}^{(r-t)}$ $(t \leqq r)$ a cui $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$ e $\mathbf{A}_2^{(r)}$ sono entrambi successivi, senza esserlo entrambi a punti successivi a questo; indicherò con $\mathbf{A}^{(r-t)}$ questo punto. (Se $t=r$, $\mathbf{A}_{12}^{(r)} \equiv A_{12}^{(r)}$, $\mathbf{A}_2^{(r)} \equiv A_2^{(r)}$, $\mathbf{A}^{(r-t)} \equiv A$.) $\mathbf{A}^{(r-t)}$ sta coi punti che lo seguono precedendo $\mathbf{A}_2^{(r)}$ e con $\mathbf{A}_2^{(r)}$ stesso, su un piano $\pi_{(r-t+1)}$, generico per $\mathbf{A}^{(r-t)}$, ed $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$ sta col punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ che lo precede essendo immediatamente successivo ad $\mathbf{A}^{(r-t)}$ (e coi punti successivi ad $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ e precedenti $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$) su uno stesso piano π_{r-t+2} generico per $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$. Indicherò con $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ questo punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$; e in generale con $\mathbf{A}_{12}^{(q)}$ i punti della successione cui appartiene $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$, e con $\mathbf{A}_2^{(q)}$ i punti della successione cui appartiene $\mathbf{A}_2^{(r)}$.

I punti A si ottengono su altrettante superficie (contando due volte le superficie su cui stanno le coppie di punti $A^{(q)}_{11\ldots 1}$, $A^{(q)}_{11\ldots 2}$) trasformate di F con convenienti successioni di trasformazioni quadratiche, che supporremo scelte come si è detto al n.° 9. Rappresenterò colla lettera Φ una qualunque di queste superficie, apponendovi i medesimi indici e apici del punto A che vi si considera; sarà $\Phi^{(q)}_{11\ldots 11} \equiv \Phi^{(q)}_{11\ldots 12}$; dovendo parlare di questa superficie senza considerarvi in particolare uno dei punti $A^{(q)}_{11\ldots 11}$, $A^{(q)}_{11\ldots 12}$ la indicherò con $\Phi'^{(q)}_{11\ldots 1}$. Ciascuna superficie Φ appartiene ad uno spazio in cui esiste un determinato punto V; a questo punto si apporranno gli stessi apici e indici che alla superficie. Per quanto riguarda i punti indicati colle lettere $\mathbf{A}$, si indicheranno le superficie corrispondenti con le lettere $\mathbf{F}$ e i corrispondenti punti V con le lettere $\mathbf{V}$ seguendo la stessa legge precedente per gli indici e gli apici; infine indicherò con $\mathbf{a}^{(q)}_{12}$ e $\mathbf{a}^{(q)}_{2}$ le rette su cui stanno rispettivamente i punti $\mathbf{A}^{(q)}_{12}$ e $\mathbf{A}^{(q)}_{2}$, con $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ quella su cui stanno $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_{1}$ e $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_{2}$ e con $\mathbf{a}^{(r+1)}_{12}$, $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ le linee successive rispettivamente ad $\mathbf{A}^{(r)}_{12}$ e ad $\mathbf{A}^{(r)}_{2}$. (La prima sarà una retta s^{pla}, la seconda una o più rette di un fascio, di multiplicità $< s$.)

Distinguo due casi:

1.° $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ si compone di più rette distinte. — Si considerino le polari p^{me} $(p=0,\ 1,\ldots,\ s-1)$ dei punti $V^{(q)}_{j}$ (*) rispetto alle corrispondenti $\Phi^{(q)}_{j}$ e siano $\Phi^{(q)p}_{j}$; sia poi F_p la p^{ma} polare di V rispetto a F. Poichè V non è sul cono (piano) tangente a F in A, Φ'^{p} è la trasformata di F_p mediante la trasformazione applicata ad A (n.° 8); e poichè a' è s^{pla}, V' non è sul cono tangente a Φ' in alcun punto di a' (fuori della conica fondamentale della trasformazione); V' è adunque, rispetto ad A'_1 e ad A'_2, nelle stesse condizioni di V rispetto ad A. Ripetendo quest'osservazione si giunge a vedere che tutti i punti $\mathbf{V}^{(q)}_{j}$ $(q=r-t+1,\ r-t+2,\ldots,\ r;\ j=12,\ 2)$ sono fuori dei coni tangenti rispettivamente alle $\mathbf{F}^{(q)}_{j}$ nei punti delle $\mathbf{a}^{(q)}_{j}$ non appartenenti alle coniche fondamentali delle trasformazioni, e che le $\mathbf{F}^{(q+1)p}_{j}$ sono le trasformate di F_p per le corrispondenti successioni di trasformazioni; queste $\mathbf{F}^{(q+1)p}_{j}$ sono quindi pure le trasformate di $\mathbf{F}^{(r-t)p}$ e di $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$. Inoltre le $\mathbf{F}^{(q)p}_{j}$ passano per le rispettive rette $\mathbf{a}^{(q)}_{j}$ colla multiplicità $s-p$ e la $\mathbf{F}^{(r+1)p}_{12}$ passa per $\mathbf{a}^{(r+1)}_{12}$ colla stessa multiplicità $s-p$; quanto alla $\mathbf{F}^{(r+1)p}_{2}$, essa taglia il piano di $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ fuori della conica fondamentale della trasformazione secondo la linea (fascio di rette concentrico ad $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$) p^{ma} polare di $\mathbf{V}^{(r+1)}_{2}$ rispetto all'intersezione di questo piano colla $\mathbf{F}^{(r+1)}_{2}$ (il fascio $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ le cui rette siano contate con convenienti multiplicità).

Per un'osservazione fatta al n.° 10 — 1.° caso — non tutte le $\mathbf{F}^{(r+1)p}_{2}$ $(0 \leq p < s-1)$ passano per la retta d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r+1)s-1}_{2}$ col piano di $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$; si fissi un valore di p per cui ciò non avvenga; questo valore indicherò ancora con p. La multiplicità d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ e $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$

(*) Coll'indice j rappresento uno qualunque dei gruppi di indici $1\ldots 11$, $1\ldots 12$, $1\ldots 1,\ldots,\ 2$.

in un punto generico $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ della $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ è (n.° 4):

$$t(s-p) \text{ (*)},$$

mentre quella delle stesse superficie in $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ è:

$$\geqq (t+1)(s-p).$$

Adunque $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$ e $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ s'intersecano, oltre che secondo la $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ e secondo altre linee non passanti per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$, secondo una linea C per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$. Ma, pel modo onde sono stati scelti i punti A'_1, $A''_{11}, \ldots$, $A_{11\ldots1}^{(r)}$, pel punto $\mathbf{A}_1^{(r-t+1}$ non passa altra linea generata dalle trasformazioni successive (cioè altra trasformata di A) che $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$; quindi C è trasformata di una curva appartenente all'intersezione di F_p e F_{s-1}.

Nella serie dei punti A, A'_1, $A''_{11}, \ldots$, $A_{11\ldots1}^{(r)}$ precedentemente definita, esiste sempre, in questo primo caso, un punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ $(0 < t \leqq r)$ tale che i punti successivi A, $A'_1, \ldots$ $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ appartengono tutti alla linea d'intersezione di F_{s-1} con una conveniente F_p.

2.° $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ si riduce ad una sola retta di multiplicità $s' < s$. — Ho provato al n.° 11 che, se, come noi supponiamo, il piano π_{r-t+1} è generico per $\mathbf{A}^{(r-t)}$, sulla $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ non esistono punti di multiplicità maggiore di s' (fuori di $\mathbf{a}_2^{(r)}$ e della conica fondamentale della trasformazione); in particolare non sarà più che s'^{plo} il punto $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ in cui $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ è incontrata dal piano π_{r-t+1}. Il piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ è ora tangente alla $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$ in tutti i punti di $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ fuori di $\mathbf{a}_2^{(r)}$; supporrò che esso conti come $s'-k$ $(k < s')$ fra i piani tangenti a $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$ nel punto $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ (**).

(*) Questa è precisamente la detta multiplicità d'intersezione poichè il piano π_{r-t+1} non è tangente in $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ alla linea d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r-t+1,s-1}$ e di $\mathbf{F}^{(r-t+1\,p}$ (che, per la parte passante per un punto generico della $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$, si riduce a questa retta); ad ogni modo a noi basterebbe affermare che la detta multiplicità è $\leqq t(s-p)$.

(**) È facile provare che, per una scelta generica di π_{r-t+1}, questo vale lo stesso che dire che sia $s'-k$ la multiplicità del piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ nel fascio dei piani tangenti a $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$ nei punti generici di $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ (cioè fuori di $\mathbf{a}_2^{(r)}$ e della conica fondamentale); infatti si supponga che quest'ultima multiplicità sia $s'-k_1$; se $k_1 \neq k$, dovrà essere $k_1 > k$. Sia $\mathbf{\Psi}^{(r+1)}$ la polare k_1^{ma} di $\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ rispetto a $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$; questa polare avrà $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ come retta $s'-k_1^{pla}$ e il punto $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ avrà multiplicità $> s'-k_1$ su di essa (cfr. n.° 8). Ma la $\mathbf{\Psi}^{(r+1)}$ è la trasformata della F_{k_1}, k_1^{ma} polare di V rispetto ad F; adunque F_{k_1} avrà, nella fatta ipotesi, successivamente al punto $\mathbf{A}_2^{(r)}$ una retta su cui si trova un punto di multiplicità maggiore della sua generica. Secondo il n.° 11 questo non può verificarsi se π_{r-t+1} è generico.

Consideriamo le polari k^{me} e $s - 1^{me}$ dei punti $V_j^{(q)}$ rispetto alle corrispondenti $\Phi_j^{(q)}$ e siano rispettivamente rappresentate coi simboli $\Phi_j^{(q)k}$, $\Phi_j^{(q)s-1}$, e coi simboli analoghi siano rappresentate le polari dei punti $\mathbf{V}$ rispetto alle $\mathbf{F}$ corrispondenti; siano poi F_k e F_{s-1} rispettivamente la polare k^{ma} e la $s - 1^{ma}$ di V rispetto ad F. Reggono qui tutte le cose dette in generale per le $\Phi_j^{(q)p}$ a proposito del caso precedente. Di più per la $\mathbf{F}_2^{(r+1)k}$ abbiamo che essa ha la retta $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ come $s' - k^{pla}$ e in $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ (*) ha il piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ come unico piano tangente; e per la $\mathbf{F}_2^{(r+1)s-1}$ che essa passa semplicemente per la $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ senza avervi il piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ tangente fuori della conica fondamentale. E poichè le $\mathbf{F}_j^{(q)k}$, $\mathbf{F}_j^{(q)s-1}$ sono le trasformate di $\mathbf{F}^{(r-t+1)k}$ e di $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$, la multiplicità d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r-t+1)k}$ con $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ in $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$, punto generico di $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ è:

$$t(s-k) + s' - k,$$

mentre quella delle stesse superficie in $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ è:

$$\geqq (t+1)(s-k).$$

Adunque, anche in questo caso le due superficie $\mathbf{F}^{(r-t+1)k}$, $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ s'intersecano, oltre che secondo la $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ e secondo altre linee non passanti per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$, secondo una linea C passante per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$. Come nel caso precedente si giunge ora ad enunciare che *anche in questo secondo caso esiste nella serie dei punti $A, A'_1 \ldots, A_{41\ldots1}^{(r)}$ un punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ $(0 < t \leqq r)$ tale che i punti successivi $A, A'_1, \ldots, A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ appartengono tutti alla linea d'intersezione di F_{s-1} con una conveniente F_p $(0 \leqq p < s-1)$.*

Importa di rilevare che F_{s-1} e F_p sono polari rispetto ad F del punto V assegnato a priori fuori del cono tangente ad F in A.

Anche qui, come al n.° 10, si può supporre che, come superficie F, oggetto delle considerazioni precedenti, si assuma la trasformata di una superficie data F dopo una successione di trasformazioni quadratiche (del n.° 9). Quindi:

Sopra una superficie F si fissi una qualunque successione di punti $A, A', A'', \ldots, A^{(r)}$ (**) tutti s^{pli} per F, tale che ad $A^{(r)}$ sia successiva una serie di punti $A^{(r+1)}, \ldots$ s^{pli} per F, ed appartenenti a rette (successive) s^{ple} per F senza che mai due di essi appartengano ad una medesima di queste rette; si supponga che la seconda successione contenga un numero di punti mag-

(*) Od anche nei punti generici; cfr. nota prec.

(**) Non occorre dire chè la r ha ora significato differente che nelle linee precedenti.

giore di quello dei punti s^{pli} *di* F *successivi ad* $A^{(r)}$ *e giacenti su un piano generico per* $A^{(r)}$ (*). *Sia* F_{s-1} *la* $s-1^{ma}$ *polare di un punto generico* V *rispetto ad* F; *esiste sempre un'altra polare* F_p *di* V *rispetto ad* F $(0 \leq p < s-1)$ *che interseca* F_{s-1} *secondo una linea di cui* $A, A', \ldots, A^{(r)}, A^{(r+1)}$ *sono punti successivi.*

13. *Osservazione.* Si è precedentemente supposto che ad $A^{(r)}_{11\ldots1}$ fosse successiva una retta s^{pla}. Gli stessi ragionamenti condurrebbero a risultati analoghi se si supponesse che ad $A^{(r)}_{11..1}$ fosse successiva una sola retta di multiplicità $s'' < s$, essendo del resto s'' qualunque nel primo dei due casi precedentemente distinti, $> s'$ — ovvero $= s'$ e tale che il numero analogo a k vi sia $k_1 < k$ —, nel secondo.

In altri casi i ragionamenti precedenti sono capaci d'applicazione; rilevo quello in cui si supponesse $a^{(r)}_{11\ldots}$ e con essa $A^{(r)}_{11\ldots}$ di multiplicità $< s$. Basterebbe allora in quanto precede considerare i punti $A^{(r-1)}$ in luogo degli $A^{(r)}$ e pei due punti della serie $A^{(r-1)}_{11\ldots11}, A^{(r-1)}_{11\ldots12}, A^{(r-1)}_{11\ldots2}, \ldots, A^{(r-1)}_{2}$ analoghi ad $\mathbf{A}^{(r)}_{12}$ e ad $\mathbf{A}_2^{(r)}$ ragionare sul primo come sopra si è ragionato sul secondo, e sul secondo come sopra sul primo. Si giungerebbe allora al risultato che il punto $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_2$ (così chiamando ancora l'analogo del punto $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_2$ del numero precedente) appartiene alla linea d'intersezione di F_{s-1} con una conveniente F_p. Ma questo non è possibile se $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_2$ è punto generico della linea $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ cui appartiene. Si conchiude, tenendo anche presente il risultato del n.° 11, che *se il punto* A *è* s^{plo} *su una superficie* F *e al punto* A *sono successivi sulla sezione piana di* F *generica (passante per esso)* ν *punti* s^{pli}, *ogni successione di punti di* F *il cui primo punto sia* A *contiene* ALMENO ν *punti* s^{pli} *(necessariamente consecutivi)*; e *ogni successione* GENERICA *di tali punti contiene* PRECISAMENTE ν *punti* s^{pli}.

14. Su una superficie F d'ordine dato n si consideri un punto s^{plo} A ed una successione di punti s^{pli} di cui A sia il primo: $A, A', \ldots$; e si supponga che mai due di questi punti stiano sulla stessa linea s^{pla} passante per A, nè sulla stessa linea (retta) s^{pla} successiva ad A; sia r tale che $A^{(r)}$ ovvero un punto successivo ad $A^{(r)}$ (immediatamente o non) nella successione $A, A', \ldots$ non stia, col punto che immediatamente lo precede, sulla stessa retta succes-

(*) Applicando la proposizione del numero seguente si ha che questa ipotesi equivale all'altra che *la seconda successione contenga un numero di punti maggiore di quello dei punti* s^{pli} *di* F *successivi ad* $A^{(r)}$ *ed appartenenti ad un ramo generico tracciato su* F *e che passi per* $A^{(r)}$.

siva ad A. Dopo quanto precede è facile assegnare un limite superiore per il numero r.

Di fatto, nelle presenti ipotesi, fissati n e r, risulta fissato un numero r_1 (*) tale che, se esiste una serie di più di r_1 punti successivi ad $A^{(r)}$ ed s^{pli} per F, esiste sempre una superficie $F_p\,(0 \leqq p < s-1)$ (**), che interseca F_{s-1} secondo una linea di cui una parte C irreduttibile passa pei punti successivi $A, A', \ldots, A^{(r)}$. Il numero $r + r_1$ cresce con r; se quindi si determina un limite superiore al numero dei punti $A, A', \ldots$ che possono stare su C risulta determinato per $r + r_1$ un limite, per modo che, se la successione $A, A' \ldots$ contiene un numero di punti superiore od uguale a questo limite, r ha per limite superiore quello suddetto del numero dei punti $A, A', \ldots$ che stanno su C; se la successione $A, A', \ldots$ contiene un minor numero di punti, è questo il limite superiore di r.

Ciò posto, l'ordine C sarà:

$$m \leqq (n-p)(n-s+1) \leqq n\,(n-s+1).$$

Sia ora O un punto generico dello spazio, cioè tale che non appartenga al cono tangente a F in A, nè al cono tangente a F condotto da un punto generico fissato ad arbitrio di C, nè alla $A\,V$. Da O si proietti C e sia Γ il cono proiettante; esso interseca F secondo una linea C_1 d'ordine:

$$m\,n = m_1.$$

In conseguenza delle ipotesi fatte tutte le linee di F successive ad A su cui stanno $A', A'', \ldots$ sono rette e ciascuna (salvo quelle per A') è appoggiata ad una immediatamente precedente; lo stesso avviene per le linee di Γ successive ad A, poichè ogni punto $A^{(i)}$ ha in Γ la multiplicità generica della linea di Γ successiva ad A cui appartiene; basta, per persuadersene, osservare che, in caso contrario esisterebbero (n.° 10 e relativa osservazione) due polari

---

(*) Se il punto di cui si parla, che non sta col precedente sulla stessa retta successiva ad A, sta su una retta successiva ad A, di multiplicità $< s$, $r + r_1$ è il posto di questo punto nella successione; quindi l'esistenza degli r_1 punti di cui si parla nel testo non è allora una condizione.

(**) Si può notare che si potrebbe supporre senz'altro $p = 0$. Infatti, essendo C d'ordine $m \leqq n\,(n-s+1)$ (cfr. le linee seguenti del testo), quando r sia superiore ad un certo limite, C deve giacere interamente su F, poichè ha in A riunite almeno $r\,s$ intersezioni con F. (Pel computo delle intersezioni di una curva e di una superficie in un punto partendo dai caratteri dei loro punti successivi, cfr. Segre, pag. 9-11.)

di V rispetto a Γ che s'intersecherebbero secondo una linea passante per $A, A', \ldots, A^{(i)}$, il che è assurdo poichè Γ è un cono ed A e A' non appartengono ad una stessa generatrice. Adunque, poichè Γ e F non si toccano in A, non hanno comune alcuna linea successiva ad A cui appartengano punti della successione $A, A, \ldots$ Infine, pel modo in cui si è scelto O, Γ e F non si toccano secondo una linea.

Segue che per $A, A', \ldots, A^{(r)}$ passano una o più parti di C_1, ciascuna di multiplicità $< s$, mentre nei punti $A, A', \ldots, \Gamma$ e F, hanno multiplicità d'intersezione $\geq s$, (per $A', \ldots$ queste multiplicità coincidono coi numeri S del n.° 5). Se quindi si considera la curva C_2 composta di tutte le parti di C_1 contate ciascuna una volta sola, questa curva passerà con punti multipli per $A, A', \ldots, A^{(r)}$. Ma, se m_2 è l'ordine di C_2,

$$m_2 \leq m_1;$$

si può quindi assegnare [n.° 3 (*)] un limite superiore (funzione della sola m_2 e della multiplicità di A su C_2) al numero di questi punti. Il numero r ha adunque un limite superiore assegnato (che può considerarsi come funzione della sola n e di s).

Risulta così provato che la successione dei punti $A, A', \ldots$ dianzi definita ha un termine, a meno che esista un numero r (inferiore necessariamente al suddetto limite) tale che i punti successivi ad $A^{(r)}$ stiano ciascuno col precedente su una stessa linea (retta) successiva ad A. L'esame di questo caso si farà nel paragrafo seguente.

(*) Per la validità dei risultati di questo numero nel caso presente ricordo quanto dissi nella nota relativa al n.° 5. Aggiungo che si può evitare l'applicazione del teorema di cui là si parla. Basta, per vero, osservare che nel § 2 e nei paragrafi seguenti si può, alla trasformazione quadratica considerata, sostituire la trasformazione quadratica speciale (suo caso particolare) mantenendo fisso un punto della retta doppia fondamentale, come nel presente paragrafo si teneva fisso il punto doppio della conica fondamentale. Si può, se ciò è del caso, assumere su ogni retta doppia fondamentale, due differenti punti come punti V nel senso del § 2 e in quello del paragrafo presente, restando questo fisso nelle trasformazioni successive, e variando quello per le trasformazioni successive stesse, per modo che lo si potrà scegliere in modo sufficientemente generico perchè si possano applicare i ragionamenti del § 2.

§ 5.

15. *Su una linea a di una superficie F, di multiplicità $<s$ per essa, esiste un numero finito di punti successivi s^{pli} per F.* Sia, di fatto, A un punto s^{plo} di F su a. Ogni superficie F_1 passante per a e che non tocchi F lungo a sega F secondo una linea composta di a contata un certo numero di volte e di una linea residua t passante per A. Sia inoltre il punto A semplice per a; si potrà fare in modo che F_1 passi per A colla multiplicità dei punti generici di a su essa, ad es. con punto semplice, e che non vi sia tangente ad F. Se allora su a sono successivi ad A altri punti s^{pli} per F, la linea t passa per A e per tutti questi punti (§ 3).

La superficie F_1 può ora essere il cono che proietta a da un punto convenientemente generico dello spazio. La linea t ha allora un ordine assegnato. Le linee t ed a, entrambe di ordine assegnato, hanno comune solo un numero finito di punti successivi ad A (non è questo altro che un caso particolare del teorema del § 2); adunque è finito il numero dei punti s^{pli} di F su a, successivi ad A, punto semplice di a.

Quando A fosse multiplo per a basterebbe trasformare dapprima la F con la trasformazione che muta a in una nuova curva su cui ad A corrispondono uno o più punti semplici (per la curva).

16. Prima di passare all'analisi del caso residuo enunciato alla fine del n.° 14, ritorniamo un momento su quello già studiato.

Dall'ipotesi costante che mai, nella successione dei punti A, due punti appartengano ad una stessa linea s^{pla}, segue immediatamente che non è sufficiente la proposizione del n.° 10 a cui si faccia seguire il ragionamento del n.° 14 solo quando, a cominciare da un certo, tutti i punti della successione appartengano a rette s^{ple} successive (e non ad altre linee s^{ple}) della superficie. Orbene per questo caso si può dimostrare che il numero dei punti della successione è finito, evitando la ricerca del n.° 12 (*), nel modo seguente:

Sia $A^{(r)}$ detto punto o un punto della serie ad esso successivo; si può supporre che per $A^{(r)}$, e quindi pei punti successivi, non passino altre linee multiple di F che le dette rette s^{ple}. (Per $A^{(r)}$ passerebbero tali linee se $A^{(r)}$

(*) Risulta con ciò semplificato anche il ragionamento del n.° 14, perchè solo quando sia necessario ricorrere al n.° 12 si debbono considerare punti della successione A, A', ..., $A^{(r)}$, ... successivi ad $A^{(r)}$ per provare il passaggio di C per $A^{(r)}$.

stesse su una linea multipla di F per A, di multiplicità $< s$; ora, pel numero prec., questo caso si può escludere assumendo r convenientemente grande.) Ciò posto, sia $a^{(t)}$ la retta s^{pla} per $A^{(t)}$ $(t \geqq r)$. Si consideri una superficie qualunque che passi per A e per tutte le rette $a^{(t)}$, ad es. la polare F_p di V rispetto alla F, di indice $p > 0$ e $\leqq s - 1$; la multiplicità d'intersezione di F e F_p in $A^{(r)}$ è un numero assegnabile ν. Sono ora possibili due ipotesi: 1.° La linea C d'intersezione di F e F_p passa per $A^{(r)}$; poichè r si può assumere grande a piacere, si può applicare a questa C il ragionamento del n.° 14. — 2.° Detta linea non passa per $A^{(r)}$; allora essa non passerà neanche per alcun punto successivo ad $A^{(r)}$. La multiplicità d'intersezione di F e F_p in un punto generico di $a^{(r+1)}$ è $\nu - s(s-p)$ e tale è allora pure per la loro multiplicità d'intersezione in $A^{(r+1)}$, per cui non passa ora altra linea comune a F e F_p. In modo analogo la multiplicità d'intersezione di F e F_p in $A^{(r+2)}, \ldots, A^{(r+i)}, \ldots$ è rispettivamente $\nu - 2s(s-p), \ldots, \nu - is(s-p), \ldots$ Ma questa multiplicità d'intersezione non può divenir negativa; dunque è impossibile che i cresca oltre ogni limite.

17. Sullo stesso concetto di quella del numero precedente, quantunque meno semplice, è fondata la dimostrazione che segue, pel caso che rimane da trattare.

La successione di punti s^{pli} di F: $A, A', \ldots$ sia tale che i punti successivi ad $A^{(r)}$ stiano ciascuno col precedente su una stessa retta successiva ad A. Sia $a^{(r)}$ la retta cui appartiene $A^{(r)}$; sarà anche $A^{(r+1)}$ un punto di $a^{(r)}$; quindi, per un'ipotesi fatta costantemente, $a^{(r)}$ avrà multiplicità $s' < s$. Lo stesso si dovrà dire per tutte le rette sostegni di più punti A. Pel numero 15 su ciascuna di queste rette sta un numero finito di punti A. Si deve quindi supporre che tutti i punti A successivi ad $A^{(r)}$ siano uniplanari, perchè se, p. es., non lo fosse $A^{(r)}$, non lo sarebbe nessuno dei punti successivi su $a^{(r)}$, e successivamente all'ultimo non si potrebbe quindi più avere un punto s^{plo} che stesse con esse su una stessa trasformata di A.

Ciò posto, a cominciare dal punto $A^{(r)}$ modificheremo così i simboli relativi alla considerata successione di punti:

Siano $A^{(r)}, A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \ldots, A_{h_r}^{(r)} \equiv A^{(r+1)}$ i punti della successione appartenenti ad $a^{(r)}$ ($A_1^{(r)}$ sarà il precedente $A^{(r+1)}$). Fatta eccezione pel primo, per ognuno di questi punti passa, oltre la $a^{(r)}$, una retta successiva al punto che lo precede immediatamente, e non passano altre linee multiple per F, effettive ovvero successive ad A, se, come si può sempre supporre, per $A^{(r)}$ non passano altre linee multiple per F poichè $A^{(r)}$ e i punti successivi sono uniplanari — cfr. l'analoga affermazione nel n.° preced.). Indicherò quelle rette rispettivamente con $a_1^{(r)}$, $a_2^{(r)}$, .., $a_{h_r}^{(r)} \equiv a^{(r+1)}$. Siano poi $A^{(r+1)}$, $A_1^{(r+1)}$, $A_2^{(r+1)}$,..., $A_{h_{r+1}}^{(r+1)} \equiv A^{(r+2)}$ i punti della successione appartenenti ad $a^{(r+1)}$, e $a_1^{(r+1)}$, $a_2^{(r+1)}$,..., $a_{h_{r+1}}^{(r+1)} \equiv a^{(r+2)}$ le rette diverse da $a^{(r+1)}$ passanti rispettivamente per questi punti, escluso il primo. Come pei punti $A_j^{(r)}$, non passano per questi punti $A_j^{(r+1)}$ altre linee di F successive ad A. Analogamente si indicheranno i punti di $a^{(r+2)}$ e le rette di F per essi, e così via.

Sia $s_j^{(i+1)}$ la multiplicità di $a_j^{(r+i)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$ (e può, per particolari valori di i e j, essere $s_j^{(i+1)} = s$; per $j = 0$ è sempre $s^{(i+1)} < s$, come già si disse) e sia $V_j^{(r+i)}$ il punto doppio della conica fondamentale della trasformazione applicata ad $A_j^{(r+i)}$ (sarà $V_{h_{r+i}}^{(r+i)} \equiv V^{(r+i+1)}$). I piani $V_j^{(r+i)}\, a_j^{(r+i)}$ e $V_j^{(r+i)}\, a^{(r+i)}$ sono tangenti ad F rispettivamente lungo $a_j^{(r+i)}$ e lungo $a^{(r+i)}$, eccezion fatta pei piani $V_j^{(r+i)}\, a_j^{(r+i)}$ $(0 < j < h_{r+i})$ per cui fosse $s_j^{(i+1)} = s$. Contino questi piani rispettivamente come $s_j^{(i+1)} - k_j^{(i)}$ e come $s^{(i+1)} - k^{(i)}$ fra i piani tangenti ad F nei punti generici di $a_j^{(r+i)}$ e di $a^{(r+i)}$ (nel caso in cui non si abbia contatto sarà corrispondentemente $s_j^{(i+1)} = k_j^{(i)} = s$); si ha necessariamente $0 \leqq k_j^{(i)} \leqq s$.

Si supponga che la successione dei punti A si protragga in modo che esistano numeri i $\left(\text{e} \sum_{p=r}^{p=r+i} h_p\right)$ sufficientemente grandi perchè le considerazioni seguenti possano farsi; esistano cioè fra questi numeri di quelli superiori (essi e quindi i successivi) a taluni limiti inferiori assegnabili; l'ipotesi contraria equivarebbe ad ammettere assegnato un limite superiore al numero dei punti della successione, onde non avrebbe più luogo la presente ricerca sull'esistenza di un tal limite.

Lasciando per ora indeterminato il numero $k < s$, considero le polari F_{s-1} e F_k di V rispetto ad F e distinguo due casi: 1.° L'intersezione di F_{s-1} e F_k passa per $A_1^{(r)}$; 2.° Questo fatto non si verifica.

Al primo caso si applicano immediatamente i ragionamenti del n.° 14, i quali danno per r un limite superiore.

Quanto al secondo, abbiano $\Phi_j^{(r+i)\,s-1}$ e $\Phi_j^{(r+i)\,k}$ significati analoghi a quelli delle analoghe Φ dei n$^{\text{i}}$ 10 e seg.; siano inoltre indicati cogli stessi simboli con cui si rappresentano le linee a e i punti A, i loro corrispondenti su queste Φ. F_{s-1} passa semplicemente per le $a_j^{(r+i)}$ $(j \geqq 0)$ e pei punti A, senza esservi tangente ai piani $V_j^{(r+i)}\, a_j^{(r+i)}$, $V_j^{(r+i)}\, a^{(r+i)}$; F_k può invece passare per le rette $a_j^{(r+i)}$ con multiplicità diverse (sempre $\leqq s - k$) essendovi o non tangente ai suddetti piani; passerà però sempre pei punti A con multiplicità

$s - k$, senza esservi tangente a detti piani, per le $a^{(r+i)}$ per cui $k^{(i)} = k$ con multiplicità $s^{(i+1)} - k$, avendovi come unico piano tangente il piano $V^{(r+i)}\, a^{(r+i)} \equiv V_1^{(r+i)}\, a^{(r+i)} \equiv \ldots \equiv V_{h_{r+i}}^{(r+i)}\, a^{(r+i)}$ e per le $a_j^{(r+i)}$ per cui $k_j^{(i)} = k$ con multiplicità $s_j^{(i+1)} - k$, avendovi come unico piano tangente il piano $V_j^{(r+i)}\, a_j^{(r+i)}$.

Crescendo convenientemente i (e basta supporre che possa divenire $i \geqq s^2$), è evidente che esistono sempre una retta $a^{(r+i)}$ e una retta $a_\mu^{(r+i+\lambda)}$ per cui $k^{(i)} = k_\mu^{(i+\lambda)}$ e $s^{(i+1)} \geqq s_\mu^{(i+\lambda+1)}$; sarà necessariamente $k^{(i)}$, $s^{(i+1)}$, $s_\mu^{(i+\lambda+1)} < s$. Assumendo il punto $A^{(r)}$ sulla prima di queste rette, si potrà indicare con k questo numero, e con $a^{(r)}$ la prima retta cui appartiene; si potrà cioè porre $i = 0$. Si fissi per il k precedentemente lasciato indeterminato il valore ora fissato, allora $\Phi_1^{(r)s-1}$ passa per $A^{(r)}$ e per $a^{(r)}$ semplicemente, e senza esservi tangente a $V^{(r)}\, a^{(r)}$, e $\Phi_1^{(r)k}$ passa con multiplicità $s' - k$ per $a^{(r)}$ avendovi come unico piano tangente $V_1^{(r)}\, a^{(r)}$ e passa per $A_1^{(r)}$ con multiplicità $s - k$. Quindi la multiplicità d'intersezione di $\Phi_1^{(r)s-1}$, $\Phi_1^{(r)k}$ in un punto generico di $a^{(r)}$ è $x = s' - k$; quella in un punto generico di $a_1^{(r)}$ sia x_1. Se ora la curva intersezione di F_{s-1} e F_k non passa per $A_1^{(r)}$, la multiplicità d'intersezione di $\Phi_1^{(r)s-1}$ e $\Phi_1^{(r)k}$ in $A_1^{(r)}$ è $x_1 + x$; quindi quella di $\Phi_2^{(r)s-1}$, $\Phi_2^{(r)k}$ in un punto generico di $a_2^{(r)}$ è:

$$x_2 = x + x_1 - s + k.$$

In generale, si indichi con $x_j^{(i)}$ la multiplicità d'intersezione di $\Phi_j^{(r+i)s-1}$, $\Phi_j^{(r+i)k}$ in un punto generico di $a_j^{(r+i)}$: $x^{(i)}$ sarà pure la multiplicità d'intersezione di $\Phi_j^{(r+i)s-1}$, $\Phi_j^{(r+i)k}$ in un punto generico di $a^{(r+i)}$; in modo analogo a quello in cui si è ottenuto x_2 si ha:

$$x_j = x_1 + (x - s + k)(j - 1), \tag{1}$$

e in particolare:

$$x' \equiv x_{h_r} = x_1 + (x - s + k)(h_r - 1). \tag{2}$$

In seguito:

$$x'_1 = x + x' - s + k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x'_j = x + (x' - s + k)\, j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x'' \equiv x'_{h_{r+1}} = x + (x' - s + k)\, h_{r+1}.$$

In generale:

$$x_j^{(i-1)} = x^{(i-2)} + (x^{(i-1)} - s + k)\, j, \tag{3}$$

$$x^{(i)} = x^{(i-2)} + (x^{(i-1)} - s + k)\, h_{r+i-1}. \tag{4}$$

Da queste equazioni (e, per $i=1$, dalle equivalenti (1) e (2)) si deduce che le disuguaglianze:

$$x^{(i)} \lesseqgtr x_j^{(i-1)}, \qquad x_j^{(i-1)} \lesseqgtr x^{(i-2)}, \qquad x^{(i)} \lesseqgtr x^{(i-2)}, \qquad x^{(i-1)} \gtreqless s-k, \tag{5}$$

sussistono simultaneamente scegliendo in tutte lo stesso segno (per $i=1$ si deve sostituire x a $x^{(i-2)}$).

Ricordiamo ora che, per ipotesi, esiste una coppia di valori per i e j — $i=\lambda$, $j=\mu$ — tali che $x_\mu^{(\lambda)} = s_\mu^{(\lambda+1)} - k \leqq s' - k < s - k$.

Sono qui possibili due ipotesi:

1.° $\qquad x^{(\lambda+1)} \leqq x_\mu^{(\lambda)} \qquad$ onde $\qquad x^{(\lambda+1)} < s-k.$

Le (5) danno tosto:

$$x^{(\lambda)} \leqq s-k.$$

2.° $\qquad x^{(\lambda+1)} > x_\mu^{(\lambda)}.$

Le (5) danno:

$$x^{(\lambda-1)} < x_\mu^{(\lambda)} \qquad \text{onde} \qquad x^{(\lambda-1)} < s-k,$$

e:

$$x^{(\lambda)} > s-k, \qquad x^{(\lambda-2)} > x^{(\lambda)}.$$

Quindi:

$$x^{(\lambda-2)} > s-k,$$

da cui, per le (5),

$$x^{(\lambda-1)} > x^{(\lambda-3)} \qquad \text{onde} \qquad x^{(\lambda-3)} < s-k.$$

Proseguendo ad applicare le (5) si ottiene di qui:

$$x^{(\lambda-2)} < x^{(\lambda-4)}, \qquad x^{(\lambda-3)} > x^{(\lambda-5)}, \qquad x^{(\lambda-4)} < x^{(\lambda-6)}, \ldots;$$

ossia:

$$s-k > x^{(\lambda-1)} > x^{(\lambda-3)} > x^{(\lambda-5)} > \cdots \tag{6}$$

$$s-k < x^{(\lambda)} < x^{(\lambda-2)} < x^{(\lambda-4)} < x^{(\lambda-6)} < \cdots \tag{7}$$

Se λ è pari, e necessariamente >0, poichè le (1) e (2) danno che per $\lambda=0$ si verifica sempre il 1.° caso, il secondo gruppo di disuguaglianze contraddice al fatto che:

$$x < s-k.$$

Se λ è dispari le (3) e (4) danno ancora:

$$x^{(\lambda-2\nu+1)} > x_{h_{r+\lambda-2\nu-1}}^{(\lambda-2\nu)} > x_{h_{r+\lambda-2\nu-2}}^{(\lambda-2\nu)} > \cdots > x_1^{(\lambda-2\nu)} > x^{(\lambda-2\nu-1)} \qquad (\nu \geqq 0);$$

questo gruppo di disuguaglianze, postovi $\nu = 0$, insieme con le (6) dà luogo alla:

$$x_\mu^{(\lambda)} > x,$$

che contraddice all'ipotesi principale: il 2.° caso non può adunque verificarsi.

Raccogliendo si ha che, essendo $x_\mu^{(\lambda)} \leqq x$,

$$x^{(\lambda+1)} < s - k, \qquad x^{(\lambda)} \leqq s - k.$$

Da queste disuguaglianze, per le (5), si deduce:

$$x^{(\lambda+1)} < s - k, \qquad x^{(\lambda+2)} < s - k,$$

onde, per le (3) e (4):

$$x_j^{(\lambda+2+\varkappa)} < x_{j-1}^{(\lambda+2+\varkappa)}, \qquad (\varkappa \geqq 0).$$

Crescendo $\varkappa$ e j, queste x vanno dunque continuamente decrescendo; ma esse sono numeri essenzialmente interi e positivi, non nulli. I numeri $\varkappa$ e j $\left(\text{o meglio la somma } \sum_{p=r+\lambda+2}^{p=r+\lambda+2+\varkappa} h_p\right)$ ammettono dunque un limite superiore.

La serie dei punti A ha adunque un termine in ogni caso.

18. Da ciascuno dei ragionamenti precedenti sarebbe facile dedurre un valore numerico del limite di cui vi si parla; potrei dare io stesso tali valori, ma mi astengo dal farlo, credendoli troppo superiori al vero perchè possano presentare interesse e trovare altrove utile applicazione. Il lettore potrà in ogni caso ottenerli senza difficoltà.

Torino, Giugno 1897.

Il discriminante delle forme binarie del settimo ordine.

(*Del* Prof. Francesco Brioschi, *a Milano.*)

1.° La ricerca del valore di questo discriminante in funzione di invarianti della stessa forma, costituisce lo scopo principale di una interessante Memoria del prof. Gordan pubblicata circa dieci anni ora sono nei *Math. Annalen* (Vol. 31, pag. 566). Se ora ritorno sull' argomento si è per dimostrare come al risultato, certo non facile, ottenuto dal prof. Gordan, si possa giungere per altra via più diretta, e per ciò forse, feconda d'altri risultati.

Di questo metodo già diedi un esempio in una comunicazione alla Accademia delle Scienze (*Sur les racines multiples des équations algebriques*, Comptes Rendus, 28 octobre 1895) e per esso, nel caso attuale, un invariante di grado m della forma del 7.° ordine può esprimersi in funzione intera e razionale di covarianti e di invarianti di una forma del quinto ordine, funzione dell'ordine $2m$ e di grado m.

Il discriminante delle forme di settimo ordine essendo del grado dodicesimo, potrà essere funzione dell'invariante di quarto grado, dei tre invarianti di ottavo grado, e dei sei invarianti del dodicesimo grado. Adotterò per questi invarianti le notazioni opportune del sig. Gordan, e posto:

$$L = \frac{7^4}{8 \cdot 5^2}, \qquad M = \frac{3^2 \cdot 7^8}{4^3 \cdot 5^2}, \qquad L\,M = 2\,N,$$

indicherò con α; β_1, β_2, β_3; γ, $\gamma_1 \dots \gamma_5$, i seguenti invarianti:

$$\left.\begin{array}{c}
\alpha = -L\,A, \quad \beta_1 = -\frac{M}{3 \cdot 5}\gamma_{01}, \quad \beta_2 = \frac{M}{3}\gamma_{02}, \quad \beta_3 = \frac{2}{3 \cdot 5}M\gamma_{03}, \\
\gamma = \frac{N}{5}c_1, \quad \gamma_1 = -\frac{N}{2}\gamma_{11}, \quad \gamma_2 = -2 \cdot 5^2 \cdot N\gamma_{22}, \quad \gamma_3 = -8\,N\gamma_{33}, \\
\gamma_4 = -5 \cdot 8 \cdot N\gamma_{23}, \quad \gamma_5 = 2 \cdot 5 \cdot N\gamma_{12},
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

e questa quantità α, β, γ, sono esprimibili in funzione di invarianti e di covarianti della forma di quinto ordine.

Pei covarianti e gli invarianti di quest'ultima forma mi riferirò alle notazioni di un mio lavoro pubblicato in questi *Annali* nel 1883 (Serie II^a, Tomo XI, pag. 291). Si hanno così per α, β, γ, i seguenti valori (*):

$$\alpha = 5\,h\,l - \varphi\,p\,,$$

$$\beta_1 = 62\,h^2\,l^2 + 3^2 . 7 . h^2 u - 2 . 11 . \varphi\,h\,l\,p + 2\,\varphi^2\,l^3 - 7\,\varphi^2\,p^2,$$

$$\beta_2 = 37\,h^2\,l^2 + 3^2 . 7 . h^2 u - 3 . 4 . \varphi\,h\,l\,p + \frac{5}{3}\varphi^2\,l^3 + 7\,\varphi^2\,l\,u + 2 . 11 . \varphi^2\,p^2,$$

$$\beta_3 = \alpha^2 + \varphi^2\left[4 . 11 . p^2 - \frac{8}{3}\,l^3 - \frac{4 . 7}{3}\,l\,u + \frac{7^2}{3^2}\,g_4\,h\right].$$

Osservisi che se $\varphi = 0$, o la forma f del settimo ordine ha *tre* radici eguali, sono:

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha^2\,, \qquad \beta_3 = \alpha^2\,,$$

ossia:

$$\gamma_{01} + 5\,\gamma_{02} + \frac{1}{3 . 5}\,A^2 = 0\,, \qquad \gamma_{03} - \frac{1}{2 . 3 . 5}\,A^2 = 0\,,$$

da cui:

$$\gamma_{01} + 5\,\gamma_{02} + 2\,\gamma_{03} = 0.$$

I valori di γ, $\gamma_1 \ldots \gamma_5$ sono i seguenti:

$$\gamma = -5\,h^3\,[13\,l^3 - 3^2 . 7 . l\,u + 2 . 3^2 . 5 . p^2] + 7\,\varphi\,h^2\,p\,[11\,l^2 + 3^2 . u]$$
$$+ 2\,\varphi^2\,h\,l\,[5\,l^3 + 2 . 17 . p^2] - 2\,\varphi^3\,p\,[4\,l^3 - 5\,p^2],$$

$$\gamma_1 = h^3\left[\frac{691}{4}\,l^3 + \frac{3 . 7 . 23}{2}\,l\,u - 4 . 3^2 . 11 . p^2 - 7^2 . g_4\,h\right]$$
$$- \frac{7}{4}\,\varphi\,h^2\,p\,[47 . l^2 + 2 . 3^2 . u] + \varphi^2\,h\,l\left[3 . 5 . l^3 + 3 . 7 . l\,u + \frac{167}{4}\,p^2\right]$$
$$- \varphi^3\,p\left[8\,l^3 + \frac{7^2}{4}\,p^2\right],$$

$$\gamma_2 = h^3\left[\frac{719}{2}\,l^3 + \frac{3 . 7 . 139}{2}\,l\,u - 3^2 . 4^2 . 37 . p^2 + 7^3 . g_4\,h\right]$$
$$+ \frac{7 . 59}{2}\,\varphi\,h^2\,p\,[l^2 + 3^2\,u] + \varphi^2\,h\,l\left[\frac{7 . 13}{2 . 3^2}\,l^3 + \frac{5 . 7}{2}\,l\,u + 3 . 4 . 157 . p^2 - \frac{4 . 7^2}{3}\,g_4\,h\right]$$
$$- \varphi^3\,p\left[\frac{3 . 37}{2}\,l^3 + \frac{7 . 59}{2 . 3}\,l\,u + 4 . \overline{11}^2 . p^2 - \frac{2 . 7^2 . 11}{3^2}\,g_4\,h\right] - \frac{7^2}{3^2}\,g_4\,\varphi^4\,l^2,$$

(*) Notisi che φ, g_4 sostituiscono f, A dell'indicato lavoro.

$$\gamma_3 = -3\,h^3\left[\frac{11}{2}\,l^3 + \frac{3^2 . 7^2}{2}\,lu + 3^5 . 4^2 . p^2 + 3 . 7^2 . g_4\,h\right] + \frac{3^2}{2}\,\varphi\,h^2 p\,[113\,l^2 + 3^4 . 7 . u]$$
$$+ \varphi^2\,h\,l\left[\frac{193}{2 . 3^2}\,l^3 + \frac{7 . 29}{2 . 3}\,l\,u + 7 . 481 . p^2 + \frac{5 . 7^3}{3^2}\,g_4\,h\right]$$
$$- \varphi^3\,p\left[\frac{887}{2 . 3}\,l^3 + \frac{7 . 139}{2}\,l\,u + 3^4 . 5^2 . p^2 + \frac{2 . 7^2}{3}\,g_4\,h\right]$$
$$- \frac{7^2}{2 . 3}\,g_4\,\varphi^4\left[\frac{19}{3}\,l^2 + 7\,u\right],$$
$$\gamma_4 = -5 . 6 . h^3\,[6 . 7 . lu + 3^2 . 4 . 11 . p^2 + 7^2 . g_4 h] + 3 . 4 . \varphi\,h^2 p\,[2 . 11 . l^2 + 3^2 . 7 . u]$$
$$+ \frac{4}{3^3}\,\varphi^2\,h\,l\left[409\,l^3 + 3 . 5 . 7 . 13 . l\,u + 3^2 . 5 . 589 . p^2 + \frac{7^2 . 253}{4}\,g_4\,h\right]$$
$$- \varphi_3\,p\left[\frac{4 . 1277}{3^3}\,l^3 + \frac{4 . 7 . 53}{3}\,l\,u + 3^2 . 4 . 5 . 11 . p^2 + 6 . 7^2 . g_4\,h\right]$$
$$- \frac{7^2}{2 . 3^2}\,g_4\,\varphi^4\left[\frac{1}{3}\,l^2 - u\right],$$
$$\gamma_5 = h^3\left[\frac{11 . 97}{2}\,l^3 + \frac{3^2 . 7^3}{2}\,l\,u + 3^3 . 8 . 11 . p^2 + 2 . 3 . 7^2\,g_4\,h\right]$$
$$- \frac{1}{2}\,\varphi\,h^2\,p\,[631\,l^2 + 3^2 . 7 . 13 . u]$$
$$+ \varphi^2\,h\,l\left[\frac{43}{2}\,l^3 + \frac{7 . 29}{2}\,l\,u - 2 . 151 . p^2 - \frac{4 . 7^2}{3}\,g_4\,h\right]$$
$$+ \varphi^3\,p\left[\frac{3 . 19}{2}\,l^3 - \frac{7}{2}\,l\,u + 2 . 7 . 11 . p^2 + \frac{2 . 7^2}{3}\,g_4\,h\right].$$

Importa osservare che fra i termini di queste sei espressioni non ha luogo alcuna sigizia. Ciò posto il problema della calcolazione del discriminante, trasformasi nel seguente: determinare i valori dei coefficienti numeri ρ, $\rho_1 \ldots \rho_5$; δ, δ_1, δ_2, δ_3, pei quali sia soddisfatta la equazione:

$$\rho\,\gamma + \rho_1\,\gamma_1 + \cdots + \rho_5\,\gamma_5 = \alpha\,[\delta\,\alpha^2 + \delta_1\,\beta_1 + \delta_2\,\beta_2 + \delta_3\,\beta_3]\,. \qquad (2)$$

Notisi dapprima che nel secondo membro non esistendo i termini $g_4\,\varphi^4\,u$; $g_4\,\varphi^4\,l^2$, $g_4\,h^4$, $h^3\,p^2$, si hanno tosto eguagliando a zero i corrispondenti del primo membro:

$$\rho_4 = 3\,\rho_3\,, \quad \rho_2 = -\frac{11}{3}\,\rho_3, \quad -\rho_1 + 2 . 3 . \rho_5 = \frac{2 . 11 . 17}{3}\,\rho_3\,, \quad \rho = 3 . 4^2 . \rho_3$$

Eguagliando in secondo luogo i coefficienti di $g_4 \varphi^2 h^2 l$, e di $g_4 \varphi^3 h p$ nei due membri, si hanno le:

$$83 \rho_3 - 3 \rho_5 = \frac{5}{4} \delta_3, \qquad \frac{373}{3} \rho_3 - 3 \rho_5 = \frac{1}{2} \delta_3,$$

le quali conducono alle:

$$\delta_3 = -\frac{4^2 . 31}{3^2} \rho_3, \qquad \rho_5 = \frac{1367}{3^3} \rho_3,$$

e quindi:

$$\rho_4 = \frac{4 . 403}{3^2} \rho_3 .$$

I coefficienti di $h^3 l u$, $\varphi h^2 p u$, conducono alla stessa relazione:

$$19 \rho_5 - \frac{8 . 59}{3} \rho_3 = 2 (\delta_1 + \delta_2),$$

ossia:

$$2 (\delta_1 + \delta_2) = \frac{5^2 . 869}{3^3} \rho_3,$$

ed i coefficienti di $\varphi^2 h l^4$ alla:

$$2 \delta_1 + \frac{5}{3} \delta_2 = \frac{39899}{2 . 3^3} \rho_3,$$

da cui:

$$\delta_1 = \frac{2 . 4^2 . 173}{3^3} \rho_3, \qquad \delta_2 = \frac{3551}{2 . 3^2} \rho_3 .$$

Infine eguagliando i coefficienti $\varphi^3 p^3$, trovasi:

$$\delta = -\frac{8569}{3^3} \rho_3 .$$

Questi valori soddisfano tutte le altre relazioni.

Sostituendo ora nella (2) i valori di questi coefficienti supponendo $\rho_3 = \frac{3^4}{4}$, e per α, β, γ i loro valori (1), dividendo per N, si ottiene:

$$\frac{4 . 3^5}{5} c_1 - \frac{3^2 . 403}{2} \gamma_{11} + \frac{3^3 . 5^2 . 11}{2} \gamma_{22} - 2 . 3^4 . \gamma_{33} - 2 . 3^5 . 5 . \gamma_{23} + \frac{3 . 5 . 1367}{2} \gamma_{12}$$
$$= A\left[\frac{8569}{2 . 3 . 5^2} A^2 + \frac{4^2 . 173}{5} \gamma_{01} - \frac{3 . 3551}{4} \gamma_{02} + \frac{3 . 4^2 . 31}{5} \gamma_{03}\right],$$

od il risultato del sig. Gordan.

Se nei valori superiori di γ, $\gamma_1, \ldots \gamma_5$ supponesi $\varphi = 0$, sussistendo per questo caso la sigizia:

$$4\, g_4\, h = -\, l^3 - 6\, l\, u + 9\, p^2\,,$$

si ottengono le cinque relazioni:

$$c_1 + \frac{4^3}{3^2\,.\,5}\gamma_{33} + \frac{2\,.\,5}{3}\,A\,\gamma_{02} - \frac{4^2\,.\,19}{3^3\,.\,5^3}\,A^3 = 0$$

$$\gamma_{11} - \frac{4^2}{5^2}\,\gamma_{33} - \frac{4}{3}\,A\,\gamma_{02} + \frac{1}{3\,.\,5^4}\,A^3 = 0$$

$$\gamma_{22} - \frac{4\,.\,3^2}{5^4}\,\gamma_{33} - \frac{1}{5^2}\,A\,\gamma_{02} + \frac{7}{5^6}\,A^3 = 0$$

$$\gamma_{23} - \frac{2\,.\,3}{5^2}\,\gamma_{33} - \frac{1}{4\,.\,5}\,A\,\gamma_{02} - \frac{1}{3\,.\,5^4}\,A^3 = 0$$

$$\gamma_{12} - \frac{3\,.\,8}{5^3}\,\gamma_{33} + \frac{7}{2\,.\,3\,.\,5}\,\gamma_{02} - \frac{11}{3\,.\,5^5}\,A^3 = 0\,,$$

le quali sono pure soddisfatte per una forma f del settimo ordine la quale abbia tre radici egnali.

Settembre 1897.

Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito considerata come elemento d'un calcolo (*).

(*Di* Adolfo Viterbi, *a Pisa.*)

I.

L'operazione rappresentata da un integrale definito, come si sa, consiste in ciò: « Data una certa funzione $f(y_1)$ della variabile, in generale complessa y_1 la quale sia analitica e uniforme in un certo campo, nel moltiplicarla per una funzione analitica $a(y_1 y_2)$ delle variabili indipendenti, in generale complesse $y_1 y_2$ e quindi nell'integrare rispetto a y_1 lungo una certa linea l, la quale cada entro il campo, in cui è regolare la funzione $f(y_1)$. » Il risultato di quest'operazione è una funzione analitica monogena di y_2. Le proprietà essenziali di detta operazione dipendono dalla funzione $a(y_1 y_2)$ la quale si dice a « caratteristica dell'operazione in parola ». L'operazione testè definita fu studiata a fondo dal prof. Pincherle (**). Altri, prima di lui, quali il Laplace, l'Abel, il Mellin s'erano già occupati dell'argomento, limitandosi tuttavia allo studio di casi speciali, e sui loro lavori in proposito si trovano citazioni e notizie nelle due Memorie testè citate, specialmente nella seconda del prof. Pincherle, il quale fu il primo a fare uno studio generale sull'argomento in parola.

(*) Dei concetti esposti in questa prima parte della presente Memoria fu, con qualche lieve modificazione, pubblicato un breve riassunto nei *Rendiconti* della R. Acc. dei Lincei (sedute del 4 e 25 aprile 1897).

(**) V. Pincherle, *Sur certaines operations fonctionelles representées par des integrales definies.* Acta Math., vol. X. — *Sopra alcune operazioni funzionali.* Memorie dell'Acc. di Bologna, serie 4.ª, vol. VII.

Ora mi propongo, nel presente lavoro, di considerare l'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito come elemento d'un calcolo, nel quale essa s'assuma come ente arbitrariamente variabile, suscettibile d'assumere infinite determinazioni diverse, basandomi sul fatto che una data determinazione dell'accennata operazione è fissata quando siano fissate e la funzione caratteristica e la linea d'integrazione relative all'operazione stessa. Così mi propongo, dopo aver data un'estensione del concetto di funzione, di definire nel calcolo da me studiato operazioni che facciano riscontro alle operazioni del calcolo infinitesimale, che possono cioè riguardarsi come una estensione di queste. Mi limito però in questo lavoro alla definizione e allo studio delle proprietà fondamentali delle accennate operazioni, a dare cioè un'abbozzo generale del calcolo preso a studiare, riserbandomi di studiare le questioni speciali che in esso si possono presentare e di mostrarne la portata e qualche applicazione in successivi lavori.

Per potere però passare alla definizione di operazioni facenti riscontro alle operazioni fondamentali del calcolo infinitesimale è mestieri definire operazioni che nel calcolo qui studiato facciano riscontro alle operazioni fondamentali dell'aritmetica. In questo presi a base anche considerazioni svolte da altri.

1.°

Convenzioni e definizioni fondamentali.

Per esporre i fondamenti del calcolo da me studiato mi permetto di porre le seguenti convenzioni:

a) Si designerà colla denominazione « operazione I » in generale un'operazione funzionale qualsiasi rappresentata da un integrale definito, determinata o variabile. Questa denominazione farà cioè, nel calcolo ora studiato, riscontro alla denominazione « quantità » che si usa nel calcolo ordinario e colla quale si può intendere tanto un ente suscettibile d'aumento o diminuzione che sia determinato, quanto un ente siffatto che sia variabile.

b) Nelle operazioni I che si considereranno in seguito, si farà astrazione dalle speciali variabili che in esse figurino, sia come variabile d'integrazione, sia come variabile da cui dipende la funzione risultato: si considererà cioè solo la forma della funzione caratteristica e della linea d'integrazione relative alle operazioni I che verranno studiate: ciò basta appunto a individuare una data operazione I. Quando poi s'abbiano ad esaminare casi concreti d'operazioni I applicate a speciali funzioni, casi nei quali pur si dovrà porre in evidenza sia la variabile d'integrazione, sia quella da cui dipende la funzione risultato, per rendere più semplici le notazioni si sottintenderà quanto segue. « Allorchè si parli d'un operazione I, sia determinata sia variabile applicata ad una funzione s'intenderà che sia y_1 la variabile d'integrazione, che naturalmente è anche quella da cui dipende la funzione oggetto, y_2 la variabile da cui dipende la funzione risultato; quando poi si parli di due operazioni I consecutive applicate ad una certa funzione, mentre nella prima d'esse, in base a quanto fu detto testè, si deve intendere che sia y_1 la variabile d'integrazione, y_2 l'altra, nella seconda s'intenderà che sia y_2 la variabile d'integrazione, y_3 l'altra. E così quando s'abbia ad esaminare la funzione risultato di h (h numero intero qualunque > 2) operazioni I applicate ad una certa funzione, s'intenderà che la variabile da cui essa dipende sia y_{h+1} e che le variabili d'integrazione siano, per la prima di dette operazioni y_1, per la seconda y_2,... per la h^{sima} y_h.

c) Per semplicità, per rappresentare operazioni I determinate, useremo seguendo in ciò l'esempio del prof. Pincherle, le lettere maiuscole $A, B\dots$ anche apponendo a queste degli indici quando l'uso lo richieda; per rappresentare un'operazione I variabile nella quale cioè, a differenza di quelle a cui ora si accenna, la linea d'integrazione e la funzione caratteristica siano suscettibili d'assumere infinite determinazioni distinte, s'adotterà il simbolo X, seguendo in ciò la consuetudine invalsa nel calcolo ordinario o quando poi si abbia da ragionare su più operazioni I variabili, queste si potranno designare coi simboli $X_1 X_2\dots$ Il risultato d'un'operazione I determinata o variabile da indicarsi quindi nel primo caso con A, nel secondo con X, applicata a una certa funzione di y_1, $f(y_1)$ si rappresenterà, seguendo anche in ciò l'esempio del prof. Pincherle rispettivamente con $Af(y_1)$, $Xf(y_1)$.

d) Si prenderanno in considerazione, come funzioni oggetto d'operazioni I soltanto funzioni uniformi, talchè quando si parlerà di operazioni I applicate successivamente a una tale funzione si sottintenderà che questa funzione sia uniforme; così si parlerà di più operazioni I applicate successivamente a una data funzione solo quando siano uniformi rispetto alla variabile da cui dipende la funzione risultato le funzioni caratteristiche delle singole operazioni in esame, all'infuori della funzione caratteristica dell'ultima la quale potrà anche non soddisfare a questa condizione. Del pari, parlando sia di funzioni oggetto d'operazioni I, sia di funzioni risultato di queste operazioni applicate a certe funzioni, ci si riferirà naturalmente solo ai valori degli enti, dei quali ci si occupa situati nel campo, in cui detti enti sono atti a rappresentare funzioni analitiche.

e) Quando, fissata una certa funzione di y_1, $f(y_1)$, si abbia un'operazione I determinata che si designerà con A tale che $A\,f(y_1) = p\,f(y_2)$, essendo p un fattore che in base alla convenzione b si dovrà riguardare come funzione di y_2 si dirà « che A è equivalente a p relativamente a $f(y_1)$, e si rappresenterà ciò, scrivendo $A = p$ relativamente a $f(y_1)$ » (prescindendo naturalmente dalla notazione con cui si rappresentano le variabili). Con ciò si viene dunque a riguardare l'applicazione d'un'operazione I ad una certa funzione come una moltiplicazione simbolica.

Così, ponendo la convenzione di riguardare due operazioni I che applicate ad una stessa funzione assunta come funzione oggetto diano lo stesso risultato, come equivalenti relativamente a detta funzione, riferendoci al caso dianzi esaminato diremo che « A relativamente a $f(y_1)$ è equivalente all'altra operazione I avente per funzione caratteristica $\frac{p}{2\pi i(y_1 - y_2)}$, per linea d'integrazione una linea chiusa situata nel piano y_1 contenente il solo punto $y_1 = y_2$ e nessun punto singolare della funzione $f(y_1)$. »

Quando, prese in esame due operazioni I determinate A, B s'abbia $A\,f(y_1) - B\,f(y_1) = q\,f(y_2)$, q essendo in generale una funzione di y_2, si dirà « che A, B differiscono per q relativamente a $f(y_1)$ e si scriverà: $A - B = q$ relativamente *a* $f(y_2)$. »

È poi chiaro che un'operazione I da applicarsi ad una certa funzione $f(y_1)$, la quale abbia per funzione caratteristica una fuzione della forma $\frac{p}{2\pi i(y_1 - y_2)}$, p designando una funzione della sola y_2 o una costante, per linea d'integrazione una certa linea λ_1, che sia chiusa, contenga il punto $y_1 = y_2$ e nessun punto singolare della funzione $f(y_1)$ trasformerà $f(y_1)$ qualunque essa sia in $p\,f(y_2)$, vale a dire la moltiplica per p (a prescindere dalla variabile di cui essa è funzione). Si dirà allora che l'operazione I considerata « è equivalente a p, in via assoluta, cioè indipendentemente dalla speciale funzione oggetto a cui possa essere applicata ».

Un'operazione I della natura di quella testè definita si rappresenterà col simbolo I_p; così quando sia $p = 1$, si designerà col simbolo I.

2.°

Un'estensione delle quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica.

Per definire le operazioni analoghe alle quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica da eseguirsi sulle operazioni I, non porta alcuna differenza il considerare operazioni I determinate o operazioni I variabili, precisamente come nel calcolo ordinario le quattro operazioni fondamentali si eseguiscono indifferentemente su quantità determinate, o su quantità variabili. Qui si definiranno adunque le quattro operazioni in parola, trattando d'operazioni I determinate.

1. *Addizione e sottrazione.* Date n (n sia un numero intero qualunque) di operazioni I che designeremo rispettivamente con A, B,... P, si dirà « addizione di queste n operazioni l'operazione mediante la quale dalle singole A, B,... P si passa all'altra $A+B\ldots+P$ ». Quest'ultima consiste, quando si deva eseguire su una data funzione, nell'applicare a questa successivamente le singole operazioni: A, B... indi nell'addizionare i risultati. L'operazione: $A+B\ldots+P$ si dirà « somma delle $A, B, \ldots P$ », le quali si diranno addendi. Nel caso particolare, in cui ciascuno degli addendi sia una stessa operazione A, detto ancora n il numero di questi, la loro somma si rappresenterà con nA, indicandosi con questo simbolo l'operazione che consiste nell'applicare a una data funzione oggetto l'operazione A, indi nel moltiplicare per n. (Analoga notazione s'userà poi anche, se il fattore n fosse, anzichè una costante, una funzione.)

Per l'addizione quale fu testè definita si ha il seguente:

Teorema: Per l'addizione delle operazioni I valgono tutte e tre le leggi: associativa, commutativa e distributiva che valgono per l'addizione definita dall'aritmetica.

Infatti, dette al solito A, B, C tre operazioni I e $f(y_1)$ una certa funzione di y_1, sarà, in virtù di princípi elementari di calcolo integrale:

$$(A+B)f(y_1)=Af(y_1)+Bf(y_1),$$

e per conseguenza:

$$(A+B+C)f(y_1)=Af(y_1)+(B+C)f(y_1)=(A+Bf(y_1)+Cf(y_1)\ c.\ d.\ d.$$

La sottrazione non differisce sostanzialmente dall'addizione: infatti è chiaro che la sottrazione d'un'operazione I la cui funzione caratteristica sia

$a(y_h\, y_{h+1}]$ (h indice variabile secondo i casi, in base alla convenzione b — 1.°) da un'altra operazione I qualunque si può riguardare come l'addizione di quest'ultima con un'altra che non differisca dalla precedente se non per avere per funzione caratteristica — $a(y_h\, y_{h+1})$ anzichè $a(y_h\, y_{h+1})$.

2. *Moltiplicazione. — Definizione di potenza d'un'operazione I.* Siano due operazioni I designate al solito con A, B. Si dirà « moltiplicazione dell'operazione A per l'operazione B l'operazione mediante la quale dalla A si passa all'operazione I nella quale la linea d'integrazione è la stessa di A, la funzione caratteristica è la funzione ottenuta applicando la B alla funzione caratteristica di A » (riguardando questa nell'applicarle B come funzione della sola variabile da cui dipende la funzione risultato). L'operazione I così ottenuta si dirà « prodotto di A per B » e si designerà col simbolo $B\,A$. Così detta y_h (h indice variabile secondo i casi, in base alla conv. b del cap. I.°) la variabile d'integrazione che figura nella A, y_{h+1} l'altra variabile, si dovrà designare con y_{h+1} la variabile d'integrazione che figura in B, con y_{h+2} l'altra variabile che in essa figura. E la funzione che s'ottiene applicando la B alla funzione caratteristica di A sarà funzione delle variabili y_h, y_{h+2}. Dette rispettivamente $a(y_h\, y_{h+1})$, $b(y_{h+1}\, y_{h+2})$ le funzioni caratteristiche di A, B, dette rispettivamente l, l_1 le linee d'integrazione (la prima delle quali sarà tracciata nel piano y_h, la seconda nel piano y_{h+1} e detta al solito $f(y_1)$ una certa funzione di y_1 si avrà dunque:

$$B\,A\,f(y_1) = \int_l \left(\int_{l_1} b\,(y_2\, y_3)\; a\;(y_1\, y_2)\; d\,y_2 \right) f(y_1)\; d\,y_1 \,.$$

Delle due operazioni A, B si dirà la prima moltiplicando, la seconda moltiplicatore: entrambe poi si designeranno col nome di fattori.

Con un'ovvia estensione delle precedenti considerazioni si definiscono la moltiplicazione e il prodotto d'un numero qualunque > 2 d'operazioni I: trattandosi infatti d'eseguire la moltiplicazione di tre di esse: A, B, C; si eseguisce cioè il prodotto di B per C, indi quello di $A\,B$ per $C\,B$.

Un caso particolare importantissimo che si può presentare nella moltiplicazione delle operazioni I è quello, in cui ciascuno dei fattori sia una stessa operazione A (si dovrà naturalmente fare astrazione dalle speciali variabili che figurano in ciascun fattore). Così in ciascuna delle operazioni fattori, la funzione caratteristica avrà la stessa forma e la linea d'integrazione dovrà attraversare la stessa successione di valori nel piano in cui è tracciata. Il prodotto che in tal caso s'ottiene si dirà con un'ovvia estensione d'un concetto dato dall'aritmetica « potenza dell'operazione A d'ordine m » ove m designi il numero dei fattori, nella moltiplicazione che si eseguì. La moltiplicazione stessa si dirà in tal caso « elevamento a potenza dell'operazione A ». La potenza m^{sima} di A si rappresenterà con A^m.

Per le potenze d'operazioni I sussistono le relazioni seguenti: « detta A un'operazione I qualunque, m, p due numeri interi positivi è:

$$A^m A^n = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = A^{mn}.$$

3. *Divisione*. Date due operazioni I: A e B, si dirà « divisione di A per B » l'operazione che consiste nella ricerca d'una terza operazione I che designeremo con C, tale che $A = B\,C$ ». A si dirà dividendo, B divisore, C quoziente. Si rappresenterà il quoziente C colla notazione $\frac{A}{B}$ e si scriverà anche, per semplicità: $A : B = C$.

La possibilità d'eseguire l'operazione testè definita è fondata sulla risoluzione del problema detto « dell'inversione degli integrali definiti » cioè del problema che consiste in questo: « Data la funzione caratteristica e la linea d'integrazione d'una certa operazione I e data anche la funzione che s'ottiene applicando quest'operazione ad una funzione incognita determinare quest'ultima funzione. »

Tale problema, studiato in casi speciali per le funzioni di variabili reali dall'Abel, dai prof.i Beltrami, Dini e dal Sonine, per le funzioni di variabili complesse dai prof.i Pincherle e Levi Civita fu risolto per una classe estesa di casi dal prof. Volterra, il quale svolse il metodo con cui si risolve per funzioni di variabili reali, osservando poi che questo metodo s'estende anche al caso di funzioni di variabili complesse (*). Infatti, presa di nuovo in esame la (2), sarà (v. 2) per linea d'integrazione relativa al quoziente C da assu-

(*) I lavori del prof. Volterra, nei quali è data la risoluzione generale del problema in parola, sono: tre Note sotto il titolo: *Sull'inversione degli integrali definiti* (vol. XXXI degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino) ed una quarta Nota dello stesso titolo pubblicata nei *Rendiconti* dell'Acc. dei Lincei (serie 5.ª, vol. V, 1.° semestre, fasc. 6.°). Nella prima delle citate Note trovansi citazioni intorno ai lavori sull'argomento, nel caso di variabili reali, degli accennati autori. Nel campo complesso ricorderemo le Memorie del prof. Pincherle: *Sulla risoluzione dell'equazione funzionale* $\sum_{\nu=1}^{\nu=m} h_\nu\, \psi(x+\alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti costanti*. Memorie dell'Acc. di Bologna, vol. IX della serie 4.ª e *Sulla risoluzione* mersi la stessa linea che compete ad A e la funzione caratteristica della stessa C, che designeremo con $c(y_1 y_2)$, dipendendo essa in base a precedenti convenzioni delle variabili $y_1 y_2$, sarà definita dalla relazione:

$$a(y_1 y_3) = B\, c(y_1 y_2),$$

designando $a(y_1 y_3)$ la funzione caratteristica di A.

Ora dai citati lavori del prof. VOLTERRA risulta questo. Si ponga cioè la condizione che la funzione caratteristica $b(y_2 y_3)$ d'una certa operazione I: B sia funzione olomorfa per tutti i valori di y_2, y_3 inferiori in valore assoluto ad una certa quantità A. Se inoltre designato con α l'estremo inferiore della linea d'integrazione relativa a B, linea che designeremo con l_2 e che si dovrà supporre aperta, e coll'estremo superiore variabile $b(y_2 y_3)$ non s'annulli per nessun valore di y_3 tale che $|y_3 - \alpha| < A$ e le linee $l_2\, l_\xi$ siano scelte in modo che lungo esse (gli estremi compresi) le variabili d'integrazione differiscano da α (α sia l'estremo inferiore anche della linea l_ξ) per meno di A, per ogni valore speciale di y_1, situato nel campo in cui $a(y_1 y_3)$ è olomorfa, in modo che questo variabile possa riguardarsi come una costante, sarà l'equazione:

$$a(y_1 y_3) - a(y_1, \alpha) = \int_{l_2} b(y_2 y_3)\, c(y_1 y_2)\, d y_1, \qquad (1)$$

soddisfatta dalla funzione:

$$c(y_1 y_2) = \frac{\dfrac{\partial a(y_1 y_3)}{\partial y_3}}{b(y_2 y_3)} - \frac{1}{b(y_2 y_3)} \int_{l_2} \frac{\partial a(y_1 y_2)}{\partial y_2} \sum_0^s S_i(y_2 y_3)\, d y_2, \qquad (2)$$

ove:

$$S_i(y_2 y_3) = \int_{l_\xi} S_0(\xi\, y_3)\, S_{i-1}(y_2\, \xi)\, d\xi, \qquad S_0(y_2 y_3) = \frac{\dfrac{\partial b(y_2 y_3)}{\partial y_3}}{b(y_2 y_2)},$$

designando ξ una variabile ausiliaria, e l_ξ una linea nel suo piano soggetto all'accennata condizione. E la formola (2) ne definirà una funzione olomorfa

---

dell'equazione funzionale $\sum_{\nu=1}^{\nu=m} h_\nu\, \psi(x + \alpha_\nu) = f(x)$ *a coefficienti razionali.* Memorie dell'Accademia di Bologna, vol. IX della serie 4.ª e quella del prof. LEVI CIVITA: *Sui gruppi d'operazioni funzionali e sull'inversione degli integrali definiti* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie 2.ª, vol. XXVIII).

per tutti i valori di y_1 per i quali è olomorfa $a(y_1 y_3)$ e per quelli di y_3, per cui è $|y_3 - \alpha| < A$, la quale soddisfa alla (2). La formola (2) testè data non è che un'estensione della formola (3) della prima delle citate Note del prof. VOLTERRA presentata all'Acc. di Torino e che la funzione data dalla (2) soddisfi alla (1) si dimostra nello stesso modo con cui fu dimostrato dallo stesso prof. VOLTERRA per la formola da lui stabilita.

Così, quando la funzione $b(y_2 y_3)$ che compare nella (1) abbia la forma:

$$b(y_2 y_3) = \frac{\mathfrak{b}(y_2 y_3)}{(y_3 - y_2)^\lambda}.$$

con $\lambda < 1$. $\mathfrak{b}(y_2 y_3)$ designando una funzione olomorfa nell'accennato campo di valori: quando cioè $b(y_2 y_3)$ divenga infinita d'ordine λ per $y_3 = y_2$: ove $a(y_1 y_3) \cdot \frac{\partial a(y_1 y_3)}{\partial y_3}$ siano finite e continue per y_3 compreso, in valore assoluto, fra α e $\alpha + A$ v'è una ed una sola funzione la quale soddisfi all'equazione funzionale (1) ed è data da:

$$c(y_1 . z) = \frac{\mathfrak{b}(z . z)}{L(z . z)} \int_{l_2} \frac{\partial a_1(y_1 y_2)}{\partial y_2} \left\{ \frac{1}{(z - y_2)^{\lambda - 1}} + \int_{l_3} \sum_0^s {}_i \frac{S_i(y_3 z)}{(y_3 - y_2)^\lambda} d\, y_3 \right\} d\, y_2 ,$$

ove $L(z . z)$ è data dalla relazione:

$$L(y_2, z) = \int_{l_3} \frac{\mathfrak{b}(y_2 y_3)}{(z - y_3)^{1-\lambda}\, (y_3 - y_2)^\lambda} d\, y_3 ,$$

z, essendo simbolo d'una variabile ausiliaria e le linee d'integrazione l_2, l_3 essendo soggette alle condizioni stesse che si diedero dianzi per l_2, l_ξ relativamente alle rispettive variabili d'integrazione a cui si riferiscono e la funzione cercata è definita per i valori di z, i cui valori assoluti cadono tra α e A.

Il prof. VOLTERRA nelle citate note, diede poi anche il metodo di risolvere il problema dell'inversione degli integrali definiti, nel caso in cui la funzione caratteristica s'annulli per un certo numero di valori della variabile da cui dipende la funzione risultato posti nel campo in cui è definita detta funzione caratteristica.

Nota. Nella moltiplicazione delle operazioni I non vale chiaramente alcuna delle tre leggi commutativa, distributiva, associativa. Così per moltiplicazione d'un'operazione I per altre s'intenderà l'operazione con cui s'ottiene il prodotto di queste, come fu definito dianzi, da non confondersi coll'esecuzione successiva delle operazioni-fattori.

3.°

Le funzioni d'operazioni *I*.

1. *Definizioni fondamentali.* Abbiasi ora una certa operazione funzionale rappresentata da un'espressione contenente una data operazione I variabile X e sue potenze (*); si potrà riguardare detta espressione come una funzione di quest'operazione X nel senso che ad ogni speciale determinazione di quest'ultima, cioè della sua funzione caratteristica e della linea d'integrazione che le compete, corrisponde una determinazione o un certo numero di determinazione dell'espressione in parola.

Si potranno poi considerare anche espressioni contenenti nel modo anzidetto diverse operazioni I variabili distinte in numero finito che si designeranno (1.° c.) con $X_1 . X_2 \ldots$ suscettibili cioè d'assumere determinazioni distinte e ciò indipendentemente l'una dall'altra e contenenti anche potenze di queste diverse operazioni I in modo che nei termini di quest'espressione compaiono anche, ad esempio, prodotti e quozienti (simbolici) di una di queste operazioni I per un'altra e anche per il prodotto di più altre.

Una tale espressione si potrà riguardare come una funzione delle diverse operazioni I variabili che in essa compaiono nel senso che ad ogni insieme d'una speciale determinaztone di ciascuna di dette operazioni I corrisponde una determinazione o un certo numero di determinazioni dell'espressione considerata. Per rappresentare funzioni d'operazioni I s'useranno, come si fa uell'analisi ordinaria i simboli $F(X)$, $F(X_1, X_2 \ldots)_1$ $\Phi(X)$ ecc. Ad evitare poi equivoci stabiliremo sin d'ora che s'userà la semplice designazione di « funzione » quando si voglia indicare una funzione nel senso ordinario della parola, laddove s'userà la designazione speciale « funzione d'operazioni (una o più) I » quando si voglia indicare una funzione nel senso che è da attribuirsi a questo vocabolo nel calcolo che qui s'è studiato.

S'estenderanno alle funzioni d'operazioni I le definizioni date nel capo 1.° per le operazioni I. E di più si farà la convenzione seguente: « Si stabilirà

(*) Con operazione contenente una data operazione I designata con X e sue potenze si deve intendere un'operazione la cui applicazione a una certa funzione consiste nell'applicarle l'operazione X e sue diverse potenze, combinate fra loro mediante le quattro operazioni analoghe a quelle dell'aritmetica.

cioè che nelle funzioni d'una o più operazioni I variabili, quando l'operazione rappresentata da tali funzioni debba applicarsi a una certa funzione oggetto, sia per ciascun termine la stessa la variabile da cui dipende la funzione-risultato (vale a dire in ciascun termine la variabile, da cui dipende la funzione-risultato sarà la stessa che figura nel termine, in cui compare la potenza più alta dell'operazione I variabile, quando si tratti di funzioni di una sola operazione variabile e il prodotto (simbolico) di potenze delle diverse operazioni I variabili, la somma dei cui indici ha il valore più alto quando si tratti di funzioni di più operazioni variabili).

Si considereranno poi anche somme (e differenze), prodotti e quozienti di funzioni d'operazioni I. Il concetto di somma (e differenza) si ha senz'altro estendendo le considerazioni svolte per definire le quattro operazioni analoghe alle quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica, per le operazioni I; così, per prodotto d'una funzione d'operazioni I, designata ad es. con $F(X)$ per un'altra $\Phi(X)$ s'intenderà la funzione dell'operazione X che s'ottiene applicando a $F(X)$ l'operazione rappresentata da $\Phi(X)$ eseguendo le moltiplicazioni dei singoli termini di $F(X)$, $\Phi(X)$ secondo la regola data nel cap. 2.°, per la moltiplicazione delle operazioni I. E senza difficoltà alcuna si giunge al concetto di prodotto di più funzioni d'operazioni I.

Così per divisione della funzione dell'operazione variabile X, $F(X)$ per l'altra funzione $\Phi(X)$ della stessa operazione variabile s'intenderà « l'operazione avente per scopo la determinazione d'una terza funzione $\Psi(X)$ dell'operazione X tale che:

$$F(X) = \Phi(X)\,\Psi(X).$$

Si dirà $F(X)$ dividendo, $\Phi(X)$ divisore, $\Psi(X)$ quoziente: in generale però non si potrà determinare esattamente il quoziente in una divisione siffatta, ma si avrà:

$$F(X) = \Phi(X)\,\Psi(X) + R(X),$$

designando $R(X)$ una nuova funzione dell'operazione variabile X che si dirà « resto della divisione in parola ».

2. *Definizione di limite d'operazioni I e di funzione continua d'operazioni I.* Preso a considerare un insieme d'operazioni I distinte, in generale in numero infinito si dirà che « relativamente a una certa funzione, assunta come funzione oggetto esse tendono ad un certo limite, quando la differenza fra due qualunque delle operazioni I del sistema considerato, relativamente a detta funzione, sia $=$ ad una funzione (naturalmente dipendente dalla va-

riabile, da cui dipende, per le operazioni considerate la funzione risultato) che per tutti i valori di detta variabile compresi nel campo in cui è funzione analitica e regolare, sia tale che il modulo della differenza tra essa e questo limite si mantenga inferiore ad una quantità assegnata piccola a piacere ». In base a ciò si possono facilmente agli insiemi d'operazioni I, considerate relativamente a una certa funzione oggetto, applicare le considerazioni svolte dal calcolo ordinario, per gli insiemi di quantità complesse (si giungerà così alla considerazione d'insieme limitato e di determinazione limite d'un'insieme d'operazione I relativamente a una certa funzione oggetto). Nello stesso modo si potrà, fissata una certa funzione $F(X)$ d'un'operazione I variabile X, considerare l'insieme delle determinazioni che le competono quando a X si diano successivamente le determinazioni comprese in un dato insieme Γ. Così, fissato quest'insieme Γ, $F(X)$ si dirà « limitata relativamente a una data funzione $f(y_1)$, nell'insieme Γ », quando l'insieme delle determinazioni di $F(X) f(y_1)$ corrispondenti a quelle di X comprese in Γ è un insieme limitato. Così si dirà che « $F(X)$ è definita entro un dato campo (si userà la parola campo nello stesso significato che si dà a insieme) di determinazioni di X, relativamente a una determinata funzione $f(y_1)$ » quando per qualunque determinazione A compresa in questo campo, $F(A) f(y_1)$ sia atta a rappresentare una funzione analitica. Le precedenti considerazioni si estendono senza difficoltà a funzioni di più operazioni I variabili.

Inoltre si un'operazione I che una funzione di questa si potrà dire uguale ad un infinitesimo relativamente a una certa funzione oggetto $f(y_1)$, se applicando rispettivamente l'una o l'altra $a f(y_1)$ si ha per risultato $\varepsilon f(y_h)$ (h indice variabile da determinarsi in base alle convenzioni del cap. 1.°) ε essendo una quantità infinitesima. « Una funzione $F(X)$ dell'operazione I variabile X si dirà continua relativamente a una funzione oggetto assegnata, $f(y_1)$ per una certa determinazione di X » quando, detta A questa determinazione per qualunque valore che si assegni alla quantità ε, si può determinare un'altra quantità δ tale che:

$$F(A + \mathrm{I}_\eta) [f(y_1)] - F(A) [f(y_2)] \mid < \varepsilon \ (*), \tag{3}$$

per ogni valore della variabile da cui dipende la funzione $F(X) [f(y_2)]$ pel quale la differenza che compare nel primo membro della (3) è atta a rap-

(*) Quando da un'operazione I qualunque A si passa all'altra $A + \mathbf{I}_\eta$ si dirà che ad A si diede l'incremento $\mathbf{I}_\eta$.

presentare una funzione analitica regolare, ogniqualvolta: $|\eta| < |\delta|$ se η è costante e ogniqualvolta sia, in modulo, $< |\delta|$ il limite superiore di η, per i valori della variabile da cui dipende che vengono presi in considerazione, se η stessa è una funzione. E se la disuguaglianza (3) sussiste per tutte le determinazioni di X comprese in un certo insieme assegnato Γ, $F(X)$ si dirà « continua relativamente a $f(y_1)$ entro Γ ». Si dirà poi « continua uniformemente sempre relativamente a $f(y_1)$ » se si può trovare una quantità positiva δ, tale che quando sia $|\eta| < \delta$ o sia $< \delta$, in modulo, il limite superiore di η, nel campo costituito dai valori della variabile, da cui dipende, che vengono presi in considerazione, a seconda che rispettivamente si presentano l'uno o l'altro dei casi dianzi distinti, la (3) sussista qualunque sia ε per ogni determinazione di X compresa in Γ.

Così, presa in esame una funzione di più operazioni I variabili, $X_1 \ldots X_n$, funzione che designeremo con $F(X_1, X_2, \ldots X_n)$ questa si dirà « continua relativamente a una funzione oggetto assegnata $f(y_1)$ rispetto a una qualunque delle operazioni variabili che in essa figurano, ad es. rispetto a X_1, per una certa determinazione di questa o in tutto un campo » quando, date a $X_2 \ldots X_n$ altrettante determinazioni fisse, in guisa da riguardare $F(X_1, X_2, \ldots X_n)$ come funzione della sola X_1, essa rende soddisfatta la condizione onde si verifichi, secondo quanto fu più sopra esposto, rispettivamente l'una o l'altra delle circostanze dianzi accennate. Si dirà poi $F(X_1, X_2, \ldots X_n)$ « continua relativamente a $f(y_1)$ rispetto a tutte le operazioni variabili che in essa figurano per una certa determinazione $A, B, \ldots P$ del loro insieme (cioè per la determinazione A di X_1, B di $X_2, \ldots C$ di X_n) » se per qualunque valore che s'assegni alla quantità ε se ne può determinare un'altra δ tale che:

$$|F(A + \mathbf{I}_{\eta_1} \ldots P + \mathbf{I}_{\eta_n}) f(y_1) - F(A \ldots P) f(y_1)| < \varepsilon, \tag{4}$$

per ogni valore della variabile da cui dipende la funzione $F(X_1 \ldots X_n) f(y_1)$ situato nel campo in cui la differenza che compare nel primo membro della (4) è atta a rappresentarci una funzione analitica regolare, ogni qualvolta siano $< |\delta|$ tutte le $|\eta_1| \ldots |\eta_n|$ se $\eta_1 \ldots \eta_n$ sono costanti o i limiti superiori rispettivi di queste quantità nell'insieme dei valori della variabile da cui dipendono, che vengono presi in considerazione se esse sono funzioni. Nello stesso modo si definiscono facilmente le condizioni necessarie sia per la continuità in generale sia per la continuità uniforme di $F(X_1 \ldots X_n)$ relativamente a una funzione oggetto assegnata, in un intero campo di determinazioni dell'insieme $X_1, X_2, \ldots X_n$.

4.°

Derivazione delle funzioni d'operazioni I rispetto alle operazioni I variabili che esse contengono.

1. Consideriamo un'operazione I variabile che designeremo al solito con X e una sua funzione $F(X)$. Si consideri quindi un'operazione I_k ove k designi al solito una costante: con $X + \mathrm{I}_k$ si dovrà intendere una determinazione generica dell'insieme delle determinazioni di X che si possono prendere a considerare, a ciascuna delle quali s'aggiunga l'operazione I_k, che designeremo anche col simbolo ΔX per porre in evidenza che si tratta d'un incremento dato a X. Detta quindi X una determinazione generica di X si consideri la differenza (simbolica): $F(\mathsf{X} + \mathrm{I}_k) - F(\mathsf{X})$ e ad essa si applichi l'inversa dell'operazione I_k, cioè l'operazione che trasforma il risultato di I_k, applicata ad una funzione oggetto qualunque nella funzione stessa. L'operazione che consiste nell'applicare a: $F(\mathsf{X} + \mathrm{I}_k) - F(\mathsf{X})$ l'inversa I_k sarà, in base alle notazioni adottate da rappresentarsi col simbolo:

$$\frac{F(\mathsf{X} + I_k) - F(\mathsf{X})}{\mathrm{I}_k}. \tag{5}$$

Si esamini quindi il limite a cui tende l'espressione (4) per I_k tendente a ridursi a 0 (in via assoluta), il che avviene quando k tende a 0: se esiste per la (5) un'espressione-limite determinata questa si designerà col nome di:

« Derivata prima di $F(X)$ rispetto a X (o semplicemente derivata prima di $F(X)$ calcolata per la determinazione X di X ».

È chiaro infatti che il rapporto simbolico (5) fa riscontro a ciò che nel calcolo ordinario si definisce colla denominazione di rapporto incrementale d'una data funzione relativa a un certo incremento dato alla variabile e che parimenti il limite del rapporto simbolico in parola, fa così appunto riscontro alla derivata prima d'una funzione quale è definita nel calcolo ordinario.

Per rappresentare la derivata prima di $F(X)$ calcalata per una certa determinazione X di X si userà, analogamente a ciò che si fa nel calcolo ordinario uno o l'altro dei due simboli: $\frac{d\,F(\mathsf{X})}{d\,X}$, $F'(\mathsf{X})$. Nello stesso modo la derivata prima di $F'(X)$ calcolata per una determinazione qualsiasi dell'operazione variabile si dirà « derivata seconda di $F(X)$ per $X =$ a questa speciale determinazione, rispetto a X» e si rappresenterà con uno o l'altro dei due simboli: $\frac{d^2 F(\mathrm{X})}{d X^2}$, $F''(\mathrm{X})$, ove si designi ancora con X la speciale determinazione di X per la quale si calcola questa derivata seconda. E così di seguito, estendendo le precedenti definizioni e notazioni, la derivata prima di $\frac{d^{n-1} F(X)}{d X^{n-1}}$ (n essendo un indice qualunque) per una speciale determinazione X dell'operazione variabile si dirà appunto derivata d'ordine n di $F(X)$ calcolata per l'accennata determinazione di X e si rappresenterà con uno dei due simboli: $\frac{d^n F(\mathrm{X})}{d X^n}$, $F^{(n)}(\mathrm{X})$.

La derivazione di funzioni d'un'operazione I, quale fu testè definita presenta perfetta analogia colla derivazione che è definita e studiata nel calcolo ordinario, oltre che nella definizione, anche nelle proprietà fondamentali. Infatti si hanno su questo proposito le seguenti proprietà:

1.° Quando s'intenda per « fattore costante rispetto ad una certa operazione I variabile, sia una quantità nel senso ordinario della parola, sia un'operazione funzionale che non contenga l'accennata operazione variabile, essendo C una costante, si ha:

$$\frac{d\{C F(\mathrm{X})\}}{d \mathrm{X}} = C \frac{d F(\mathrm{X})}{d \mathrm{X}}, \tag{6}$$

ove dunque $C F(\mathrm{X})$ può, a seconda dei due casi accennati rappresentare rispettivamente l'operazione che consiste nell'applicare ad una certa funzione-oggetto l'operazione $F(X)$ e nel moltiplicare il risultato per C, sia l'operazione che consiste nell'applicare alla funzione oggetto il prodotto (simbolico) dell'operazione rappresentata da $F(X)$ per quella rappresentata da C. Che sussista la (6) si deduce poi facilmente dal fatto che C non subisce alcuna alterazione allorchè a X si dia l'incremento ΔX.

2.° Si voglia calcolare la derivata prima di X^m per una data determinazione qualsiasi X di X. Sia ancora $\mathrm{I}_k = \Delta X$ l'incremento dato a X per far ciò. — Si dovrà allora esaminare l'operazione $(\mathrm{X} + \Delta X)^m$ (m designi naturalmente un numero intero) e lo sviluppo di quest'operazione sarà data da:

$$\begin{aligned}(\mathrm{X} + \Delta X)^m &= (\mathrm{X} + \Delta X)(\mathrm{X} + \Delta X)\ldots(\mathrm{X} + \Delta X) \text{ (prodotto simbolico)} = \\ &= \mathrm{X}^m + \Delta X \, \mathrm{X}^{m-1} + \mathrm{X} \, \Delta X \, \mathrm{X}^{m-2} \ldots + \mathrm{X}^{m-2} \, \Delta X \, \mathrm{X} + \\ &+ \mathrm{X} \, \Delta X^2 \, \mathrm{X}^{m-3} \ldots + \mathrm{X}^{m-2} \, \Delta X^2 \ldots + \Delta X^m,\end{aligned}$$

ove per le variabili che figurano nei singoli termini della somma così ottenuta s'useranno i simboli indicati dalle convenzioni poste nel cap. 1.° Se non che ΔX, per essere equivalente alla moltiplicazione per un fattore costante, all'infuori del mutamento nel simbolo della variabile, sarà permutabile a qualunque operazione I: si avrà quindi, sempre basandosi su convenzioni già poste, poichè $\mathsf{X}\,\Delta X\,\mathsf{X}^{m-2} = \Delta X\,\mathsf{X}^{m-1}$:

$$(\mathsf{X} + \Delta X)^m = \mathsf{X}^m + m\,\Delta X\,\mathsf{X}^{m-1} + \binom{m}{2}\Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-2}\ldots + m\,\Delta X^{m-1}\,\mathsf{X} + \Delta X^m.$$

E sottraendo da quest'espressione X^m essa si riduce semplicemente a:

$$m\,\Delta X\,\mathsf{X}^{m-1} + \binom{m}{2}\Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-2}\ldots + m\,\Delta X^{m-1}\,\mathsf{X} + \Delta X^m. \tag{7}$$

Applicando ai singoli termini di quest'ultima somma l'inversa dell'operazione ΔX, il che equivale a dividere ciascun termine (applicato a una certa funzione) per k e a sostituire in ognuna delle funzioni risultato y_m a y_{m+1} la somma (7) riducesi a:

$$m\,\mathsf{X}^{m-1} + \binom{m}{2}\Delta X\,\mathsf{X}^{m-2}\ldots + m\,\Delta X^{m-2}\,\mathsf{X} + \Delta X^{m-1},$$

e, passando al limite al tendere di ΔX a zero in via assoluta, è chiaro che tutti i termini all'infuori del primo che rimane inalterato, tendono a ridursi a zero in via assoluta. Perciò il limite dell'accennata somma per ΔX tendente a ridursi a zero limite che per definizione è $\frac{d\,\mathsf{X}^m}{d\,X}$ è dato da $m\,\mathsf{X}^{m-1}$, formola questa perfettamente analoga e quella data dal calcolo ordinario per $\frac{d\,(x^m)}{d\,x}$. Inoltre ripetendo il ragionamento testè fatto si vede che:

$$\frac{d^2\,\mathsf{X}}{d\,X^2} = \frac{d_1\,(m\,\mathsf{X}^{m-1})}{d\,X} = m\,(m-1)\,\mathsf{X}^{m-2},$$

e collo stesso procedimento si ricavano le formole che danno le derivate d'ordine terzo, quarto, ecc., ecc., $m - 1^{simo}$ di X^m per la determinazione X di X, la quale ultima è data da $\underline{|m}\,\mathsf{X}$ e finalmente si trova che la derivata m^{sima} di X^m, sempre per una determinazione generica di X è equivalente a $\underline{|m}$, perchè è facile scorgere, in base alla data definizione di derivata d'una funzione dell'operazione X, che $\frac{d\,\mathsf{X}}{d\,X}$ è equivalente a 1, intentendosi con ciò di esprimere il fatto che l'equivalenza si manifesta qualunque sia la funzione oggetto.

3.° Detta C un'espressione costante rispetto a X nel senso dianzi dato a questa parola, $\frac{dC}{dX}$ è equivalente a O in via assoluta: infatti nel passaggio da qualunque determinazione X di X a $\mathsf{X} + \Delta X$, C non subisce alcuna alterazione, talchè l'incremento subíto da C corrispondentemente a quello subito dall'operazione variabile rappresenta un'operazione equivalente a O qualunque sia la funzione a cui viene applicata.

4.° La derivazione di funzioni d'una data operazione I variabile rispetto a quest'operazione è permutabile all'addizione (e quindi anche alla sottrazione).

Infatti, prese in esame μ funzioni dell'operazione X, $F_1(X) \ldots F_\mu(X)$ e posto brevemente: $\Phi(X) = F_1(X) + F_2(X) + \cdots F_\mu(X)$, si ha, detta al solito X una determinazione generica di X: l'uguaglianza simbolica:

$$\frac{d\Phi(\mathsf{X})}{dX} = \lim_{\Delta X=0} \frac{F_1(\mathsf{X} + \Delta X) + \cdots F_\mu(\mathsf{X} + \Delta X) - \{F_1(\mathsf{X}) + F_2(\mathsf{X}) \ldots + F_\mu(\mathsf{X})\}}{\Delta X} =$$

$$= \lim_{\Delta X=0} \frac{F_1(\mathsf{X} + \Delta X) - F_1(\mathsf{X})}{\Delta X} \cdots + \lim_{\Delta X=0} \frac{F_\mu(\mathsf{X} + \Delta X) - F_\mu(\mathsf{X})}{\Delta X} =$$

$$= \frac{dF_1(\mathsf{X})}{dX} + \cdots \frac{dF_\mu(\mathsf{X})}{dX}. \qquad c.\ d.\ d.$$

5.° Mantenendo al simbolo X il significato dato fin qui, dette $F(X)$, $\Phi(X)$ due funzioni di X si ha:

$$\frac{d[F(\mathsf{X})\,\Phi(\mathsf{X})]}{dX} = \frac{dF(\mathsf{X})}{dX}\,\Phi(\mathsf{X}) + F(\mathsf{X})\,\frac{d\Phi(\mathsf{X})}{dX}. \tag{8}$$

Infatti:

$$\frac{d[F(\mathsf{X})\,\Phi(\mathsf{X})]}{dX} = \lim_{\Delta X=0} \frac{F(\mathsf{X} + \Delta X)\,\Phi(\mathsf{X} + \Delta X) - F(\mathsf{X})\,\Phi(\mathsf{X})}{dX} =$$

$$= \lim_{\Delta X=0} \left\{ \frac{F(\mathsf{X} + \Delta X)\,\Phi(\mathsf{X} + \Delta X) - F(\mathsf{X})\,\Phi(\mathsf{X} + \Delta X)}{\Delta X} + \right.$$

$$\left. + \frac{F(\mathsf{X})\,\Phi(\mathsf{X} + \Delta X) - F(\mathsf{X})\,\Phi(\mathsf{X})}{\Delta X} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta X=0} \left\{ \frac{F(\mathsf{X} + \Delta X) - F(X)}{\Delta X}\,\Phi(\mathsf{X} + \Delta X) \right\} - F(\mathsf{X}) \lim_{\Delta X=0} \frac{\Phi(\mathsf{X} + \Delta X) - \Phi(\mathsf{X})}{\Delta X} =$$

$$= \frac{dF(\mathsf{X})}{dX}\,\Phi(\mathsf{X}) + F(\mathsf{X})\,\frac{d\Phi(\mathsf{X})}{dX}, \qquad c.\ d.\ d.$$

(si noti che ΔX ha sempre la forma vista dianzi, cioè è un'operazione $\mathbf{I}_k$ con k costante).

Mediante la formola testè stabilita si calcola facilmente la derivata del prodotto d'un numero qualisivoglia di funzioni d'un'operazione I variabile; basterà ad es. considerare il prodotto di n funzioni siffatte come il prodotto di due fattori, uno consistente nel prodotto delle prime $n-1$ funzioni, l'altro nell'n^{esima} e procedere per questo nel modo testè indicato, poi calcolare l'espressione della derivata prima del prodotto delle prime $n-1$ funzioni riguardando pure questo prodotto come composto di due fattori l'uno dei quali sia il prodotto delle prime $n-2$ funzioni, l'altro sia l'$n-1^{esima}$ funzione e procedere applicando successivamente il metodo ora indicato sino ad esser giunti a dover calcolare la derivata prima del prodotto delle due prime funzioni che compaiono nel prodotto considerato.

« Un caso particolare notevole è quello in cui s'abbia a calcolare la derivata (*) della potenza m^{esima} d'una funzione $F(X)$ dell'operazione variabile X. Si avrà cioè mantenendo sempre a X il significato fin qui datole:

$$\frac{d\{F(\mathsf{X})\}^m}{d\,X}=\sum_{i=0}^{i=m-1}\{F(\mathsf{X})\}^i\frac{d\,F(\mathsf{X})}{d\,X}\{F(\mathsf{X})\}^{m-i}.$$

Si noti che qui non si può applicare la formola data dal calcolo ordinario per la derivazione d'una potenza d'una data funzione, per il fatto già accennato che le operazioni I non sono in generale permutabili (nella formola ora scritta, come si farà sovente anche in seguito si designò, per simmetria nelle notazioni l'operazione equivalente a quella identica col simbolo $\{F(\mathsf{X})\}^0$, come spesso si designerà anche con X^0, A^0, ecc.). Applicando poi successivamente la formola (8) si ha una regola analoga a quella di Leibniz, per calcolare le derivate successive del prodotto di due funzioni dell'operazione X.

6.° Anche per il calcolo della derivata del quoziente di due funzioni d'un'operazione variabile X si ha la seguente formola diversa però da quella data dal calcolo ordinario per la derivata del quoziente di due funzioni.

Siano pertanto $F(X)$, $\Phi(X)$ due funzioni dell'operazione X, e vogliasi calcolare:

$$\frac{d\,\dfrac{F(\mathsf{X})}{\Phi(\mathsf{X})}}{d\,X}.$$

(*) Si dirà derivata senz'altra specificazione, quando ciò non possa produrre equivoco la derivata prima.

Posto pertanto $\frac{F(X)}{\Phi(X)} = \Psi(X)$, sì da avere: $F(X) = \Phi(X)\Psi(X)$, applicando la regola dianzi data per la derivazione del prodotto di due funzioni d'un'operazione I si avrà:

$$\frac{dF(\mathsf{X})}{dX} = \Phi'(\mathsf{X})\Psi(\mathsf{X}) + \Phi(\mathsf{X})\Psi'(\mathsf{X}),$$

da cui:

$$\Psi'(\mathsf{X}) = \frac{F'(\mathsf{X}) - \Phi'(\mathsf{X})\Psi(\mathsf{X})}{\Phi(\mathsf{X})}.$$

2. Si consideri ancora una funzione dell'operazione variabile X, funzione che designeremo al solito con $F(X)$: applichisi l'operazione da essa rappresentata ad una certa funzione oggetto $f(y_1)$. Diremo « derivata di $F(X)f(y_1)$ rispetto a X calcolata per la determinazione generica X di X » l'epressione $F'(\mathsf{X})f(y_1)$, ove $F'(\mathsf{X})$ si calcola nel modo indicato nel paragrafo precedente, ma introducendo nel procedimento le seguenti modificazioni. (Si noti che nello stesso modo si definiscono le derivate d'ordine qualunque di $F(X)f(y_1)$ rispetto a X.) Stabiliremo pertanto che qui l'incremento ΔX da darsi a X per calcolare $F'(\mathsf{X})f(y_1)$ non è mestieri che sia, in via assoluta, equivalente ad un fattore costante (all'infuori del mutamento di variabile), ma basta che sia equivalente ad un tale fattore rispetto a $f(y_1)$ il che si verifica anche quando detto incremento sia un'operazione I, la cui funzione caratteristica abbia un solo polo e questo per $y_1 = y_2$, in una certa regione in cui $f(y_1)$ sia regolare e per linea d'integrazione una linea chiusa contenente il solo polo suaccennato di detta funzione caratteristica e situata per intero nella regione del piano y_1 in cui $f(y_1)$ sia regolare. E del pari stabiliremo che l'inversa di ΔX che si applica a $F(\mathsf{X} + \Delta X)f(y_1) - F(\mathsf{X})f(y_1)$ per ottenere poi la derivata cercata come pure l'incremento che si dà a X, siano non l'operazione ΔX per sè stessa, ma l'operazione $\mathbf{I}_{\varphi(y_\mu)}$ ove $\varphi(y_\mu) = \frac{\Delta X f(y_{\mu-1})}{f(y_\mu)}$ (μ indice variabile da fissarsi in base alle convenzioni del cap. 1.°).

A questo proposito è da aggiungersi quanto segue:

« Quando, data $F(X)f(y_1)$ s'abbia un insieme o campo di determinazioni di X, insieme che designeremo con E, tale che per tutte e sole le determinazioni di X comprese in E l'espressione in parola definisca una funzione analitica della variabile da cui dipende diremo che $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$ nel campo E. »

Di più affinchè esista effettivamente, cioè sia atta a rappresentarci una funzione analitica l'espressione $F'(\mathsf{X})f(y_1)$ è necessario che l'incremento ΔX dato a X per calcolare quella derivata sia tale che $\mathsf{X}+\Delta X$ appartenga ancora al campo in cui $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$.

Inoltre dall'uguaglianza:

$$\lim_{\frac{\Delta X f(y_{\mu-1})}{f(y_\mu)}} \left| \{F(\mathsf{X}+\Delta X) - F(\mathsf{X})\} f(y_1) \right| = \lim_{\frac{\Delta X f(y_{\mu-1})}{f(y_\mu)}} \left| F'(\mathsf{X}) f(y_1) \right| \tag{9}$$

(μ abbia lo stesso significato di prima) risulta che per l'esistenza di $F'(\mathsf{X})f(y_1)$ è condizione necessaria che per la determinazione X di X, $F(X)$ sia continua relativamente a $f(y_1)$.

3. L'estensione del concetto di derivazione dato per il nostro calcolo permette di dare, sotto certe restrizioni una formola analoga a quella del Taylor. Consideriamo pertanto la potenza m^{sima} di X^m, avendo X il solito significato. Si dia a X un incremento ΔX consistente in un'operazione I_k, in cui sia k una costante. Proponiamoci di calcolare lo sviluppo di $(\mathsf{X}+\Delta X)^m$ per le potenze di X. Ripetendo il ragionamento fatto nel calcolare la derivata di X^m si avrà:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathsf{X}+\Delta X)^m = (\mathsf{X}+\Delta X)(\mathsf{X}+\Delta X)\dots(\mathsf{X}+\Delta X) = \\ &= \mathsf{X}^m + \Delta X\,\mathsf{X}^{m-1} + \mathsf{X}\Delta X\,\mathsf{X}^{m-2}\dots + \mathsf{X}^{m-1}\Delta X + \mathsf{X}\Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-3} + \dots \\ &\dots \mathsf{X}^{m-2}\Delta X^2 + \dots \mathsf{X}^{m-1}\Delta X + \Delta X^m = \mathsf{X}^m + m\,\Delta X\,\mathsf{X}^{m-1} + \\ &+ \binom{m}{2}\Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-2}\dots + \binom{m}{\nu}\Delta X^\nu\,\mathsf{X}^{m-\nu}\dots + m\,\Delta X^{m-1}\,\mathsf{X} + \Delta X^m, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

poichè, come già si disse:

$\Delta X\,\mathsf{X}^{m-1} = \mathsf{X}\,\Delta X\,\mathsf{X}^{m-2}\dots = \mathsf{X}^{m-1}\Delta X,\quad \mathsf{X}\Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-3} = \Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-2}\dots$ ecc. (*)

di più (v. § 1 di questo cap.):

$$m\,\Delta X\,\mathsf{X}^{m-1} = \Delta X \frac{d\,\mathsf{X}^m}{dX}, \qquad \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\Delta X^2\,\mathsf{X}^{m-2} = \frac{1}{1\,.\,2}\Delta X^2 \frac{d^2\,\mathsf{X}^m}{dX^2}\dots$$

$$\dots \frac{m(m-1)\dots(m-\nu+1)}{1\,.\,2\dots\nu}\Delta X^\nu\,\mathsf{X}^{m+\nu} = \frac{1}{\underline{|\nu}}\Delta X^\nu \frac{d^\nu\,\mathsf{X}^m}{d\,X^\nu}\dots$$

(*) Quando si scrivono uguaglianze simboliche fra operazioni I analoghe a quelle testè scritte, s'intende di designare un'equivalenza di dette operazioni I fra di loro, in via assoluta.

e finalmente ΔX^m si potrà designare per simmetria nelle notazioni con:

$$\frac{1}{|\underline{m}} \Delta X^m \frac{d^m X^m}{d X^m},$$

talchè la (10) si trasformerà in quest'altra uguaglianza:

$$(X + \Delta X^m) = X^m + \Delta X \frac{d X^m}{d X} + \frac{\Delta X^2}{|\underline{2}} \frac{d^2 X^m}{d X^2} \cdots + \frac{\Delta X^\nu}{|\underline{\nu}} \frac{d^\nu X^m}{d X^\nu} \cdots + \frac{\Delta X^m}{|\underline{m}} \frac{d^m X^m}{d X^m}. \quad (10')$$

Come si vede questo sviluppo presenta la più perfetta analogia colla formola del Taylor data dal calcolo ordinario.

Così se si ha una forma lineare alle potenze di X: $\sum_{\nu=0}^{\nu=m} k_\nu \varphi_\nu X^{m-\nu}$ essendo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_m$ coefficienti che possono essere sia costanti sia anche funzioni analitiche di y_{m+1} (v. convenzioni del cap. 1.°), designata brevemente $\sum_{\nu=0}^{\nu=m} k_\nu \varphi_\nu X^{m-\nu}$ con $F(X)$ si avrà, per ogni determinazione generica di X, poichè la derivazione rispetto a operazioni I è sempre permutabile all'addizione:

$$F(X + \Delta X) = F(X) + \Delta X F'(X) + \frac{\Delta X^2}{2} F''(X) + \cdots$$
$$\cdots \frac{\Delta X^{m-1}}{\underline{m-1}} F^{(m-1)}(X) + \frac{\Delta X^m}{m} F^{(m)}(X),$$

ove ΔX abbia la solita forma I_k con k costante.

Parimenti, detta ancora $f(y_1)$ una certa funzione oggetto si avrà:

$$F(X + \Delta X) f(y_1) = F(X) f(y_1) + \Delta X F'(X) f(y_1) \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta X^{m-1}}{|\underline{m-1}} F^{(m-1)}(X) f(y_1) + \frac{\Delta X^m}{m} F^{(m)}(X) f(y_1),$$

ben inteso però che le derivate $F'(X) f(y_1) \ldots F^{(m-1)}(X) f(y_1)$ siano calcolate nel modo dianzi indicato per determinare le derivate di $F(X) f(y_1)$ rispetto a X. Se non che l'accennata estensione della formola del Taylor non si può dare in generale per il caso d'una funzione non lineare dell'operazione variabile X, perchè non si può dare almeno in generale, un'estensione della formola nota sotto il nome di formola fondamentale del calcolo differenziale.

Ritornando allo sviluppo che figura nel secondo membro dalla (10') si vede che esso si presenta perfettamente analogo allo sviluppo della potenza d'un binomio ed è chiaro che, presi in esame i coefficienti delle singole potenze di X negli sviluppi rispettivi delle prime m potenze di $(X + \Delta X)^m$

dalla prima alla m^{esima} inclusive e scrivendoli in modo da porre in una stessa linea orizzontale i coefficienti che si riferiscono allo sviluppo d'una stessa potenza dell'espressione in parola con ordine progressivo e da porre in una stessa linea verticale quelli che si riferiscono nei diversi sviluppi al termine che ha il medesimo ordine contando da quello che contiene potenza più alta si vengono questi coefficienti simbolici a disporre nel triangolo:

$$
\begin{array}{l}
1 \, \Delta X \\
1 \, 2 \, \Delta X \Delta X^2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
1 \, m \, \Delta X \binom{m}{2} \Delta X^2 \ldots \binom{m}{\nu} \Delta X^{m-\nu} \ldots \Delta X^m,
\end{array}
$$

analogo al triangolo di TARTAGLIA. Ma non ci soffermeremo più oltre su questa considerazione che non è, per ora, di fondamentale importanza per il calcolo del quale ci occupiamo.

4. Come si disse nel cap. precedente, si possono considerare funzioni di più operazioni I variabili. Sia pertanto $F(X_1 \ldots X_n)$ una di queste funzioni dipendente, come si vede dalle n operazioni I variabili: $X_1 \ldots X_n$. Potremo considerare l'incremento che subisce $F(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n)$, ove $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$ designino rispettivamente una determinazione generica di ciascuna delle $X_1 \ldots X_n$ quando a X_1 si dia un incremento della forma già indicata che designeremo con ΔX_1. Ciò posto, considerato il quoziente (simbolico):

$$\frac{F(\mathrm{X}_1 + \Delta X_1, \mathrm{X}_2, \ldots \mathrm{X}_n) - F(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n)}{\Delta X_1}.$$

« Se questo quoziente, al tendere di ΔX_1 a 0 in via assoluta (cioè al tendere a 0 di k_1, ove si ponga $\Delta X_1 = I_{k_1}$, designando con k_1 una costante), con qualunque legge, tende ad un limite unico e determinato » questo limite si dirà:

« Derivata parziale di primo ordine (o, quando ciò non possa dar luogo a equivoci semplicemente: derivata parziale) di $F(X_1 \ldots X_n)$ rispetto a X_1 calcolata per la determinazione $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n$ dell'insieme delle operazioni variabili. » Si designerà tale derivata con uno dei due simboli:

$$\frac{\partial F(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n)}{\partial X_1}, \qquad F'_{X_1}(\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_n).$$

In modo analogo si definiranno le derivate parziali di primo ordine di $F(X_1 \ldots X_n)$ calcolate per una qualunque determinazione dell'insieme delle operazioni variabili rispetto a ciascuna di queste. E per rappresentare ciascuna di queste derivate s'useranno simboli analoghi a quelli usati per la derivata rispetto a X_1.

Ciò posto, considerata ciascuna delle derivate parziali testè definite come una funzione a sè se ne potranno definire le derivate parziali di 1.° ordine rispetto a ciascune delle operazioni $X_1 \ldots X_n$ per una qualunque determinazione dello stesso insieme $X_1 \ldots X_n$. Così di $F'_{X_i}(X_1 \ldots X_n)$, $(i = 1 \ldots n)$ si potrà calcolare la derivata parziale di prim'ordine rispetto a ciascuna delle $X_i (i = 1 \ldots n)$ e ciascuna di queste derivate, quando esista, si dirà « Derivata parziale del secondo ordine di $F(X_1 \ldots X_n)$ rispetto a X_i e X_j $(i, j = 1 \ldots n)$ calcolata per una qualunque determinazione $\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n$ dell'insieme delle operazioni variabili ». Una tale derivata si designerà con uno dei due simboli: $\dfrac{\partial^2 F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)}{\partial X_i^2}$, $F''_{X_i}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)$, quando gl'indici i, j assumono uno stesso valore, vale a dire quando tutte e due le derivazioni eseguite su $F(X_1 \ldots X_n)$ siano state eseguite rispetto a una stessa operazione variabile, e con uno dei due simboli: $\dfrac{\partial^2 F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)}{\partial X_i \, \partial X_j}$, $F''_{X_i, X_j}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)$, quando $i \gtrless j$, quando cioè le due derivazioni siano state eseguite rispetto a due operazioni diverse. Nel primo caso la derivata parziale del secondo ordine ottenuta si dirà « derivata parziale, ecc., pura », nel secondo « derivata parziale, ecc., mista ».

Se non che queste derivate parziali miste non saranno tutte distinte, poichè sussiste il:

Teorema. Nel calcolare le derivate parziali miste del secondo ordine della funzione $F(X_1 \ldots X_n)$ il risultato non muta, anche invertendo l'ordine delle derivazioni.

Infatti, detti ΔX_i, ΔX_j $(i, j = 1 \ldots n \; i \gtrless j)$ due incrementi della forma considerata che si danno rispettivamente a X_i, X_j per calcolare $F'_{X_i}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)$, $F'_{X_j}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)$ è chiaro che da:

$$\frac{\partial^2 F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n)}{\partial X_i \, \partial X_j} =$$

$$= \lim_{\Delta X_j = 0} \frac{\displaystyle \lim_{\Delta X_j = 0} \frac{F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_i + \Delta X_i \ldots \mathfrak{X}_j + \Delta X_j \ldots \mathfrak{X}_n) - F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_i \ldots X_j + \Delta X_j \ldots \Delta X_n)}{\Delta X_i} - \lim_{\Delta X_i = 0} \frac{F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_i + \Delta X_i \ldots X_n) - F(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_i \ldots \mathfrak{X}_j \ldots \mathfrak{X}_n)}{\Delta X_i}}{\Delta X_j} =$$

$$= \lim_{\Delta X_i = 0} \frac{\lim\limits_{\Delta X_j=0} \dfrac{F(X_1 \ldots X_i + \Delta X_i \ldots X_j + \Delta X_j \ldots X_n) - F(X_1 \ldots X_i + \Delta X_i \ldots X_j \ldots X_n)}{\Delta X_j}}{\Delta X_i} -$$

$$- \frac{\lim\limits_{\Delta X_j=0} \dfrac{F(X_1 \ldots X_i \ldots X_j + \Delta X_j \ldots X_n) - F(X_1 \ldots X_i \ldots X_n)}{\Delta X_j}}{\Delta X_i},$$

relazione che sussiste in virtù della permutabilità ΔX_i, ΔX_j fra di loro e con qualunque operazione I segue:

$$\frac{\partial^2 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_j \partial X_i}. \qquad c.\ d.\ d.$$

Così essendo n il numero delle operazioni i variabili, il numero delle derivate parziali miste del 2.° ordine sarà $\binom{n}{2}$.

Ciò posto, considerando le derivate parziali sì pure che miste del 2.° ordine di $F(X_1 \ldots X_n)$ come funzioni a sè, si possono calcolare di queste le singole derivate parziali rispetto a ciascuna delle operazioni variabili, le quali si diranno « derivate parziali di terzo ordine di $F(X_1 \ldots X_n)$ rispetto a tre o a due (se preso due volte rispetto a una data operazione variabile una rispetto a un'altra) o a una (se presa tre volte rispetto a una stessa operazione variabile) calcolata per una determinazione qualunque dell'insieme $X_1 \ldots X_n$ ». Nei primi due casi ora accennati queste derivate parziali si diranno miste, nel secondo pure. I simboli che si useranno per rappresentare tali derivate saranno sempre gli stessi: così, ad es., la derivata parziale mista del terzo ordine ottenuta derivando due volte rispetto a x_i, una volta rispetto a x_j ($i, j = 1 \ldots n$ $i \gtrless j$) si rappresenterà con uno dei due simboli: $\frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_i^2 \partial X_j}$, $F'''_{X_i^2, X_j}(X_1 \ldots X_n)$, avendo $X_1 \ldots X_n$ sempre il significato ad esse dato precentemente. In base al teorema testè dimostrato sarà:

$$\frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_i^2 \partial X_j} = \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_j \partial X_i^2} = \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_i \partial X_j \partial X_i},$$

e parimenti:

$$\frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k} = \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_j\, d X_i \partial X_k} = \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_k \partial X_j \partial X_i} =$$

$$= \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_k \partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_i \partial X_k \partial X_j} = \frac{\partial^3 F(X_1 \ldots X_n)}{\partial X_j \partial X_k \partial X_i}.$$

Talchè le derivate parziali del terzo ordine di $F(X_1 \dots X_n)$ le quali in apparenza sarebbero in numero di $n(n-1)+n\binom{n}{2}$ si riducono in realtà a $n(n-1)+\binom{n}{3}$ (delle quali cioè $n(n-1)$ provenienti dalle derivate parziali di 2.° ordine pure che sono derivate ottenute derivando due volte rispetto a una certa operazione variabile, una rispetto a un'altra, e $\binom{n}{3}$ provenienti dalle derivate parziali di second'ordine miste e che si ottengono derivando ogni volta rispetto a un'operazione diversa) che siano distinte.

E così con considerazioni analoghe si definiscono le derivate parziali pure e miste di qualunque ordine d'una funzione di più operazioni I, per una speciale determinazione dell'insieme delle operazioni variabili.

Ciò posto, detta $f(y_1)$ una certa funzione di y_1 si potranno considerare le derivate pure e miste rispetto alle varie operazioni variabili, per una qualunque determinazione del loro insieme, di $F(X_1 \dots X_n)$. Così nel calcolo di queste derivate s'userà lo stesso metodo indicato per il calcolo delle derivate rispetto all' operazione X d'un'espressione della forma $F(X)f(y_1)$ essendo $F(X)$ funzione della sola operazione I variabile X: per far ciò quando si voglia derivare $F(X_1 \dots X_n) f(y_1)$ rispetto a $X_i\, (i=1 \dots n)$ si terranno fisse tutte le altre operazioni variabili sì da riguardare l'espressione considerata come funzione della sola X_i e si procede come si trattasse d'una espressione contenente una sola operazione variabile. S'useranno sempre simboli analoghi a quelli usati testè: così la derivata parziale di $F(X_1 \dots X_n) f(y_1)$ rispetto a $X_i\, (i=1 \dots n)$ per una qualunque determinazione $\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_n$ dell'insieme $X_1 \dots X_n$ si designerà con uno dei due simboli:

$$\frac{\partial F(\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_n) f(y_1)}{\partial X_i}, \qquad F'_{X_i}(\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_n) f(y_1), \text{ ecc., ecc.}$$

Si estende poi alle funzioni di più operazioni I il concetto di funzione d'operazione I definita in un certo campo di determinazioni dell'operazione variabile, rispetto a una certa funzione oggetto $f(y_1)$, chè l'esservi più operazioni variabili porta l'unica differenza che si debbano per funzioni di tali operazioni, considerare campi di determinazioni dell'insieme delle operazioni stesse, anzichè campi di determinazioni d'una sola operazione variabile. Quindi si dovranno assumere gl'incrementi da darsi alle singole operazioni variabili, rispetto alle quali si deriva $F(X_1 \dots X_n) f(y_1)$, in modo da rendere sodisfatte per l'insieme di queste operazioni la condizione, di cui a § 2 di questo capitolo alla quale per l'esistenza di: $\frac{d\,F(\mathsf{X})\,f(y_1)}{d\,X}$ deve sodisfare $\mathsf{X} + \Delta\, X$.

Dalla relazione:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Delta X_i=0} \frac{\partial\, F(\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_n)\, f(y_1)}{\partial\, X_i} = \\ &= \lim_{\Delta X_i=0} \left|\left\{ F(\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_i + \Delta\, X_i \dots \mathsf{X}_n)\, f(y_1) - F(\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_i \dots \mathsf{X}_n\, f(y_1)\right\}\right|, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$(i = 1, 2, \dots n)$, segue che per l'esistenza della derivata parziale di $F(X_1 \dots X_n)\, f(y_1)$ rispetto a X_i, per la determinazione $\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_n$ dell'insieme $X_1 \dots X_n$ è necessario che per detta determinazione dell'insieme delle operazioni variabili, la funzione $F(X_1 \dots X_n)$ sia continua rispetto a X_i. E una condizione analoga si vede facilmente che deve essere soddisfatta affinchè esistano le derivate d'ordine superiore di $F(X_1 \dots X_n)$ relativamente a $f(y_1)$.

5. Anche per le funzioni di più operazioni variabili si può dare un'estensione della formola del Taylor. Si consideri infatti, in primo luogo, il prodotto (simbolico) $(X_1 + \Delta\, X_1)^m\, (X_2 + \Delta\, X_2)^n$ essendo X_1, X_2 due operazioni I variabili. Si applichi separatamente a ciascuno di quei due fattori lo sviluppo simbolico analogo a quello del Taylor esaminato ($\Delta\, X_1$, $\Delta\, X_2$ abbiano sempre la forma $\mathbf{I}_{k_1}\, \mathbf{I}_{k_2}$ rispettivamente, essendo k_1, k_2 due costanti) per il caso d'una sola operazione variabile, considerando una determinazione qualunque X_1, X_2 di X_1, X_2. Verrà:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathsf{X}_1 + \Delta\, X_1)^m\, (\mathsf{X}_2 + \Delta\, X_2)^n = \left\{ \mathsf{X}_1^m + \binom{m}{1} \Delta\, X_1\, \mathsf{X}_1^{m-1} + \right. \\ &\left. + \binom{m}{2} \Delta\, X_1^2\, \mathsf{X}_1^{m-2} \dots + \binom{m}{m-1} \Delta\, X_1^{m-1}\, \mathsf{X}_1^2 + \Delta\, X_1^m \right\}. \\ &\left\{ \mathsf{X}_2^n + \binom{n}{1} \Delta\, X_2\, \mathsf{X}_2^{n-1} + \binom{n}{2} \Delta\, X_2^2\, \mathsf{X}_2^{n-2} \dots + \binom{n}{n-1} \Delta\, X_2^{n-1}\, \mathsf{X}_2 + \Delta\, X_2^n \right\} = \\ &= \mathsf{X}_1^m\, \mathsf{X}_2^n + \binom{m}{1} \Delta\, X_1\, \mathsf{X}_1^{m-1}\, \mathsf{X}_2^n + \binom{m}{1} \mathsf{X}_1^m\, \Delta\, X_2\, \mathsf{X}_2^{n-1} + \\ &+ \binom{m}{1}\binom{n}{1} \Delta\, X_1\, \mathsf{X}_1^{m-1}\, \Delta\, X_2\, \mathsf{X}_2^{n-1} + \binom{m}{2} \Delta\, X_1^2\, \mathsf{X}_1^{m-2}\, \mathsf{X}_2^n + \\ &+ \binom{n}{1}\binom{m}{2} \Delta\, X_1^2\, \mathsf{X}_1^{m-2}\, \Delta\, X_2\, \mathsf{X}_2^{n-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{2} \Delta\, X_2^2\, \mathsf{X}_1^{n-2} + \\ &+ \mathsf{X}_1^m \binom{n}{2} \Delta\, X_2^2\, \mathsf{X}_2^{n-2} \dots + \Delta\, X_1^m\, \Delta\, X_2^n \dots \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

e ripetendo la solita osservazione che per essere ΔX_1, ΔX_2 permutabili fra di loro e a qualunque operazione I si avrà:

$$\binom{n}{1} X_1^m \Delta X_2 X_2^{n-1} = \binom{n}{1} \Delta X_2 X_1^m X_2^{n-1},$$

$$\binom{m}{1}\binom{n}{1} \Delta X_1 X_1^{m-1} \Delta X_2 X_2^{n-1} = \binom{m}{1}\binom{n}{2} \Delta X_1 \Delta X_2 X_1^{m-1} X_2^{n-1}, \text{ ecc., ecc.,}$$

si vede che:

$$\binom{m}{1} \Delta X_1 X_1^{m-1} X_2^n + \binom{n}{1} \Delta X_2^m X_1 X_2^{n-1},$$

non è che:

$$\frac{\partial (X_1^m X_2^n)}{\partial X_1} + \frac{\partial (X_1^m X_2^n)}{\partial X_2}, \tag{13}$$

ove il primo termine della prima somma è = al primo della seconda, il secondo della prima = al secondo della seconda poichè X_2^n è un'espressione costante rispetto a X_1, X_1^m è un'espressione costante rispetto a X_2. Così rappresenteremo simbolicamente la somma (13) con:

$$\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) (X_1^m X_2^n),$$

convenendo di rappresentare colla notazione:

$$\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2},$$

l'operazione che, applicata a una certa funzione delle operazioni X_1, X_2 consiste nel calcolare le derivate parziali di primo ordine della funzione in parola rispetto alle due operazioni variabili e nel sommare la prima di queste derivate moltiplicata per ΔX_1 colla seconda moltiplicata per ΔX_2. Nello stesso modo si vede essere:

$$\binom{m}{2} \Delta X_1^2 X_1^{m-2} X_2^n = \frac{1}{|\underline{2}} \frac{\partial^2 (X_1^m X_2^n)}{\partial X_1^2}, \quad \binom{n}{2} \Delta X_2^2 X_1^m X_2^{n-2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (X_1^m X_2^n)}{\partial X_2},$$

$$\binom{m}{1}\binom{n}{1} \Delta X_1 \Delta X_2 X_1^{m-1} X_2^{n-1} = \Delta X_1 \Delta X_2 \frac{\partial^2 (X_1^m X_2^n)}{\partial X_1 \partial X_2},$$

talchè la somma dei tre termini ora scritti si può colla notazione simbolica da noi adottata rappresentare mediante:

$$\frac{1}{|\underline{2}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^2 (X_1^m X_2^n),$$

intendendo che il simbolo:

$$\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^2,$$

significhi l'operazione che si convenne di rappresentare con:

$$\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right),$$

applicata due volte successivamente. Ripetendo queste considerazioni si vede che nello sviluppo del primo membro della (12), dopo i termini ora considerati ve ne sarà uno che si potrà rappresentare col simbolo:

$$\frac{1}{\underline{|3}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^3 (X_1^m X_2^n),$$

e così di seguito si giungerà ad un termine della forma:

$$\frac{1}{\underline{|m}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^m (X_1^m X_2^n),$$

poi supposto $n > m$ verranno $n - m$ termini della forma:

$$\frac{\Delta X_2^{m+1}}{\underline{|m+1}} \frac{\partial^{m+1} (X_1^m X_2^n)}{\partial X_2^{n+1}} \cdots \frac{\Delta X_2^n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n (X_1^m X_2^n)}{\partial X_2^n},$$

quando si ponga mente che:

$$\frac{\partial^{m+j} (X_1^m X_2^n)}{\partial X_1^{m+j}},$$

è nulla in via assoluta ($j = 1, 2 \ldots$). Si vede dunque che la (12) assume la forma:

$$(X_1 + \Delta X_1)^m (X_2 + \Delta X_2)^n = X_1^m X_2^n + \left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) X_1^m X_2^n +$$
$$+ \frac{1}{\underline{|2}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^2 X_1^m X_2^n +$$
$$+ \cdots \frac{1}{\underline{|m}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^m X_1^m X_2^n \cdots + \frac{\Delta X_2^n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n X_1^m X_2^n}{\partial X_2^n},$$

sviluppo che ha forma perfettamente analoga allo sviluppo del Taylor per un prodotto della forma $x^m y^n$, dato dal calcolo. Ci siamo limitati per semplicità al caso di due sole operazioni I variabili, ma il ragionamento varrebbe ugualmente per il caso d'un numero qualunque d'operazioni I variabili.

Abbiasi ora una forma lineare ai prodotti simbolici $X_1^m X_2^n$, gli esponenti m, n essendo suscettibili d'assumere valori diversi. I coefficienti poi che compaiono in questa forma potranno essere sia costanti, sia funzioni di certe variabili, sia anche potranno essere coefficienti simbolici dati da espressioni contenenti operazioni I differenti però da quelle che si sono assunte, come variabili in guisa che i coefficienti siano da queste ultime indipendenti. Detta $F(X_1\, X_2)$ la forma in parola, applicando a ciascun termine lo sviluppo precedente e tenendo sempre conto del fatto che la derivazione rispetto ad operazioni I e l'addizione sono operazioni permutabili si avrà, detto m l'indice della più alta potenza di X_1 che compare nella nostra funzione, n l'indice della più alta potenza di X_2 che compaia nella medesima e supposto $n > m$:

$$F(\mathrm{X}_1 + \Delta X_1,\ \mathrm{X}_2 + \Delta X_2) = F(\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_2) + \left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) F(\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_2) +$$

$$+ \frac{1}{\underline{|2}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^2 F(\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_2) +$$

$$+ \cdots \frac{1}{\underline{|m}}\left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)^m F(\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_2) +$$

$$+ \frac{\Delta X_2^{m+1}}{\underline{|m+1}} \frac{\partial^{m+1} F(\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_2)}{\partial X_2^{m+1}} \cdots + \frac{\Delta X_2^n}{\underline{|n}} \frac{\partial^n F(\mathrm{X}_1\,\mathrm{X}_2)}{\partial X_2^n},$$

ove X_1, X_2, ΔX_1, ΔX_2 abbiano sempre il significato loro attribuito fin qui. Come si vede però, l'estensione della formola del Taylor al calcolo ora studiato è effettuabile solo quando gli incrementi che si danno alle operazioni I assunte come operazioni variabili, siano della forma I_k, k essendo una costante, perchè tale estensione è possibile solo quando gli incrementi in parola siano permutabili a qualunque operazione I.

Nota. Nella dimostrazione dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni per le funzioni di più operazioni I variabili, si presuppone naturalmente l'esistenza delle derivate, sulle quali si ragiona.

5.°

Serie di potenze d'operazioni I.

1. Fin qui si considerarono solo funzioni d'una o più operazioni I contenenti potenze d'ordine finito dell'operazione I o delle operazioni I assunte come operazioni variabili a seconda rispettivamente che si trattava di funzioni d'una sola o di più operazioni I. Ora invece tratteremo brevemente di funzioni d'operazioni I variabili contenenti potenze diverse di queste in numero infinito, cioè di serie di potenze d'operazioni I variabili. Così incominceremo a considerare serie di potenze d'una sola operazione variabile X. Indichiamo con $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ (*) la serie considerata. In base a convenzioni poste (v. cap. 1.°) qui si dovrà considerare un insieme numerabile di infinite variabili indipendenti $y_1, y_2 \ldots y_n\, y_{n+1}$ e detta y_∞ quella fra dette variabili che nella corrispondenza stabilita fra la detta successione e la serie di numeri interi corrisponde all'infinito, la funzione risultato dell' operazione rappresentata dalla serie considerata, come anche i coefficienti della medesima dipenderanno dalla variabile y_∞.

Il campo di determinazioni di X nel quale, detta al solito $f(y_1)$ una certa funzione oggetto a cui si applichi l'operazione rappresentata dalla serie in parola, la serie: $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$ sia convergente si dirà « campo di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ relativamente a $f(y_1)$ ». È chiaro che questo campo sarà, in generale più esteso di quello in cui $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$ è atto a rappresentare una funzione analitica di y_∞ chè è ovvio che onde si verifichi quest'ultima circostanza, è necessario imporre certe restrizioni ai singoli termini della serie considerata.

Riguardo alla convergenza di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$ si hanno le seguenti proprietà che risultano dalla teoria generale delle serie:

(*) Si mantiene, per uniformità nei simboli, la solita convenzione che X^0 designi l'operazione equivalente all'unità in via assoluta.

1.° Se la serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$ è convergente assolutamente, il che si esprime anche dicendo che « la serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ è convergente assolutamente rispetto a $f(y_1)$ » per una certa determinazione speciale A di X, per ogni altra determinazione qualunque X di X tale che $|\mathsf{X}^\mu f(y_1)| < |A^\mu f(y_1)|$ per qualunque valore dell'indice μ compreso nella successione $m, m+1, m+2 \ldots \infty$ essendo m un numero finito, la serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ avrà la stessa proprietà, cioè X apparterrà ancora al suo campo di convergenza relativamente a $f(y_1)$. Perciò se X è una determinazione generica di X soggetta alla sola condizione che per qualunque valore dell'indice μ compreso nella successione $m, m+1 \ldots \infty$ sia $\left|\dfrac{\mathsf{X}^\mu f(y_1)}{A^\mu f(y_1)}\right| < \varepsilon$, ε essendo un numero <1, la determinazione X di X apparterrà al campo di convergenza di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ relativamente a $f(y_1)$.

2.° Presa di nuovo in esame l'accennata espressione $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$, se esiste un numero positivo m tale che, detta X una determinazione generica di X siffatta sia:

$$\left|\frac{\mathsf{X}^{\mu+1} f(y_1)}{\mathsf{X}^\mu f(y_1)}\right| < \eta,$$

essendo η un numero positivo <1, e valga quella disuguaglianza per ogni valore dell' indice μ compreso nella successione $m, m+1 \ldots \infty$, X apparterrà al campo di convergenza di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ relativamente a $f(y_1)$.

3.° Mantenendo ai simboli che ora si useranno il significato ad essi dato fin qui, si potrà ove X sia una determinazione generica di X appartenente al campo di convergenza della serie considerata relativamente a $f(y_1)$, per definizione, detto g un numero positivo arbitrario, determinare un numero positivo m tale che per ogni $n \geqq m$ sia:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu=S} \varphi_\nu \mathsf{X}^\nu f(y_1)\right| < \frac{g}{2}, \qquad \left|\sum_{\nu=n-1}^{\nu=S} \varphi_\nu \mathsf{X}^\nu f(y_1)\right| < \frac{g}{2},$$

da cui:

$$|\varphi_n \mathsf{X}^n f(y_1)| < g, \tag{14}$$

e per ogni determinazione di X compresa nel campo in questione vi sarà, fissato g, un numero m tale che per ogni $n \geqq m$ sia sodisfatta la disuguaglianza (14): perciò questo numero m, in generale avrà anche l' altra proprietà che per ogni valore di $\nu \geqq$ ad esso sarà:

$$|\varphi_\nu| < \frac{g}{\left|\frac{X^{\nu+1} f(y_1)}{X^\nu f(y_1)}\right|},$$

sempre sottintendendo in $X^\nu f(y_1)$ un'operazione della forma **I**.

Queste considerazioni furono svolte nello stesso modo con cui il professor Pincherle svolse considerazioni analoghe per le serie di potenze dell'operazione funzionale consistente nel trasformare una funzione $f(y)$ d'una certa variabile y in $f(y+1)$, nella sua Memoria: *L'algebra delle forme lineari alle differenze finite.*

Passiamo ora a considerare le serie di potenze di più operazioni I variabili. Designeremo queste operazioni variabili (naturalmente in numero finito), come per il passato coi simboli $X_1 \dots X_n$. Una serie di potenze di siffatte operazioni variabili avrà in generale la forma:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\nu_2=\infty} \dots \sum_{\nu_n=0}^{\nu_n=\infty} \varphi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \dots X_n^{\nu_n}.$$

I coefficienti $\varphi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$ $(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n = 0, 1 \dots \infty)$ saranno poi della natura attribuita a quelli che comparivano nelle serie di potenze d'una sola operazione I variabile considerata dianzi. Per designare la variabile da cui nell'operazione rappresentata dalla serie in parola dipende la funzione risultato ci si regolerà, come sempre, in base alle convenzioni del cap. 1.°

Ciò premesso, presa in esame, al solito una funzione $f(y_1)$ di y_1, la serie $\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} \dots \sum_{\nu_n=0}^{\nu_n=\infty} \varphi_{\nu_1 \dots \nu_\nu} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$ si dirà « convergente relativamente a $f(y_1)$ nel campo di determinazioni dell' insieme $X_1 \dots X_\nu$ tale che per ogni determinazione di detto insieme compresa in questo campo la serie:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} \dots \sum_{\nu_n=0}^{\nu_n=\infty} \varphi_{\nu_1 \dots \nu_n} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n} f(y_1),$$

sia convergente.

E, con un' ovvia estensione d' una definizione data dianzi tale campo si dirà « campo di convergenza della serie $\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} \dots \sum_{\nu_n=0}^{\nu_n=\infty} \varphi_{\nu_1 \dots \nu_n} X_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n}$ relativamente alla funzione $f(y_1)$ ». È poi chiaro che se $A_1 \dots A_n$ è una determinazione speciale dell'insieme $X_1 \dots X_n$ appartenente all' accennato campo di convergenza, apparterrà a questo stesso campo ogni altra determinazione $\mathsf{X}_1 \dots \mathsf{X}_n$ dello stesso insieme tale che per ogni valore di $\nu_1 >$ d'un certo numero finito $\mu_1 \dots$ per ogni valore di $\nu_n >$ d'un certo numero finito μ_n sia:

$$| \{ \mathsf{X}_1^{\nu_1} \dots X_n^{\nu_n} f(y_1) \} | < | \{ A_1^{\nu_1} \dots A_n^{\nu_n} f(y_1) \} |.$$

2. In virtù sempre della proprietà riscontrata per la derivazione rispetto ad operazioni I, d'essere cioè permutabile all'addizione, è chiaro che data una serie di potenze d'una sola operazione I variabile della solita forma: $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ la sua derivata prima rispetto all'operazione variabile X, per una qualunque determinazione X di X sarà data da $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \nu \varphi_\nu \mathsf{X}^{\nu-1}$. Ora, quando detta $f(y_1)$ al solito una funzione oggetto si voglia calcolare la derivata rispetto a X dell'espressione $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$ il che si fa col procedimento indicato nel cap. precedente, si presenta la questione se tale derivata esiste effettivamente, cioè se la serie che la rappresenta sia convergente: vale a dire se avendo X il solito significato X appartenga al campo di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \nu \varphi_\nu X^{\nu-1}$ relativamente $f(y_1)$. Ora questo campo comprenderà certo tutte le determinazioni X di X tali da sodisfare per tutti i valori dell'indice ν da un certo valore finito in poi, alla disuguaglianza:

$$\frac{\nu+1}{\nu} \left| \frac{\varphi_{\nu+1} \mathsf{X}^{\nu+1} f(y_1)}{\varphi_\nu \mathsf{X}^\nu f(y_1)} \right| < \eta,$$

essendo η un numero positivo < 1.

Nello stesso modo si possono definire le derivate d'ordine superiore di serie di potenze di un'operazione variabile X e si possono definire i campi di convergenza delle serie che rappresentano queste derivate, relativamente a una certa funzione oggetto, cioè, usando un'espressione analoga a quella che è usata nell'analisi ordinaria, i campi delle determinazioni di X, per le quali esistono effettivamente le derivate in parola relativamente alla funzione oggetto stabilita.

Così, quando s'abbia una serie di potenze di n (n numero finito > 1) operazioni I variabili: $X_1 \dots X_n$, si possono, applicando le precedenti considerazioni dare le sue derivate parziali rispetto alle diverse operazioni variabili calcolate per una certa determinazione dell'insieme $X_1 \dots X_n$. E si presenta poi sempre anche qui la questione di stabilire il campo di determinazioni di $X_1 \ldots X_n$, nel quale le serie così ottenute convergono relativamente ad una certa funzione oggetto. Così ad es., considerata ancora la serie $\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{\nu_n=\infty} \varphi_{\nu_1 \ldots \nu_n} X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$, la derivata parziale di $\sum_{\nu_1=0}^{\nu_1=\infty} \ldots \sum_{\nu_n=0}^{\nu_n=\infty} \varphi_{\nu_1 \ldots \nu_n} X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n} f(y_1)$ rispetto a una qualunque delle $X_i\,(i = 1 \ldots n)$ convergerà per una determinazione qualunque $\mathsf{X}_1 \ldots \mathsf{X}_n$ dell'insieme $X_1 \ldots X_n$ ogniqualvolta per tutti i sistemi di valori degli indici $\nu_1 \ldots \nu_n$ da un certo sistema di valori positivi in poi sia:

$$\left\{ \frac{(\nu_i + 1)\, \varphi_{\nu_1+1 \ldots \nu_n+1}\, X_1^{\nu_1+1} \ldots X_i^{\nu_i} X_{i+1}^{\nu_i+1} \ldots X_n^{\nu_n+1} f(y_1)}{\nu_i\, \varphi_{\nu_1+1 \ldots \nu_n+1}\, X_1^{\nu_1+1} \ldots X_i^{\nu_i} X_{i+1}^{\nu_i+1} \ldots X_n^{\nu_n+1} f(y_1)} \right\}_1 < \eta ,$$

η essendo un numero positivo < 1. E considerazioni analoghe varranno per le derivate parziali pure e miste di qualunque ordine della serie considerata.

3. Presa in esame una serie di potenze d'una sola operazione variabile X, avente la solita forma $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$, si può, considerato un incremento ΔX della solita forma I_k, da darsi a X, considerare per una qualunque determinazione X di X lo sviluppo secondo le potenze di X di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu (\mathsf{X} + \Delta X)^\nu$, facendo gli sviluppi delle singole potenze del binomio $\mathsf{X} + \Delta X$ che compaiono nell'espressione in parola. Evidentemente si verrà allora a rappresentare la nostra serie mediante la formola analoga a quella del Taylor. Basta applicare al caso nostro le considerazioni svolte per il caso di funzioni dell'operazione X contenenti solo sue potenze in numero finito. Posto cioè per brevità: $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu = F(X)$ si avrà:

$$F(\mathsf{X} + \Delta X) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\Delta X^\mu}{|\underline{\mu}} \frac{d^\mu F(\mathsf{X})}{d X^\mu}, \tag{15}$$

ove per derivata d'indice o s'intenda la funzione primitiva.

Così avendosi una serie di potenze delle n operazioni variabili $X_1 \ldots X_n$, della forma di quella considerata nel paragrafo precedente, se la designi brevemente col simbolo $F(X_1 \ldots X_n)$. Indi a ciascuna delle $X_h\,(h = 1 \ldots n)$ si dia un incremento ΔX_h della forma $\mathbf{I}_h$ designando h un fattore costante: si avrà per una determinazione qualunque $\mathsf{X}_1 \ldots \mathsf{X}_n$ dell'insieme delle operazioni variabili, applicando passo passo le considerazioni svolte trattando di funzioni di più operazioni I variabili contenenti potenze di queste in numero finito:

$$F(\mathsf{X}_1 + \Delta X_1 \dots \mathsf{X}_n + \Delta X_n) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{1}{|\underline{\mu}} \left(\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2} \dots + \Delta X_n \frac{\partial}{\partial X_n} \right)^{\mu} F(\mathsf{X}_1 \mathsf{X}_2 \dots \mathsf{X}_n),$$

ove, come sappiamo, col simbolo:

$$\Delta X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \Delta X_2 \frac{\partial}{\partial X_2} \dots + \Delta X_n \frac{\partial}{\partial X_n},$$

s'intende di rappresentare l'espressione che consiste nel calcolare le derivate parziali d'una certa funzione di $X_1 \dots X_n$ e nel sommare i prodotti (simbolici) della derivata rispetto a X_1 moltiplicata per ΔX_1, con quello della derivata rispetto a X_2 moltiplicata per ΔX_2, ecc., ecc.

Quando s'abbia un'espressione della forma: $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$ designata brevemente con $F(X) f(y_1)$ è facile dare per una determinazione generica X di X lo sviluppo analogo a quello del Taylor di $F(\mathsf{X} + \Delta X) f(y_1)$ avendo ΔX la solita forma. Ciò s'ottiene formalmente, applicando le considerazioni svolte per la questione analoga sulle forme lineari alle potenze di X contenenti potenze di questa in numero finito. Nel caso presente però v'è la questione di stabilire il campo di convergenza dell'espressione ottenuta. È chiaro pertanto che il campo cercato sarà, per ogni determinazione speciale di ΔX, costituito dalle determinazioni di X tali che:

1.° Le serie rappresentate dalle derivate di $F(X)$ di tutti gli ordini prese rispetto a $f(y_1)$ per questa determinazione di X siano convergenti assolutamente.

2.° La serie:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\Delta X^\mu}{|\underline{\mu}} \frac{d^\mu F(\mathsf{X})}{d X^\mu} f(y_1),$$

$\left(\text{le } \frac{d^\mu F(\mathsf{X})}{d X^\mu} \text{ calcolate rispetto a } f(y_1), \text{ v. cap. prec.}\right)$, sia convergente assolutamente.

Infatti se X rende soddisfatta queste condizioni, i singoli termini della serie ora scritta, sviluppata in modo da porre in evidenza le singole potenze di X si potranno ordinare come si vuole, senza che venga meno la convergenza.

E considerazioni analoghe valgono per lo sviluppo mediante la formola analoga a quella del Taylor di serie di potenze di più operazioni I variabili.

4. Anche per i calcoli con serie di potenze d'operazioni I variabili è da applicarsi il metodo dei coefficienti indeterminati. Sia infatti la serie di potenze dell'operazione X: $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu$ analoga a quella considerata nei paragrafi precedenti e sia X una determinazione qualunque di X appartenente al suo campo di convergenza relativamente a una certa funzione $f(y_1)$. Detta z una variabile ausiliaria distinta dalle variabili $y_1 y_2 \ldots y_\infty$ considerate, apparterrà a questo stesso campo di convergenza anche l'operazione $z\,\mathrm{X}$ ogniqualvolta $|z| < 1$. Incominciandosi a moltiplicare per z, X^1 ossia X, è chiaro che non essendo mai z variabile d'integrazione $z\,\mathrm{X}\,z\,\mathrm{X}$ sarà equivalente a $z^2\,\mathrm{X}^2$. Considerata quindi la serie:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} z^\nu \varphi_\nu \mathrm{X}^\nu f(y_1), \tag{16}$$

questa sarà convergente per ogni $|z| < 1$. Supponiamo inoltre che essa sia nulla identicamente per ogni determinazione $\overline{X}$ di X tale che:

$$\left| \frac{\overline{X}^{\mu+1} f(y_1)}{\overline{X}^{\mu} f(y_1)} \right| < \eta \left| \frac{\mathrm{X}^{\mu+1} f(y_1)}{\mathrm{X}^{\mu} f(y_1)} \right|,$$

η essendo un numero positivo < 1 (v. § 1 di questo cap.). È chiaro che $z\,\mathrm{X}$ sodisferà per ogni $|z| < 1$ all'accennata disuguaglianza. Allora nella serie di potenze $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} z^\nu \varphi_\nu \mathrm{X}^\nu f(y_1)$ dovranno essere nulli i termini che moltiplicano ciascuna potenza di z. Dovranno quindi essere nulli tutti i coefficienti: $\varphi_\nu \mathrm{X}^\nu f(y_1)$ $(\nu = 0, 1 \ldots \infty)$. Dati ora a y_∞, la quale sia la variabile da cui dipende $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu X^\nu f(y_1)$, valori tali che $\mathrm{X}^\nu f(y_1)$ sia . 0, e, posta l'ipotesi che $\mathrm{X}^\nu f(y_1)$ sia funzione continua di y_∞: di tali valori se ne troveranno in ogni regione per quanto piccola del campo in cui $\mathrm{X}^\nu f(y_1)$ è atta a rappresentarci una funzione analitica. È chiaro quindi, che la serie considerata potrà annullarsi solo a patto che sia nullo ciascuno de'suoi coefficienti identicamente.

Da ciò segue che se due espressioni della forma di quella considerata devono essere identiche per qualunque determinazione di X, devono essere identici i loro rispettivi coefficienti delle stesse potenze di X. Così, come si vedrà in lavori successivi, per la determinazione d'un'espressione della forma (16) è pienamente applicabile il metodo dei coefficienti indeterminati quale serve nell'analisi ordinaria alla determinazione di serie di potenze d'una variabile. Il metodo in discorso vale anche per espressioni della forma $\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} X^\mu \varphi_\mu f(y_1)$ essendo le φ_μ altrettante funzioni della variabile d'integrazione da determinarsi. E le considerazioni su cui si fonda l'applicazione di questo metodo sono le stesse svolte dianzi per il caso analogo.

6.°

Estensione del concetto d'integrale definito e indefinito.

1. Si consideri una certa funzione d'un'operazione I variabile X, funzione che designeremo al solito con $F(X)$ e, fissata una certa funzione di y_1, $f(y_1)$ si prenda a considerare il campo di determinazioni di X nel quale $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$. Si assumano ad arbitrio due determinazioni fisse A, B di X comprese in questo campo: se in base alle convenzioni del cap. 1.° è da designarsi con $y_{\mu+1}$ la variabile da cui dipende $F(X)f(y_1)$ è chiaro che A, B differiranno fra loro relativamente a $F(X)f(y_1)$ per una certa funzione di $y_{\mu+2}$ che designeremo con $\rho(y_{\mu+2})$. Ciò posto, fissiamo una successione di determinazioni di X comprese nel campo in cui $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$, determinazioni che designeremo con $A_1 A_2 \ldots A_{\mu-1}$, tali che sia all'infuori d'operazioni **I**:

$A_1 F(A) f(y_1) = A\, F(A) f(y_1) +$ una certa funzione di $y_{\mu+2}$ che designeremo con δ_0

$A_2 F(A_1) f(y_1) = A_1\, F(A_1) f(y_1) +$ " " " " " δ_1

. . . .

$BF(A_{\mu-1}) f(y_1) = A_{\mu-1} F(A_{\mu-1}) f(y_1) +$ " " " " " $\delta_{\mu-1}$.

Indi si faccia la somma dei prodotti delle $\delta_h\,(h = 0, 1, \ldots \mu - 1)$ per le $F(A_h) f(y_1)$ designando per simmetria nelle notazioni A con A_0. Questa somma sarà:

$$\sum_h \delta_h\, F(A_h) f(y_1),$$

(ad ogni $F(A_h) f(y_1)$ s'intenda applicata l'operazione **I** che la trasforma da funzione di $y_{\mu+1}$ nella stessa funzione di $y_{\mu+2}$). Così quella somma si potrebbe anche scrivere $\sum_h \mathrm{I}_{\delta_h} F(A_h) f(y_1)$, quando le $F(A_h) f(y_1)$ si prendessero così come stanno. Ora, quando al tendere delle δ_h simultaneamente e indefinitamente a 0, quella somma ammette un limite diremo quel limite, per l'analogia che presenta coll'integrale definito studiato nel calcolo infinitesimale: « Integrale definito della funzione $F(X)$ relativamente a $f(y_1)$ calcolato fra i limiti A, B, oppure integrale definito di $F(X)f(y_1)$ calcolato fra gli accennati limiti ». Con un'ovvia estensione poi di concetti dati dal calcolo ordinario diremo che, fissando la successione di determinazioni di X, $A_1, \ldots A_{\mu-1}$ nel modo con cui ciò fu da noi fatto, si è suddivisa la differenza fra B, A relativamente a $F(X)f(y_1)$ in porzioni δ_h. È poi chiaro che se nel campo in cui $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$ essa è anche continua relativamente a quella stessa funzione, esiste il limite di S. Ciò posto si ha il:

Teorema. Il limite di $\sum\limits_h \delta_h F(A_h) f(y_1)$, quando sia $F(X)$ continua relativamente a $f(y_1)$ facendo tendere indefinitamente a 0 (in modulo) le porzioni δ_h, è unico e indipendente, cioè, dal modo con cui avviene questo decrescimento delle δ_h.

Consideriamo infatti altre due suddivisioni della differenza tra A, B relativamente alla funzione $F(X)f(y_1)$ (dopo aver fissato le δ_h in modo che per tutti i valori di $y_{\mu+2}$ pei quali vengono calcolate siano $< \eta$, quantità finita) corrispondenti ad altri due sistemi di determinazioni di X, tali che queste determinazioni siano intermedie (s'intende intermedie relativamente a $F(X)f(y_1)$ cioè scelte in modo da avere rispetto a A, B proprietà analoghe alle $A_h (h = 1 \ldots \mu - 1)$) e siano di più tali che dette $\mathsf{A}_k (k = 1, 2 \ldots)$ le determinazioni corrispondenti alla prima di queste suddivisioni $A_{\tau_s} (\tau, s = 0, 1, 2 \ldots$ con $\overline{\overline{A}}_{0_0}$ intendesi la stessa A) le $\overline{\overline{A}}_{\tau_s}$ comprendano sì le A_h che le A_k. Si indichino allora in generale con $\overline{\overline{\delta}}_{\tau_s}$ le differenze relative alle $\Phi(A_{\tau_s}) f(y_1)$ tra A_{τ_s+1}, A_{τ_s}. Dette S', S'' le somme analoghe a S che ottengonsi rispettivamente con queste due suddivisioni della differenza tra B, A relativamente a $F(X)f(y_1)$, sarà S'' data da: $\sum\limits_{\tau, s} \overline{\overline{\delta}}_{\tau_s} F(A_{\tau_s}) f(y_1)$ (si noti che k, τ, s variano per una successione finita di valori).

In detta somma il termine: $\delta_h F(A_h) f(y_1) (h = 0, 1 \ldots \mu - 1)$ della somma δ sarà sostituito da una somma di termini della forma:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} \overline{\overline{\delta}}_{\tau_h+\rho} F(A_{\tau_h+\rho}) f(y_1).$$

Ora il modulo della differenza:

$$\left(\sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} \overline{\overline{\delta}}_{\tau_h+\rho} F(\overline{\overline{A}}_{\tau_\nu+\rho}) f(y_1)\right) - \delta_h F(A_h) f(y_1), \tag{17}$$

quando sia η il massimo dei limiti superiori delle singole δ_h per i valori di $y_{\mu+2}$ compresi nel campo nel quale sono definite si può rendere piccolo quanto si vuole.

Infatti, per ipotesi le $\overline{\overline{\delta}}_{\tau_\nu+\rho}$ sono tutte in virtù del modo con cui furono scelte $< \eta$. Allora la funzione $F(X)$ relativamente a $f(y_1)$ è continua uniformemente nel campo di determinazioni di X in cui sono comprese quelle da noi considerate, sicchè il modulo della differenza considerata, poichè presa una quantità arbitraria ξ si può sempre fare in modo che sia:

$$| F(A_{\tau_h+\rho}) f(y_1) - F(A_h) f(y_1) | < \xi \ (\rho = 0, 1 \ldots \nu),$$

sarà: $< \xi \sum\limits_{\rho} \delta_{\tau_\nu+\rho}$. Ciò premesso, se noi imaginiamo nel piano d'una variabile complessa i punti che ci rappresentano le singole quantità complesse:

$$\frac{A_{\tau_\nu+\rho} F(A_{\tau_k+\rho}) f(y_1)}{F(A_{\tau_h+\rho}) f(y_1)}, \tag{18}$$

($\rho = 0, 1, \ldots k$, nel quoziente si sottintende un'operazione **I**) per ogni valore speciale di $y_{\mu+2}$ compresa nel campo in cui quell'espressione è atta a rappresentarci una funzione analitica, il modulo di $\overline{\delta}_{\tau_h+\rho}$ ($\rho = 0, 1, \ldots \nu$) calcolato per il corrispondente valore di $y_{\mu+2}$ rappresenta la distanza rettilinea dei punti rappresentanti le singole espressioni (18): perciò $\sum\limits_{\rho=0}^{\rho=\nu} | \overline{\overline{\delta}}_{\tau_h+\rho} |$ rappresenta la distanza rettilinea dei punti rappresentanti le due espressioni:

$$\frac{A_h F(A_h) f(y_1)}{F(A_h) f(y_1)}, \qquad \frac{A_{h+1} F(A_h) f(y_1)}{F(A_h) f(y_1)},$$

(sempre sottintendendo nei denominatori un'operazione **I**), che son quelle delle (18) corrispondenti rispettivamente ai valori 0, ν di ρ. Diciamo l_h il limite superiore di $| \sum \overline{\overline{\delta}}_{\tau_h+\rho} |$ per i valori di $y_{\mu+2}$ compresi nel campo in cui quell'espressione sia atta a rappresentarci una funzione analitica: sarà il modulo della differenza (17) $< \xi\, l_h$. Operando così su tutti i termini δ e sui corrispondenti dell'altra somma S' si vede che la somma delle corrispondenti differenze (17) la quale non è che $S'' - S'$ avrà il modulo $< \xi\, l$ ove si ponga $\sum\limits_{h=1}^{h=\mu} l_h = l$. Ora $\xi\, l$ per ξ piccolo a piacere si può rendere $<$ di quella quantità che più ci piace: ma ξ è arbitrario: lo prenderemo quindi tale da rendere:

$$| S'' - S | < \frac{\varepsilon}{2},$$

essendo ε una quantità fissata prima piccola a piacere. Se non che:

$$|S' - S| < |S'' - S| + |S'' - S'|,$$

mentre d'altro canto con procedimento analogo a quello testè tenuto si dimostra che anche:

$$|S'' - S'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da ciò risulta $|S' - S| \leqq \varepsilon$, essendo ε una quantità piccola a piacere. Con ciò è dimostrato il teorema.

L'integrale considerato si designerà col simbolo $\int_A^B F(X)\, f(y_1)\, d\, X$.

Risulta poi chiaramente dal modo con cui fu calcolata la somma S che se la suddivisione della differenza tra B, A relativamente a $F(X)\, f(y_1)$ si fosse fatta partendo da B e procedendo verso A, procedendo cioè in senso inverso e si fosse quindi in base a questa suddivisione calcolata la somma analoga a S, il limite della somma così calcolata al tendere simultaneamente e indefinitamente a 0 delle porzioni in cui fu suddivisa la differenza tra A, B relativa a $F(X)\, f(y_1)$ sarebbe $=$ all'integrale che è il limite della somma S studiata dianzi, preso con segno negativo.

2. I concetti testè esposti si possono estendere opportunamente in modo da giungere, per le operazioni di più operazioni I variabili, a concetti analoghi. Ci limiteremo a considerare il caso più semplice, quello cioè d'una funzione di due sole operazioni I variabili, non presentando poi alcuna differenza sostanziale da questo caso il caso d'una funzione di più operazioni variabili. Siano dunque al solito X_1, X_2 le due operazioni variabili da considerarsi, $F(X_1, X_2)$ una loro funzione, $f(y_1)$ la funzione oggetto relativamente alla quale $F(X_1, X_2)$ si considera definita in un certo campo. Ciò premesso, in detto campo di determinazioni dell'insieme X_1, X_2 nel quale è definita $F(X_1, X_2)$ relativamente a $f(y_1)$ assumansi a piacere due determinazioni speciali A_1, B_1 di X_1 e due determinazioni speciali A_2, B_2 di X_2. Si consideri quindi l'espressione che s'ottiene calcolando nel modo esposto nel paragrafo precedente l'integrale definito di $F(X_1, X_2)$ relativamente a $f(y_1)$ fra i limiti B_1, A_1 considerando cioè $F(X_1, X_2)$ come funzione della sola X_1, vale a dire tenendo fissa X_2, poi calcolando nello stesso modo l'integrale definito dell'espressione così ottenuta (la quale così dipenderà solo da X_2) fra i limiti B_2, A_2. Vale a dire, detto $H(X)\, f(y_1)$ il risultato della prima integra-

zione (esso dipende come s'è detto solo da X_2), si dovrà calcolare l'integrale definito di $H(X_2)$ relativamente a $f(y_1)$, fra i limiti B_2, A_2. Ora, l'espressione che così s'ottiene si dirà: « Integrale definito doppio di $F(X_1, X_2)$ relativamente a $f(y_1)$ calcolato fra i limiti B_1, A_1 e B_2, A_2 » oppure anche più semplicemente « Integrale definito doppio di $F(X_1, X_2)$ calcolato fra gli accennati limiti. »

Così quest'integrale doppio sarà il limite, se detto limite esiste, dell'espressione:

$$S = \sum_h \sum_k \left\{ (A_{2_{h+1}} - A_{2_h})(A_{1_{k+1}} - A_{1_k}) F(A_{1_k} A_{2_h}) f(y_1) \right\},$$

ove le A_{2_h}, A_{1_k} ($h = 0, 1, 2 \ldots \mu - 1$, $k = 0, 1, 2 \ldots \nu - 1$, ove μ, ν siano numeri finiti e si designi A_2 anche con A_{2_0}, A_1 con A_{1_0}) sono le determinazioni rispettive di X_2, X_1 che servono alla suddivisione delle due differenze di B_2, A_2 e B_1, A_1 relative rispettivamente alle funzioni $H(X_2) f(y_1)$, $F(X_1, X_2) f(y_1)$, al tendere simultaneamente e indefinitamente a O delle differenze:

$$\bar{\delta}_h = \frac{(A_{2_{h+1}} - A_{2_h}) H(A_{2_h}) f(y_1)}{H(A_{2_h}) f(y_1)},$$

$$\delta_k = \frac{(A_{1_{k+1}} - A_{1_k}) F(A_{1_k} A_2) f(y_1)}{F(A_{1_k} A_2) f(y_1)}.$$

E come nel caso precedente d'un integrale d'una funzione d'una sola operazione variabile si dimostra che il limite di S è indipendente dal modo particolare con cui tendono a 0 le δ_k, $\bar{\delta}_h$.

V'è poi da osservare che non essendo le operazioni I, in generale permutabili fra loro non rimarrà l'espressione:

$$\bar{\delta}_h \delta_k \left\{ F(A_{1_k} A_{2_h}) f(y_1) \right\}, \tag{19}$$

inalterata quando si eseguisca l'integrazione con ordine inverso a quello tenuto nel calcolare l'integrale considerato, talchè detto integrale muterà quando si inverta l'ordine delle integrazioni.

L'integrale doppio considerato, si designerà col simbolo:

$$\int_{A_2}^{B_2} \int_{A_1}^{B_1} F(X_1 X_2) f(y_1)\, d X_1\, d X_2, \tag{19'}$$

se esso si consideri come limite della somma S formata di termini ciascuno dei quali abbia la forma (19): si designerà col simbolo:

$$\int_{A_1}^{B_1}\int_{A_2}^{B_2} F(X_1 X_2) f(y_1)\, d X_1\, d X_2,$$

quando sia il limite d'una somma analoga a S, ma ottenuta integrando prima rispetto a X_2, poi rispetto a X_1.

3. Ora daremo per il calcolo qui studiato un'estensione del concetto d'integrale indefinito. Si consideri pertanto di nuovo l'integrale definito semplice dell'espressione $F(X) f(y_1)$ contenente una sola operazione variabile: sia ancora quest'integrale:

$$\int_A^B F(X) f(y_1)\, d X.$$

Anzitutto osserviamo, il che ci sarà utile più innanzi che se si fissa una terza determinazione C di X soggetta alla sola limitazione d'essere compresa nel campo delle determinazioni di X nel quale $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$ risulta dal modo stesso con cui si determina l'integrale definito d'una funzione dell'operazione X relativamente a una certa funzione oggetto $f(y_1)$, fra due limiti assegnati, essere:

$$\int_A^C F(X) f(y_1)\, d X = \int_A^B F(X) f(y_1)\, d X + \int_B^C F(X) f(y_1)\, d X. \tag{20}$$

Si noti che naturalmente il secondo termine del secondo membro della (20) fu calcolato in base a una certa suddivisione della differenza di C, B relativa alla funzione $F(X) f(y_1)$ fatta in modo analogo a quello con cui fu fatta la suddivisione in porzioni della differenza di B, A relativamente sempre a $F(X) f(y_1)$ per calcolare l'integrale che figura nel primo termine del secondo membro dello stesso (20). Così si avrà anche:

$$\int_B^C F(X) f(y_1)\, d X = \int_A^C F(X) f(y_1)\, d X - \int_A^B F(X) f(y_1)\, d X. \tag{20'}$$

Ciò posto supponiamo che in un integrale definito (nel senso da noi dato a questa denominazione) della forma:

$$\int_A^B F(X)\, f(y_1)\, d\, X,$$

l'estremo superiore sia invece che una determinazione fissa di X, la stessa operazione variabile X: è chiaro che allora ogni determinazione dell'integrale in parola dipenderà dalle speciali determinazioni dell'estremo (o limite) d'integrazione variabile: talchè sarà una funzione di detto estremo, intendendosi per funzione dell'operazione X anche un'espressione della forma $F(X)\, f(y_1)$. Perciò l'integrale $\int_A^X F(X)\, f(y_1)$ si potrà anche designare con $\Phi(X)\, f(y_1)$ ove si designi con $\Phi(X)$ una certa funzione di X. Così per ogni speciale determinazione di X, fatta la suddivisione in porzioni nel modo dianzi indicato della differenza tra questa e A relativamente a $F(X)\, f(y_1)$ s'avrà una speciale determinazione (o un certo numero di speciali determinazioni) di $\Phi(X)\, f(y_1)$. Ora questa funzione $\Phi(X)\, f(y_1)$ si dirà « Integrale indefinito della funzione $F(X)$ di X relativamente alla funzione $f(y_1)$ calcolato rispetto a X » o più brevemente anche « integrale indefinito della funzione $F(X)\, f(y_1)$ calcolato rispetto a X ». Sull'integrale indefinito, di cui fu ora introdotto il concetto si hanno i seguenti teoremi:

Teorema I. Designato l'integrale indefinito di $F(X)\, f(y_1)$ calcolato rispetto a X col simbolo $\Phi(X)\, f(y_1)$ la funzione di X, $\Phi(X)$ è continua relativamente a $f(y_1)$ per tutte le determinazioni di X per le quali è continua $F(X)$.

Infatti, considerata una determinazione generica X contenuta nell'accennato campo, detto ΔX un incremento della solita forma I_k con k costante si ha:

$$\int_A^{\mathsf{X}+\Delta X} F(X)\, f(y_1)\, d\, X - \int_A^{\mathsf{X}} F(X)\, f(y_1)\, d\, X = \int_{\mathsf{X}}^{\mathsf{X}+\Delta X} F(X)\, f(y_1)\, d\, X\,, \qquad (21)$$

ove per calcolare l'integrale che figura nel secondo membro si sia suddivisa la differenza tra X, $\mathsf{X} + \Delta X$ relativa a $F(X)\, f(y_1)$ in porzioni le quali in questo caso saranno costanti, cioè frazioni di k. Siano $\delta_m^{(k)}$ $(m = 0, 1, 2\ .. \nu - 1)$ queste porzioni costanti: dette $\Delta_m X\, (m = 1, 2 \ldots)$ le operazioni intermedie considerate che servirono cioè a suddividere la differenza in parola, $\Delta_m . X$

non sarà altro che un' operazione della forma $I_{\delta_m k}$: sarà pertanto: mantenendo le precedenti posizioni:

$$\left.\begin{aligned}\int_{X}^{X+\Delta X} F(X) f(y_1)\, d\,X &= \Phi(X+\Delta X) f(y_1) - \Phi(X) f(y_1) = \\ &= \sum_m I_{\delta_m k}\, \Phi(X+\Delta_m X) f(y_1).\end{aligned}\right\} \quad (21')$$

Da quest'uguaglianza risulta che se $X + \Delta X$ appartiene ancora al campo di determinazioni di X nel quale $F(X)$ è definita relativamente a $f(y_1)$ dalla continuità per la determinazione X di X relativamente a $f(y_1)$ di $F(X)$ deriva la continuità di $\Phi(X)$ per questa stessa determinazione di X relativamente a $f(y_1)$. Invero, sodisfatta l'accennata condizione si può, scegliendo opportunamente ΔX fare in modo che l'ultimo termine dell'uguaglianza ora scritta abbia il modulo inferiore ad una quantità fissata a nostro arbitrio. Ciò avverrà quindi anche del secondo membro. *c. d. d.*

Teorema II. Dall'essere: $\Phi(X)$ l'integrale indefinito di $F(X)$ relativamente a $f(y_1)$ risulta essere $F(X) f(y_1)$ la derivata di $\Phi(X)$ rispetto a X: cioè l'integrazione indefinita e la derivazione rispetto a operazioni I sono operazioni inverse una all'altra.

Infatti, ripresa in esame la (21′), ad essa si potrà anche dar la forma:

$$\Phi(X+\Delta X) f(y_1) - \Phi(X) f(y_1) = \Delta X\, \Phi(X) f(y_1) + \Delta X\, I_\eta f(y_1),$$

designando η una funzione della variabile da cui dipende la funzione risultato in $\Phi(X)$ che tende a 0 con ΔX. E l'uguaglianza vale ancora chè ancora sussisterebbe la (21′), qualora ΔX rappresentasse $\frac{\Delta X f(y_1)}{f(y_2)}$ sempreché questo quoziente fosse una costante. Postici in questo caso, risulta chiaramente dalla uguaglianza ora scritta:

$$\frac{d\,\Phi(X) f(y_1)}{d\,X} = \lim_{\Delta X=0} \frac{\{\Phi(X+\Delta X) - \Phi(X)\} f(y_1)}{\Delta X} = F(X) f y_1). \qquad c.\ d.\ d.$$

Da questo teorema risulta che ad es. $\int_A^X X^m f(y_1)\, d\,X = \frac{X^{m+1} f(y_1)}{m+1}$.

L'integrale indefinito della funzione $F(X) f(y_1)$ calcolato rispetto a X si rappresenterà semplicemente col simbolo $\int F(X) f(y_1)\, d\,X$, come si fa per gli integrali indefiniti che si considerano nel calcolo ordinario.

Teorema III. L'integrazione sì definita che indefinita rispetto ad operazioni I è permutabile all'addizione.

Teorema IV. L'integrale indefinito della funzione $\Psi(X)\,F(X)\,f(y_1)$ designando al solito $\Psi(X)$, $F(X)$ due funzioni dell'operazione variabile X, calcolato rispetto a X è dato dal risultato dell'operazione $\Psi(X)$ applicata a $\int F(X)\,f(y_1)$ — l'integrale indefinito della funzione che ottiensi applicando l'operazione $\Psi'(X)$ a $\int F(X)\,f(y_1)$ (per qualunque determinazione di X).

Infatti, per dimostrare il primo di questi teoremi, osserviamo anzitutto che dal modo stesso con cui si calcolano gli integrali definiti qui considerati o indefiniti di funzioni della forma $F(X)\,f(y_1)$ rispetto all'operazione X, risulta che l'integrazione sì definita che indefinita di funzioni dell'accennata forma è permutabile all'addizione (ed alla sottrazione). Ciò risulta immediatamente dalla formola (ove siano $\Psi_i(X)\,(i=1\ldots m-1)\;m-1$ altre funzioni di X), e A, B e le δ abbiano sempre il solito significato):

$$\begin{aligned}\lim_{\delta_h=0}\delta &= \lim_{\delta_h=0}\sum_h \delta_h\Big\{F(A_h)+\Psi_1(A_h)\cdots+\Psi_{m-1}(A_h)\Big\}f(y_1)=\\ &=\lim_{\delta_h=0}\sum_h\delta_h\,F(A_h)\,f(y_1)\cdots+\lim_{\delta_h=0}\sum_{\delta_h}\delta_h\,\Psi_{m-1}(A_h)\,f(y_1)=\\ &=\int_A^B\Big\{F(X)+\cdots\Psi_{m-1}(X)\Big\}f(y_1)\,dX=\\ &=\int_A^B F(X)\,f(y_1)\,dX+\cdots\int_A^B\Psi_{m-1}(X)\,f(y_1)\,dX,\end{aligned}$$

mentre una formola analoga si ha per gli integrali indefiniti: basta cioè nella formola precedente supporre variabile l'estremo superiore dell'intervallo d'integrazione.

Ed ora passiamo a dimostrare l'altro teorema enunciato. Pertanto, supposto che esso si verifichi, che sia cioè:

$$\left.\begin{aligned}\int\Psi(X)\,F(X)\,f(y_1)&=\Psi(X)\int F(X)\,f(y_1)\,dX-\\ &-\int\Big\{\Psi'(X)\int F(X)\,f(y_1)\,dX\Big\}dX,\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

si designino brevemente i due membri di quest'uguaglianza con $\Xi(X)\,f(y_1)$ e si calcoli la derivata di quest'espressione rispetto a X per una qualunque determinazione X di X soggetta solo alle ordinarie condizioni onde per $X = \mathsf{X}$ esista la derivata cercata. Sarà, in virtù di già dimostrate proprietà:

$$\frac{d\,\Xi(\mathsf{X})\,f(y_1)}{d\,X} = \Psi'(\mathsf{X})\left(\int F(X)\,f(y_1)\,d\,X\right)_{X=\mathsf{X}} + \Psi(\mathsf{X})\,F(\mathsf{X})\,f(y_1) -$$

$$- \Psi'(\mathsf{X})\int F(X)\,f(y_1)\,d\,X = \Psi(\mathsf{X})\,F(\mathsf{X})\,f(y_1),$$

da cui per essere l'integrazione indefinita rispetto a operazioni I, inversa alla derivazione segue che è esatta l'uguaglianza (22). *c. d. d.*

È chiaro che quest'ultimo teorema dà precisamente l'estensione pel calcolo qui studiato dell'integrazione per parti.

4. Con una semplice estensione delle precedenti considerazioni si giunge a dare il concetto d'integrale indefinito multiplo d'una funzione di più operazioni I variabili relativamente a una certa funzione oggetto. Prendasi infatti di nuovo l'espressione (19'):

$$\int_{A_2}^{B_2}\int_{A_1}^{B_1} F(X_1\,X_2)\,f(y_1)\,d\,X_1\,d\,X_2,$$

ove i simboli qui usati abbiano sempre lo stesso significato loro attribuito fin qui. In base alle precedenti considerazioni si dovrà dire « Integrale indefinito doppio della funzione delle operazioni variabili X_1, X_2, $F(X_1\,X_2)$ relativamente a $f(y_1)$ calcolata rispetto a X_1, X_2 » o semplicemente anche « Integrale indefinito doppio di $F(X_1\,X_2)\,f(y_1)$ calcolato rispetto a X_1, X_2 » l'espressione in cui si trasforma l'integrale (19) quando agli estremi fissi B_1, B_2 si sostituiscano rispettivamente le stesse operazioni variabili. Esso si designerà allora col simbolo:

$$\int\int F(X_1,\ X_2)\,f(y_1)\,d\,X_1\,d\,X_2.$$

Ripetendo le considerazioni svolte per le funzioni d'una sola operazione I variabile si dimostrano per questo integrale indefinito teoremi analoghi a quelli dimostrati nel paragrafo precedente. Essi sono i seguenti:

Teorema I. Nell'integrale indefinito doppio della funzione $F(X_1\,X_2)\,f(y_1)$ calcolato rispetto a X_1, X_2 compare una funzione di X_1, X_2 che è continua relativamente a $f(y_1)$ per tutte le determinazioni di X_1, X_2 per le quali ciò avviene di $F(X_1,\ X_2)$.

Teorema II. La derivata parziale prima dell'integrale indefinito di $F(X_1\,X_2)\,f(y_1)$ calcolato rispetto a X_1, X_2 presa rispetto a X_1 è = per ciascuna speciale determinazione di X_1 all'integrale indefinito di $F(X_1 X_2) f(y_1)$ calcolato rispetto a X_2, e la derivata parziale prima dello stesso integrale indefinito preso rispetto a X_2 è = per ciascuna speciale determinazione di X_2 all'integrale indefinito di $F(X_1 X_2) f(y_1)$ preso rispetto alla sola X_1. Finalmente la derivata parziale mista del 2.° ordine dell'integrale indefinito doppio in parola (nel caso di due operazioni variabili vi è una sola derivata parziale mista del 2.° ordine) è la stessa funzione $F(X_1, X_2 f(y_1)$.

Teorema III. (Questo è identico al teorema III che fu dato per le funzioni d'una sola operazione I variabile.)

Teorema IV. Questo consiste nell'applicazione del teorema IV dato per le funzioni d'una sola operazione I variabile al caso di funzioni di più operazioni I variabili, ove ogni volta si consideri la funzione considerata come dipendente da una sola delle operazioni variabili che in essa figurano, dando a ciascuna delle altre una determinazione fissa.

Così anche i teoremi I e II si dimostrano nello stesso modo con cui si dimostrarono gli analoghi del paragrafo precedente, considerando ogni volta l'espressione da considerarsi come dipendente da una sola delle operazioni variabili che in essa figurano.

Il passaggio al caso di funzioni di un numero qualunque > 2 d'operazioni I variabili non presenta alcuna difficoltà. Per queste si ha la stessa trattazione fatta per il caso di due operazioni I variabili, caso al quale ci siamo ristretti per semplicità.

Nota al § 1 del cap. 6.° Si segnino nel piano d'una variabile complessa i punti corrispondenti rispettivamente alle funzioni di $y_{\mu+2}$, $\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_{\mu-1}$, per ogni valore speciale di $y_{\mu+2}$ compreso nel campo in cui dette espressioni sono atte a rappresentare funzioni analitiche. Si moltiplichi quindi all'infinito il numero delle δ_h $(h = 0, 1 \ldots)$, mentre ciascuna d'esse impiccolirà indefinitamente in modulo. Con ciò i punti segnati nel piano considerato andranno accostandosi sempre più l'uno all'altro indefinitamente, tendendo a confondersi. Così verranno a costituire una linea che si può riguardare come linea d'integrazione per l'integrale definito di funzioni della forma $F(X) f(y_1)$ calcolato rispetto ad X per quello speciale valore di $y_{\mu+2}$. Però l'estremo inferiore del primo dei tratti δ_h e quello superiore dell'ultimo, i quali sono i limiti d'integrazione rimarranno fissi.

Nota 1.ª ai §§ 3, 4 del cap. 6.° L'integrale indefinito d'espressioni dipendenti da operazioni I variabili, quale fu qui considerato, si determinerà sempre a meno d'un'espressione costante rispetto alle operazioni variabili considerate, espressione che si determina in base agli estremi inferiori, i quali sono fissi dell'intervallo d'integrazione. Invero poi, derivando l'espressione ottenuta mediante l'integrazione si ricade sulla funzione da integrarsi, poichè la derivata dell'espressione costante in parola è, come si vide nel cap. 4.°, sempre nulla. Ciò corrisponde perfettamente ad una delle proprietà fondamentali degli integrali indefiniti studiati nel calcolo ordinario.

Nota 2.ª agli stessi paragrafi. Riguardo al teorema che « L'integrazione sì definita che indefinita d'espressioni dipendenti da operazioni I variabili, eseguita rispetto a queste stesse operazioni è permutabile all'addizione, si osservi che quando si tratti di calcolare sì l'integrale indefinito che quello definito entro certi limiti, d'un'espressione della forma $F(X)f(y_1)$ ove $F(X)$ sia una serie di potenze dell'operazione I variabile: X, si presenterà sempre la questione, per poter dire che l'espressione ottenuta mediante l'integrazione rappresenti effettivamente l'integrale cercato, di stabilire se la funzione di X che figura in detta espressione ammetta un campo di convergenza relativamente alla funzione $f(y_1)$ e quale sia questo campo, dato che esista.

II.

Nel precedente lavoro diedi l'abbozzo d'un calcolo, nel quale si consideri come elemento l'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, che designisi in generale col nome d'operazione I. Così definii operazioni facenti riscontro alle operazioni fondamentali dell'aritmetica: indi, date la definizione di funzione d'operazioni I e le proprietà fondamentali di queste funzioni, studiai operazioni analoghe alle operazioni fondamentali del calcolo infinitesimale. Ora mi propongo, fondandomi sui concetti svolti in detto lavoro, il cui concetto fondamentale è quello d'operazione I variabile, suscettibile cioè d'assumere infinite determinazioni distinte in corrispondenza alle infinite determinazioni distinte che si possono far assumere alla sua funzione caratteristica e alla sua linea d'integrazione, d'entrare in maggiori dettagli sull'argomento studiato. E per primo qui ebbi per scopo di svolgere una teoria delle funzioni d'operazioni I variabili. Anzitutto, per far ciò, stabilii una corrispondenza univoca fra i punti dello spazio e le infinite determinazioni che è suscettibile d'assumere una certa operazione I variabile. Indi, detta $\mathfrak{X}$ una certa determinazione di quest'operazione variabile X corrispondente con un valore generico della variabile, da cui in X dipende la funzione risultato, diedi il modo per riguardare l'insieme delle determinazioni di X corrispondenti a un certo insieme di valori dell'accennata variabile, come rappresentato da una curva piana nello spazio, ciascun punto della quale sia il punto rappresentativo della determinazione di X corrispondente a un determinato valore dell'accennata variabile. Con ciò ogni espressione che dipenda da X sarà una funzione d'una certa curva piana chiusa variabile, che è la curva rappresentativa di X. Indi, per funzione di questa linea variabile calcolata per una certa determinazione di essa, che dirò brevemente L, si dovrà intendere la determinazione d'una data espressione dipendente da X, calcolata in un punto generico di L, laddove altre volte saranno da considerarsi determinazioni di una tale espressione corrispondenti a un punto specificato d'una data determinazione della curva rappresentativa di X e ciò si porrà in evidenza nel simbolo, con cui si rappresenterà questa determinazione dell'accennata funzione. E in tutto il corso del lavoro uso indifferentemente i termini « funzione d'un'operazione X » o funzione della sua linea rappresentativa, essendo questi termini equivalenti. Inoltre applico alle funzioni che qui vengono considerate i concetti svolti dal prof. VOLTERRA (*) pure nello studio di funzioni dipendenti da linee nello spazio, dando anche un breve cenno delle sue considerazioni sulle espressioni analoghe ai parametri differenziali; ma non entro in maggiori dettagli su ciò, perchè questo richiede l'introduzione d'altri concetti, non strettamente attinenti all'argomento qui studiato, e che mi riservo di considerare, altrove, a parte.

Nel secondo capitolo del lavoro prendo in considerazione le funzioni dipendenti da operazioni I variabili, rappresentate da serie di potenze (simboliche) delle operazioni da cui dipendono, applicate a una certa funzione oggetto; a questo proposito dò concetti che possono riguardarsi come un'estensione dei concetti fondamentali della teoria delle funzioni del WEIERSTRASS. Da ultimo metto in connessione quanto esposi nel secondo capitolo con quanto trovasi esposto nel primo. A questo proposito conviene avvertire che, quando si parla di funzioni d'una linea nello spazio corrispondenti alle determinazioni di questa comprese in una certa regione dello spazio, in quella cioè in cui

(*) V. VOLTERRA, *Sulle funzioni dipendenti da linee* e *Un'estensione della teoria di Riemann delle funzioni d'una variabile complessa.* Complessivamente 5 Note nei *Rendiconti* della R. Acc. dei Lincei, annate 1887 e 1888 e *Sur une généralisation de la theorie des fonctions d'une variable imaginaire.* Acta Mathematica, vol. XII.

è definita la funzione considerata [tale cioè che le determinazioni dell'operazione variabile da cui dipende l'espressione considerata, corrispondenti a'suoi punti appartengono all'insieme in cui è definita quell'espressione (v. lav. prec.)], si potranno anche prendere in considerazione determinazioni di detta linea, comprese solo in parte nell'accennata regione, e allora però si dovrà, senz'aggiungere altro, sottintendere che siano prese in considerazione soltanto le porzioni della linea in questione comprese entro la detta regione.

I concetti principali del WEIERSTRASS dei quali è qui data un'estensione sono:

a) Quello di cerchio di convergenza, al quale fa qui riscontro quello di sfera di convergenza.

b) Quello di continuazione analitica.

c) Quella di funzione analitica e di suo elemento.

1.°

1. *Metodo per stabilire una corrispondenza fra un'operazione I e una linea nello spazio e conseguenze che se ne ricavano.* Si consideri un'operazione I variabile: X: la sua funzione caratteristica sarà una funzione variabile nella sua forma, di due variabili complesse indipendenti, che designeremo con y_1, y_2 intendendo con y_1 la variabile d'integrazione, con y_2 quella da cui dipende la funzione risultato: di più l'accennata funzione caratteristica dovrà, qualunque sia la determinazione che le vien data (I^o) (*) essere funzione analitica ed uniforme delle variabili da cui dipende e dovrà, come vedremo essere in generale, anche regolare in tutta una regione del piano y_1. Ciò posto, ogni determinazione di questa funzione varierà in un certo piano, essendo essa una quantità complessa: così ad ogni coppia di valori di y_1, y_2 corrisponderà un punto del piano, in cui varia una certa determinazione della nostra funzione. Si consideri pertanto una di queste determinazioni, che designeremo con $a(y_1 y_2)$: e sia π_a il piano, in cui essa varia. Designisi con R_1 la regione del piano y_1, in cui essa è regolare, come funzione di y_1: si converrà allora di prendere in considerazione, come linee d'integrazione da attribuirsi alle singole determinazioni di X solo linee comprese entro R_1 e

(*) Colla designazione (I^o) intenderemo di richiamare cose esposte nel precedente lavoro intorno a quest'argomento.

come funzioni oggetto, solo funzioni di y_1 che, oltre ad essere analitiche uniformi (I^o), siano regolari entro R_1. Con questa restrizione per individuare X, quando se ne sia fissata la funzione caratteristica, basterà che siano determinati gli estremi della linea d'integrazione, come si sa dalla teoria ordinaria delle funzioni d'una variabile complessa. Così, quando si sia assunto come estremo inferiore di detta linea d'integrazione un certo punto arbitrario di R_1, X, sotto le condizioni poste, dipenderà esclusivamente dalla funzione caratteristica e dall'estremo superiore della linea d'integrazione. Assumiamo ora, dopo aver fissato l'estremo inferiore della linea d'integrazione di X, una semplice infinità di determinazioni dell'estremo superiore, comprese tutte in R_1, che supporremo rappresentate univocamente dai punti d'una retta indefinita nello spazio, di cui fisseremo l'estremo inferiore che designeremo con P. Prendiamo quindi in esame un insieme di infiniti di piani passanti però tutti per P, ciascuno dei quali sia sostegno d'una data determinazione della funzione caratteristica di X, in guisa che ciascun punto d'uno qualsiasi di questi piani individui il valore della relativa funzione corrispondentemente a una certa coppia di valori di y_1, y_2. Detta ancora $a(y_1 y_2)$ una certa determinazione della funzione caratteristica di X, π_a il piano in cui essa varia, si fissi in π_a un punto M, che rappresenti il valore di $a(y_1 y_2)$ corrispondente al valore di y_1 che corrisponde al punto fissato come estremo inferiore della linea d'integrazione e ad un dato valore di y_2, si conduca per questo punto una parallela alla retta, presa come sostegno dei punti imagine delle assunte determinazioni dell'estremo superiore della linea d'integrazione in parola, retta che d'ora in avanti designeremo per semplicità con r. Fissato un punto arbitrario T su r, con che è fissata una data determinazione dell'estremo superiore della linea d'integrazione di X, si prenda sulla parallela a r condotta per M, un segmento avente origine in M, orientato come r e di lunghezza $= PT$. Il suo estremo che designeremo con V sarà così univocamente individuato, quando si siano fissati, π_a, M, T. Ora facciasi variare y_2 per una successione continua semplicemente infinita di valori, in guisa che il punto M descriva una curva chiusa in π_a, i cui punti corrisponderanno univocamente ai valori della successione, per la quale varia y_2. In tal guisa V descriverà esso pure una curva chiusa situata in un piano parallelo a π_a, quando per ognuno dei punti della curva descritta da M si ripeta la costruzione fatta per M. Così ogni punto della curva descritta da V è individuato:

a) da una certa determinazione dell'estremo superiore della linea d'integrazione di X;

b) dal valore d'una determinazione della funzione caratteristica della stessa X assegnata come determinazione corrispondente a un dato valore di y_2, quando per ogni determinazione di questa funzione s'assuma il valore che corrisponde al valore di y_1 assunto come estremo superiore della linea d'integrazione di X.

Pertanto ogni punto di questa curva si potrà assumere come imagine d'una certa determinazione di X corrispondente a un dato valore di y_2 e l'intera curva si potrà assumere come imagine di questa stessa determinazione di X in corrispondenza a un dato insieme di valori di y_2, chè detta curva è individuata dall'estremo della linea d'integrazione attribuito alla stessa X e da una certa determinazione della sua funzione caratteristica. È chiaro che passando da uno ad altro punto di r e da una ad altra determinazione di X, con che varia nello spazio il piano π_a, pur passando per P, varierà naturalmente la curva descritta da V. Per tal maniera, detta $f(y_1)$ una certa funzione oggetto sodisfacente alle suenunciate condizioni, sì X e $Xf(y_1)$ che $F(X)$, $F(X)f(y_1)$, designando $F(X)$ una funzione di X si troveranno riferite ad una certa curva variabile nello spazio (la curva imagine di X per un certo insieme di valori di y_2, la quale per quanto si vide varia in corrispondenza alle determinazioni che si danno a X). Perciò, detta L questa curva variabile si potranno riguardare come sue funzioni tutte le accennate espressioni. Così potremo designare queste funzioni con simboli della forma $\Phi((L))$, $\Psi((L))$ (*), ecc., ecc., i quali rappresenteranno operazioni funzionali quando rappresentino espressioni quali X, $F(X)$; quantità vere e proprie nel caso che rappresentino $Xf(y_1)$, $F(X)f(y_1)$ ecc. Così esse rimangono definite come funzioni d'una linea nello spazio, in modo analogo alle funzioni studiate dal prof. VOLTERRA (op.^{e} cit.^{e}). Riferiti i punti delle linee assunte come variabili ad un sistema d'assi coordinati ortogonali x, y, z, e, posta l'ipotesi che le coordinate di ciascun punto d'una determinazione qualsiasi della linea L siano funzioni continue dell'arco s della curva, possiamo estendere, alle funzioni d'operazioni I i concetti svolti dallo stesso prof. VOLTERRA, rilevando poi il significato che essi hanno nel calcolo qui studiato.

2. *Estensione alle funzioni d'operazioni I della teorica del prof.* VOLTERRA. Anzi tutto osserveremo che in base alla definizione data (I^o) di pro-

(*) Seguendo l'esempio del prof. VOLTERRA si pose il simbolo L entro una doppia parentesi ad impedire che le funzioni d'una linea così definita si potessero confondere con funzioni nel senso ordinario della parola.

dotto d'un'operazione I per un fattore costante e alla considerazione fatta (ibid.) di potersi riguardare l'applicazione d'un'operazione I ad una certa funzione-oggetto come una moltiplicazione simbolica, tutti i concetti di derivata, integrale, ecc., che verranno esposti in questo capitolo, si applicheranno indistintamente sì alle funzioni quali $X f(y_1)$, $F(X) f(y_1)$, le quali rappresentano quantità propriamente dette, sì al caso in cui la funzione di L da considerarsi sia X, o $F(X)$. Così ecco che cosa dovrà riguardarsi per integrale definito di X fra gli estremi P_1, P_2, designandosi rispettivamente con P_1, P_2 due punti dello spazio. Si consideri cioè il limite della somma dei prodotti $\delta_\mu X_\mu (\mu = 1 \dots p)$, ove designi $\delta_\mu (\mu = 1 \dots p)$ il μ^{esimo} dei tratti di lunghezza arbitraria, in cui si suddivise la retta P_1, P_2 segnando su essa fra P_1, P_2 una successione di punti $P'_1 \dots P_1^{(p-1)}$, e $X_\mu (\mu = 1 \dots p)$ designi la determinazione di X corrrispondente al punto $P_1^{(\mu-1)}$ (per uniformità nelle notazioni si designi P_1 anche con $P_1^{(0)}$). Questo limite sarà da assumersi come integrale definito di X fra gli estremi P_1, P_2.

Così per quoziente d'una data determinazione A di X per la lunghezza δ d'un dato segmento di retta nello spazio si dovrà intendere l'operazione che trasforma una certa funzione di y_1, $f(y_1)$ in $\frac{A f(y_1)}{\delta}$ e questo quoziente si designerà col simbolo $\frac{A}{\delta}$. E si osservi da ultimo che per rappresentare un'integrale di X calcolato rispetto ad es. alla variabile x col simbolo $X\,d\,x$ si dovrà intendere l'operazione che in base alle convenzioni poste (I^o) dovrebbe designarsi con $d\,x\,X$. Stabilito questo si possono applicare i concetti del prof. Volterra ad una funzione generica di L, $\Phi((L))$, sia che questa designi una quantità propriamente detta, sia che essa designi un'operazione I, o una sua funzione. Daremo pertanto un breve riassunto dei risultati a cui pervenne detto autore, riferendoci, come si disse, ad una funzione generica della linea L, $\Phi((L))$:

a) *Derivate rispetto agli assi della funzione* $\Phi((L))$. *Sua variazione e sua rappresentazione mediante un integrale definito.* Detta ancora $\Phi((L))$ la funzione d'una linea L variabile, definita nel modo indicato in (1), quando si voglia specificare la determinazione che assume $\Phi((L))$ in corrispondenza oltre che a una certa determinazione L_1 di L anche a un certo valore della variabile da cui nell'operazione variabile X rappresentata dalla linea L dipende la funzione risultato, vale a dire (ν, 1) la determinazione che assume $\Phi((L))$ in un dato punto a di L_1 si userà, seguendo l'esempio del prof. Volterra il simbolo: $\Phi((L_1, a))$. È chiaro che a potrà designare anche un punto variabile su L, nel qual caso $\Phi((L_1, a))$ designerà la determinazione di $\Phi(L)$ corrispondente a L_1, calcolata per un dato punto di L_1 e variante naturalmente da uno ad altro punto di detta linea. E quando la posizione del punto variabile sia definita dalla lunghezza s dell'arco compreso fra esso ed un punto fisso, si potrà alla notazione dianzi introdotta sostituire l'altra $\Phi((L_1, s))$.

Intesa per intorno d'una linea quale L_1 la superficie tubolare descritta da una curva chiusa concatena a L_1, che si sposti lungo essa sino a ritornare nella posizione iniziale, si potrà per le funzioni di L che siano vere e proprie quantità dare la definizione di continuità « entro un intorno assegnato D d'una certa determinazione L_1 di L. Si dirà cioè che una di queste funzioni $\Phi((L))$ è continua entro un intorno D di L_1 (ove D, L_1 abbiano il significato loro testè attribuito) » quando comunque si scelga la quantità positiva ε, cioè per quanto piccola essa sia è possibile trovare un'altra linea L'_1 (*) la quale al pari di L percorra longitudinalmente il tubo racchiuso da D, tale che si abbia:

$$\mathrm{mod}\,|\,\Phi((L'_1)) - \Phi((L_1))\,| < \varepsilon,$$

intendendo poi che questa disuguaglianza sussista per ogni coppia di punti corrispondenti di L_1, L'_1. (Si designino colla denominazione di « punti corrispondenti » di due linee nello spazio rappresentanti ciascuna una data operazione I, due punti situati rispettivamente su queste due linee, che siano i corrispondenti rispettivamente delle determinazioni delle operazioni I rappresentate dalle due linee in parola, relative ad uno stesso valore di y_2.) Questa condizione di continuità non è però sufficiente: la funzione in discorso deve sodisfare anche quest'altra condizione. Dette cioè σ_1, σ_2, σ_3, le aree comprese fra le proiezioni rispettive di L_1, L'_1 nei tre piani coordinati e posto $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$, il rapporto:

$$\mathrm{mod}\,\frac{[\Phi((L'_1)) - \Phi((L_1))]}{\sigma},$$

non dovrà mai oltrepassare un limite finito assegnato M.

Quando ora ad ogni punto d'un arco $A\,B$ d'una determinazione generica della curva variabile L, determinazione che designeremo pure con L, si dia uno spostamento in direzione parallela all'asse x avente una certa lunghezza

(*) La quale sia però piana, altrimenti non può stabilirsi la corrispondenza univoca, come quella ora vista per la linea L, fra i suoi punti e le singole determinazioni d'una operazione I corrispondentemente a certi valori di y_2.

che designeremo con Δx, la quale sia la stessa per ogni punto dell'arco, si otterrà, come luogo degli estremi di tutti questi segmenti un nuovo arco $C\,D$ d'una curva piana essa pure, come si vide essere L (v. 1). La linea, di cui fa parte $C\,D$ è al pari d'ogni linea piana nello spazio suscettibile di rappresentare un'operazione I: infatti il punto, nel quale il piano in cui essa giace incontra la retta r indicherà l'estremo superiore della linea d'integrazione dell'operazione I che essa rappresenta, e il piano parallelo a questo stesso piano passante per P sarà quello su cui varia la funzione caratteristica. Premesso questo, detta ancora $\Phi\,((L))$ una funzione generica (quantità od operazione) della linea L, e detto brevemente l l'arco $A\,B$, con $\Phi\,((l))$ si designerà la determinazione della funzione in parola in corrispondenza ad un valore generico della variabilità da cui in X dipende la funzione risultato fra quelli relativi ai singoli punti di l, riguardati come punti imagine d'altrettante determinazioni di X. Quando dall'arco l si passi all'arco $A\,B\,C\,D$, ove $A\,B$ designando gli estremi di l, è chiaro che $A\,C$, $B\,D$ saranno segmenti paralleli a x, $\Phi\,((l))$ diverrà naturalmente $\Phi\,((l'))$, designando l' la linea $A\,B\,C\,D$. È chiaro pertanto che se, come punto generico, in cui calcolare $\Phi\,((l'))$ assumiamo un punto di $A\,C$ o di $B\,D$, otterremo una determinazione di Φ diversa da quelle che corrispondono a punti di l o di l'. Il punto in discorso apparterrà cioè ad un'altra linea avente le stesse proprietà di l, l' e di cui si ha l'operazione I corrispondente mediante le considerazioni precedenti. È chiaro che i singoli punti dei due tratti rettilinei in discorso apparterranno a linee rappresentative d'operazioni I diverse. Designata $\Phi\,((l')) - \Phi\,((l))$ semplicemente con $\Delta_x \Phi\,((l))$ tenuto fermo il punto A, il limite a cui tende il quoziente:

$$\frac{\Delta_x \Phi\,((l))}{\Delta x \,.\, l}, \tag{1}$$

al tendere a 0 simultaneamente di Δx e di l, nell'ipotesi che detto limite sia indipendente e dalla parte rispetto ad A, in cui trovasi B e dal modo, con cui Δx ed l tendono verso zero, si dirà « derivata di $\Phi\,((l))$ rispetto a x ». Questo limite sarà dunque un'operazione funzionale o una quantità nel senso ordinario della parola. In questo secondo caso v'è luogo a ricercare il modo con cui il rapporto ((1)) tende al suo limite. Dicasi λ questo limite: se qualunque sia la linea L che si prende in considerazione e qualunque sia il punto A scelto su essa, per quanto piccola si assuma la quantità η se ne può determinare un'altra ω tale che per tutti i valori di Δx e di l compresi fra $-\omega$ e ω si abbia:

$$\operatorname{mod} \left| \frac{\Delta_r \Phi((l))}{\Delta x\, l} - \lambda \right| < \eta ,$$

si dirà che $\frac{\Delta_x \Phi((L))}{\Delta x\, l}$ tende al limite λ con « uniformità ».

Siccome poi l'accennata derivata dipende in generale, oltre che dalla linea L, anche dal punto A, questo limite si designerà con $\Phi'_x((L, s))$. E in modo analogo si definiranno le derivate di $\Phi((L))$ rispetto a y e a z, derivate che, seguendo il Volterra designeremo rispettivamente coi simboli: $\Phi'_y((L, s))$, $\Phi'_z((L, s))$.

Ciò posto, dato a tutti i punti della linea L uno spostamento avente per componenti lungo i tre assi rispettivamente $\varepsilon\,\xi(s)$, $\varepsilon\,\eta(s)$, $\varepsilon\,\zeta(s)$ (cioè $\varepsilon\,\xi(s)$ nella direzione dell'asse x, ecc., ecc.), è chiaro che si otterrà una nuova linea piana L' atta al pari della linea generica L a rappresentare una determinazione di X. Allora con procedimento dato dal Volterra si dimostra che è:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi((L')) - \Phi((L))}{\varepsilon} = \int_L (\Phi'_x \xi + \Phi'_y \eta + \Phi'_z \zeta)\, d\, s , \qquad (2)$$

ove si scrisse brevemente Φ'_x, anzichè $\Phi'_x((L, s))$, ecc., ecc., e dove $\Phi((L')) - \Phi((L))$ è suscettibile di rappresentare una differenza simbolica fra due operazioni funzionali o una differenza di due quantità a seconda rispettivamente dei due casi che si possono presentare per $\Phi((L))$. Quando si tratti di quantità vere e proprie, poichè il secondo membro della (2) differisce dalla variazione di $\Phi((L))$ per un infinitesimo d'ordine superiore a ε, si designerà col simbolo $\delta\,\Phi$ e si userà questo stesso simbolo anche quando si tratti d'operazioni funzionali. Se, per un dato spostamento infinitamente piccolo dei punti della linea L essa non mutasse, allora si avrebbe, posto:

$$\delta\, x = \lambda \frac{d\, x}{d\, s} d\, s , \qquad \delta\, y = \lambda \frac{d\, y}{d\, s} d\, s , \qquad \delta\, z = \lambda \frac{d\, z}{d\, s} d\, s ,$$

per un valore arbitrario di λ:

$$\delta\, \Phi = 0 = \int_L (\Phi'_x \alpha + \Phi'_y \beta + \Phi'_z \gamma)\, \lambda\, d\, s \ (*),$$

(*) Si ricordi che quando si parli d'un'operazione I che sia $= 0$, $0 =$ ad un'altra operazione, s'intende di dire che l'uguaglianza abbia luogo in via assoluta, cioè indipendentemente da qualsiasi funzione oggetto a cui possa essere applicata.

ove si designino rispettivamente con α, β, γ i coseni direttori della tangente a L, secondo i tre assi. Dovrà quindi essere:

$$\Phi'_x \alpha + \Phi'_y \beta + \Phi'_z \gamma = 0. \tag{3}$$

Quando sia soddisfatta la (3), si potranno sempre trovare tre (operazioni I o quantità a seconda rispettivamente dei due casi sopra distinti), A, B, C tali che sia:

$$\Phi'_x = \gamma B - \beta C, \qquad \Phi'_y = \alpha C - \gamma A, \qquad \Phi'_z = \beta A - \alpha B. \tag{4}$$

Si noti però che A, B, C potranno variare, A per un multiplo di α, B per un multiplo di β, C per un multiplo di γ {se si tratta d'operazioni I, A potrà cioè variare per $\mathrm{I}_{k\alpha}$ (v. I^o) essendo k un numero intero, ecc.}, purchè però siano i tre moltiplicatori di α, β, γ uguali fra loro, pur continuando a sodisfare le (3). In base a ciò, detto $d\sigma$ l'arco del parallelogrammo descritto dall'arco ds quando a' suoi singoli punti si dia uno spostamento di componenti δx, δy, δz, e detta n la normale a detto parallelogrammo, in base ad una formola stabilita dal prof. VOLTERRA si avrà:

$$\delta \Phi = \int_\sigma (A \cos n x + B \cos n y + C \cos n z)\, d\sigma. \tag{5}$$

Designeremo noi pure l'operazione consistente nello spostare la linea L sino a farla coincidere con L' colla denominazione: far passare una superficie Σ per queste due curve. Ciò posto, nell'ipotesi che si possano determinare le A, B, C corrispondentemente a ciascun punto di Σ, sempre in base al modo con cui si concepiscono i punti dello spazio come elementi rappresentativi d'altrettante operazioni I, applicando la formola (5) per ogni spostamento infinitamente piccolo, sarà:

$$\Phi((L')) - \Phi((L)) = \int_\Sigma (A \cos n x + B \cos n y + C \cos n z)\, d\Sigma. \tag{5'}$$

E supposto che L si sia presa in modo che $\Phi((L)) = 0$, $\Phi((L'))$ si potrà rappresentare mediante un'espressione avente la forma del secondo membro della (5'). Allora L' risulterà il contorno di Σ e fissata la direzione positiva della normale a L', facendo decrescere Σ fino a ridursi a un punto s'avrà:

$$\lim \frac{\Phi((L'))}{\Sigma} = A \cos n x + B \cos n y + C \cos n z,$$

limite che, in base a una definizione data dal prof. VOLTERRA si dirà « derivata di $\Phi((L))$ rispetto a Σ e si designerà con $\frac{d\Phi}{d\Sigma}$. Se la superficie Σ è normale all'asse x si ha $\frac{d\Phi}{d\Sigma} = A$, se è normale all'asse y, si ha $\frac{d\Phi}{d\Sigma} = B$, se è normale all'asse z si ha: $\frac{d\Phi}{d\Sigma} = C$. È per questo che A, B, C si dicono derivate di $\Phi((L))$ (calcolate per la determinazione L' di L) rispettivamente, rapporto ai piani yz, zx, xy e si designa A con $\frac{d\Phi}{d(y,z)}$, B col simbolo $\frac{d\Phi}{d(z,x)}$, C col simbolo $\frac{d\Phi}{d(x,y)}$. In base alle formole stabilite dal VOLTERRA, se da uno spazio si passi ad un altro nel quale i punti siano individuati da un sistema d'assi coordinati ortogonali ξ, η, ζ legati agli assi x, y, z da relazioni della forma:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = y(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = z(\xi, \eta, \zeta),$$

le quali siano tali da individuare una corrispondenza continua ed univoca fra i due spazi si ha, mantenendo al simbolo $\Phi((L))$ il significato datogli fin qui:

$$\frac{d\Phi}{d(\eta,\zeta)}(*) = \frac{d\Phi}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\eta,\xi)} + \frac{d\Phi}{d(x,z)}\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\Phi}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)},$$

$$\frac{d\Phi}{d(\zeta,\xi)} = \frac{d\Phi}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\Phi}{d(z,x)}\frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\Phi}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)},$$

$$\frac{d\Phi}{d(\xi,\eta)} = \frac{d\Phi}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\Phi}{d(z,x)}\frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\Phi}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)},$$

ove ad es. l'espressione $\frac{d(y,z)}{d(\eta,\xi)}$ designi il determinante funzionale di y, z rispetto a η, ζ $\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)}$ quella di z, x rispetto a η, ζ, ecc., ecc.

Altra proprietà notevole, da ricordarsi è che detta σ una superficie fatta passare per la linea L e limitata da questa, si avrà:

$$\Phi((L)) = \int_\sigma (A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz)\, d\sigma. \qquad (6)$$

(*) Per semplicità, quando ciò non rechi confusione si scriverà molte volte Φ anzichè $\Phi((L))$, ponendo anche L anzichè L', ad indicare una certa determinazione della linea variabile L.

Facendo decrescere L sino a ridursi a un punto, con che $\Phi((L))$ si riduce alla determinazione che detta funzione assume nel punto speciale a cui si riduce L, σ diviene una superficie chiusa sì che $\Phi((L))$ si riduce a 0. In base a noti principii di calcolo al secondo membro della (6) si può dar la forma:

$$\pm \int_S \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) d\,S,$$

ove designi S il volume racchiuso da σ. L'essere quest'ultima espressione $= 0$ richiede che sia:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

3. *Estensione al calcolo qui studiato del concetto di funzioni isogene e di loro derivate ed integrali. Estensione delle formole stabilite sulle funzioni isogene del prof.* Volterra. Prese in esame le due funzioni Φ, Ψ d'una certa linea L dello spazio, il prof. Volterra scompostele nelle loro parti reali ed imaginarie, sì che esse risultino poste sotto la forma:

$$\Phi = \Phi_1 + i\,\Phi_2, \qquad \Psi = \Psi_1 + i\,\Psi_2,$$

e posto:

$$\frac{d\,\Phi_1}{d(y,\,z)} = A_1, \qquad \frac{d\,\Phi_1}{d(z,\,x)} = B_1, \qquad \frac{d\,\Phi_1}{d(x,\,y)} = C_1,$$

$$\frac{d\,\Phi_2}{d(y,\,z)} = A_2, \qquad \frac{d\,\Phi_2}{d(z,\,x)} = B_2, \qquad \frac{d\,\Phi_2}{d(x,\,y)} = C_2,$$

$$\frac{d\,\Psi_1}{d(y,\,z)} = A'_1, \qquad \frac{d\,\Psi_1}{d(z,\,x)} = B'_1, \qquad \frac{d\,\Psi_1}{d(x,\,y)} = C'_1,$$

$$\frac{d\,\Psi_2}{d(y,\,z)} = A'_2, \qquad \frac{d\,\Psi_2}{d(z,\,x)} = B'_2, \qquad \frac{d\,\Psi_2}{d(x,\,y)} = C'_2 \ (*),$$

disse esistere legame d'isogeneità fra le due funzioni Φ, Ψ quando il rapporto:

$$\frac{d\,\Phi}{d\,\sigma} : \frac{d\,\Psi}{d\,\sigma} = \frac{(A_1 + i\,A_2)\cos n\,x + (B_1 + i\,B_2)\cos n\,y + (C_1 + i\,C_2)\cos n\,z}{(A'_1 + i\,A'_2)\cos n\,x + (B'_1 + i\,B'_2)\cos n\,y + (C'_1 + i\,C'_2)\cos n\,z},$$

ove σ designi la superficie condotta per L nel modo indicato dal citato au-

(*) Si noti, che per definire le derivate di Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2 rispetto ai piani il professore Volterra ricorse a considerazioni diverse da quelle su cui ci fondammo noi, come a quella di funzione di una linea di 1.° grado che non si può introdurre nel nostro calcolo: ma i suoi risultati si applicano del pari alle funzioni qui esaminate.

tore, sia indipendente dalla direzione di n. Quando sussista questa proprietà sarà:

$$\frac{A_1 + i A_2}{A'_1 + i A'_2} = \frac{B_1 + i B_2}{B'_1 + i B'_2} = \frac{C_1 + i C_2}{C'_1 + i C'_2},$$

dalle quali poi deriva una serie di altre relazioni che ricorderemo più innanzi. Applicando ora quanto precede alle funzioni qui studiate premetteremo che prese in esame due funzioni $\Phi((L))$, $\Psi((L))$ d'una linea L variabile, che rappresentino operazioni funzionali e, posto:

$$\frac{d\,\Phi}{d(y,\,z)} = A, \qquad \frac{d\,\Phi}{d(z,\,x)} = B, \qquad \frac{d\,\Phi}{d(x,\,y)} = C,$$

$$\frac{d\,\Psi}{d(y,\,z)} = A', \qquad \frac{d\,\Psi}{d(z,\,x)} = B', \qquad \frac{d\,\Psi}{d(x,\,y)} = C',$$

per quoziente: $\frac{d\,\Phi}{d\,\sigma} : \frac{d\,\Psi}{d\,\sigma}$, mantenendo pel simbolo σ il significato datogli in (2) si dovrà intendere il quoziente simbolico dell'operazione:

$$A \cos n\,x + B \cos n\,y + C \cos n\,z,$$

divisa (per la spiegazione di questi concetti v. I^o) per l'operazione:

$$A' \cos n\,x + B' \cos n\,y + C' \cos n\,z.$$

Questo quoziente sarà cioè l' operazione che risulta da:

$$A \cos n\,x + B \cos n\,y + C \cos n\,z,$$

applicandole l'inversa dell'operazione:

$$A' \cos n\,x + B' \cos n\,y + C' \cos n\,z.$$

Estendendo al caso nostro la definizione data in caso analogo dal prof. Volterra diremo che tra Φ, Ψ esiste legame d' isogeneità quando il quoziente (simbolico):

$$\frac{A \cos n\,x + B \cos n\,y + C \cos n\,z}{A' \cos n\,x + B' \cos n\,y + C' \cos n\,z},$$

sia indipendente dalla direzione di n, il che avviene quando questo quoziente sia $= \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$. Allora poi esso si dirà « derivata di Φ rispetto a Ψ e si designerà col simbolo: $\frac{d\,\Phi}{d\,\Psi}$ ». Nel caso particolare in cui sia Ψ la stessa operazione variabile X, l'accennato rapporto rappresenterebbe la derivata d' una certa funzione dell'operazione X rappresentata da $\Phi((L))$ rispetto a X stessa. È chiaro che alle derivate così definite si può applicare la regola di derivazione delle funzioni composte data dal calcolo ordinario: chè detta Ξ una terza funzione di L analoga alle precedenti si ha:

$$\frac{d\,\Phi}{d\,\Xi}=\frac{d\,\Psi}{d\,\Xi}\,\frac{d\,\Phi}{d\,\Psi}\ (*),$$

ove si tenga presente che il 2.° membro di quest'uguaglianza rappresenta il prodotto simbolico dei rapporti (simbolici) $\frac{d\,\Psi}{d\,\Xi}$, $\frac{d\,\Phi}{d\,\Psi}$ e che sarebbe errato sostituire ad esso l'espressione $\frac{d\,\Phi}{d\,\Psi}\,\frac{d\,\Xi}{d\,\Psi}$ poichè, come già si osservò (I^o) le operazioni I non sono permutabili, e si convenga di rappresentare, in generale:

$$\left(\frac{d\,\Phi}{d\,(y,\,z)}\cos n\,x+\frac{d\,\Phi}{d\,(z,\,x)}\cos n\,y+\frac{d\,\Phi}{d\,(x,\,y)}\cos n\,z\right)d\,\sigma\,,$$

col simbolo $d\,\Phi$, che verrà così ad essere equivalente all'altro $\frac{d\,\Phi}{d\,\sigma}\,d\,\sigma$. Segue da ciò che alle funzioni Φ, Ψ si può applicare il teorema dato dal Volterra, mercè dimostrazione analoga a quella da lui datene che cioè:

« Se tra Φ, Ψ vi è legame d'isogeneità, tale legame sussiste anche tra la derivata di Φ rispetto a Ψ e Ψ. » (v. I^o definizione di moltiplicazione per le operazioni I.)

Ciò posto, considerata $\frac{d\,\Phi}{d\,\Psi}$ come una funzione a sè v'è luogo a ricercarne la derivata rispetto a Ψ, che si dirà « derivata seconda di Φ rispetto a Ψ » e si designerà col simbolo $\frac{d^2\,\Phi}{d\,\Psi^2}$ e così, procedendo si definiscono le derivate di qualunque ordine di Φ rispetto a Ψ.

L'integrale (in questo caso rappresentante un'operazione): $\int_\sigma \Phi\,\frac{d\,\Psi}{d\,\sigma}\,d\,\sigma$ [Ψ si consideri qui una funzione dei punti dello spazio e si suppongano per

(*) Si ricordi che nel calcolo delle operazioni I un'espressione della forma $\frac{d\,\Psi}{d\,\Xi}\,\frac{d\,\Phi}{d\,\Psi}$, indica l'operazione che s'ottiene applicando l'inversa di $d\,\Xi$ all'operazione ottenuta applicando $d\,\Psi$ al quoziente dell'operazione $d\,\Phi$ per l'operazione Ψ. Un'inversione dell'ordine con cui si combinano le operazioni fattori recherebbe alterazioni nel risultato.

essa sodisfatte le condizioni poste dal VOLTERRA (loc. cit.) a che una tale funzione sia isogena colla funzione di linea $\Phi((L))$] (il segno di $\frac{d\Psi}{d\sigma}$ è determinato dalla direzione data alla normale) esteso alla superficie σ, si potrà rappresentare anche con $\int_\sigma \Phi d\Psi$ e si dirà integrale definito di Φ rispetto a Ψ esteso alla superficie σ. Le proprietà fondamentali di quest'integrale, per le quali vale la dimostrazione del prof. VOLTERRA datane per caso analogo sono:

1.° Quando σ sia una superficie chiusa è $\int_\sigma \Phi \, d\Psi = 0$.

2.° Esso non dipende dalla forma della superficie σ, bensì solo dalle due curve L, L_1 che la limitano talchè si può designare col simbolo $\int_L^{L_1} \Phi \, d\Psi$.

3.° Supponendo L_1 variabile, L fissa l'integrale in parola diviene una funzione di L_1 della natura di quelle qui definite, la cui derivata è la stessa funzione Φ. Per L_1 variabile, l'integrale in parola può dirsi « integrale indefinito di Φ rispetto a Ψ ». Così quando Ψ sia la stessa X si ha un concetto d'integrale sì definito che indefinito d'una funzione $F(X)$ dell'operazione variabile X, che non si potè dare nel precedente lavoro.

b) Le considerazioni che precedono s'estendono completamente al caso in cui le funzioni Φ, Ψ della linea variabile L siano, anzichè simboli d'operazioni funzionali, espressioni della forma $F(X)f(y_1)$, ove i simboli che qui figurano abbiano il significato loro dato per l'addietro e $f(y_1)$ renda sodisfatte le condizioni dianzi impostele. Soltanto qui si avrà a trattare, in base anche a già svolte considerazioni (I^o) non più di prodotti e quozienti simbolici, ma di prodotti e quozienti nel senso ordinario della denominazione, all'infuori ben inteso d'operazioni I della forma **I**, nelle quali figureranno variabili rappresentate da simboli determinati in base alle convenzioni poste nel principio del precedente lavoro. Infatti ove $\Phi((L))$, $\Psi((L))$ abbiano l'accennata forma, si designi con $\overline{\Phi}((L))$ l'operazione che in $\Phi((L))$ è applicata a $f(y_1)$, con $\overline{\Psi}((L))$ l'operazione che è applicata a $f(y_1)$ in $\Psi((L))$. Allora si dirà derivata di Φ rispetto a Ψ il rapporto che s'ottiene applicando:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{d(y,z)}\cos n x + \frac{d\overline{\Phi}}{d(z,x)}\cos n y + \frac{d\overline{\Phi}}{d(x,y)}\cos n z\,,$$

la quale espressione rappresenta naturalmente un' operazione funzionale, alla funzione oggetto $f(y_1)$, divisa per la funzione per la quale:

$$\frac{d\overline{\Psi}}{d(y,\ z)}\cos n x + \frac{d\overline{\Psi}}{d(z,\ x)}\cos n y + \frac{d\overline{\Psi}}{d(x,\ y)}\cos n z\,,$$

moltiplica la funzione stessa. Naturalmente si prescinde sempre da operazioni I nelle quali figurano due simboli $y_{\mu-1}\, y_\mu$, per le quali l'indice μ risulta pienamente determinato dal grado (v. I^o) che hanno $\overline{\Phi}$, Ψ rispetto all'operazione variabile da cui dipendono » (*). Questa derivata si dirà anche « derivata di $\overline{\Phi}$ rispetto a $\overline{\Psi}$ relativamente alla funzione $f(y_1)$. Nel caso particolare in cui $\overline{\Psi}((L))$ sia la stessa operazione X, ove sia X la determinazione di X corrispondente alla determinazione della sua linea rappresentativa designata con L, e sia:

$$\mathrm{X}\, f(y_1) = \varphi(y_2)\, f(y_2) = \mathrm{I}_{\varphi(y_2)}\, f(y_1),$$

e sia in pari tempo, designata l'operazione I rappresentata da:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{d(y,\ z)}\cos n x + \frac{d\overline{\Phi}}{d(z,\ x)}\cos n y + \frac{d\overline{\Phi}}{d(x,\ y)}\cos n z\,,$$

col simbolo Y, $\mathrm{Y}\, f(y_1) = \mathrm{I}_{\chi(y_2)}\, f(y_1)$, essendo $\chi(y_2)$ pure una funzione analitica di y_2, si designerà $\chi(y_2)$ con $d\,\varphi_{d\sigma}(y_2)$. Allora, in base alla data definizione, sarà:

$$\frac{d\,\Phi}{d\,\sigma} : \frac{d\,\overline{\Psi}}{d\,\sigma} = \frac{(\mathrm{A}\cos n\,x + \mathrm{B}\cos n\,y + \mathrm{C}\cos n\,z)\, f(y_1)}{\mathrm{I}\; d\,\varphi_{d\sigma}\, f(y_\mu)}\,,$$

ove si designi:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{d(y,\ z)}\ \text{con}\ \mathrm{A}\,, \qquad \frac{d\overline{\Phi}}{d(z,\ x)}\ \text{con}\ \mathrm{B}\,, \qquad \frac{d\overline{\Phi}}{d(x,\ y)}\ \text{con}\ \mathrm{C}\,,$$

e si ponga mente che μ è simbolo d'indice variabile da determinarsi in base alle considerazioni svolte in (I^o). Ora, mentre riguardo alle funzioni di L rappresentate da operazioni non è possibile, in questo campo, dare un'ulteriore applicazione della teorica del prof. Volterra: ciò invece ha luogo nel caso, di cui ora ci occupiamo. Infatti è ovvio che:

$$\mathrm{A}\cos n\,x\, f(y_1), \quad \mathrm{B}\cos n\,x\, f(y_1), \quad \mathrm{C}\cos n\,z\, f(y_1),$$

(*) Questa definizione coincide con quella data in (I^o) per la derivata dell'espressione $F(X)\, f(y_1)$ rispetto a X.

saranno funzioni analitiche d'una certa variabile complessa y_μ, il cui simbolo noi sappiamo determinare: e che perciò ciascuna d'esse varierà in un certo piano. Così:

$$\frac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)} = \varphi(y_2),$$

sarà del pari una funzione, tale che:

$$\frac{d\,\dfrac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)}}{d(y,\,z)}, \qquad \frac{d\,\dfrac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)}}{d(z,\,x)}, \qquad \frac{d\,\dfrac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)}}{d(z,\,x)},$$

saranno funzioni analitiche di y_2 entro un certo campo e ciascuna d'esse, essendo così una quantità complessa, varierà in un certo piano. Siano pertanto A_1, B_1, C_1 le parti reali e A_2, B_2, C_2 i coefficienti delle parti imaginarie rispettivamente di:

$$\mathsf{A} \cos n\,x\, f(y_1), \quad \mathsf{B} \cos n\,x\, f(y_1), \quad \mathsf{C} \cos n\,x\, f(y_1),$$

e siano a_1, b_1, c_1 le parti reali, a_2, b_2, c_2 i coefficienti delle parti imaginarie rispettivamente di:

$$\frac{d\,\dfrac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)}}{d(y,\,z)}, \qquad \frac{d\,\dfrac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)}}{d(z,\,x)}, \qquad \frac{d\,\dfrac{\mathsf{X} f(y_1)}{f(y_2)}}{d(z,\,x)}.$$

Allora, prescindendo da operazioni della forma I, le quali, sempre sotto le solite restrizioni sono permutabili sia a qualunque operazione I, sia (I^o) a qualunque delle operazioni generali dell'aritmetica, sarà:

$$\frac{d\,\Phi}{d\,\sigma} : \frac{d\,\Psi}{d\,\sigma} = \frac{(A_1 + i\,A_2)\cos n\,x + (B_1 + i\,B_2)\cos n\,y + (C_1 + i\,C_2)\cos n\,z}{(a_1 + i\,a_2)\cos n\,x + (b_1 + i\,b_2)\cos n\,y + (c_1 + i\,c_2)\cos n\,z}, \tag{8}$$

che è la forma sotto la quale il Volterra considerò le espressioni analoghe relative alle funzioni da lui studiate. Ora diremo che « fra $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ (oppure X) esista per la determinazione considerata della curva rappresentatrice di X legame d'isogeneità relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$ (*) » allorchè i due membri della (8) siano indipendenti dalla direzione di n, il che richiede che sia:

$$\frac{A_1 + i\,A_2}{a_1 + i\,a_2} = \frac{B_1 + i\,B_2}{b_1 + i\,b_2} = \frac{C_1 + i\,C_2}{c_1 + i\,c_2},$$

(*) Riguardo al concetto d'isogeneità v. Nota in fine della Memoria.

Da queste relazioni, una volta che siano sodisfatte, il prof. VOLTERRA ricavò le altre:

$$\left.\begin{aligned}
A_2 &= \frac{\alpha_{11} B_1 - \alpha_{12} A_1}{\beta_1} = \frac{-\alpha_{11} C_1 + \alpha_{13} A_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_{11} B_1 - \alpha_{12} A_1}{\beta_3} \\
B_2 &= \frac{\alpha_{22} C_1 - \alpha_{23} B_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_{23} A_1 - \alpha_{21} C_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_{21} B_1 - \alpha_{22} A_1}{\beta_3} \\
C_2 &= \frac{\alpha_{32} A_1 - \alpha_{33} B_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_{33} A_1 - \alpha_{31} C_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_{31} B_1 - \alpha_{32} A_1}{\beta_3} \\
A_1 &= \frac{\alpha_{13} B_2 - \alpha_{12} C_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_{11} C_2 - \alpha_{13} A_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_{12} C_2 - \alpha_{11} B_2}{\beta_3} \\
B_1 &= \frac{\alpha_{23} B_2 - \alpha_{22} C_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_{21} C_1 - \alpha_{23} A_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_{22} A_2 - \alpha_{21} B_2}{\beta_3} \\
C_1 &= \frac{\alpha_{23} B_1 - \alpha_{32} C_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_{31} C_2 - \alpha_{33} A_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_{32} B_2 - \alpha_{31} B_2}{\beta_3},
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

ove si ponga:

$$a_1^2 + b_1^2 = \alpha_{11}, \quad b_1^2 + b_2^2 = \alpha_{22}, \quad c_1^2 + c_2^2 = \alpha_{33},$$

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 = \alpha_{23} = \alpha_{32}, \quad a_1 c_1 + a_2 c_2 = \alpha_{31} = \alpha_{13}, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = \alpha_{12} = \alpha_{21},$$

$$b_2 c_1 - b_1 c_2 = \beta_1, \qquad c_2 a_1 - c_1 a_2 = \beta_2, \qquad a_2 b_1 - a_1 b_2 = \beta_3.$$

Dalle (9) poi si deducono le altre due relazioni:

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 B_1 + \beta_3 C_1 = 0, \qquad \beta_1 B_2 + \beta_2 B_2 + \beta_3 C_2 = 0. \qquad (9')$$

Noi ricaviamo da queste, dalle precedenti e dalla (7) la seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha_{12} \dfrac{d\Phi}{d(x, y)} - \alpha_{13} \dfrac{d\Phi}{d(z, x)}}{\beta_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha_{23} \dfrac{d\Phi}{d(y, z)} - \alpha_{21} \dfrac{d\Phi}{d(x, y)}}{\beta_2}\right) + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha_{31} \dfrac{d\Phi}{d(z, x)} - \alpha_{32} \dfrac{d\Phi}{d(y, z)}}{\beta_3}\right) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

e non applicheremo più oltre, su questo punto i risultati del prof. VOLTERRA il quale stabilì in quali casi e sotto quali condizioni e in base a quali dati si possano determinare funzioni isogene ad altre, perchè ora non sarebbe possibile se non la determinazione di funzioni d'una linea nello spazio soltanto dal punto di vista dell'analisi ordinaria, il che non ha particolare interesse per il calcolo qui studiato, laddove per detto calcolo è fondamentale il problema della determinazione, in base a date equazioni di funzioni nella forma che esse assumono come funzioni d'operazioni I. Ed è ciò appunto che sarà oggetto di ulteriori ricerche.

Quando sia soddisfatta per le funzioni $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ la condizione d'isogeneità $\frac{d\overline{\Phi}}{d\sigma} : \frac{d\overline{\Psi}}{d\sigma}$, si dirà « derivata di Φ rispetto a Ψ per la determinazione L della linea rappresentativa di X_1 relativamente alla funzione-oggetto $f(y_1)$ » e per le funzioni Φ, Ψ della natura di quelle ora esaminate si applicano tutte le considerazioni dianzi ricordate per le derivate e gli integrali di funzioni d'una linea nello spazio, rappresentate semplicemente da operazioni funzionali. Rimane soltanto la solita avvertenza, trattarsi in tal caso di prodotti e quozienti propriamente detti, anzichè di prodotti e quozienti simbolici. Naturalmente quanto precede vale anche se $\overline{\Psi}$ anzichè essere semplicemente l'operazione variabile X, sia una funzione di questa. Si esaminò quel caso particolare unicamente perchè è quello che ha maggiore interesse per il calcolo qui studiato.

4. *Espressioni analoghe ai parametri differenziali.* Riserbandomi di ritornare più innanzi sulle relazioni qui riportate, darò ora un cenno delle espressioni analoghe ai parametri differenziali studiate dal prof. Volterra che stabilì in proposito relazioni che si applicano alle funzioni da noi considerate della forma $\Phi((L))$ che rappresentino però quantità vere e proprie. Consideransi pertanto due funzioni siffatte reali di L che designeremo rispettivamente con $\Phi_1((L))$, $\Phi_2((L))$, e si supponga che esse verifichino le condizioni:

$$\beta_1 \frac{d\,\Phi_1((L))}{d(y,\,z)} + \beta_2 \frac{d\,\Phi_1((L))}{d(z,\,x)} + \beta_3 \frac{d\,\Phi_1((L))}{d(x,\,y)} = 0$$

$$\beta_1 \frac{d\,\Phi_2((L))}{d(y,\,z)} + \beta_2 \frac{d\,\Phi_2((L))}{d(z,\,x)} + \beta_3 \frac{d\,\Phi_2((L))}{d(x,\,y)} = 0,$$

ove designino β_1, β_2, β_3 per una terza funzione qualunque $\Psi((L))$ di L (che sia però essa pure una quantità) le espressioni analoghe a quelle rappresentate cogli stessi simboli per la funzione lì pure designata con $\Psi((L))$.

Ricorrendo alle posizioni:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{d\,\Phi_1((L))}{d(y,\,z)} = A_1, & \dfrac{d\,\Phi_1((L))}{d(z,\,x)} = B_1, & \dfrac{d\,\Phi_1}{d(x,\,y)} = C_1, \\ \dfrac{d\,\Phi_2((L))}{d(y,\,z)} = A_2, & \dfrac{d\,\Phi_2((L))}{d(z,\,x)} = B_2, & \dfrac{d\,\Phi_2}{d(x,\,y)} = C_2, \end{array}\right\} \qquad (11)$$

si dimostra (v. VOLTERRA, loc. cit.) che è:

$$H_{\Phi_1,\,\Phi_2} = \frac{1}{\beta_1}\begin{vmatrix} B'_2 & C'_2 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha_{2_2}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}\dfrac{d\Phi_2}{d(x,y)} - \alpha_{2_3}\left(\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}\dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)} + \dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi_2}{d(x,y)}\right) - \alpha_{3_3}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)}}{\beta_1^2} =$$

$$= \frac{\alpha_{3_3}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}\dfrac{d\Phi_2}{d(y,z)} - \alpha_{1_3}\left(\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}\dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)} + \dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi_2}{d(x,y)}\right) + \alpha_{1_1}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)}}{\beta_2^2} =$$

$$= \frac{\alpha_{1_1}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)} - \alpha_{1_2}\left(\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi_2}{d(y,z)} + \dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}\dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)}\right) + \alpha_{2_2}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}\dfrac{d\Phi_2}{d(y,z)}}{\beta_3^2} =$$

$$= \frac{\alpha_{2_2}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}\dfrac{d\Phi'_2}{d(x,y)} - \alpha_{2_3}\left(\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}\dfrac{d\Phi'_2}{d(z,x)} + \dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi'_2}{d(x,y)}\right) - \alpha_{3_3}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}\dfrac{d\Phi'_2}{d(z,x)}}{\beta_1^2} =$$

ecc., ecc. (v. formole analoghe) ove Φ'_1, Φ'_2 siano altre due funzioni reali della linea L, e A'_1, B'_1, C'_1, A'_2, B'_2, C'_2 abbiano rispettivamente per Φ'_1, Φ'_2 lo stesso significato che hanno A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 per Φ_1, Φ_2. Di più, posto $\Phi_1 = \Phi_2$ si ha:

$$\Theta_{\Phi_1} = \frac{1}{\beta_1}\begin{vmatrix} B'_2 & C'_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta_2}\begin{vmatrix} C'_2 & A'_2 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta_3}\begin{vmatrix} A'_2 & B'_2 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(b_1 C_1 - c_1 B_2)^2 + (b_2 C_1 - c_2 B_1)^2}{\beta_1^2} =$$

ecc., ecc. (altre 5 espressioni analoghe), ove a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, ecc., abbiano significato analogo a quello che loro fu dato nel paragrafo precedente.

Ora il prof. VOLTERRA dimostrò che H, Θ, essendo:

$$H = -\frac{1}{\beta_1\beta_2\beta_3}\left\{\beta_1\alpha_{23}A_1A_2 + \beta_2\alpha_{3_1}B_1B_2 + \beta_3\alpha_{1_2}C_1C_2\right\} = \text{ecc.},$$

sotto le condizioni poste non mutano per un cambiamento di variabili. Anche qui naturalmente per le funzioni d'operazioni I definite dai simboli usati si deve prescindere da operazioni **I**. Così sulle espressioni analoghe ai parametri differenziali ci si limiterà, per ora, a questo breve cenno, per le ragioni già esposte.

Sarebbe ovvia l'estensione dei risultati precedenti alle funzioni di più operazioni I variabili, qualora si introducesse il concetto di spazi indipendenti coesistenti, compresi in un iperspazio, in ciascuno dei quali variasse una delle operazioni I variabili, riguardandosi le sue diverse determinazioni come rappresentate da altrettanti punti dello spazio, nel modo dianzi indicato. Così una funzione di r (r numero qualunque > 2) operazioni I variabili dipenderebbe da r curve, piane variabili situate ognuna in uno dei diversi spazi considerati, aventi la proprietà d'essere ciascuna la curva imagine d'una delle operazioni variabili, di quella cioè, le cui determinazioni si trovano riferite ai punti dello spazio in cui trovasi la curva stessa. Sarà facile quindi dare i concetti d'isogenità con ciascuna delle operazioni da cui dipende, sia se trattisi d'un'operazione, sia se trattisi d'una quantità propriamente detta, per una funzione qualsiasi delle r curve variabili considerate e dare quindi i concetti di derivate parziali pure e miste d'una di queste funzioni rispetto a ciascuna delle operazioni I variabili che in essa figurano, dando ogni volta determinazioni fisse a ciascuna di $r-1$ di queste operazioni (ossia alle loro rispettive curve imagini) sì da considerare la funzione come dipendente da una sola fra esse. Così le si possono applicare tutte le considerazioni svolte dianzi per le funzioni dipendenti da una sola curva variabile. Nello stesso modo si giunge al concetto d'integrale multiplo della funzione considerata, rispetto alle varie operazioni I da cui dipende. In generale sulle derivate parziali miste di funzioni dipendenti da più operazioni I variabili non si può stabilire l'invertibilità dell'ordine, con cui si eseguiscono le derivazioni, allorchè si tratti di funzioni rappresentanti pure operazioni chè le operazioni I non sono fra di loro permutabili. Per tali funzioni l'invertibilità dell'ordine delle derivazioni sussiste solo quando alle operazioni variabili si diano incremento costante (I^0). All'incontro è facile stabilire questo quando si tratti d'espressioni della forma $\Psi(X_1 \ldots X_r) f(y_1)$ designando $\Psi(X_1 \ldots X_r)$ una funzione delle r operazioni I variabili: $X_1 \ldots X_r$, poichè, allora come s'è visto, la derivazione si eseguisce, a prescindere da operazioni I della forma I le quali sono sempre permutabili a qualsiasi altra operazione I, mediante le operazioni fondamentali dell'aritmetica, e per le quali vale la legge commutativa. Così, pongansi ad es.:

$$\frac{d\Psi(X_1 \ldots X_r)}{d(y_1, z_1)} = A_1, \qquad \frac{d\Psi(X_1 \ldots X_r)}{d(z_1, x_1)} = B_1, \qquad \frac{d\Psi(X_1 \ldots X_r)}{d(x_1, y_1)} = C_1,$$

$$\frac{d\Psi(X_1 \ldots X_r)}{d(y_2, z_2)} = A_2, \qquad \frac{d\Psi(X_1 \ldots X_r)}{d(z_2, x_2)} = B_2, \qquad \frac{d\Psi(X_1 \ldots X_r)}{d(x_2, y_2)} = C_2,$$

e:

$$\frac{d\,\dfrac{X_1 f(y_1)}{f(y_2)}}{d(y_1,\,z_1)} = a_1\,,\qquad \frac{d\,\dfrac{X_1 f(y_1)}{f(y_2)}}{d(z_1,\,x_1)} = b_1\,,\qquad \frac{d\,\dfrac{X_1 f(y_1)}{d(y_2)}}{d(x_1,\,y_1)} = c_1\,,$$

$$\frac{d\,\dfrac{X_2 f(y_1)}{f(y_2)}}{d(y_2,\,z_2)} = a_2\,,\qquad \frac{d\,\dfrac{X_2 f(y_1)}{f(y_2)}}{d(z_2,\,x_2)} = b_2\,,\qquad \frac{d\,\dfrac{X_2 f(y_1)}{f(y_2)}}{d(x_2,\,y_2)} = c_2\,,$$

ove si designino con x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 le coordinate rispettivamente nei due spazi in cui variano le linee rappresentative delle operazioni variabili, con $X_1 \dots X_r$ una determinazione generica dell'insieme di dette operazioni. S'avrà allora in base alle definizioni date, nell'ipotesi che la funzione $\Psi(X_1 \dots X_r) f(y_1)$ abbia relativamente a $f(y_1)$ legame d'isogeneità con ciascuna delle $X_1 \dots X_r$: e designata brevemente $\Psi(X_1 \dots X_r) f(y_1)$ col simbolo $\overline{\Psi}$:

$$\frac{\partial\,\overline{\Psi}}{\partial\,X_1} = \frac{A_1}{a_1} = \frac{B_1}{b_1} = \frac{C_1}{c_1}\,,\qquad \frac{\partial\,\overline{\Psi}}{\partial\,X_2} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{B_2}{b_2} = \frac{C_2}{c_2}\,.$$

Indi, posto poichè: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 dipenderanno ancora da $X_1 \dots X_r$:

$$\frac{d\,A_1}{d(y_2,\,z_2)} = A'_{12}\,,\qquad \frac{d\,B_1}{d(y_2,\,z_2)} = B'_{12}\,,\qquad \frac{d\,C_1}{d(y_2,\,z_2)} = C'_{12}\,,$$

$$\frac{d\,A_1}{d(z_2,\,x_2)} = A''_{12}\,,\qquad \frac{d\,B_1}{d(z_2,\,x_2)} = B''_{12}\,,\qquad \frac{d\,C_1}{d(z_2,\,x_2)} = C''_{12}\,,$$

$$\frac{d\,A_1}{d(x_2,\,y_2)} = A'''_{12}\,,\qquad \frac{d\,B_1}{d(x_2,\,y_2)} = B'''_{12}\,,\qquad \frac{d\,C_1}{d(x_2,\,y_2)} = C''_{12}\,,$$

$$\frac{d\,A_2}{d(y_1,\,z_1)} = A'_{21}\,,\qquad \frac{d\,B_2}{d(y_1,\,z_1)} = B'_{21}\,,\qquad \frac{d\,C_2}{d(y_1,\,z_1)} = C'_{21}\,,$$

$$\frac{d\,A_2}{d(z_1,\,x_1)} = A''_{21}\,,\qquad \frac{d\,B_2}{d(z_1,\,x_1)} = B''_{21}\,,\qquad \frac{d\,C_2}{d(z_1,\,x_1)} = C'_{21}\,,$$

$$\frac{d\,A_2}{d(x_1,\,y_1)} = A'''_{21}\,,\qquad \frac{d\,B_2}{d(x_1,\,y_1)} = B'''_{21}\,,\qquad \frac{d\,C_2}{d(x_1,\,y_1)} = C''_{21}\,,$$

sarà:

$$\left.\begin{array}{lll} A'_{12} = A'_{21}\,, & B'_{12} = B'_{21}\,, & C'_{12} = C'_{21}\,, \\ A''_{12} = A''_{21}\,, & B''_{12} = B''_{21}\,, & C''_{12} = C''_{21}\,, \\ A'''_{12} = A'''_{21}\,, & B'''_{12} = B'''_{21}\,, & C'''_{12} = C'''_{21}\,, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Infatti nel calcolare le derivate parziali miste di $\overline{\Psi}$ rispetto a ciascune delle $x_1, y_1, z_1, \dots x_r, y_r, z_r$ si può invertire l'ordine delle derivazioni e per passare da A_1 ad A'_{12} o da A_2 ad A'_{21}, ecc., ecc., si devono considerare i prodotti delle stesse derivate parziali miste per le lunghezze di spostamenti dati ai punti delle determinazioni delle curve rappresentative rispettivamente di X_1, X_2, i quali sono gli stessi per A'_{12} e A'_{21}, per B'_{12} e B'_{21}, ecc., ecc.

Dalle (12) risulta quindi l'uguaglianza che s'affermò sussistere:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1},$$

e le altre analoghe della forma:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} = \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \varphi_k \partial \varphi_i},$$

$(i, k = 1 \dots r)$ posto brevemente $\dfrac{X_i f(y_1)}{f(y_2)} = \varphi(y_2)$ $(i = 1 \dots r)$.

E quanto precede continua a sussistere anche se al posto delle $X_i f(y_1)$ si mettessero espressioni della forma $\Xi(X_1 \dots X_2) f(y_1)$. Ci siamo ristretti a quel caso perchè è quello che presenta particolare interesse per lo studio qui fatto.

2.°

1. *Definizione di campo e di sfera di convergenza per una serie di potenze d'un'operazione I variabile.* Considerisi l'operazione rappresentata da una serie di potenze d'un'operazione I variabile X (I^o), i cui coefficienti siano funzioni analitiche della variabile da cui in base alla convenzione posta (I^o) dipenda nell'operazione considerata la funzione risultato, applicata a una certa funzione oggetto $f(y_1)$. Sia $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ quest'operazione, sì che sia: $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ la funzione risultato che con essa s'ottiene da $f(y_1)$. Introdotta la rappresentazione delle singole determinazioni di X mediante punti dello spazio ordinario, ne conseguirà che ad ogni punto corrisponderà una certa determinazione della funzione $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$, la quale nel modo visto nel cap. precedente dipenderà da una certa curva piana variabile nello spazio. La potremo perciò designare, detta L questa curva variabile col simbolo $\Phi((L))$. Nel pre-

cedente lavoro furono dati i criterii fondamentali per stabilire la convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ relativamente a $f(y_1)$, per stabilire cioè per quali determinazioni di X l'espressione $\Phi((L))$ ossia $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ sia una serie convergente. Così, per quelle determinazioni di X, per le quali detta serie sia convergente assolutamente, e lo siano anche i suoi singoli termini sviluppati in serie di potenze, essa sarà atta a rappresentare una funzione analitica della variabile da cui dipende. Si disse anche « campo di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ relativamente a $f(y_1)$ » o anche più semplicemente « campo di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ » il campo costituito dall'insieme delle determinazioni di X, per le quali quell'espressione ci rappresenta una serie convergente nei termini contenenti le singole potenze di X. Diamo ora, in base alle considerazioni ora svolte sulla rappresentabilità delle operazioni I, mediante punti dello spazio, un'interpretazione geometrica a questi concetti. Diremo cioè che:

« La serie di potenze di X, $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ ammette una regione (o campo) di convergenza nello spazio relativamente a $f(y_1)$ o più semplicemente, che la serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ ammette una regione (o campo) di convergenza nello spazio, se esiste una regione dello spazio tale che per tutte le determinazioni di X corrispondenti ai punti compresi in esso, essa sia una serie convergente. » Nello stesso modo si potrà definire il campo di convergenza assoluta di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ relativamente a $f(y_1)$.

Considerisi ora il campo di convergenza d'una certa serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ che comprenda il punto tale che la determinazione di X ad esso corrispondente sia nulla in via assoluta (corrispondente ad es. alla determinazione di X, a cui compete per funzione caratteristica una funzione che sia regolare entro una certa regione, rispetto alla variabile d'integrazione, e per linea d'integrazione una linea chiusa compresa per intero in detta regione. Allora la proprietà che essa sia nulla (I^0) in via assoluta è subordinata alla restrizione posta nel cap. precedente che cioè le funzioni oggetto a cui si applichi quest'operazione siano da scegliersi solo fra quelle, che sono regolari entro la regione in cui lo è la funzione caratteristica. Ciò posto « la sfera di raggio massimo, compresa per intero nel campo di convergenza di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$, e avente il centro nell'accennato punto a cui corrisponde la determinazione nulla di X » si dirà, con un'ovvia estensione del concetto di cerchio di convergenza d'una serie di potenze dato dall'ordinaria teoria delle funzioni.

« Sfera di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ relativamente alla funzione $f(y_1)$ » o anche, più semplicemente « sfera di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$. » E analogamente si potrà dare il concetto di sfera di convergenza assoluta.

Il raggio di questa sfera si dirà, dando così un'estensione del concetto di raggio di convergenza dato dall'ordinaria teoria delle funzioni:

« Raggio di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ relativamente alla funzione $f(y_1)$ » o anche più semplicemente « raggio di convergenza della serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ ».

Dette x_1, y_1, z_1 le tre coordinate del centro di questa sfera riferito, al solito, ad un sistema di tre assi ortogonali, x, y, z le coordinate d'un punto generico della superficie della sfera, R il raggio della sfera stessa sarà:

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

e introducendo la rappresentazione mediante vettori, verrà:

$$R = i_1(x - x_1) + i_2(y - y_1) + i_3(z - z_1),$$

designando i_1 l'unità diretta nel senso dell'asse x, i_2 quella diretta nel senso dell'asse y, i_3 quella diretta nel senso dell'asse z.

È ovvio che le determinazioni di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ corrispondente alle singole determinazioni di X comprese nel campo di convergenza, non avranno tutte, riguardate come funzioni analitiche della variabile da cui dipendono, lo stesso campo di convergenza, inteso ciò nel senso che s'attribuisce a questa denominazione nell'ordinaria teoria delle funzioni. Infatti è naturale che, in generale le curve piane dello spazio, rappresentanti ciascuna l'insieme dei valori d'una data determinazione di X in corrispondenza ad un certo insieme di valori della variabile, da cui in X dipende la funzione risultato, comprese nel campo di convergenza di $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$, daranno per la determinazione di X che da ciascuna di esse è rappresentata, l'insieme di determinazioni corrispondente a un insieme, diverso da una all'altra variabile. Ciò del resto risponde al fatto che per le diverse espressioni che s'ottengono quando si passi dall'una all'altra delle curve rappresentatrici di determinazioni di X non si avrà uno stesso campo di valori della variabile da cui dipendono, nel quale esse siano atte a rappresentare funzioni analitiche, allorchè si vogliano soddisfatte anche le condizioni affinchè ciò sia.

2. *Sviluppo analogo a quello di* Mac Laurin. *Estensione dei concetti di funzione analitica e di altri che ne derivano alle funzioni d'operazioni I.* La portata dei concetti di campo, di sfera e di raggio di convergenza sarà messa meglio in luce dalle considerazioni seguenti, riguardanti l'estensione della formola di Mac Laurin e del concetto di continuazione analitica alle funzioni d'operazioni I. Nel precedente lavoro adunque fu accennato, come detto k un fattore costante, e indicata brevemente una serie di potenze di X col simbolo $F(X)$, si poteva, quando fossero soddisfatte le condizioni di convergenza per le serie che venivano prese in considerazione, rappresentare la serie data da $F(X + \mathrm{I}_k)$ mediante lo sviluppo:

$$F(X + \mathrm{I}_k) = F(X) + \mathrm{I}_k F'(X) + \frac{\mathrm{I}^2_k}{\underline{|2}} F''(X) + \cdots \frac{\mathrm{I}^\mu}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(X) + \cdots$$

designando X una determinazione generica dell'operazione variabile considerata, $F^{(h)}(X)$, $(h = 1, 2 \ldots)$ la derivata d'ordine h di $F(X)$ rispetto ad X, definnita nel modo colà indicato. Così, mantenendo al simbolo $f(y_1)$ il solito significato si stabilì l'altra formola:

$$\left.\begin{aligned} F(X + \mathrm{I}_k) f(y_1) = F(X) f(y_1) + \\ + \mathrm{I}_k \frac{d\,F(X) f(y_1)}{d\,X} + \frac{\mathrm{I}^2_k}{\underline{|2}} \frac{d^2\,F(X) f(y_1)}{d\,X^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ove k designi quello che si disse: « incremento subíto da X rispetto a $f(y_1)$ quando da X si passi a una cert'altra operazione $X + \delta X$ », cioè la quantità costante di cui s'accresce $\frac{X f(y_1)}{f(y_1)}$, allorchè a X si dia appunto un incremento tale che $\frac{X f(y_1)}{f(y_2)}$ aumenti d'un fattore costante. Premesso questo nel calcolare la derivata rispetto a X di un'espressione quale $F(X) f(y_1)$ riguardata come funzione della linea rappresentativa di X, s'osservi che avvenga che (v. cap. 1.°) l'espressione colà designata con $d\,\varphi_{d\sigma}(y_\mu)$ si riduca ad un fattore costante. Ciò avviene, ad es., quando la derivata dell'operazione rappresentata dalla derivata rispetto alla superficie σ di X che colà (II, 1.°) fu designata con $\overline{\Psi}((L))$ sia rispetto a $f(y_1)$ (I^o) equivalente ad un'operazione la cui funzione caratteristica abbia un polo di primo ordine pel punto $y_1 = y_2$ e ammetta poi uno sviluppo in serie di potenze negative d'ordine superiore al primo di $y_1 - y_2$, e abbia per linea d'integrazione una linea chiusa contenente il punto $y_1 = y_2$ e nessun altro punto singolare nè della funzione caratteristica, nè della funzione oggetto. Allora la definizione di derivata d'un'espressione come $F(X)\,f(y_1)$ rispetto a X, riguardate come funzioni della curva rappresentativa di X, quando fra esse vi sia legame d'isogeneità coincide colla definizione di derivata di $F(X)\,f(y_1)$ rispetto a X data nel precedente lavoro, perchè essa non è che il limite del rapporto delle variazioni di $F(X)\,f(y_1)$, $\frac{X f(y_1)}{f(y_2)}$ corrispondenti ad una certa variazione della curva rappresentativa di X. Naturalmente si parla sempre, nel calcolare derivate, d'una certa determinazione generica dell'operazione variabile che si prende a considerare. Ciò premesso, nello sviluppo (13), a I_k si sostituisca la differenza simbolica $X - {}^{\mathrm{I}}{}_k$, inoltre a X si sostituisca I_k, con che a $X + {}^{\mathrm{I}}{}_k$ si viene a sostituire X. Ciò posto, si osservi che in base a convenzioni poste (I^o) i coefficienti dello sviluppo di $F(X)$ in serie di potenze di X sono funzioni analitiche delle variabili da cui, giusta altre convenzioni poste dipende la funzione risultato in $F(X)$, e sono quindi indipendenti dalla variabile d'integrazione nelle singole potenze di X che figurano in $F(X)$. Ne viene che detto k_ν uno qualunque di questi coefficienti sarà per qualunque determinazione di X:

$$X^m\,k_\nu\,f(y_1) = k_\nu\,X^m\,f(y_1), \qquad (m = 1\,,\; 2\ldots).$$

Da queste considerazioni segue che per una determinazione generica di X compresa nel campo, nel quale sono convergenti le diverse serie che si prendono a considerare, $F(X)\,f(y_1)$ si potrà rappresentare mediante uno sviluppo della forma:

$$\left.\begin{aligned} F(X) = F({}^{\mathrm{I}}{}_k)\,f(y_1) + (X - {}^{\mathrm{I}}{}_k)\,F'({}^{\mathrm{I}}{}_k)\,f(y_1) + \\ + \frac{(X - {}^{\mathrm{I}}{}_k)^2}{|\underline{2}}\,F''({}^{\mathrm{I}}{}_k)\,f(y_1) + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

ove il simbolo $(X - {}^{\mathrm{I}}{}_k)^\nu$ ($\nu = 1\,,\; 2\ldots$) designi la potenza ν^{esima} (nel senso dato a questa denominazione nel lavoro precedente) dell'operazione $X - \mathrm{I}_k$ (*). Questa formola presenta analogia perfetta colla formola del MAC LAURIN applicata allo sviluppo in serie di potenze d'un binomio di certe funzioni. Ora, mantenendo per la funzione $F(X) f(y_1)$, quando X si riguardi concatenata ad una curva variabile nello spazio, la designazione $\Phi((L))$, $F(\mathrm{I}_k) f(y_1)$ sarà appunto la determinazione assunta da $\Phi((L))$ nel punto dello spazio a cui corrisponde una determinazione X di X tale che $\frac{X f(y_1)}{f(y_2)} = k$. Perciò, stabilendo di designare con $\Phi((L, t))$ la determinazione di $\Phi((L))$ specificata per un dato punto t dello spazio, detto appunto t il punto che corrisponde all'accennata operazione X, si potrà alla (13') sostituire l'altro sviluppo:

$$\left.\begin{aligned}\Phi((L)) = \Phi((L, t)) + [\Psi((L)) - \Psi((L, t))]\, \Phi'((L, t)) + \\ + \frac{[\Psi((L)) - \Psi((L, t))]}{\lfloor 2}\, \Phi''((L, t)) + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Designi $\Psi((L))$ una determinazione generica di X riguardata come dipendente dalla linea variabile L, $\Psi((L, t))$ la determinazione di X corrispondente al punto t nello spazio, la quale, come s'è detto, è precisamente I_k [ric. quanto si disse a questo proposito in (I^o)]. Ora diremo che « nell'intorno d'un punto t dello spazio la funzione $\Phi((L))$ ammette lo sviluppo (14) che diremo brevemente sviluppo di MAC LAURIN generalizzato, in serie di potenze del binomio simbolico $\Psi((L)) - \Psi((L, t))$ quando siano soddisfatte le condizioni seguenti »:

a) La determinazione di X corrispondente a t sia un'operazione della forma I_k.

b) Vi sia una certa regione comprendente t, tale che per tutte le determinazioni della linea L che cadono in esse sia possibile lo sviluppo (14) in serie di potenze di $\Psi((L)) - \Psi((L, t))$.

Vediamo ora, come si stabilisca la condizione di validità per lo sviluppo in parola. Si designi brevemente $\Psi((L)) - \Psi((L, t))$ col simbolo D.

Si consideri pertanto una determinazione X dell'operazione variabile in esame, tale che $\mathrm{X}^\nu k \frac{D^{n-1} f(y_1)}{D^{n-1} f(y_1)}$ per $\nu = \infty$ abbia per limite superiore una certa quantità determinata l, per tutti i punti compresi in una certa regione

(*) Per lo sviluppo di $(X - \mathrm{I}_k)^\nu$ secondo le potenze di ν; v. quanto fu esposto in (I^o), § 3.

del piano della variabile da cui dipende quella funzione. In altri termini, nel piano della variabile da cui dipende $\frac{X^\nu k D^m f(y_1)}{D^{m-1} f(y_1)}$ si supponga che esista una regione, tale che per tutti i punti di essa, ecc., ecc. E questa sarà la regione da prendersi in considerazione. Di più dicasi ∂ il limite a cui tende $\frac{X^{\nu+1} f(y_1)}{\mathrm{I}_k X^\nu f(y_1)}$ al tendere di ν all'infinito, limite che sarà una certa funzione della variabile da cui dipende $X^{\nu+1} f(y_1)$. Si ha:

$$\frac{\mathsf{X}^{\nu+1} D f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu D f(y_1)} = \frac{\mathsf{X}^{\nu+2} f(y_1) - \mathsf{X}^{\nu+1} \mathrm{I}_k f(y_1)}{\mathsf{X}^{\nu+1} f(y_1) - \mathsf{X}^\nu \mathrm{I}_k f(y_1)} = \frac{\frac{\mathsf{X}^{\nu+2} f(y_1)}{\mathsf{X}^{\nu+1} f(y_1)} - k}{\frac{\mathsf{X}^{\nu+1} f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu f(y_1)} - k} \cdot \frac{\mathsf{X}^{\nu+1} f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu f(y_1)}, \text{ (*)}$$

e il limite di quest'espressione al tendere di ν a ∞ è manifestamente ∂. Sviluppando numeratore e denominatore in $\frac{\mathsf{X}^{\nu+1} D^m f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu D^n f(y_1)}$ e determinando il limite, al tendere di ν a ∞ di ogni singolo termine analogo corrispondente a $m-1$, $m-2$, ecc., si scorge che pure quell'espressione ha per limite ∂ al tendere di ν a ∞, perchè ciò si verificò per $m = 1$, dal che si deduce agevolmente che si verifica per $m = 2$, mediante scomposizione di:

$$\frac{\mathsf{X}^{\nu+1} D^2 f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu D^2 f(y_1)} \quad \text{in} \quad \frac{\mathsf{X}^{\nu+1} (\mathsf{X} - \mathrm{I}_k) D f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu (\mathsf{X} - \mathrm{I}_k) D f(y_1)}, \text{ ecc., ecc.}$$

Ora:

$$\frac{\mathsf{X}^\nu D^m f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu D^{m-1} f(y_1)} = \frac{\mathsf{X}^{\nu+1} D^{m-1} f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu D^{m-1} f(y_1)} - \frac{X^\nu k D^{n-1} f(y_1)}{X^\nu D^{n-1} f(y_1)},$$

da cui in base alle posizioni precedenti:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\mathsf{X}^\nu D^m f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu D^{m-1} f(y_1)} = \partial - l.$$

Se ora consideriamo la serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ ove abbiano i coefficienti k_ν il significato loro attribuito dianzi se è X una determinazione di X che renda quella

(*) Quando si parla di rapporti della forma $\frac{\mathsf{X}^{\nu+1} f(y_1)}{\mathsf{X}^\nu f(y_1)}$ si sottintende, in base alle solite convenzioni portata la variabile da cui dipendono i due termini del rapporto allo stesso simbolo ommettendosi così di scrivere le operazioni I che vanno in tal guisa sottintese.

serie convergente assolutamente ed in ugual grado, si potrà (I^o) trovare un numero c tale che da un certo valore dell'indice ν in avanti sia: $|k_\nu| < \frac{c}{X^\nu f(y_1)}$. E se di più X si sottopone alla condizione che sia: $\frac{X^{\nu+1} f(y_1)}{X^\nu f(y_1)} > l_1 > l$ da un certo valore dell'indice ν in avanti, che si potrà, come faremo noi, supporre $= 0$, si avrà evidentemente:

$$|k_\nu| < \frac{c}{f(y_1)\, l_1^\nu}, \tag{15}$$

quando si stabilisca che il limite superiore di ∂ sia sempre inferiore a l. Di più si dicano l_2, ∂_2 rispettivamente un numero ed una funzione della variabile da cui dipende $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ tali che il limite superiore di $X^\nu k$ (s'intende sempre nella regione considerata del piano della variabile da cui dipende quella funzione) sia $< l_2$, e $\frac{X^{\nu+1} f(y_1)}{X^\nu f(y_1)}$ abbia il limite superiore nell'insieme dei valori della variabile da cui dipende, che vengono presi in considerazione $<$ del limite superiore di ∂_2. Così la quantità l_2 e la funzione ∂_2 è chiaro che si potranno sempre trovare. (Si fissi quindi k in modo che I_k sodisfi pure a questa condizione al pari di X.) Si avrà poi in base alle posizioni già fatte:

$$l < l_2 < \overline{\partial} < \overline{\partial}_2,$$

designando rispettivamente $\overline{\partial}$, $\overline{\partial}_2$ i limiti superiori di ∂, ∂_2. Ciò posto, prendasi in esame la serie $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} |k_\nu| D_2^{\nu-r} b_\nu$. In questa i coefficienti designati col simbolo $D_2^{\nu-r}$ sono i coefficienti dello sviluppo binomiale simbolico studiato nel calcolo che qui si considera, quali furono determinati nel precedente lavoro, ove a $X + I_k$ si sostituisca X stesso, a I_k il binomio simbolico $X - I_k$, e quindi a X si sostituisca I_k, moltiplicati per $\binom{\nu}{2}$, e i termini $b^{(\nu)}$ sono ciò che diviene $\frac{X^\nu f(y_1)}{X^{\nu-1} f(y_1)}$ quando a X si sostituisca I_k. Ora dalle precedenti posizioni risulta chiaramente $D_2^{\nu-r} < \binom{\nu}{r} D (\overline{\partial}_3 - l)^{\nu-r}$ relativamente a $f(y_1)$ e $b^{(\nu)} < l^\nu$, ove sia $\overline{\partial}_3$ una certa quantità $< \overline{\partial}_2$. Verrà allora in base alla (15):

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} b^{(\nu)} |k_\nu| D_2^{\nu-r} < c' D \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\overline{\partial}_3^{\,\nu}}{\overline{\partial}_2^{\,\nu}} \text{ (*)}, \qquad \text{posto } c' = \frac{c}{f(y_1)}, \tag{16}$$

(*) Relativamente a $f(y_1)$ e per tutti i punti d'una certa regione del piano della variabile indipendente, ben s'intende.

donde segue la convergenza del primo membro della (16), essendo evidentemente una serie convergente il secondo per essere $\overline{\partial}_3 < \overline{\partial}_2$. E questa convergenza si verificherà anche quando a $|k_\nu|$ si sostituisca nel relativo termine, k_ν. Così la serie che in tal guisa si viene a considerare, converge assolutamente; se ne possono perciò ordinare i termini come si vuole, e si può per conseguenza dare ad essi un ordine tale che lo sviluppo considerato assuma la forma (14). (Si noti che per comodità di scrittura, ai simboli $\Psi((L))$, $\Psi((L, t))$ che figuravano nello sviluppo (14) si sostituirono le determinazioni corrispondenti dell'operazione I rappresentata dalla linea L) (*). Ora si consideri ancora il campo di convergenza di ciascuno dei due sviluppi:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1), \qquad \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{[\Psi((L)) - \Psi((L, t))]^\nu}{\underline{|\nu}} \Phi'((L, t)),$$

i quali rappresentano formalmente una stessa funzione di X e ammettono, come s'è detto, un campo comune di convergenza nel quale le due funzioni rappresentate da quei due sviluppi coincidono. Dicasi brevemente $\Xi((L))$ la funzione della linea L rappresentata dal primo di questi sviluppi, $P((L))$ la funzione rappresentata dal secondo: può darsi che nel campo comune di convergenza che esse hanno vi sia oltre t un altro punto t' dello spazio in un certo intorno del quale la funzione $\Xi((L))$ ammette uno sviluppo secondo la formola di Mac Laurin generalizzata della forma $P'((L))$, il quale così procederà secondo le potenze di $\{\Psi((L)) - \Psi((L, t'))\}$. Ora potrà darsi che questo secondo sviluppo, il quale sarà sempre possibile per tutte le determinazioni di $\Psi((L))$ (ossia di X) corrispondenti a linee cadenti per intero nell'accennato campo comune di convergenza di $\Xi((L))$, $P'((L))$ campo che designeremo brevemente con K, sia possibile, cioè dia luogo ad una serie convergente anche per determinazioni di $\Psi((L))$ relative a linee situate entro una regione dello spazio non per intero compresa in K. Dicasi K_1 la nuova regione dello spazio in cui mentre non converge $P((L))$ converge lo sviluppo:

$$P'((L)) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\{\Psi((L)) - \Psi((L, t'))\}^\nu}{\underline{|\nu}} \Phi'((L, t')),$$

sempre designando con L una determinazione generica della linea rappre-

(*) Il metodo seguito in questa dimostrazione è quello stesso con cui il prof. Pincherle dimostrò un teorema analogo nella teoria delle forme lineari alle differenze finite. V. Pincherle, *L'Algebra delle forme lineari alle differenze finite.* Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna, serie 5.ª, vol. V.

sentativa di X compresa però per intero nella regione dello spazio in cui sono validi gli sviluppi in serie di potenze (simboliche) che vengono presi in considerazione. Allora si dirà che lo sviluppo $P'((L))$ dà la « continuazione analitica della funzione $\Xi((L))$ nella regione K_1 ». Ed è chiaro che $P((L))$, $P'((L))$ coincidono per le determinazioni di L comprese entro K. Nello stesso modo se entro K_1 v'è un punto t'' in un intorno del quale $\Xi((L))$ ammetta, mantenendo ai simboli che si usano, sempre lo stesso significato, uno sviluppo $P''((L))$ della forma (14) in serie di potenze simboliche di $\{\Psi((L)) - \Psi((L, t''))\}$ il quale sia valido anche per determinazioni di L comprese in una regione K_2 dello spazio esterno a K_1, esso darà « la continuazione analitica di $\Xi((L))$ entro K_2 ». E così di seguito potrà darsi che della funzione $\Xi((L))$ sia possibile dare la continuazione analitica in tutto lo spazio. Riferendoci alle considerazioni precedentemente esposte sulla sfera di convergenza dello sviluppo in serie di potenze simboliche di $\Xi((L))$ è chiaro che se K_1 è limitrofo a K il che però, è facile scorgere che non avverrà sempre, $P''((L))$ ammetterà una sfera di convergenza di centro t'', la quale taglierà in una certa regione la sfera di convergenza dello sviluppo $P((L))$ (la quale, in virtù di cose già dette ha il centro in t), e verrà a comprendere una regione dello spazio esterno a questa sfera stessa.

Ora con un'ovvia estensione dei concetti dati dal WEIERSTRASS nella teoria delle funzioni diremo una funzione $\Phi((L))$ la quale in certe regioni dello spazio ammetta sviluppi in serie di potenze di X o d'un binomio della forma $\Psi((L)) - \Psi((L, t))$, inteso che $\Psi((L))$ sia la stessa X:

Funzione analitica (*) *di X, definita nelle accennate regioni, relativamente a una certa funzione* $f(y_1)$. Gli sviluppi poi della forma $P((L))$, $P'((L))$, $P''((L))$, ecc., che rappresentano nelle regioni in cui rispettivamente sono validi, una data funzione analitica di X si diranno, sempre riferendosi alla definizione data dal WEIERSTRASS, « elementi della funzione analitica stessa ».

Chiuderò lo studio di quest'argomento, indicando lo sviluppo in serie di potenze dell'operazione variabile X dell'espressione D^{-1}, ove con questo simbolo si designi l'inversa dell'operazione della forma $D = X - 1_k$, che si considerò dianzi. Ci varremo in questo dal metodo dei coefficienti indeterminati, a cui si accennò nel prec. lavoro.

(*) S'avverta che non prenderemo per ora, in considerazione, che funzioni uniformi d'un'operazione I cioè tali che ad ogni determinazione dell'operazione variabile non ne corrisponda più d'una della funzione.

Pongasi pertanto:

$$D^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu,$$

essendo appunto $k_1\, k_2 \ldots$ coefficienti da determinarsi. Posto $D^{-1} D = 1$ (uguaglianza simbolica) si avranno le seguenti uguaglianze simboliche:

$$k_0\, X + k_1\, X^2 \cdots - \mathrm{I}_k\,(k_0 + k_1\, X + \cdots) = 1\,,$$

da cui:

$$-\mathrm{I}_k\, k_0 = 1\,,\ k_0 - \mathrm{I}_k\, k_1 = 0 \ldots k_\nu\, X^\nu - \mathrm{I}_k\, k_{\nu+1}\, X^{\nu+1}\ (\nu = 2,\ 3 \ldots),$$

donde le uguaglianze effettive:

$$k_0 = -\frac{2\pi i}{k}, \qquad k_1 = \frac{2\pi i}{k_0\, k} \cdots k_{\nu+1} = \frac{2\pi i}{k_\nu\, k} \cdots$$

talchè i coefficienti k_ν risultano delle quantità esprimibili mediante potenze di k e del fattore $2\pi i$. Con X si designò al solito una determinazione generica d'un'operazione I variabile qualunque. Però s'avverta che un calcolo di questa natura è possibile soltanto, quando k sia indipendente dalla variabile d'integrazione nelle singole potenze di X e risultano quindi della stessa natura i coefficienti da determinarsi. In caso contrario si incontra la solita difficoltà che cioè l'applicazione dell'operazione I non è permutabile colla moltiplicazione per una funzione che dipenda dalla variabile d'integrazione dell'operazione che si considera. Lo sviluppo in serie d'espressioni anche ben più complicate di quella considerata, quando sia sodisfatta l'accennata restrizione si eseguisce pure mediante calcoli materiali, analoghi a quelli che si fanno nel calcolo ordinario per l'applicazione alla determinazione di serie di potenze del metodo dei coefficienti indeterminati. Naturalmente la determinazione dell'operazione variabile che prendesi a considerare per fare uno sviluppo quale quello ora accennato deve, affinchè lo sviluppo sia valido, appartenere al campo di convergenza della serie di potenze di X che ne risulta, relativamente alla funzione oggetto sulla quale si opera.

L'estensione di quanto precede alle espressioni contenenti serie di potenze di più operazioni I variabili, le quali già furono prese in considerazione (I^o) richiede che si imaginino più spazi coesistenti e indipendenti l'uno dall'altro, in numero $=$ a quello delle operazioni variabili che si considerano, onde riguardare le determinazioni di ciascuna di queste come rappresentate dai singoli punti d'un dato spazio. Indi si avrà in ciascuno spazio un campo e una sfera di convergenza relativamente all'operazione che gli corrisponde. I criterii di convergenza d'un'espressione della forma $\sum_{\nu_1=0\ldots\nu_2=0}^{\nu_1=\infty\ldots\nu_2=\infty} k_{\nu_1\ldots\nu_2} X_1^{\nu_1}\ldots X_{\nu_2}^{\nu_2} f(y_1)$ essendo $X_1\ldots X_2$ simboli d'altrettante operazioni I variabili furono già esposti (I^o). Così lo studio d'espressioni quale quella ora accennata non presenta alcuna differenza dello studio delle espressioni contenenti serie di potenze d'una sola operazione I variabile. Una funzione rappresentata da un'espressione della forma $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu f(y_1)$ ammette per un certo campo di determinazione di X derivata, chè la convergenza della serie che rappresenta questa derivata, nel senso, in cui fu già definita (I^o), nel campo, in cui converge la serie primitiva si dimostra facilmente. Questa è una nuova proprietà d'una funzione analitica dell'operazione variabile X. Ed è chiaro così che quando la variazione che si dà alla considerata determinazione di X per calcolare la derivata dell'espressione considerata sia, relativamente a $f(y_1)$ equivalente a $\mathbf{I}_k$, qualunque sia la direzione della normale alla superficie σ relativa al punto rappresentativo dell'accennata determinazione di X, come questa superficie fu definita nel cap. 1.°, $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} k_\nu X^\nu$ sarà funzione isogena rispetto a X relativamente a $f(y_1)$. Talchè possiamo enunciare il seguente risultato:

« Una funzione analitica d'una data operazione variabile X (rappresentata da una linea nello spazio) relativamente a una certa funzione oggetto $f(y_1)$ è legata da legame d'isogeneità colla funzione della linea rappresentativa di X, $\frac{X f(y_1)}{f(y_1)}$ (ossia è legata da detto legame con X, relativamente a $f(y_1)$ l'operazione funzionale che figura nell'espressione considerata) in quella regione dello spazio, in cui si verifichi la condizione accennata. »

Nota 1.ª Sul metodo dei coefficienti indeterminati s'osservi che quando, mediante esso si possa affermare l'identità di due serie di potenze dell'operazione X relativamente a una funzione oggetto qualsiasi, ne segue anche la loro identità in via assoluta. Ed è ovvio che si dovranno prendere in considerazioni solo funzioni $f(y_1)$ tali che esse e le $X^\nu f(y_1)$ ($\nu = 1, 2\ldots$) non abbiano mai nel piano della variabile da cui dipendono, zeri costituenti un insieme di specie superiore alla prima.

Nota 2.ª Sulla condizione d'isogeneità. S'è visto a proposito di ciò che mantenendo le notazioni già usate, e detta F una funzione qualunque della linea variabile L, potevano $\frac{dF}{d(y,z)}$, $\frac{dF}{d(z,x)}$, $\frac{dF}{d(x,y)}$ variare d'un medesimo multiplo rispettivamente di α, di β, di γ. Così la determinazione di $\frac{d\Phi}{d\sigma}$ non avverrà in modo unico. Così si dirà che Φ, F sono isogene, quando fra le infinite espressioni di $\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma}$ ve ne sia almeno una indipendente dalla direzione della nominale a σ. E le espressioni di $\frac{d\Phi}{d(y,z)} \cdots \frac{dF}{d(y,z)} \cdots$ che danno luogo a questa, s'assumeranno come effettive espressioni di queste quantità.

Pisa, giugno 1897.

FRANCESCO BRIOSCHI.

Col più profondo dolore annunciamo ai nostri lettori la morte quasi improvvisa, avvenuta il 13 m. c. in Milano, del Prof. **Francesco Brioschi**, l'illustre e benemerito direttore di questi *Annali*, ch'egli aveva fondati nel 1858, insieme con Betti, Genocchi e Tortolini.

L'operosità scientifica del **Brioschi** abbraccia tutto un mezzo secolo, dal 1847 sino ad oggi.

Le sue Memorie matematiche sono sparse in molte pubblicazioni periodiche ed atti accademici; in gran parte però sono inserite nei nostri *Annali*.

In questo breve annuncio del lutto che ci colpisce, non è possibile dare un'idea adeguata di quanto Egli fece per la scienza, in parecchi dei suoi rami più importanti (*). Qui basterà il dire che è specialmente opera di Lui se gli *Annali di Matematica* pura ed applicata hanno conquistato un posto distinto fra le Riviste internazionali di alta scienza, e se l'Italia è riguardata come non ultima fra le nazioni che contribuiscono al progresso del sapere.

Roma, 20 dicembre 1897.

Luigi Cremona.

(*) Per qualche sommaria indicazione si riproduce qui appresso un articolo del Professore Beltrami dalla *Perseveranza* del 23 dicembre.

Gli Editori.

“ Francesco Brioschi.

« Straordinaria versatilità d'ingegno, singolare potenza di assimilazione rapida e profonda, instancabile tenacia in ogni ricerca come in ogni intrapresa, tali furono le doti onde rifulse la mente, davvero eccelsa, di **Francesco Brioschi.**

« Nelle scienze matematiche poi, in cui egli raggiunse più presto la gloria, e gloria solida e duratura, recò un'altra preziosissima dote, quella che or si direbbe una impareggiabile virtuosità, cioè una agilità elegante di forma e di pensiero, la quale, se sgomentava gli impazienti ed i meno provetti, formava l'ammirazione dei dotti e degli studiosi di lena.

« Allevato alla scuola di Bordoni nel culto, forse un po' troppo esclusivo, dei metodi lagrangiani, entrò poco appresso con Piola nell'ambiente meno rigido delle ricerche fisico-matematiche di Fourier, di Poisson e di Cauchy. Ma per quanto grande e feconda fosse allora la produzione matematica francese, che era la sola cui attingessero i pochi studiosi d'Italia, egli intuì ben presto la necessità d'allargare la cerchia delle fonti, estendendola alla produzione delle altre nazioni colte d'Europa, massimamente della Germania e dell'Inghilterra. Fra noi egli fu indubbiamente il primo a mettersi risolutamente per questa via, e ad indirizzarvi quanti allievi e studiosi potè attirare con sè in quest'opera, che può ben dirsi di risanamento, giacchè soltanto per essa cessò quel tal quale ristagno che da lungo tempo pesava sulla scienza italiana, e incominciò quel sempre più attivo e fecondo ricambio intellettuale colla scienza e cogli scienziati di fuori, che fu certamente favorito e promosso dalla fortunata ricostituzione dell'unità nazionale, ma che sarebbe ingiustizia non revocare a lui, per ciò che spetta alle sue prime origini, ben più modeste, ma ben più laboriose.

« È incredibile la quantità di lavori che il **Brioschi** seppe comporre e produrre in luce, nei più svariati indirizzi, non appena si fu rapidamente orientato nel vastissimo campo delle ricerche che occupavano, alla metà di questo secolo, i più valorosi matematici d'Europa. La recente scomparsa del grande Jacobi, col quale il **Brioschi** aveva tanta affinità di temperamento scientifico, richiamava allora l'attenzione sul grande problema delle equazioni dinamiche, e fu questo uno dei primi soggetti a cui egli si rivolse, trattovi anche dalla natura dell'insegnamento che impartiva all'Università di Pavia. Numerosi ed apprezzatissimi sono i suoi lavori, sia sul problema d'integrazione, sia sulle affini teorie delle equazioni a derivate parziali e delle equazioni isoperimetriche. Nè cessò mai, anche a maggior distanza di tempo, di ritornare su quei primi studii con altre geniali pubblicazioni, come a cagion d'esempio con quelle relative all'ellissoide fluido di Dirichlet ed al problema dei tre corpi.

« Altro argomento di numerose ed interessantissime pubblicazioni fu la teoria analitica delle superficie, rimessa allora in onore da una celebre Memoria di Gauss, che era passata per lungo tempo inosservata, ma di cui i geometri riconoscevano finalmente la fondamentale importanza. Il **Brioschi** prese parte grandissima allo svolgimento (divenuto poi sempre più largo e più complesso) di questa teoria, e vi arrecò più d'un contributo essenziale, tra altro col concetto di coordinate curvilinee tangenziali, da lui primamente adombrato in una Nota sulla superficie delle onde.

« Non volle rimanere estraneo agli studii di pura geometria, il cui decisivo risveglio risale a un dipresso alla medesima epoca, benchè l'indole peculiare del suo ingegno lo chiamasse di preferenza alle ricerche di pura analisi; e fu felicissimo nella trattazione di quelle questioni in cui l'una e l'altra disciplina gareggiano nel raggiungere una stessa meta, del che basterà citare l'esempio fornito dai poligoni di Poncelet.

« Ma l'indirizzo in cui il **Brioschi** si slanciò con vera passione e con istraordinario successo fu quello delle ricerche sulle equazioni algebriche e sui nuovi algoritmi, che si riassumono nell'uso sistematico dei determinanti, degli invarianti, dei covarianti e delle forme algebriche e simboliche. Basterebbe già il Libro dei Determinanti, che risale ai primissimi anni della sua carriera scientifica e che fu tradotto in pressochè tutte le lingue colte, per constatare le eminenti sue doti d'assimilazione e d'invenzione, come il profondo e sicuro possesso d'ogni più disparato dominio dello scibile matematico. Ma sarebbe impossibile analizzare anche sommariamente, senza entrare in particolari troppo disformi dall'indole d'un giornale, l'infinita copia di nuove vedute, di nuove proposizioni, di nuovi procedimenti che si trovano disseminati nelle numerosissime Memorie di lui sulle indicate teorie, fra le quali basterà menzionare quella Monografia sulle forme binarie che doveva riassumere gran parte dei suoi studii e che, sebbene rimasta incompleta, contiene pur tuttavia un ricco tesoro di materiali preziosi. E, per citare almeno uno dei moltissimi argomenti speciali in cui maggiormente brillarono l'acume e la genialità del **Brioschi**, giovi ricordare le sue elegantissime ricerche sulle serie analoghe a quella di Sturm.

« Per ciò poi che spetta alla dottrina delle equazioni algebriche, basti il dire che, nella memorabile scoperta della risoluzione dell'equazione di 5.° grado, il nome di **Brioschi** è indissolubilmente legato a quelli di Hermite e di Kronecker, con questo di più, ch'egli non ha poi mai cessato di illustrare con nuove ricerche questo campo così irto di difficoltà, preparando il terreno e partecipando attivamente ad altri non meno cospicui progressi.

« Un altro larghissimo campo di studii ai quali, non meno che ai precedenti, il **Brioschi** si trovò spontaneamente attratto dalle sue peculiari attitudini e preferenze scientifiche, e che del resto si collegava necessariamente ed intimamente coll'ultimo dei dianzi accennati, fu quello delle funzioni trascendenti, inaugurato da Legendre e recato d'un tratto a smisurate altezze dai lavori di Abel, di Jacobi e da quelli, allora recentissimi, di Weierstrass. Qui forse, più che altrove, il **Brioschi** era destinato a raccogliere una messe oltremodo feconda e rigogliosa, la materia prestandosi mirabilmente a quel suo genio, ormai maturo, di analista supremamente classico, e già egli era entrato gloriosamente nell'arringo, ispirandosi ai lavori di Weierstrass, quando, sopravvenuti gli eventi del 1859, si trovò d'un tratto chiamato a spendere in altro modo le forze esuberanti del suo ingegno. Così si chiuse il periodo eroico della sua operosità scientifica, periodo che durò non più d'un decennio, ma che bastò a circondare per sempre il suo nome d'una aureola di gloria purissima così presso di noi, come presso tutte le culte nazioni, di cui in così breve tempo egli aveva saputo assimilare ed eguagliare la poderosa produzione scientifica.

« Se tuttavia, in tutto il tempo successivo, egli non potè mai più consacrare alla scienza pura l'intera somma delle sue smisurate energie intellettuali, neppur cessò mai di tener sempre ed amorosamente fiso in essa lo sguardo, tornando ad ogni tratto, e più d'una volta abbastanza intensamente, al culto di essa così da aggiungere molto al moltissimo già prodotto, e nulla trascurando di ciò che poteva, direttamente od indirettamente, favorire la diffusione ed il progresso degli alti studii nel nostro paese. In quest'ultimo senso merita principalmente d'esser ricordata l'opera indefessa da lui data nel mantenere in vita dapprima, e nel recare poscia a rigogliosa fioritura quella pubblicazione periodica che s'intitola *Annali di matematica pura ed applicata*, e che da non breve tempo rappresenta degnamente l'Italia tra le congeneri e più apprezzate pubblicazioni d'Europa e d'America. Già fin dal 1858, quando questo periodico sorse in Roma, in continuazione d'un altro più modesto che lo precedette, egli aveva contribuito moltissimo a dargli alimento e notorietà; ma nel 1867, quando la vita ne era divenuta alquanto languida e stentata, egli ne trasportò la sede da Roma a Milano e ne assunse la direzione, dapprima insieme col collega Cremona, poi, dopo la partenza di questo, da solo. Nei trent'anni trascorsi dopo questo rinnovamento dell'antico periodico romano, ne sono apparsi in luce ben 26 volumi in-4°, ai quali collaborarono tutti i migliori matematici italiani e non pochi fra gli stranieri d'ogni nazione, attivando così anche fra noi quel ricambio d'ospitalità scientifica che già s'era iniziato altrove ed al quale il **Brioschi** aveva già tanto e così ampiamente contribuito coll'esempio e col consiglio.

« È inutile dire a lungo dell'opera data, in un senso più universale, a pro della scienza italiana durante la lunga presidenza dell'Accademia dei Lincei. Niuno ignora come primo pensiero del **Brioschi** sia sempre stato quello di far convergere i maggiori mezzi possibili all'ampliamento delle pubblicazioni accademiche, così da potervi accogliere, come può ora ben dirsi che avvenga, ogni degna manifestazione degli studii nazionali.

« Senonchè l'analisi delle varie, per non dire infinite forme sotto cui si estrinsecò l'ardore inestinguibile del **Brioschi** per tutto ciò che s'attiene agli studii ed agli studiosi del nostro paese, ardore che andò facendosi sempre più largo e comprensivo di ogni sana manifestazione del pensiero scientifico, mentre da un lato condurrebbe troppo lontano e sconfinerebbe dal campo prefisso, riuscirebbe forse dall'altro ad offuscare un cotal poco, specialmente agli occhi di chi non ebbe la ventura di conoscere da vicino l'uomo, l'immagine integra e distinta che di lui dobbiamo formarci, e che è bene rimanga scolpita indelebilmente nella storia degli intelletti d'Italia. La quale immagine è quella d'un forte campione della schietta stirpe latina, la cui mente, sovranamente equilibrata, fu sempre aperta ad ogni più alta aspirazione ideale come ad ogni più intimo bisogno di vertiginosa attività esterna, e che nell'opera sua, di qualunque natura si fosse, recò invariabilmente la benevolenza, la sicurezza, la serenità e, non ultima attrattiva, quell'amabile scioltezza che, nell'esercizio delle discipline e delle cose severe, lascia come spirare un sottile profumo di squisita artisticità.

« Ho menzionato per prima la benevolenza fra le nobili caratteristiche dell'azione del **Brioschi**, e non a caso. Come ben disse l'illustre Ascoli, l'assistenza affettuosa di cui egli ha favorito, con criterii perspicacissimi, un numero sterminato di cultori d'ogni più disparata disciplina, basterebbe alla gloria d'un uomo.

« Eugenio Beltrami
« *Prof. all' Università di Roma.* »