

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA
F. Brioschi e L. Cremona

(PRESSO IL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO)

in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini.

SERIE II. - TOMO III.

(dall'ottobre 1869 al maggio 1870.)

MILANO
TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO III.^o (SERIE II.^o)

	PAG.
Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di prima specie. — <i>Prof. F. Casorati</i>	1
Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches? — <i>Dr. R. Sturm</i>	28
Sul problema della rotazione dei corpi. — <i>Prof. A. Brill</i>	33
Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation. — <i>Prof. H. Schramm</i>	41
Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. — <i>M.^r l'Abbé Aoust</i>	55
Sur les fonction abéliennes. — <i>M.^r Michael Roberts</i>	70
Sur l'expression du module des transcendentes elliptiques, en fonction du quotient des deux périodes. — <i>M.^r Ch. Hermite</i>	81
Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. — <i>Par le même</i>	83
Sur la transcendente E_n . — <i>Par le même</i>	ivi
De æquilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem. — <i>D.^r Ludovicus Matthiessen</i>	84
Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. — <i>Prof. H. J. Etienne Smith</i>	112
Notizia sulla rappresentazione conforme di un'area ellittica sopra un'area circolare. — <i>Prof. H. Schwarz</i>	166
La risolvente dell'equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee. — <i>Prof. Luigi Schläfli</i>	171
Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. — <i>Dr. H. G. Zeuthen</i>	175

Indice.

	PAG.
Appendice au Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. — <i>Prof. H. J. Etienne Smith</i>	218
Sullo sviluppo del periodo immaginario, pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo. — <i>Prof. Luigi Schläfli</i>	243
Della distribuzione elettrica sui conduttori isolati. — <i>Prof. P. Volpicelli</i>	249
Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresenta- zioni geografiche di una superficie su di un'altra. — <i>Prof. Ulisse Dini</i>	269
Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde. — <i>M.^r Michael Roberts</i>	294
Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie. — <i>B. Riemann</i>	309
Sur un'intégrale double définie. — <i>M.^r William Roberts</i>	327
Sopra alcuni teoremi aritmetici. — <i>Prof. Placido Tardy</i>	331
Correzioni.	tomo 1 ^o , pag. 145 e 284
»	» 2 ^o , » 268
»	» 3 ^o , » 80 e 217

	ERRORI		CORREZIONI
pag. 260, lin. 11	salendo $\int_0^{h_1}$		$\int_0^{h_2}$
» » » 6	» $p = h_1$		$p = h_2$
» 261, » 2	» $2r_1$		$2r_1^2$
» » » 7	» $\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty}$		$\left[V \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty}$

TOMO I.^o

pag. 225, lin. 10	discendendo	$-6a(z-a)^5$	$-4a(z-a)^5$
» 226, » 8	»	$\begin{vmatrix} 1 & 2b_0 & 2c_0 \\ s^3 & b_1 & c_1 \\ s^{4s} & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2b_0 & 2c_0 \\ \rho^3 & b_2 & c_2 \\ \rho^{4s} & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$
» 230, » 1	salendo	l, m, n	p, q, r

Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali abeliani di prima specie

(del Prof. F. CASORATI).

L'importantissima opera *Theorie der Abelschen Functionen* pubblicata dai professori Clebsch e Gordan (Leipzig, 1866), siccome scritta, oserei dire, da penna desiderosa di sempre nuovi lavori, non si trova condotta con tutta la perfezione in ogni luogo. Così, in una parte del quarto *Abschnitt* (Periodicità), del quale esclusivamente intendo qui occuparmi, si trova attuabile una notevole semplificazione, e di esso si può rendere assai più agevole lo studio coll'aggiunta di alcuni schiarimenti. E pertanto, riflettendo alla speciale importanza di questo *Abschnitt* per chi voglia evitare l'impiego della superficie di Riemann, e sapendo com'esso realmente opponga non lievi difficoltà agli studiosi dell'opera, giudico opportuno di ripresentarlo in questo articolo coi miglioramenti che mi sembrano possibili. Indicherò anzitutto l'orditura dell'articolo, perchè ne riesca più ovvio il confronto coll'*Abschnitt*.

Sotto gli stessi titoli dei §§ 22 e 25 di questo *Abschnitt* presento le proprietà date in questi luoghi dell'opera (tranne la riduzione dei moduli di periodicità a $2p$, che non può precedere il § 23), aggiungendovi quelle altre delle quali è presupposta la cognizione dalle *Recherches sur les fonctions algébriques* del signor Puiseux; e ciò nella mira di dispensare lo studioso dalla lettura non molto breve di tali *Recherches*, mentre le proprietà occorrenti sono qui esposte in modi più concisi e più adatti al presente scopo. Espongo poi la materia del § 23, con una più semplice dimostrazione dell'ultima proprietà del § 24. Poscia la materia di questo paragrafo, con schiarimenti per mettere in tutta evidenza la perfetta reciprocità delle due sorte di punti fondamentali. Poi la materia del § 26. Ed è qui che, in virtù della nominata perfetta reciprocità, attuai la semplificazione che testè

dissi notevole. Il passaggio dalla equazione (1) alla (5) si compie con due trasformazioni in luogo di tre: cioè con la prima stessa eseguita nell'opera, e con l'analogia relativa ai punti fondamentali della seconda sorta, che non richiede nuova meditazione. Restano così evitati l'ultima parte del paragrafo in discorso e tutto il penoso § 27, tranne le facili proprietà dei coefficienti c . Infine riproduco, conformemente alla semplificazione, il § 28; tralasciando i restanti che non darebbero qui luogo a veruna modificazione.

Punti di diramazione.

Concepiamo la sfera come luogo rappresentativo dei valori della variabile indipendente x (*). In ogni punto della medesima potremo concepire n valori per la funzione s definita dall'equazione algebrica dell' n^{mo} grado $F(s, x) = 0$. Non ostante questa molteplicità di valori di s potremo concepire come individuato il valore di s in ogni punto al variare o muoversi di x , immaginando scelto inizialmente uno $s_{\alpha}^{(1)}$ tra gli n valori $s_{\alpha}^{(1)}, s_{\alpha}^{(2)}, \dots, s_{\alpha}^{(n)}$ di s per un valor iniziale α di x , e ritenendo come valori successivi di s quelli che succedono con continuità ad $s_{\alpha}^{(1)}$. Però questa scelta e la continuità seguiranno a individuare il valore di s soltanto insino a che x non passerà per un punto x° dove il valore s° proveniente da $s_{\alpha}^{(1)}$ coincida con uno o più dei rimanenti valori di s ; imperocchè, se in x° la radice proveniente da $s_{\alpha}^{(1)}$ prenda il valore s_{\circ} insieme con $m-1$ altre radici di $F=0$, passando da x° ad altro punto infinitamente vicino, si presenteranno m valori di s infinitamente poco diversi da s° , ognuno dei quali potrà assumersi per proseguire con continuità la serie dei valori di s principata con $s_{\alpha}^{(1)}$.

A ben riconoscere la influenza dei punti x° giova risolvere il quesito: se, evitando il passaggio per questi punti, deva o no essere dato in ogni sua parte il cammino di x dal punto iniziale α al punto finale (variabile) X , affinchè risulti determinato il valor finale della funzione? Quesito che può anche formularsi come segue: tenendo fissi gli estremi α e X del cammino di x e deformando qualche parte intermedia, varierà il valor finale di s ? Cominciamo a confrontare tra loro due cammini infinitesimi pp_1q e pp_1q_1q (Fig. 1), supponendo che x passi da p a q una volta pel cammino pp_1q

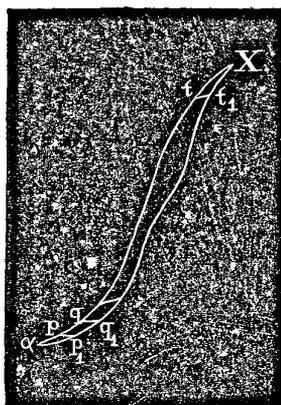
Fig. 1.



(*) Vedi i §§ 92, 93, ... della nostra *Teorica delle funz. di var. complesse*.

ed altra volta pel pp_1q_1q , ed essendo entrambe le volte lo stesso il valore $s_p^{(1)}$ da prendersi per s in p . Sì l'uno che l'altro cammino produrrà una variazione infinitesima nel valore di s ; perciò, se uno solo fra gli n valori di s in q differirà infinitamente poco da $s_p^{(1)}$, i valori prodotti per s dai due cammini non potranno che essere eguali. Confrontiamo, in secondo luogo, un cammino qualunque da α ad X con un altro infinitamente poco diverso fra gli stessi estremi. Imaginando congiunti due a due una serie di punti p, q, \dots (Fig. 2) del primo con altrettanti p_1, q_1, \dots dell'altro mediante linee infinitesime pp_1, qq_1, \dots ; il primo risulta come aggregato dei cammini infinitesimi $\alpha p, pq, \dots, tX$, ed il secondo equivale, quanto alla determinazione del valor finale di s , all'aggregato dei cammini infinitesimi $\alpha p_1 p, pp_1 q_1 q, \dots, t t_1 X$. Pel confronto precedente si fa così manifesto, che, se il valore scaturiente da $s_\alpha^{(1)}$ si conserverà sensibilmente diverso dagli altri $n-1$ in ogni punto della listerella ove corrono i due cammini, il valor finale di s risulterà lo stesso per l'un cammino e per l'altro. Imaginando, ormai, il cammino primitivo $\alpha p X$ ridotto con una infinità di deformazioni infinitesime ad altro sensibilmente diverso, otteniamo il teorema: Due cammini da α ad X , riducibili l'uno all'altro con una serie di deformazioni infinitesime senza sorpassare verun punto dove il valor corrente (*) coincida con altri valori di s , conducono dallo stesso valor iniziale allo stesso valor finale di s . Questo teorema si riconosce tosto equivalente a quest'altro: Se x partirà da α e vi farà ritorno per un cammino riducibile al solo punto α senza sorpassare verun punto dove il valor corrente coinciderebbe con altri valori di s , s riprenderà in α il valor iniziale (**).

Fig. 2.

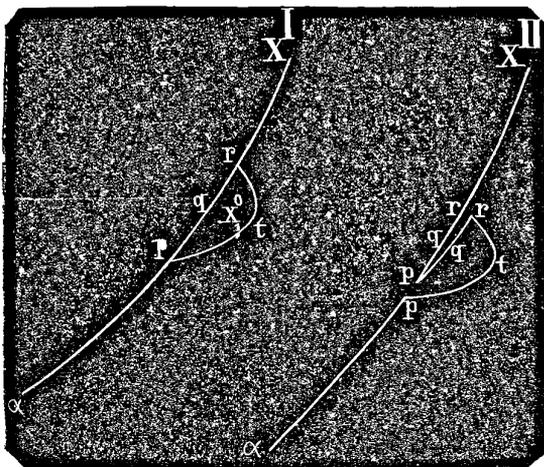


(*) Vogliamo dire quello proveniente da $s_\alpha^{(1)}$; non importando qui che valori diversi da esso riescano tra loro coincidenti.

(**) Ricordiamo che il punto ∞ della sfera potrà essere sorpassato come qualunque altro punto, ogniqualvolta il valor corrente ivi non coincida con altre radici ossia valori di s . Altrettanto valga di qualsiasi punto dove una o più radici fossero infinite. Se il valor corrente ivi resterà finito o non diverrà infinito insieme con altre radici, il punto potrà essere sorpassato. Gli enunciati del signor Puiseux lascierebbero credere il contrario, il quale non ha luogo per la funzione algebrica, ma soltanto per un suo integrale che nel punto divenga *logaritmicamente* infinito.

Esaminiamo che cosa possa accadere quando nel deformare un cammino si venga a sorpassare un punto x° dove parecchi valori di s coincidono.

Fig. 3.



Possiamo supporre due cammini $apqrX$, $aptrX$ (Fig. 3, I) differenti tra loro soltanto per brevissimo tratto vicino a x° . Al secondo cammino possiamo sostituire l' $aptrqpqrX$ (Figura 3, II), che con esso coincide riducendo la porzione $rqpqr$ al solo punto r . Col primo cammino, da p si andrebbe a X pel tronco $pqrX$; col secondo vi si andrebbe facendo prima il giro $p trqp$ intorno a x° e poi pel tronco suddetto. L'effetto della deformazione si riassume dunque nel giro intorno a x° .

Se al termine di questo giro la funzione ripiglierà in p il valore di partenza, essa prenderà poi sul tronco $pqrX$ gli stessi valori che nel primo cammino. Nel caso contrario, i valori che andrà prendendo su questo tronco saranno diversi, e diverso sarà quindi anche il suo valor finale in X .

Ogni punto, intorno a cui facendo x un giro la s non riprende il valor iniziale, dicesi punto di diramazione della s . Il valore di x rappresentato da uno di questi punti con uno dei valori di s che ivi divengono eguali deve soddisfare le equazioni

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

L'eliminazione di s fra queste due dà l'equazione a cui deve soddisfare la x . Ma non tutte le radici di quest'equazione daranno sempre punti di diramazione. Parecchi valori di s possono coincidere in un punto, senza permutarsi tra loro al girare di x intorno a questo punto, in che sta essenzialmente la diramazione. Il sig. Puiseux mostra nelle sue *Recherches* come si possano discutere tutti i casi possibili. Qui cominciamo a considerare il caso generale, che è pure il più semplice, e dal quale si possono desumere come casi limiti tutti gli altri. In esso caso le coppie di valori (s°, x°) che soddisferanno le due precedenti equazioni non soddisferanno le

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0,$$

perchè dovrebbero sussistere particolari relazioni tra i coefficienti della F . Nello sviluppo della F secondo le potenze di $x - x^o$ e $s - s^o$ saranno

$$\frac{\partial F^o}{\partial x^o} (x - x^o), \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^o}{\partial s^{o2}} (s - s^o)^2$$

i termini del minimo ordine rispetto all'infinitesimo $x - x^o$; laonde, ponendo zero la loro somma, se ne caverà, come primo termine dello sviluppo di $s - s^o$ secondo le potenze di $x - x^o$, la espressione

$$s - s^o = \text{Cost.} (x - x^o)^{\frac{1}{2}}.$$

Essendo due le radici di $F=0$ che vengono a coincidere in x^o , per ottenerne separatamente le espressioni approssimate, porremo

$$x - x^o = \varepsilon e^{i\varphi}$$

ed avremo

$$s^{(1)} - s^o = \text{Cost.} \sqrt{\varepsilon} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad s^{(2)} - s^o = \text{Cost.} \sqrt{\varepsilon} e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}}.$$

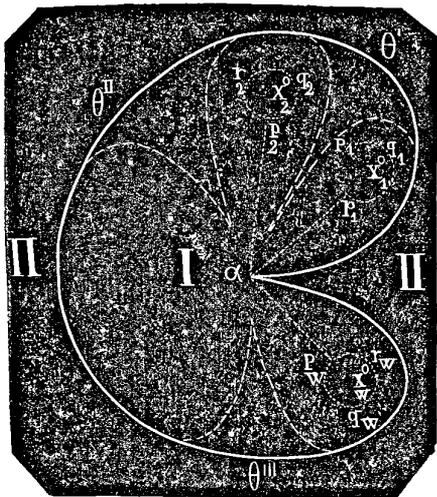
Se x farà un giro intorno a x^o , la radice aritmetica $\sqrt{\varepsilon}$ ripiglierà in fine il valor iniziale (e non varierà nè anche durante il giro se questo si farà su circonferenza di centro x^o), mentre φ crescerà o diminuirà di 2π , e quindi l'una radice piglierà il valor iniziale dell'altra.

Quanto a casi particolari, prendiamo in considerazione soltanto quelli che, riguardando la $F=0$ come equazione di una linea in coordinate cartesiane s e x , danno le singularità ordinarie di essa linea, cioè i punti doppi e di regresso. E, riportandoci al già esposto nel § 3 dell'opera, ricorderemo solo ciò che segue. Il posto dei punti di diramazione dipende dai coefficienti della F e varia in modo continuo con essi. Il caso di un punto doppio può immaginarsi nascente dal venire a coincidenza tra loro due punti che sieno di diramazione per due medesime radici ($s^{(1)}$ e $s^{(2)}$) della $F=0$. Un giro intorno al punto doppio equivale ad un giro intorno al sistema dei due punti, e però ad un giro intorno all'uno (per cui $s^{(1)}$ diverrà $s^{(2)}$) più un giro intorno all'altro (per cui $s^{(2)}$ ridiverrà $s^{(1)}$). Non v'è dunque diramazione intorno al punto doppio, come infatti gli sviluppi delle due radici contengono soltanto potenze intere di $x - x^o$. Il caso del punto di regresso può immaginarsi nascente dal venire a coincidenza fra loro tre punti di diramazione fra due medesime radici. Evvi quindi diramazione, come infatti gli sviluppi delle radici dipen-

dono da $(x - x^v)^{\frac{1}{2}}$. Esprimendo d il numero dei punti doppi, r quello dei punti di regresso, e dovendosi ciascuno degli r noverare come un punto di diramazione, il numero dei punti di diramazione sarà

$$w = n(n-1) - 2d - 2r = 2p + 2(n-1).$$

Fig. 4 (*)



Dal punto α immaginiamo ora condotte le linee αp (Fig. 4) verso ciascuno dei punti di diramazione e intorno ai medesimi descritte altrettante circonferenze $pqrp$ piccole quanto si voglia; otterremo così per ciascun punto di diramazione un cammino rientrante $apqrpa$ che per brevità chiameremo il cappio (***) di esso punto. I cappi li riterremo sempre così descritti da non segarsi tra loro, e numerati in quell'ordine secondo cui le loro tangenti (tangenti le linee αp) in α verrebbero incontrate da chi descrivesse una piccola circonferenza intorno ad α . Imaginiamo ora di percorrere un cappio, per esempio $\alpha p_1 q_1 r_1 p_1 \alpha$, partendo

da α con uno fra gli n valori di s e ritornando ad α . Possono darsi due casi: o che il valor finale di s sia lo stesso iniziale, o che sia uno degli altri $n-1$. Quest'ultimo caso si presenta soltanto se si parte da α con l'una o l'altra delle due radici che diverrebbero eguali in x^o_1 , ossia per le quali x^o_1 riesce punto di diramazione. Possiamo quindi asserire che ogni punto di diramazione riesce coordinato a due fra gli n valori $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)}$ di s in α , o, ciò ch'è lo stesso, che ogni cappio congiunge due fra le n radici. Il modo di coordinamento cambierebbe, se si deformassero i cappi ossia le linee αp tanto da sorpassare qualche punto di diramazione (del che un esempio si troverà nelle fig. 8, 9).

Un cammino qualunque uscente e rientrante in α potrà sempre ridursi con deformazioni infinitesime senza sorpassare punti di diramazione ad una, ed una sola, serie di cappi, e potrà quindi essere surrogato da questa serie in

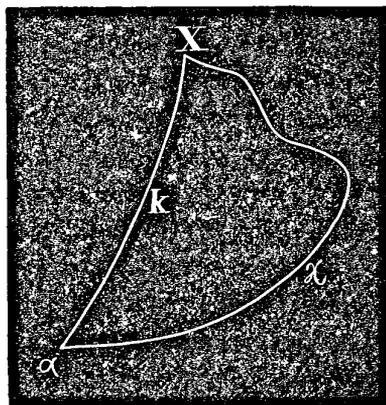
(*) Facciasi astrazione per adesso dalla linea continua e dalle tratteggiate, considerando solo le punteggiate.

(**) È la *Schleife* dell'opera, e il *contour élémentaire* del sig. Puiseux.

quanto all'effetto finale, cioè in quanto al valor finale che deva risultarne per s . Per convincersi di questa verità basta effettuare tale riduzione in alcuni casi particolari. Per esempio, il cammino $\alpha\theta'\theta''\theta'''\alpha$ della fig. 4 riducesi alla serie dei cappi nell'ordine stesso di loro numerazione; le deformazioni a ciò necessarie sono in parte raffigurate nelle linee tratteggiate. Fatta la riduzione, è subito riconosciuto qual debba essere per un dato valor iniziale il valor finale di s , sapendosi, ben'inteso, quali radici sieno congiunte dai singoli cappi. Se, per esempio, il cammino siasi ridotto a due cappi, il primo dei quali congiunga $s^{(1)}$ con $s^{(2)}$ e il secondo $s^{(2)}$ con $s^{(3)}$; dal valor iniziale $s^{(1)}$ scaturirebbe il valor finale $s^{(3)}$.

È pur facile riconoscere i valori che devano scaturire ordinatamente dagli n valori iniziali al termine di un cammino $\alpha x X$ (Fig. 5) conducente comunque da α ad un punto X , qualora ciò siasi già trovato per un cammino particolare $\alpha k X$. Imperocchè, da un dato valore iniziale scaturirà lo stesso valore per s in X , sia percorrendo il cammino $\alpha x X$, come il cammino $\alpha x X k \alpha k X$ e considerando questo, e riducendo la sua porzione rientrante $\alpha x X k \alpha$ a serie di cappi, si riconoscerà con qual valore di s si giungerà al termine della medesima, cioè in α , e quindi con qual valore si giungerà per la porzione $\alpha k X$ in X . Se, per esempio, sia $s^{(3)}$ il valore in cui si scambia $s^{(1)}$ al termine della porzione rientrante, e se siano $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}$ i valori in X scaturienti ordinatamente da $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)}$ lungo $\alpha k X$; sarà $S^{(3)}$ il valore scaturiente da $s^{(1)}$ lungo il cammino $\alpha x X$.

Fig. 5.



Integrazione lungo cammini diversi. Moduli di periodicità.

L'integrale

$$\int \psi(s, x) dx,$$

di una funzione razionale ψ in s e x , preso da un valor α sino ad altro valore X di x , riesce perfettamente determinato se sia fissato il cammino lungo il quale x deva passare in modo continuo da α ad X , se questo cammino non

traversi punti di diramazione o d'infinito della ψ (*) e se sia dato il valor iniziale di s . Indicando cogli indici $1, 2, \dots, m$ i valori di x e ψ in una serie di punti ad intervalli infinitesimi da α ad X sul cammino prescritto, il valor dell'integrale s'intende definito da

$$\int \psi dx = \psi_\alpha(\alpha - x_1) + \psi_1(x_2 - x_1) + \psi_2(x_3 - x_2) + \dots + \psi_m(X - x_m).$$

Circa l'influenza del cammino sul valore dell'integrale sussiste, per valori finiti di x , il seguente teorema: L'integrale di ψdx , preso lungo un dato cammino, non cambia di valore, se, rimanendo fissi i punti estremi ed il valor iniziale di s , il cammino si deformi senza sorpassare verun punto di diramazione o d'infinito di ψ . Il qual teorema dà o rientra nel seguente: L'integrazione di ψdx lungo un cammino rientrante e riducibile ad un punto senza sorpassare verun punto di diramazione o d'infinito della ψ dà risultamento nullo. La dimostrazione, come fu data da Cauchy, è affatto ovvia. Imaginando variato il cammino primitivo $\alpha p X$ (Fig. 2), di guisachè la distanza fra ogni punto variato p_1 e il primitivo p sia infinitesima di prim'ordine, si può subito ridurre, trascurando un infinitesimo di terz'ordine, la variazione di ψdx a un differenziale esatto, e quindi la variazione dell'integrale a zero.

Se nel deformare un cammino si deva soltanto aver riguardo che non si alteri il valor finale della funzione algebrica (s o ψ), abbiamo visto precedentemente che si possono liberamente sorpassare i punti dove la funzione sia infinita, come anche il punto $x = \infty$ della sfera, quando in essi non avvenga diramazione; ma, se si tratta di non alterare il valore di un integrale $\int \psi dx$ di essa funzione, questi punti non possono più essere sorpassati, se non quando siasi riconosciuto, per ciascuno di essi separatamente, che la integrazione di ψdx , lungo una linea che circondi esso punto (Fig. 3) e nessun' altro punto eccezionale, dia risultamento nullo; come appunto dà la integrazione di ds o di $d\psi$.

Gl'integrali che devono considerare in questo articolo sono soltanto quelli di prima specie relativamente all'equazione fondamentale $F(s, x) = 0$, cioè quelli pei quali ψ è della forma

$$\psi = \frac{Q}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

(*) I punti di diramazione di ψ sono evidentemente quelli stessi di s .

Q significando funzione intera del grado $n - 3$ che deve annullarsi proporzionalmente a $x - x^0$ per ogni punto x^0 doppio o di regresso. Siccome la $\frac{\partial F}{\partial s}$ diventa zero soltanto nei punti doppi ed in quelli di diramazione, e nei punti doppi diventa zero dello stesso ordine di Q , così una tale ψ non diventa infinita che nei punti di diramazione (*). Inoltre, essendo il grado del numeratore inferiore di due unità al grado del denominatore, per $x = \infty$ questa ψ diventa zero del second'ordine (e soltanto diverrebbe infinita per due fra gli n valori di s che intorno a $x = \infty$ si scambiassero tra loro), condizione sufficiente perchè il punto $x = \infty$ possa essere sorpassato (**). E però per gl'integrali di prima specie il teorema precedente può enunciarsi più semplicemente come segue: Due cammini, che si possano ridurre l'una all'altro sorpassando qualsiasi regione della sfera ma nessun punto di diramazione, somministrano lo stesso valore per l'integrale. Quando due cammini non siano riducibili l'uno all'altro, somministrano in generale valori diversi per l'integrale. Comunque sia, si può sostituire, come vedemmo, all'un cammino $\alpha x X$ (Fig. 5) il cammino chiuso $\alpha x X k \alpha$ più l'altro cammino $\alpha k X$. Siccome poi i valori che essenzialmente importa di considerare, come spettanti ad un integrale $\int \psi dx$, sono quelli che esso può prendere rimanendo gli stessi non solo i valori estremi α ed X della x ma anche gli estremi s_α ed S della s , sì che trattisi veramente di valori di un integrale

$$\int_{(\alpha, s_\alpha)}^{(X, S)} \psi dx$$

esteso fra due determinati punti della linea $F = 0$ (**); così le due serie di valori di s corrispondenti a due di questi cammini, e siano ancora $\alpha k X$ e $\alpha x X$, si congiungeranno in X in guisa da formare un'unica serie continua, ed il cammino chiuso $\alpha x X k \alpha$ avrà la proprietà di principiare e finire non soltanto nello stesso punto-valore di x ma anche collo stesso valore di s .

(*) In quelli fra questi che sono di regresso Q si annulla proporzionalmente a $x - x^0$, ma $\frac{\partial F}{\partial s}$ proporzionalmente a $(x - x^0)^{\frac{3}{2}}$.

(**) Per maggiori schiarimenti su questa e le altre enunciate proprietà d'integrazione veggansi i §§ 69, 72, 99, 101 della nostra *Teoria delle funzioni di variabili complesse*.

(***) Riconoscendo questa verità e concentrando l'attenzione esclusivamente su questi cammini, il sig. Puisseux, dopo avere stabilito il teorema della sua seconda Memoria (J. de Liouville t. XVI) avrebbe potuto condurre egli stesso a maggior compimento la terza parte della prima Memoria.

Chiamando ciclico ogni cammino dotato di questa proprietà, potremo dire che un cammino qualunque percorribile per formare l'integrale di ψdx si può ottenere da uno scelto a piacimento tra essi aggiungendo al medesimo un cammino ciclico. E chiamando modulo di periodicità dell'integrale il risultato dell'integrazione di ψdx lungo un cammino ciclico, potremo dire che tutti i valori possibili dell'integrale si possono ottenere da uno fra essi aggiungendovi dei moduli di periodicità.

Prima di investigare le proprietà che si connettono col sistema completo dei cappi, notiamo ancora le seguenti proprietà relative ad ogni coppia separatamente. Supponendosi che ogni punto di diramazione sia tale per *due sole* radici, l'effetto, che dal percorrere un cappio può venirne sulle quantità che qui occorre di considerare, rimane lo stesso sia percorrendo il cappio in un senso come nel contrario. Ed invero, le quantità che entrano in considerazione sono o la s , o funzioni razionali ψ di s e x , o integrali di siffatte funzioni. Riguardo alla s , l'effetto è in entrambi i sensi la trasposizione tra i due valori $s^{(i)}$ e $s^{(k)}$ coordinati al cappio. Riguardo alla ψ , parimenti l'effetto è sempre di scambiare $\psi(s^{(i)}, x)$ con $\psi(s^{(k)}, x)$. Riguardo all'integrale di ψdx , cominciamo ad osservare che, partendo ciascuna volta col valore $s^{(i)}$ per s , la integrazione da α a p e (dopo il giro) da p ad α dà evidentemente in entrambi i sensi lo stesso risultamento. Quanto all'integrazione lungo la circonferenza $pqrp$, facciamola su ogni singolo termine dello sviluppo secondo le potenze intere di $(x - x^o)^{\frac{1}{2}}$ che in prossimità di x^o sappiamo sussistere per la funzione da integrare

$$\psi = \Sigma C_m (x - x^o)^{\frac{m}{2}}.$$

Avremo

$$\int \psi dx = \Sigma C_m \int (x - x^o)^{\frac{m}{2}} dx.$$

Consideriamo il termine qualunque $\int (x - x^o)^{\frac{m}{2}} dx$. Ponendo $x - x^o = \varepsilon e^{i\varphi}$, e prendendo come valor iniziale di $(x - x^o)^{\frac{m}{2}}$, tanto per integrare nel senso pqr come nel contrario, la quantità reale e positiva $\left(\varepsilon^{\frac{m}{2}} e^{\frac{m i \varphi}{2}}\right)_{\varphi=0} = \varepsilon^{\frac{m}{2}}$, avremo, per m diverso da -2 , rispettivamente questi risultati:

$$i \varepsilon^{\frac{m}{2}+1} \int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{m}{2}+1\right)i\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} \left(e^{\left(\frac{m}{2}+1\right)2\pi i} - 1 \right)$$

$$i\varepsilon^{\frac{m}{2}+1} \int_0^{-2\pi} e^{(\frac{m}{2}+1)i\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} \left(e^{-(\frac{m}{2}+1)2\pi i} - 1 \right),$$

i quali sono appunto eguali tra loro. Il caso d'eccezione ($m = -2$) è quello in cui l'integrale diverrebbe logaritmicamente infinito nel punto di diramazione. Se il punto di diramazione fosse nell'infinito, si porrebbe

$$x^2 \cdot \psi = \Sigma C_m \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{m}{2}}, \quad \frac{1}{x} = \varepsilon e^{i\varphi},$$

e si avrebbe lo stesso risultato.

Cicli e gironi.

Noi supponiamo la equazione $F(s, x) = 0$ irriducibile; quindi sussiste il teorema: Percorrendo opportuna serie di cappi, si può passare con continuità da un qualsivoglia valore di s in α ad uno pure qualsivoglia degli altri $n - 1$. Infatti, se il teorema non fosse vero, dovrebbe esservi un gruppo di valori $s^{(\alpha)}, s^{(\beta)}, \dots$ che si permutassero soltanto tra loro percorrendo qualsiasi combinazione di cappi. Ogni funzione simmetrica di $s^{(\alpha)}, s^{(\beta)}, \dots$ ripiglierebbe quindi sempre lo stesso valore ogni qualvolta x ritornasse in α , e quindi anche uno stesso valore al ripassare di x per un altro qualunque punto della sfera; in altre parole, essa funzione avrebbe assolutamente un solo valore per ogni valor di x e sarebbe dunque razionale (*). E però, si potrebbe formare un'equazione, a coefficienti razionali

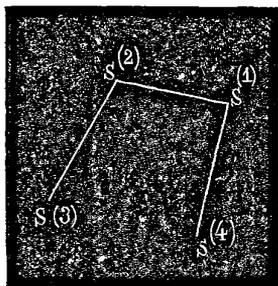
(*) Questo teorema costituisce il pregio della seconda Memoria del signor Puiseux. Presentemente si suol presentare negli elementi della teorica generale delle funzioni di variabili complesse senza presupporre algebrica la funzione, ma soltanto continua (oltrechè monodroma) per tutta la sfera della variabile. Chi avesse sott'occhi la nostra *Teorica d. f. d. v. c.*, e non altre, potrebbe riconoscere la verità di questo teorema, che comparirà nella Sez. V, come segue. Dai §§ 79 e 98 discende che una funzione w monodroma e continua senza eccezione non può avere che un numero limitato di infiniti. Essendo $\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha$ e ν_1, \dots, ν_k, ν i posti e gli ordini degli infiniti di w , la funzione $\Phi = (x - \beta_1)^{\nu_1} \dots (x - \beta_k)^{\nu_k} \frac{1}{z^\nu} w$ sarà finita dappertutto, ed in una calotta sferica o cerchio piano col centro in 0 e di

in x , avente per radici soltanto alcune fra le n radici dell'equazione $F = 0$; laonde questa non sarebbe irriducibile.

Scegliendo un punto di diramazione, del quale diremo $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$ le radici coordinate, vi sarà dunque sempre una radice $s^{(3)}$ che sarà congiunta con $s^{(1)}$ o con $s^{(2)}$ per via del coppia di un altro punto, e poi una radice $s^{(4)}$ che sarà congiunta con $s^{(1)}$ o con $s^{(2)}$ o con $s^{(3)}$, e così via. E pertanto, immaginiamo scelti $n - 1$ punti di diramazione, che denomineremo punti fondamentali di prima sorta, siffattamente che pel coppia del primo punto si passi, per esempio, da $s^{(1)}$ a $s^{(2)}$, pel coppia del secondo si passi da $s^{(1)}$ o $s^{(2)}$ a $s^{(3)}$, pel coppia del terzo da $s^{(1)}$ o $s^{(2)}$ o $s^{(3)}$ a $s^{(4)}$, e così di seguito.

Con soli punti fondamentali non si può formare un ciclo, vale a dire che non si può formare un cammino ciclico con soli cappel fondamentali.

Fig. 6.



Basta fissare comunque n punti in un piano (Fig. 6, per $n=4$) come rappresentativi delle radici $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(n)}$, e congiungerli tra loro mediante rette come le radici sono congiunte mediante cappel fondamentali, per scorgere affatto chiaramente esservi un solo cammino composto di queste rette che possa condurre da una radice ad un'altra; laonde il ritorno alla radice di partenza non può effettuarsi che rifacendo in senso contrario il cammino già percorso. Un cammino ciclico composto di soli cappel fondamentali conterrebbe dunque ogni coppia un egual numero di volte positivamente come negativamente il che, per lo scopo a cui miriamo (*), vale come se esso cammino fosse nullo o non esistesse. Dalla stessa rappresentazione risulta evidente che ogni coppia non fondamentale forma con alcuni dei fondamentali uno; ed un solo ciclo. Nella fig. 6, per esempio, il coppia congiungente $s^{(1)}$ e $s^{(3)}$ forma un ciclo coi cappel fondamentali congiungenti $s^{(1)}$ e $s^{(2)}$, $s^{(2)}$ e $s^{(3)}$.

Un ciclo qualunque può decomorsi in cicli semplici, cioè contenenti ciascuno un solo punto non fondamentale. Infatti, aggiun-

raggio R si potrà esprimere con $\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(x) dx}{x-z}$. E siccome, ponendo $x = R e^{i\Omega}$, riesce

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(x)}{1 - \frac{z}{x}} d\Omega \text{ dove può anche supporre } R = \infty \text{ e quindi } \frac{z}{x} = 0; \text{ così } \Phi \text{ non può di}$$

pendere da x , ossia dev'essere costante, e w razionale.

(*) Cioè in quanto ai risultamenti della integrazione di un differenziale $\psi(s, x) dx$.

gendo ad ogni coppia non fondamentale del ciclo proposto i cappi fondamentali necessari per costituire un ciclo semplice e da questo sottraendo ogni volta i cappi stessi aggiunti, il ciclo proposto apparirà costituito di cicli semplici con frammezzo aggregati di cappi fondamentali; il complesso dei quali, dovendo pur condurre senza salto da una radice alla medesima radice, conterrà, come osservammo, ogni coppia l'egual numero di volte positivamente e negativamente, e potrà essere trascurato. Esempio. Sia proposto il ciclo

$$(1, 2)(2, 3)[3, 4][4, 2](2, 1),$$

nel quale $[3, 4]$ e $[4, 2]$ significhino cappi non fondamentali conducenti da $s^{(3)}$ a $s^{(4)}$ e da $s^{(4)}$ a $s^{(2)}$, mentre gli altri simboli sieno di cappi fondamentali, e sia pur fondamentale il cappio $(1, 4)$. Aggiungendo e togliendo i cappi necessari a formare i cicli semplici, il proposto apparirà nel seguente modo

$$(1, 2)(2, 3) [3, 4](4, 1)(1, 2)(2, 3) (3, 2)(2, 1)(1, 4) [4, 2](2, 1)(1, 4) (4, 1)(1, 2)(2, 1),$$

in cui ben lo si vede composto di due cicli semplici e dei cappi fondamentali

$$(1, 2)(2, 3) \quad (3, 2)(2, 1)(1, 4) \quad (4, 1)(1, 2)(2, 1),$$

che a due a due si elidono.

Ricordando la definizione di modulo di periodicità e chiamando semplici i moduli di periodicità scaturienti da cicli semplici, il teorema qui dimostrato si può tradurre nei seguenti termini: Un modulo di periodicità qualunque è una funzione lineare a coefficienti interi dei moduli di periodicità semplici.

Fra i cicli alcuni vanno particolarmente notati, e sono quelli che risultano girando intorno all'intero sistema dei punti di diramazione. Il cammino, che si percorre in un tale giro grande o girone (che può vedersi raffigurato nella linea continua $\alpha \theta' \theta'' \theta''' \alpha$ tanto della fig. 4 come della fig. 7), può riguardarsi e come contorno della porzione *I* di sfera contenente tutti i punti di diramazione e come contorno della restante porzione *II*; ed in questo secondo modo è manifesto ch'esso cammino può stringersi sino a ridursi ad un solo punto, per esempio al punto α , senza sorpassare verun punto di diramazione; d'onde segue che un girone riconduce al valor iniziale di s . Esistono dunque n gironi, coincidenti, se si vuole, nel cammino, ma tra loro distinti per la radice o valore di s col quale principiano e terminano in α . Imaginiamo il loro cammino ridotto alla serie dei cappi, nella quale sia primo il cappio di x°_1 e ultimo quello di x°_n , e prendiamo a

percorrere questa serie con una fra le n radici. Troveremo che alcuni punti di diramazione saranno *essenziali*, inquantochè il relativo cappio condurrà da una ad altra radice, ed altri saranno *non essenziali*. In due diversi gironi uno stesso cappio non può essere percorso coi medesimi valori di s nello stesso ordine, altrimenti tutti i cappi precedenti e susseguenti, vale a dire i due gironi in tutta la loro estensione, dovrebbero coincidere. Siccome, d'altronde, ogni punto è essenziale nei due gironi che principiano con quelle due radici che verrebbero a coincidere nel punto stesso, se vi si arrivasse pel cammino dei gironi ridotto a rasentare esso punto; così ogni cappio sarà essenziale in due, e due soli, gironi, nell'uno dei quali condurrà da una $s^{(i)}$ delle proprie radici coordinate all'altra $s^{(k)}$, e nel secondo da $s^{(k)}$ a $s^{(i)}$. Imaginiamo il cammino di ciascun girone ridotto alla serie dei rispettivi cappi essenziali; essendo ciclico, potremo inoltre immaginarlo ridotto alla serie dei cicli semplici corrispondenti a quelli tra i detti cappi che non sono fondamentali. Inoltre, essendo esso cammino, come dicemmo, riducibile ad un punto, l'integrazione di un differenziale di prima specie $\frac{Q}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ lungo il medesimo darà zero; dunque sarà zero la somma degli integrali di $\frac{Q dx}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ lungo

i singoli cicli semplici, ossia uno di questi integrali o moduli di periodicità semplici si potrà esprimere per la somma negativa degli altri. Il numero dei moduli di periodicità semplici che possono così esprimersi coi rimanenti non è però eguale precisamente al numero n dei gironi, ma ad $n-1$. Imperocchè nel cammino risultante dall'aggregato di tutti i gironi ogni cappio entrerà due volte essenzialmente, e, come s'è detto, l'una volta condurrà da $s^{(i)}$ a $s^{(k)}$ e l'altra da $s^{(k)}$ a $s^{(i)}$; quindi anche nel complesso dei cicli semplici, risultante dal sommare insieme tutti i cicli semplici degli n gironi, entrerà e il ciclo semplice che contiene il detto cappio conducente da $s^{(i)}$ a $s^{(k)}$ e il ciclo semplice contrario, in cui cioè il cappio stesso condurrà da $s^{(k)}$ a $s^{(i)}$. I moduli di periodicità semplici si distruggeranno dunque due a due identicamente nella somma; la qual cosa avverte che una qualunque delle n relazioni lineari somministrate dai singoli gironi è una pura combinazione delle altre. Siccome il numero dei cicli semplici o dei moduli di periodicità semplici è $2p+n-1$, ed $n-1$ fra essi possono esprimersi cogli altri, si fa manifesto che il numero dei moduli di periodicità semplici è ridotto a $2p$.

Tutti i moduli di periodicità, che già riconoscemmo funzioni lineari a coefficienti interi dei moduli di periodicità semplici, saranno dunque funzioni lineari a coefficienti interi di $2p$ fra i semplici. Indicando con $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots, I^{(2p)}$ questi $2p$ moduli di periodicità semplici per un dato integrale e con I il valore di esso integrale preso lungo un cammino particolare qualsivoglia fra (α, s_α) e (X, S) ; tutti i valori ottenibili per la infinita varietà degli altri cammini, fra le stesse coppie di valori di x e s , si avranno dalla formola

$$I + m^{(1)} I^{(1)} + m^{(2)} I^{(2)} + \dots + m^{(2p)} I^{(2p)}$$

attribuendo alle m tutti i possibili valori numerici interi positivi e negativi (*).

Abbiamo notato poc'anzi che nell'aggregato degli n gironi ogni cappio entra due volte (essenzialmente); ora, per contrario, notiamo che, in un aggregato di $i < n$ gironi havvi sempre almeno un cappio non fondamentale che entra una volta sola. Infatti, prendiamo una funzione simmetrica delle radici $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(i)}$ colle quali questi i gironi principiano, e consideriamo il suo modo di comportarsi percorrendo la intera serie dei cappi. Ogni cappio che entri in due degli i gironi riesce non essenziale per questa funzione, poichè facendo cambiare simultaneamente $s^{(k)}$ in $s^{(h)}$ e $s^{(h)}$ in $s^{(k)}$ non altera il valore di essa. Ma qualche cappio deve pur riuscire essenziale, altrimenti questa funzione, non avendo punti di diramazione, sarebbe razionale, e la $F=0$ non sarebbe irriducibile. Vi sarà dunque almeno un cappio che entrerà una volta sola negli i gironi. Ora, sostituiamo ai gironi le rispettive serie di cicli semplici. I cappi fondamentali che si tralasciano in tale sostituzione sono sempre due a due eguali e contrari. Un cappio che

(*) In questo enunciato ammettiamo che un modulo di periodicità semplice possa sempre aggiungersi e quante volte si voglia positivamente o negativamente ad un valore I già ottenuto integrando lungo un determinato cammino C . Per riconoscere questa verità, consideriamo un cammino ciclico qualunque C_m corrispondente al modulo di periodicità M (semplice o no), e, se già non passa per α , deformiamolo senza sorpassare punti di diramazione tanto che vi passi, e sia s'_α il valore che in questo punto esso porta per s . Tracciamo un cammino C che partendo da α col valore s_α vi ritorni col valore s'_α , e prendiamo come cammino d'integrazione il simbolizzato da $C + C_m - C + C'$. I risultati dell'integrazione lungo i cammini C e $-C$ saranno eguali e contrari, laonde, come valore dell'integrale lungo l'intero cammino, resterà $M + I$. Invece di inserire fra C e $-C$ il cammino C_m una sola volta, si può inserirvelo qualunque numero di volte nell'un senso o nell'altro.

entra una sola volta non può dunque scomparire e si troverà in un ciclo semplice, il quale entrerà pure una sola volta negli i gironi. Il coppia non fondamentale di questo ciclo entrerà dunque parimenti una sola volta.

Reciprocità fra due sorte di gironi e di punti fondamentali.

Descriviamo, partendo ogni volta da α , w cammini ciascun dei quali abbracci tutti i punti di diramazione tranne uno. Indichiamo con A_1, A_2, \dots, A_w questi cammini e con a_1, a_2, \dots, a_w i cappi nel solito ordine: A_μ potrà ritenersi formato dalla serie dei cappi, ommesso a_μ . Ciascun cammino A riesce coordinato a due gironi, e precisamente ai due nei quali è essenziale il coppia escluso a . Ed invero sieno $s^{(\alpha)}$ e $s^{(\beta)}$ le radici con cui principiano questi due gironi, ed $s^{(i)}$ e $s^{(k)}$ le radici congiunte dal coppia a . Il cammino A , se non sia principiato con una delle radici $s^{(\alpha)}$ o $s^{(\beta)}$, riconurrà sempre alla radice iniziale; poichè il coppia a riuscirà sempre, in tale supposto, non essenziale, ed il cammino A equivarrà ad un girone. Ma se si comincia il cammino A colla radice $s^{(\alpha)}$, il tutto procederà come nel girone α^{mo} (cioè principiato con $s^{(\alpha)}$) soltanto fino al coppia escluso, cioè sino al punto in cui mediante questo coppia $s^{(i)}$ doveva diventare $s^{(k)}$. Ed invece si passa al coppia successivo con $s^{(i)}$, come sarebbe avvenuto nel girone β^{mo} , nel quale appunto a avrebbe terminato con $s^{(i)}$ e non con $s^{(k)}$. E pertanto la serie dei valori di s provocata dal cammino A , se principiata con $s^{(\alpha)}$, conterà della prima porzione del girone α^{mo} (cioè dal suo principio sino al coppia a) e della seconda porzione del girone β^{mo} (cioè dal coppia a sino alla fine); o viceversa, se principiata con $s^{(\beta)}$, conterà della prima porzione del girone β^{mo} e della seconda del girone α^{mo} .

Questo cammino A è dunque coordinato ai gironi α^{mo} e β^{mo} ossia congiunge le radici $s^{(\alpha)}$ e $s^{(\beta)}$ come il coppia a congiunge le radici $s^{(i)}$ e $s^{(k)}$. Esso cammino inoltre può parimenti ridursi alla ordinaria forma di un coppia, abbracciante lo stesso punto di diramazione del coppia a , ma non riducibile a questo, tranne se sia il primo o l'ultimo della serie. A ben caratterizzare la diversa giacitura del sistema dei cappi A in confronto del sistema degli a , immaginiamo una linea θ (la $\alpha\theta'\theta''\theta'''\alpha$ della fig. 7) che parta da α , passi per tutti i punti di diramazione secondo l'ordine stabilito, e ritorni in α , in guisa da costituire il contorno di una porzione I della sfera che contenga totalmente i cappi

α . I cappi A potremo immaginarli: contenuti totalmente nella restante porzione II della sfera, della quale la θ costituisce parimenti il contorno. I cappi A formano un sistema affatto analogo al sistema degli α ; desso sarebbesi potuto prendere sino da principio invece di questo; esso pure dà luogo ad n gironi, ed è così conjugato al primitivo che, se un cappio dell'un sistema congiunge le radici $s^{(\alpha)}$ e $s^{(\beta)}$, il cappio corrispondente dell'altro sistema è essenziale nei gironi di questo che principiano con $s^{(\alpha)}$ e $s^{(\beta)}$; e reciprocamente.

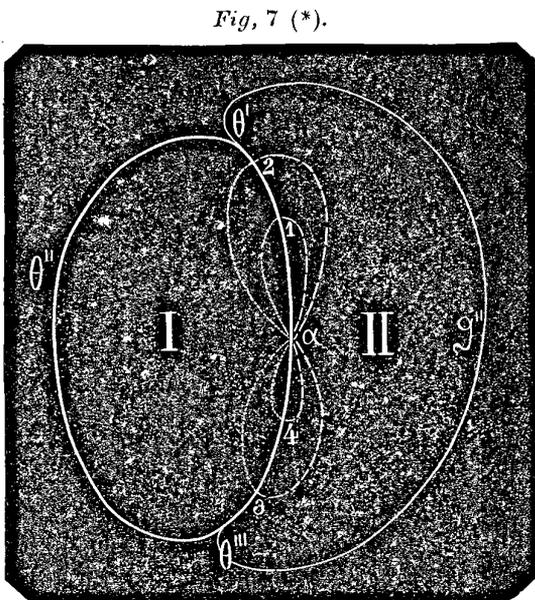
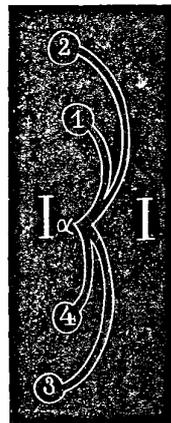
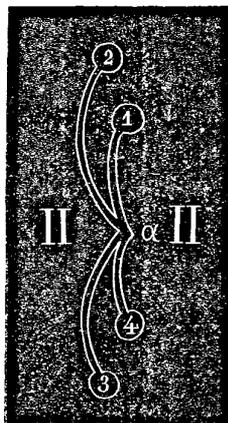


Fig. 7 (*).

A rendere viepiù chiara la perfetta reciprocità dei due sistemi di cappi presentiamo anche le fig. 8 e 9; la prima delle quali rappresenta la θ della fig. 7 ridotta alla serie dei cappi α , nel solito modo indicato sino dalla fig. 4; mentre la seconda rappresenta la stessa θ ridotta analogamente alla serie dei cappi A. La θ , concepita come contorno della regione I, si presenta, secondo fù detto, come il cammino comune (cioè non ridotto ai soli cappi essenziali) dei gironi di prima sorta; concepita invece come contorno della regione II, si presenta come il cammino comune dei gironi di seconda sorta. Come percorrendo opportuni cappi di prima sorta, così percorrendo opportuni

Fig. 8.

Fig. 9.



(*) In questa figura suppongonsi soltanto quattro punti di diramazione (1, 2, 3, 4). La linea continua, più forte, rappresenta la θ , le punteggiate rappresentano i cappi α , le tratteggiate i cappi A. Le circonferenze di tutti i cappi soppongonsi infinitesime. Che, per esempio, il cappio A_2 possa essere una deformazione di un cammino il quale parta e ritorni ad α rinchiudendo i punti 1, 3, 4, lo si riconosce subito, tracciando effettivamente un tal cammino e deformandolo a traverso la regione di sfera opposta alla qui osservata. Anche una porzione $\theta' \theta'' \theta'''$ della θ può così deformarsi che compaja a destra della restante porzione $\theta''' \alpha \theta'$, come è raffigurato in $\theta' \theta'' \theta'''$.

cappi di seconda sorta si può passare da un qualsivoglia valore di s in α ad uno qualsivoglia degli altri $n-1$. Come si sono presi $n-1$ cappi fondamentali della prima sorta sempre bastanti per effettuare tale passaggio, così si possono scegliere come sempre bastanti $n-1$ cappi fondamentali della seconda sorta. Questo è ovvio; ma inoltre, comunque siano stati scelti i punti fondamentali di prima sorta, si possono sempre scegliere come fondamentali di seconda sorta punti tutti diversi dai primi. Ed invero, in un girone di prima sorta, dove entri come essenziale il primo punto fondamentale (di essa sorta), deve entrare essenzialmente almeno un punto che non sia tra i fondamentali, non potendo questi formare da soli un ciclo. Scegliamo il detto punto come primo punto fondamentale di seconda sorta. Nell'aggregato del detto girone e di quell'altro in cui il punto prescelto è pure essenziale dev'esservi (è il caso $i=2$ di teorema già dimostrato) almeno un punto non fondamentale che entra in un solo dei due gironi. Scegliamolo come secondo punto fondamentale di seconda sorta. Nell'aggregato dei due gironi e di quello in cui questo punto è pure essenziale dev'esservi almeno un punto non fondamentale che entra una sola volta. Scegliamolo come terzo punto fondamentale di seconda sorta. Così continuando, otteniamo un completo sistema di punti fondamentali di seconda sorta tutti diversi da quelli di prima.

Relazioni fra i moduli di periodicità degli integrali di prima specie.

Sieno I ed H due qualunque integrali di prima specie, e integriamo il differenziale $I dH$ percorrendo n volte la intera serie dei cappi di prima sorta, la prima volta principiando col valore $s^{(1)}$, la seconda col valore $s^{(2)}$, e così via. Ma prima osserviamo che il valor iniziale di s determina ogni volta anche il valor iniziale di $dH = \frac{dH}{dx} dx$, poichè $\frac{dH}{dx}$ è razionale in s, x ; e che per I imagineremo fissato ogni volta a piacimento il valor iniziale. In virtù di questo valor iniziale, I potrà riguardarsi come determinato non soltanto per ogni successivo punto della serie dei cappi, ma anche per tutta la regione della sfera esteriore ai medesimi (cioè per la regione II della fig. 8). Infatti, immaginiamo che x abbandoni in qualche dove la linea dei cappi a fine di scorrere per tutta la detta regione; ad ogni posizione

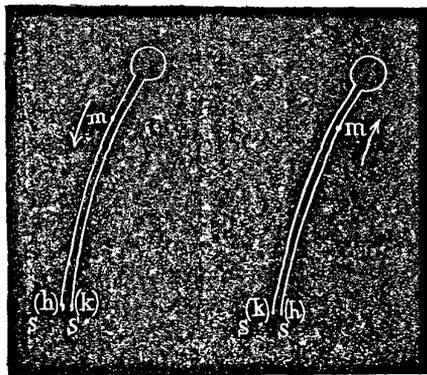
di x la integrazione di $dI = \frac{dI}{dx} dx$ dà un valor corrispondente per I , e se x ripassa per un medesimo punto la detta integrazione ridona il valore quivi già dato; giacchè la linea rientrante descritta da x nel ritornare ad esso punto potrà sempre ridursi a questo solo punto senza sorpassare i punti di diramazione o d'infinito della $\frac{dI}{dx}$, che sappiamo coincidere coi punti di diramazione della s , i quali sono fuori della regione in cui adesso supponiamo mobile la x . Ritornando ora al differenziale IdH , osserviamo che in ognuna delle n volte la integrazione di esso lungo la intera serie dei cappi darà per risultato zero, potendosi questa serie, come contorno della considerata regione della sfera, ridurre ad un punto; giacchè entro tal regione la funzione $I \frac{dH}{dx}$ non si dirama, nè diventa infinita, e nel punto $x = \infty$, se esso non sia di diramazione, e quindi giaccia nella detta regione, diventa nulla del second'ordine. Sarà dunque zero anche il risultato d'integrazione complessivo, cioè l' $\int IdH$ proveniente dal percorrere n volte la serie dei cappi. Di questo integrale passiamo a trovare una espressione che eguagliata a zero darà la relazione che è l'oggetto di questo paragrafo.

Questo integrale si spezza non solo nelle n parti corrispondenti agli n gironi, ma ognuna di tali parti si spezza in altre w parti, che sono gli integrali presi lungo i singoli cappi. Di queste parti sarà zero ognuna che si riferisca ad un cappio non essenziale nel relativo girone, potendosi in tal caso il cappio ridurre ad un punto senza sorpassare punto di diramazione per esso girone. Restano quindi a considerarsi nei singoli gironi soltanto i cappi essenziali. Ogni cappio si presenterà nel complesso due volte; entrambe le volte presenterà gli stessi valori di s e x ma in ordine contrario, conducendo l'una volta da $s^{(h)}$ a $s^{(k)}$ e l'altra da $s^{(k)}$ a $s^{(h)}$. Paragonando due elementi degli integrali relativi a questo cappio, i quali corrispondano ad un punto qualunque m (Fig. 10) dove siavi la stessa coppia di valori di s e x , si scorge che dH avrà valori contrari; per cui indicando con I e I' i due valori di I , l'elemento dei due integrali riuniti sarà

$$(I - I') dH.$$

Con I propriamente intendiamo l'integrale

Fig. 10.



preso dal principio del girone, in cui il cappio conduce dalla radice $s^{(h)}$ d'indice minore a quella d'indice maggiore ($k > h$), sino al cominciamento di esso cappio, e da qui sino al punto qualunque m ; e quindi con I' l'integrale preso dal principio dell'altro girone, in cui il cappio è essenziale, sino al cominciamento del medesimo (col valore $s^{(k)}$), e da qui sino al punto m . Invece di $-I'$ si può mettere il resto di questo girone, vale a dire l'integrale dal punto m sino al termine del cappio (dove si trova il valore $s^{(h)}$) e da qui sino alla fine del girone. Siccome le due porzioni d'integrale da $s^{(h)}$ a m nel cappio del primo girone e da m a $s^{(h)}$ nel cappio del secondo girone si elidono, così $I - I'$ risulta un integrale preso lungo un cammino che racchiude tutti i cappi meno quello in considerazione, cammino che precedentemente abbiamo ridotto a foggia di cappio e dichiarato di seconda sorta.

Indichiamo dunque ormai con a_1, a_2, \dots, a_w i valori dell'integrale I preso lungo i cappi di prima sorta, assumendo come valor iniziale di s per formare a_i quella delle due radici ($s^{(h)}, s^{(k)}$) coordinate che porta l'indice minore; e indichiamo con A_1, A_2, \dots, A_w i valori dello stesso integrale preso lungo i cappi di seconda sorta, assumendo per formare A_i quella tra le radici dalla quale col percorrere il cammino di A_i (concepito, come primitivamente, in forma di serie di cappi a) si arriverebbe al cappio a_i colla radice ($s^{(h)}, s^{(k)}$) d'indice minore. L'elemento sopra considerato $(I - I') dH$, supposto relativo al cappio i^{mo} , potrà rappresentarsi con $A_i dH$, e la somma dei risultati dell'integrazione lungo l'intero cappio stesso in entrambi i gironi sarà $A_i \int dH = A_i b_i$, ritenendo espresse con b_i e B_i rispetto a H le quantità designate con a_i e A_i rispetto a I . La proprietà sopra notata, dell'essere nullo l' $\int I dH$ lungo gli n gironi, si traduce dunque nella seguente relazione

$$A_1 b_1 + A_2 b_2 + \dots + A_w b_w = 0. \quad (1)$$

E qui riflettiamo che potremmo scrivere questa relazione anche nella forma

$$B_1 a_1 + B_2 a_2 + \dots + B_w a_w = 0. \quad (2)$$

Infatti, sommandole insieme e ricordando la loro origine, abbiamo

$$\sum (A_i b_i + B_i a_i) = \int (I dH + H dI) = \int d(HI),$$

e poichè così H come I riprendono al termine d'ogni girone il valore avuto in principio, l'integrale di $d(HI)$ riesce nullo per ogni girone e quindi anche pel loro insieme. Si vede dunque che, tenendo per le quantità A e B

le loro espressioni in a e b somministrate dalla composizione dei cappi di seconda sorta mediante quelli di prima, dev'essere possibile di trasformare le espressioni (1) e (2) l'una nell'altra col puro ajuto di quelle relazioni lineari delle a tra loro e delle b tra loro, le quali esprimono che l'integrazione di dI o di dH lungo tutti i cappi di uno stesso girone dà zero.

Le relazioni (1) e (2) sono fra integrali I ed H presi lungo singoli cappi. Si può trasformarle in guisa che siano soltanto fra $2p$ integrali I e $2p$ integrali H presi lungo cammini ciclici semplici, vale a dire fra i $2p$ moduli di periodicità semplici dell'uno e dell'altro integrale. Ciò si ottiene mediante due successive trasformazioni.

Cominciamo a introdurre invece degli integrali b_1, b_2, \dots gli integrali $(b_1), (b_2), \dots$ presi lungo i cammini ciclici relativi ai corrispondenti punti di diramazione. Perciò immaginiamoci formate, come combinazioni degli integrali lungo cappi fondamentali di prima sorta, $n-1$ quantità f_2, f_3, \dots, f_n , i cui cammini conducano rispettivamente da $s^{(1)}$ a $s^{(2)}$, da $s^{(1)}$ a $s^{(3)}$, \dots , da $s^{(1)}$ a $s^{(n)}$; il che è possibile in un solo modo, come emerge dalle riflessioni fatte sulla fig. 6. Se b_i conduce da $s^{(\alpha)}$ a $s^{(\beta)}$ (*), l'integrale preso lungo il cammino ciclico corrispondente ossia il modulo di periodicità (b_i) sarà dato da:

$$(b_i) = b_i - f_\beta + f_\alpha$$

dove presentandosi f_1 è da interpretarsi come zero. Poniamo nel primo membro della (1)

$$b_i = (b_i) - f_\alpha + f_\beta,$$

ed osserviamo per quali A riusciranno moltiplicate le f_2, f_3, \dots, f_n . La f_α sarà moltiplicata per ciascuno di quegli A a cui corrisponde un cappio di prima sorta avente $s^{(\alpha)}$ per una radice coordinata; e precisamente moltiplicata per $-A$, se $s^{(\alpha)}$ sarà la radice d'indice minore in esso cappio, per $+A$ nel caso contrario. Ora, i cappi di seconda sorta, cammini di cotesti integrali A , riuniti con la detta regola dei segni, costituiscono un girone, e precisamente il girone di seconda sorta che principia con $s^{(\alpha)}$. A riconoscere tale verità basta riflettere come si formi questo girone; noi però formeremo il girone

(*) S'impiegano le lettere a, A, b, B anche per designare i cammini, non nascendo dal doppio impiego veruna confusione. Nè confusione può venire dall'uso di α in $s^{(\alpha)}$ e in f_α con quello di α per designare il solito punto di partenza.

di segno contrario ossia negativo (*). Imaginiamo dunque di partire dal solito punto α col valore $s^{(\alpha)}$ e di percorrere la serie dei cappi A_1, A_2, \dots, A_w , ed osserviamo con quali valori di s giungeremo al principio di ciascun cappio, per esempio dell' A_3 (Fig. 9). Al principio di questo cappio si giunge dopo aver descritto i cappi A_1 e A_2 , o ciò ch'è lo stesso, dopo aver descritto una linea che parte e ritorna ad α abbracciando i punti 1 e 2. Ora, questa linea equivale anche all'aggregato dei cappi a_2 e a_1 , che sarebbero da percorrersi volendo ritornare dal cominciamento del cappio a_3 (Fig. 8) al punto di partenza α di un girone di prima sorta. E però, se imaginiamo di partire dal detto cominciamento col valore $s^{(\alpha)}$ e di percorrere il detto aggregato, arriveremo in α con lo stesso valore col quale saremo giunti al principio del cappio A_3 partendo da α col valore $s^{(\alpha)}$ e percorrendo i cappi A_1 e A_2 . E però, riflettendo all'origine dei cappi di seconda sorta, emerge ormai chiaramente: 1° che se $s^{(\alpha)}$ sia radice coordinata al cappio a_3 , il cappio A_3 sarà essenziale nel girone di seconda sorta che principia con $s^{(\alpha)}$; 2° che se $s^{(\alpha)}$ sia la radice d'indice minore tra le due coordinate al cappio a_3 , il cappio A_3 entrerà positivamente nel girone che si considera. Questo girone è dunque eguale e contrario all'aggregato dei cappi A , come si è asserito. E però il coefficiente di f_α , siccome risultato dell'integrazione lungo un intero girone, è nullo. Quindi il primo membro della (1) si ridurrà semplicemente a

$$\Sigma A_i b_i = \Sigma A_i (b_i). \quad (3)$$

È questa la prima trasformazione. Il secondo membro contiene $n-1$ termini di meno del primo membro, essendo nulli tutti i (b_i) corrispondenti a punti fondamentali di prima sorta.

La seconda trasformazione si eseguisce affatto similmente introducendo invece degli integrali A presi lungo i singoli cappi di seconda sorta gli integrali $[A]$ presi lungo i rispettivi cammini ciclici di seconda sorta, cioè formati ciascuno con un cappio A non fondamentale e con opportuni cappi A fondamentali. Se indichiamo con k_2, k_3, \dots, k_n le combinazioni dei cappi fondamentali di seconda sorta conducenti ordinatamente da $s^{(1)}$ a $s^{(2)}$, da $s^{(1)}$ a $s^{(3)}$, ..., da $s^{(1)}$ a $s^{(n)}$, ed in pari tempo anche i valori degli integrali I presi lungo

(*) Per girone positivo di seconda sorta è naturale d'intendere quello che si ha percorrendo la serie dei cappi nell'ordine A_w, A_{w-1}, \dots, A_1 ossia il contorno in direzione positiva della regione II della sfera (Fig. 7 e 9). Del resto, per la nostra dimostrazione è, in sostanza, indifferente tenere l'un ordine o l'altro.

esse combinazioni, avremo

$$[A_i] = A_i - k_\beta + k_\alpha, \quad (4)$$

supposto che A_i conduca da $s^{(\alpha)}$ a $s^{(\beta)}$. E ponendo, come dianzi,

$$A_i = [A_i] - k_\alpha + k_\beta$$

nella espressione $\Sigma(b_i)A_i$ (la quale, se si vuole, si può ancora immaginare composta di w termini, in $n-1$ dei quali (b) ha il valor zero), ogni quantità k_α riesce moltiplicata per una somma algebrica di (b) esprimente un integrale preso lungo un intero girone di prima sorta, e però nulla. La espressione $\Sigma(b_i)A_i$ si ridurrà dunque semplicemente a

$$\Sigma A_i(b_i) = \Sigma [A_i](b_i). \quad (5)$$

È questa la seconda trasformazione, il cui risultato coincide con la eguaglianza che porta lo stesso numero nel § 26. Il secondo membro contiene soltanto $2p$ termini, e precisamente quelli che non si riferiscono nè a punti fondamentali di prima, nè di seconda sorta; essendo nullo per i primi il fattore (b) e per i secondi il fattore $[A]$ (*).

Egli è poi evidente che, fissati i cappi fondamentali di seconda sorta, si formano senza difficoltà cogli integrali A gli integrali k_2, k_3, \dots, k_n e quindi gli $[A]$ in funzioni lineari a coefficienti interi degli A . Dalle espressioni degli A in a si avranno quelle degli $[A]$ in a e quindi in (a) ; e siccome gli $n-1$ (a) corrispondenti ai punti fondamentali di seconda sorta si possono cavare (pag. 14) dalle relazioni lineari somministrate dai gironi in funzioni lineari a coefficienti interi dei restanti (a) ; così, sostituendo, si otterranno infine gli $[A]$ espressi ancora in funzioni lineari a coefficienti interi con soli $2p$ tra gli (a) , cioè cogli (a) non corrispondenti a punti fondamentali.

(*) Che questi $[A]$ coincidano con quelli dell'opera può anche subito riconoscersi riflettendo che tanto al cappio A_i come agli altri cappi A contenuti in k_α e k_β si possono sostituire i rispettivi cicli semplici di prima sorta senza che si alteri il risultato dell'integrazione lungo l'aggregato ciclico designato nel secondo membro dell'eguaglianza $[A_i] = A_i - k_\beta + k_\alpha$; per la quale sostituzione l'integrale A_i diviene (A_i) , e k_α e k_β divengono gli h_α e h_β della prima eguaglianza del § 27. E qui vogliamo di passaggio avvertire come sia sempre lecito di sostituire ai singoli cappi i rispettivi cicli semplici, dell'una sorta o dell'altra, in una eguaglianza di cui un membro sia ciclico o zero. Gli $[A_4]$, $[A_5]$, $[A_6]$, che nell'esempio § 28 corrispondono ai punti fondamentali di seconda sorta, vi si veggono appunto eguali a zero; se non che, invece di essere questo loro valore dato come conseguenza della definizione degli $[A]$, vi figura come risultato del processo indicato alla fine del § 27.

Che, reciprocamente, gli (a) si possano esprimere in modo analogo cogli $[A]$ che non corrispondono a punti fondamentali è affatto evidente per la perfetta reciprocità dei due sistemi di capi.

Per dispensare del tutto lo studioso dalla lettura del § 27 riproduciamo la dimostrazione delle due seguenti proprietà. Poniamo

$$[A_i] = c_{i1}(a_1) + c_{i2}(a_2) + \dots + c_{i2p}(a_{2p}),$$

dove per comodità impieghiamo gli indici $1, 2, \dots, 2p$ per designare i punti non fondamentali. Sostituendo nella relazione $\Sigma [A_i](b_i) = 0$, avremo

$$\sum_{i,k=1}^{i,k=2p} c_{ik}(b_i)(a_k) = 0. \quad (6)$$

Vogliamo dimostrare due proprietà dei coefficienti interi c di questa relazione fondamentale.

Poichè la equazione

$$\Sigma A_i b_i + \Sigma B_i a_i = 0,$$

come si è già notato, deve diventare una identità in virtù delle relazioni lineari tra gli a e di quelle tra i b ; così la equazione

$$\Sigma [A_i](b_i) + \Sigma [B_k](a_k) = 0$$

dev' essere per sè stessa identica, essendo già state impiegate le dette relazioni lineari per ridurre in essa a $2p$ tanto il numero degli (a) come quello dei (b) . Ponendo dunque in essa effettivamente per gli $[A]$ e pei $[B]$ le loro espressioni in (a) e (b) , le quali ultime sono parimenti

$$[B_k] = c_{k1}(b_1) + c_{k2}(b_2) + \dots + c_{k2p}(b_{2p}),$$

si avrà identicamente

$$\Sigma c_{ik}(b_i)(a_k) + \Sigma c_{ki}(b_i)(a_k) = 0$$

cioè dire, si avranno le $\frac{2p(2p+1)}{2}$ equazioni

$$c_{ik} + c_{ki} = 0.$$

Quindi tutti i prodotti $(a_i)(b_i)$ mancheranno nella espressione (6) e i coefficienti di $(a_i)(b_k)$ e $(b_i)(a_k)$ saranno di valor contrario. I coefficienti c formano dunque un determinante gobbo.

Per dimostrare la seconda proprietà, cioè che il determinante dei c è eguale a 1, indichiamo con C questo determinante e con Γ il determinante dei coefficienti dei $2p(a)$ nelle espressioni dei $2p[A]$. I due determinanti C e Γ sono determinanti aggiunti, laonde $C\Gamma=1$. Essendo anche numeri interi, C e Γ non potranno che essere entrambi eguali a ± 1 , e dovranno finalmente essere eguali ad 1; poichè C , come determinante gobbo d'ordine pari, è il quadrato d'una espressione formata razionalmente coi suoi elementi, e quindi positivo.

Termineremo presentando le formole strettamente necessarie per l'esempio del § 28, il qual paragrafo potrà quindi pure tralasciarsi; non intendendo però con questo di dichiarare superflue tutte le altre formole, che almeno possono servire d'esercizio.

**Esempio di determinazione della relazione
fra i moduli di periodicità degli integrali di prima specie.**

Esso si riferisce al caso di $n=4$ e $p=3$, nel quale dunque il numero dei punti di diramazione è 12.

Indici dei punti di diramazione :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.

I cappi di prima sorta congiungono le radici :

1-2 | 2-3 | 1-4 | 2-4 | 3-4 | 1-3 | 2-4 | 1-2 | 2-3 | 2-4 | 3-4 | 3-4.

Relazioni tra gli a date dai gironi di prima sorta :

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad 0 &= a_1 + a_2 + a_5 - a_7 - a_8 \\ 2) \quad 0 &= -a_1 + a_3 - a_4 + a_7 - a_{10} \\ 3) \quad 0 &= -a_2 + a_4 - a_5 - a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} - a_{12} \\ 4) \quad 0 &= -a_3 + a_6 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

Osservando per ogni coppia i numeri preposti alle due relazioni dov'esso entra positivamente e negativamente, si ha che i cappi di seconda sorta congiungono le radici:

1-2 | 1-3 | 2-4 | 3-2 | 1-3 | 4-3 | 2-1 | 3-1 | 3-4 | 4-2 | 3-4 | 4-3.

Gli A espressi in a :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_3 - a_4 + a_7 - a_{10} \\
 A_2 &= a_1 + a_4 - a_5 - a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} - a_{12} \\
 A_3 &= -a_1 + a_6 - a_9 + a_{10} - a_{11} + a_{12} \\
 A_4 &= -a_2 + a_7 - a_{10} \\
 A_5 &= a_1 + a_2 - a_6 + a_8 + a_9 + a_{11} - a_{12} \\
 A_6 &= -a_3 + a_8 + a_9 + a_{11} - a_{12} \\
 A_7 &= -a_1 + a_3 - a_4 - a_8 \\
 A_8 &= -a_2 + a_4 - a_5 - a_6 \\
 A_9 &= -a_2 + a_4 - a_5 - a_6 + a_8 + a_{10} - a_{11} + a_{12} \\
 A_{10} &= -a_3 + a_6 - a_9 \\
 A_{11} &= -a_2 + a_4 - a_5 - a_6 + a_8 + a_9 + a_{12} \\
 A_{12} &= -a_3 + a_6 - a_9 + a_{10} - a_{11}.
 \end{aligned}$$

Punti fondamentali di prima sorta:

1, 2, 3.

Cammini f (pag. 21):

$$\begin{aligned}
 f_2 &= a_1 \\
 f_3 &= a_1 + a_2 \\
 f_4 &= a_3.
 \end{aligned}$$

Punti fondamentali di seconda sorta:

4, 5, 6.

Cammini k (pag. 23):

$$\begin{aligned}
 k_2 &= A_5 + A_4 \\
 k_3 &= A_5 \\
 k_4 &= A_5 - A_6.
 \end{aligned}$$

Composizione degli (a) e degli $[A]$:

$$\begin{aligned}
 (a_1) &= 0 & [A_1] &= A_1 - A_4 - A_5 \\
 (a_2) &= 0 & [A_2] &= A_2 - A_5 \\
 (a_3) &= 0 & [A_3] &= A_3 + A_6 + A_4 \\
 (a_4) &= a_4 - a_3 + a_1 & [A_4] &= 0 \\
 (a_5) &= a_5 - a_3 + a_1 + a_2 & [A_5] &= 0 \\
 (a_6) &= a_6 - a_1 - a_2 & [A_6] &= 0 \\
 (a_7) &= a_7 - a_3 + a_1 & [A_7] &= A_7 + A_5 + A_4 \\
 (a_8) &= a_8 - a_1 & [A_8] &= A_8 + A_5 \\
 (a_9) &= a_9 - a_2 & [A_9] &= A_9 + A_6 \\
 (a_{10}) &= a_{10} - a_3 + a_1 & [A_{10}] &= A_{10} - A_4 - A_6 \\
 (a_{11}) &= a_{11} - a_3 + a_1 + a_2 & [A_{11}] &= A_{11} + A_6 \\
 (a_{12}) &= a_{12} - a_3 + a_1 + a_2 & [A_{12}] &= A_{12} - A_6.
 \end{aligned}$$

Sostituendo nelle espressioni dei sei ultimi $[A]$ in A i valori di questi in a , e tralasciando di scrivere gli a fondamentali, ponendo le parentesi agli altri, si hanno le espressioni di detti $[A]$ in (a) :

$$[A_7] = -(a_4) - (a_6) + (a_7) + (a_9) - (a_{10}) + (a_{11}) - (a_{12})$$

$$[A_8] = (a_4) - (a_5) - 2(a_6) + (a_8) + (a_9) + (a_{11}) - (a_{12})$$

$$[A_9] = (a_4) - (a_5) - (a_6) + 2(a_8) + (a_9) + (a_{10})$$

$$[A_{10}] = (a_6) - (a_7) - (a_8) - 2(a_9) + (a_{10}) - (a_{11}) + (a_{12})$$

$$[A_{11}] = (a_4) - (a_5) - (a_6) + 2(a_8) + 2(a_9) + (a_{11})$$

$$[A_{12}] = (a_6) - (a_8) - 2(a_9) + (a_{10}) - 2(a_{11}) + (a_{12}).$$

Espressioni di (a_4) , (a_5) , (a_6) desunte dalle I:

$$(a_4) = (a_7) - (a_{10})$$

$$(a_5) = (a_7) + (a_8)$$

$$(a_6) = (a_9) - (a_{10}) + (a_{11}) - (a_{12}).$$

Definitive espressioni dei sei $[A]$ mediante i sei (a) non corrispondenti a punti fondamentali:

$$[A_7] = (a_{10})$$

$$[A_8] = -(a_9) + (a_{10}) - (a_{11}) + (a_{12})$$

$$[A_9] = (a_8) + (a_{10}) - (a_{11}) + (a_{12})$$

$$[A_{10}] = -(a_7) - (a_8) - (a_9)$$

$$[A_{11}] = (a_8) + (a_9) + (a_{12})$$

$$[A_{12}] = -(a_8) - (a_9) - (a_{11}).$$

Il determinante gobbo dei c è dunque:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches ?

(par R. STURM, à Bromberg.)

1. Étant donnée une cubique gauche C^3 , soient E' et E deux plans arbitraires dont le premier coupe la cubique aux points a'_1, a'_2, a'_3 , l'autre aux points a_1, a_2, a_3 . Chaque point x' du plan E' envoie à la courbe C^3 une seule sécante (c'est-à-dire une droite qui s'appuie sur cette courbe en deux points), qui perce le plan E au point x ; la même chose a lieu pour les points de ce dernier plan. De cette manière les deux plans reçoivent une projectivité ponctuelle: à chaque point de l'un plan correspond, en général, un seul point de l'autre; les plans sont « punteggiati proiettivamente ». Les exceptions sont celles-ci. A un des points a' correspondent tous les points de la conique qui est la trace du cône qui projette la cubique du point a' sur E ; il en est de même pour les points a . A tous les points d'une droite qui joint deux points a' (ou a) correspond le point où elle rencontre la droite (E', E) . Les points de cette dernière droite se correspondent à eux-mêmes.

2. Quelle est la courbe correspondant en E à une droite G'_x du plan E' ? A cause de la projectivité ponctuelle des deux plans, le genre de cette courbe sera égal à celui de la droite G'_x , par conséquent 0, c'est-à-dire que la courbe aura le maximum des points doubles (inclus les rebroussements). En effet, les sécantes d'une cubique gauche qui rencontrent une droite engendrent une surface réglée du quatrième degré, sur laquelle la cubique est double; notre courbe est donc du quatrième ordre et passe deux fois par chacun des points a ; désignons-la par G_x^4 . Elle rencontre évidemment la droite (E', E) aux points $e_x, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ où celle-ci est coupée par les droites $G'_x, a'_1 a'_2, a'_1 a'_3, a'_2 a'_3$ et qui correspondent aux points $e'_x (\equiv e_x), (G'_x, a'_1 a'_2), (G'_x, a'_1 a'_3)$ et $(G'_x, a'_2 a'_3)$ de la droite G'_x . La courbe cor-

respondant à une droite G'_x qui s'appuie sur C^3 en un point a' dégénère dans la conique correspondant à ce point et une autre conique qui passe par $a_1 a_2 a_3$ et rencontre la G'_x sur (E', E) .

3. Ajoutons une autre cubique gauche Γ^3 qui n'ait, en général, aucun point commun avec C^3 et qui coupe les plans E' et E aux points $a'_1 a'_2 a'_3$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Nommons ξ le point correspondant à x' par rapport à Γ^3 ; les points e'_x sur (E', E) se confondent avec leurs deux points correspondants e_x et ε_x ; conservons la dénomination e_x . A la droite G'_x correspondra par rapport à Γ^3 une courbe du quatrième ordre Γ^4_x ayant les points doubles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ et passant par les points $e_x = (G'_x, E', E)$, $\alpha_{12} = (E, a'_1 a'_2)$, $\alpha_{13} = (E, a'_1 a'_3)$ et $\alpha_{23} = (E, a'_2 a'_3)$, situés sur (E', E) . Les courbes G^4_x et Γ^4_x ont, excepté le point e_x , 15 points en commun. Il y a donc, dans le plan E , 15 points non situés en E' qui envoient aux courbes C^3 et Γ^3 des sécantes rencontrant la droite G'_x .

4. Si G'_x pivote dans le plan E' autour d'un point P' , les courbes G^4_x , ayant en commun les points doubles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, les points α_{12} , α_{13} ; α_{23} et le point P correspondant à P' par rapport à C^3 , engendrent un faisceau du quatrième ordre; de même les courbes Γ^4_x , auxquelles sont communs les points doubles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, les points α_{12} , α_{13} , α_{23} et π , correspondant à P' par rapport à Γ^3 . Ces deux faisceaux sont évidemment homographiques et engendrent, parce que les courbes correspondantes ont toujours un point e_x en commun, excepté la droite (E', E) décrite par les e_x , une courbe S^7 du septième ordre qui passe deux fois par les 6 points a et α . Donc: tous les points du plan E , desquels proviennent aux courbes C^3 et Γ^3 des sécantes perçant le plan E' en des points situés en ligne droite avec un point donné P' , se trouvent sur une courbe du septième ordre S^7 qui passe deux fois par chacun des six points d'intersection des deux cubiques gauches avec E .

5. Un autre faisceau de rayons en E' autour d'un point P'_1 nous donne une courbe analogue S^7_1 qui a les mêmes points doubles que S^7 . Ceux-ci valent 24 points d'intersection des deux courbes. Les 25 autres points sont tels qu'ils envoient aux courbes C^3 et Γ^3 des sécantes dont les traces (en E') sont situées en ligne droite aussi bien avec P' qu'avec P'_1 . Si ces traces sont distinctes, il faut qu'elles se trouvent sur la droite $P'P'_1$; or nous avons vu (n.º 3) qu'il y a en E 15 points, dont les deux sécantes rencontrent, l'une et l'autre, une droite donnée. Par conséquent les traces des sécantes des 10 autres points ne peuvent pas être distinctes, ce qui veut dire que les deux sécantes se confondent. Donc:

Étant données deux cubiques gauches qui n'ont aucun point commun, il y a 10 droites qui s'appuient deux fois sur chacune des deux cubiques ().*

Puisque par tout point de l'espace il ne passe qu'une seule sécante d'une cubique gauche, aucune de ces dix sécantes communes n'en rencontre une autre.

6. Supposons que les deux courbes C^3 et Γ^3 ont un point m_1 en commun; il y aura quatre droites issues de ce point, dont chacune s'appuie encore une fois sur chacune des deux cubiques: ce sont les quatre arêtes communes des deux cônes projetant les courbes du point m_1 . Il n'y aura donc plus que six sécantes communes propres des deux cubiques, c'est-à-dire qui les rencontrent en quatre points distincts. Souvenons-nous de la génération de la surface du troisième ordre par trois réseaux projectifs (collinéaires) de plans, laquelle est due à M. GRASSMANN. Sur la surface il se trouve trois cubiques engendrées par les réseaux de rayons (appartenant aux réseaux de plans) pris deux à deux. Ces courbes ont deux à deux le centre d'un des réseaux générateurs en commun et ne possèdent par conséquent six sécantes communes propres (qui sont, dans ce cas, aussi des sécantes de la troisième cubique). Ce sont les six droites (ne se coupant pas entre elles) de la surface (sur laquelle elles se trouvent, parce qu'elles la coupent quatre fois), dans lesquelles conviennent trois plans correspondants des trois réseaux.

7. Si les deux cubiques ont deux points communs m_1 et m_2 , de chacun de ceux-ci, outre la droite qui les joint ensemble, partent trois droites s'appuyant sur chacune des deux cubiques encore une fois; donc il reste trois sécantes communes propres.

Si le nombre des points communs à C^3 et à Γ^3 s'augmente d'un troisième m_3 , on a 1° les trois droites qui joignent les trois points m ; chacun de ces points nous donne 2° deux autres droites qui rencontrent encore une fois aussi bien C^3 que Γ^3 ; donc il y a 3° une seule sécante commune propre.

8. Quatre points $m_1 m_2 m_3 m_4$ soient communs aux deux cubiques; outre les six droites joignant ces points, de chaque point m une droite va rencontrer chacune des deux cubiques encore une fois. Ainsi nous ne pouvons trouver une sécante commune s'appuyant en quatre points distincts.

Mais les deux cubiques, ayant quatre points d'intersection, peuvent être

(*) Voir une Note sur les cubiques gauches dans le Journal Crelle-Borchardt, t. 60.

dans la situation singulière de se trouver sur la même surface du second degré. Ce cas particulier a lieu s'il y a un plan qui coupe les deux courbes en six points appartenant à la même conique; car la surface du second degré F^2 menée par cette conique (par cinq de ses points) et par les quatre points m , rencontrant chacune des deux cubiques en sept points, les contient toutes entières, et celles-ci sont alors rencontrées par tout autre plan en six points situés sur une conique. Il est démontré au cas général que de chacun des quatre points m il provient une droite qui rencontre aussi bien C^3 que Γ^3 encore une fois en des points distincts; par suite ces quatre droites, coupant la surface du second degré en trois points, sont situées sur elle toutes entières. Donc quatre génératrices de notre surface (hyperboloïde à une nappe) sont rencontrées en deux points par C^3 et par Γ^3 ; elles appartiennent par conséquent au même système, dont toutes les génératrices rencontrent chacune des deux cubiques deux fois, pendant que celles de l'autre les rencontrent en un seul point.

9. Ainsi dans le cas particulier qui est l'objet de notre considération actuelle, il y a un nombre infini de sécantes communes des deux cubiques. Observons comment ce cas se présente à nous quant aux courbes du quatrième et du septième ordre que nous avons construites dans le plan E' . Soient S' et S les coniques d'intersection de l'hyperboloïde avec les plans E' et E ; celle-là passe par les 6 points a' et α' , celle-ci par les a et α . Les deux points x et ξ , correspondant à un point quelconque x' de la conique S' se confondent en un même point x de la conique S , parce que par chaque point de S' passe une sécante commune de C^3 et de Γ^3 , génératrice de l'un système de l'hyperboloïde F^2 , par suite rencontrant la conique S .

Les deux courbes G_x^4 et Γ_x^4 correspondant à une droite G_x^2 du plan E par rapport à C^3 et à F^3 passent donc par les mêmes deux points x_1 et x_2 de la conique S , qui correspondent aux points x'_1 et x'_2 où S' est rencontrée par G_x^2 . Par conséquent ces deux courbes ont en commun, outre le point $e_x = (G_x^2, E', E)$ et ces deux points x_1 et x_2 , 13 autres points: ce sont ceux dont les correspondants (en E') par rapport à C^3 et à F^3 sont situés sur G_x^2 et ne coïncident pas.

10. Si G_x^2 décrit en E un faisceau autour d'un point P' , les courbes G_x^4 et Γ_x^4 engendrent, comme on a vu, deux faisceaux projectifs qui donnent naissance (car dans notre cas les paires de courbes correspondantes ont toujours deux points d'intersection sur S) à une courbe du septième ordre S^7 [abstraction faite de la droite (E', E)] qui se partage dans cette conique S

et une courbe du cinquième ordre S^5 passant aussi par les six points α et α , ceux-ci étant doubles sur la courbe S^7 . Un autre point P'_1 du plan E' donne une seconde courbe S'_1 composée de la même conique S et d'une courbe du cinquième ordre S^5_1 . Les deux courbes S^7 et S'_1 ont par suite en commun la conique entière S et les 25 points d'intersection des deux courbes S^5 et S^5_1 . Ces 25 points sont : 1° les six points α et α , 2° les traces des six droites qui joignent les quatre points m , 3° les 13 points d'où proviennent aux cubiques des sécantes qui rencontrent la droite $P'P'_1$ en des points distincts (n.° 9).

Ainsi nous avons le résultat, qu'on a certainement présumé, que tout point de S (ou de S') envoie une sécante commune aux deux cubiques, mais aucun autre point. Une sécante commune, coupant F^2 en quatre points, doit se trouver sur cette surface. De la même cause il est évident, que, dans notre cas particulier, il n'y a pas de droites s'appuyant deux fois sur l'une cubique et seulement une fois sur l'autre.

11. Enfin, si cinq points $m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$ sont communs aux deux cubiques, les dix sécantes communes sont représentées par les dix droites joignant ces points. Les deux courbes sont situées sur le même hyperboloïde H^2 déterminée par les 5 points m , deux points de C^3 et deux points de Γ^3 ; l'une courbe s'appuie sur les génératrices de l'un système en deux points, l'autre sur celles de l'autre. Car si la même droite rencontrait deux fois la courbe C^3 aussi bien que Γ^3 , les cônes par lesquels les cubiques sont projetées de chacun des quatre points de rencontre, et dont l'un est du second, l'autre du troisième ordre, auraient en commun les cinq arêtes qui tendent aux points m et la droite dont il s'agit, arête double pour l'un cône, simple pour l'autre, par conséquent sept arêtes, ce qui n'est pas possible. Étant S' et S les courbes d'intersection de H^2 par E' , et E , chaque point de S' a, c'est vrai, ses deux correspondants par rapport à C^3 et à Γ^3 sur S , mais ils ne se confondent pas et par suite les courbes du septième ordre ne se décomposent pas.

Deux cubiques gauches ne peuvent avoir six points communs, sans être identiques.

Bromberg (en Posnanie), le 28 janvier 1869.

Sul problema della rotazione dei corpi.

(di A. BRILL, in Giessen).

È noto che JACOBI ha recato alla massima perfezione le formole finali del problema della rotazione di un corpo sottratto all'azione di forze esterne, introducendo le funzioni ellittiche. Egli ha mostrato (*) che i coseni degli angoli fatti dagli assi principali del corpo relativi al punto fisso cogli assi di un sistema coordinato fisso nello spazio si possono esprimere per quozienti di funzioni Θ , quando le componenti secondo i tre assi principali della velocità angolare intorno all'asse istantaneo siano state espresse per funzioni ellittiche del tempo. Ora nello stabilire le espressioni dei nove coseni, fra i quali sussistono le sei note relazioni, JACOBI si è servito dei tre angoli di EULERO, i quali sogliono turbare la simmetria dei calcoli quando vengono usati nelle dimostrazioni. È nostro proposito di far vedere come l'uso di questi angoli possa essere evitato.

Indicando (come al solito) con A, B, C i momenti principali d'inerzia del corpo relativi al punto fisso, con p, q, r le componenti della velocità angolare secondo i tre assi principali corrispondenti, con t il tempo, ed ammettendo che nell'istante $t = t_0$ l'asse principale cui corrisponde il momento d'inerzia A coincida coll'asse negativo delle y (nel sistema coordinato fisso), le note equazioni differenziali

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) *Sur la rotation d'un corps*, CRELLE-BORCHARDT, t. 39, oppure: *Mathematische Werke*, t. 2, p. 139 e seg.

forniscono per p, q, r le espressioni seguenti, scritte secondo la nota segnatura delle funzioni ellittiche, introdotta da JACOBI nei *Fundamenta nova* (*).

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{l}{A} \frac{\cos am u}{\cos am ia} &= -\frac{l}{A} \frac{\Theta ia \cdot H_1 u}{H_1 ia \cdot \Theta u}, \\ q &= \frac{l}{B} \frac{\text{sen} am u \cdot \Delta am ia}{\cos am ia} &= \frac{l}{B} \frac{\Theta_1 ia \cdot Hu}{H_1 ia \cdot \Theta u}, \\ r &= \frac{1}{i} \frac{l}{C} \frac{\Delta am u \cdot \text{sen} am ia}{\cos am ia} &= \frac{1}{i} \frac{l}{C} \frac{H ia \cdot \Theta_1 u}{H_1 ia \cdot \Theta u}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In queste formole (come in quelle che seguono) si è fatto

$$i = \sqrt{-1}, \quad u = n(t - t_0), \quad n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}};$$

il modulo è dato, tanto per u quanto per ia , da

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}},$$

mentre l'argomento $ia = a\sqrt{-1}$ è dato da

$$\Delta^2 am ia = \frac{B(A-C)}{A(B-C)};$$

finalmente l, h, t_0 sono costanti d'integrazione, fra le quali l è in particolare quella che figura nell'integrale delle forze vive

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = l^2. \quad (2^a)$$

Colle formole precedenti vengono introdotte le costanti k^2, a, n invece dei rapporti delle A, B, C, h . Affinchè anche le p, q, r risultino espresse colle medesime costanti, aggiungiamo queste altre relazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{A} &= n n' + i n \frac{\Theta' ia}{\Theta ia}, \\ \frac{l}{B} &= n n' + i n \frac{\Theta_1' ia}{\Theta_1 ia}, \\ \frac{l}{C} &= n n' + i n \frac{H' ia}{H ia}. \end{aligned} \right\} \quad (2^b)$$

(*) JACOBI, *Math. Werke*, t. 2, p. 155, 161. Noi supponiamo positivo il segno $Bh - l^2$, e quindi prendiamo il segno superiore nelle formole date da JACOBI.

dove per brevità si è posto

$$n' = i \frac{C}{A-C} \frac{H'ia}{Hia} - i \frac{A}{A-C} \frac{\Theta'ia}{\Theta ia},$$

$$\Theta'ia = \frac{d\Theta ia}{d(ia)}, \quad \Theta'_1 ia = \frac{d\Theta_1 ia}{d(ia)} = \frac{d\Theta(K-ia)}{d(ia)}, \text{ ecc.}$$

Introducendo $\frac{\Theta'ia}{\Theta ia}$ anche nelle due ultime formole (2^b) si può dare alle stesse una forma più comoda. Infatti la teoria delle funzioni ellittiche fornisce le relazioni (*)

$$\frac{H'ia}{Hia} - \frac{\Theta'ia}{\Theta ia} = \frac{\cos amia \cdot \Delta amia}{\text{sen amia}},$$

$$\frac{\Theta'_1 ia}{\Theta_1 ia} - \frac{\Theta'ia}{\Theta ia} = - \frac{k^2 \text{sen amia} \cdot \cos amia}{\Delta amia},$$

mercè le quali, trasformando le espressioni di $\frac{l}{B}, \frac{l}{C}$ ed introducendo i risultati nelle espressioni di p, q, r si ottiene

$$\left. \begin{aligned} p &= - \left(nn' + in \frac{\Theta'ia}{\Theta ia} \right) \frac{\cos amu}{\cos amia}, \\ q &= \left(nn' + in \frac{\Theta'ia}{\Theta ia} \right) \frac{\text{sen amu} \cdot \Delta amia}{\cos amia} - ink^2 \text{sen amu} \cdot \text{sen amia}, \\ r &= \frac{1}{i} \left(nn' + in \frac{\Theta'ia}{\Theta ia} \right) \frac{\Delta amu \cdot \text{sen amia}}{\cos amia} + n \Delta amu \cdot \Delta amia. \end{aligned} \right\} (2^c)$$

Gli altri tre integrali del problema debbono ora dedursi dalle seguenti equazioni differenziali fra i coseni $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ dei nove angoli che gli assi principali del corpo rotante fanno cogli assi del sistema coordinato fisso nello spazio (supposto = 1 il loro determinante) (**)

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= br - cq, & \frac{da'}{dt} &= b'r - c'q, & \frac{da''}{dt} &= b''r - c''q, \\ \frac{db}{dt} &= cp - ar, & \frac{db'}{dt} &= c'p - a'r, & \frac{db''}{dt} &= c''p - a''r, \\ \frac{dc}{dt} &= aq - bp, & \frac{dc'}{dt} &= a'q - b'p, & \frac{dc''}{dt} &= a''q - b''p, \end{aligned} \right\} (3)$$

(*) Queste relazioni possono dedursi dalla differenziazione logaritmica delle equazioni

$$\text{sen amia} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{Hia}{\Theta ia}, \quad \Delta amia = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1 ia}{\Theta ia}.$$

(**) POISSON, *Traité de mécanique*, 1833, t. 2, § 411, p. 135.

equazioni delle quali sono integrali particolari le sei relazioni conosciute. D'altra parte, moltiplicando le tre equazioni di ciascun sistema rispettivamente per Ap , Bq , Cr e sommando, avendo riguardo alle (1), si hanno i seguenti integrali

$$\left. \begin{aligned} Apa + Bqb + Crc &= \lambda, \\ Apa' + Bqb' + Crc' &= \lambda', \\ Apa'' + Bqb'' + Crc'' &= \lambda'', \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

dove $\lambda, \lambda', \lambda''$ sono tre costanti arbitrarie che corrispondono, come facilmente si riconosce, a quelle del teorema delle aree. Esse si sogliono determinare in guisa che il piano delle xy diventi il piano invariabile, il che si fa ponendo

$$\lambda = \lambda' = 0, \quad (4^a)$$

donde si conclude subito, quadrando e sommando le equazioni (4), e tenendo presente la (2^a),

$$\lambda''^2 = l^2.$$

Si ha quindi

$$\left. \begin{aligned} a'' &= \frac{Ap}{l} = -\frac{\Theta ia \cdot H_1 u}{H_1 ia \cdot \Theta u}, \\ b'' &= \frac{Bq}{l} = \frac{\Theta_1 ia \cdot H u}{H_1 ia \cdot \Theta u}, \\ c'' &= \frac{Cr}{l} = \frac{1}{i} \frac{H ia \cdot \Theta_1 u}{H_1 ia \cdot \Theta u}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Trattasi ora di esprimere gli altri sei coseni per mezzo di quozienti di funzioni Θ , come si è fatto per questi tre.

In luogo dei medesimi JACOBI (*) calcola certe loro combinazioni lineari $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ definite dalle equazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} e^{\mp in'u} (\alpha \pm ia') &= a \pm ia', \\ e^{\mp in'u} (\beta \pm ib') &= b \pm ib', \\ e^{\mp in'u} (\gamma \pm iy') &= c \pm ic', \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

nelle quali i segni superiori ed inferiori si corrispondono in ambi i membri.

(*) *Math. Werke*, t. 2, p. 152, 158.

Introducendo le quantità ξ, η, ζ definite dalle equazioni

$$\xi = \alpha \pm i\alpha', \quad \eta = \beta \pm i\beta', \quad \zeta = \gamma \pm i\gamma', \quad (6^a)$$

si hanno fra queste quantità, in luogo delle (3), le seguenti equazioni che da quelle si deducono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} \mp \xi in'n &= \eta r - \zeta q, \\ \frac{d\eta}{dt} \mp \eta in'n &= \zeta p - \xi r, \\ \frac{d\zeta}{dt} \mp \zeta in'n &= \xi q - \eta p. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Due integrali di queste emergono dalle relazioni menzionate sopra fra le a, b, c :

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 0, \\ Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

l'ultimo dei quali si è ottenuto con riguardo alle (4). Di qui si trae, osservando le (2^a),

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{-Ap \cdot Cr \mp il \cdot Bq}{A^2 p^2 + B^2 q^2}, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{-Bq \cdot Cr \mp il \cdot Ap}{A^2 p^2 + B^2 q^2}.$$

Ponendo in queste formole i valori di p, q, r tratti dalle (2), il teorema di addizione delle funzioni ellittiche dà immediatamente

$$\frac{\xi}{\zeta} = \pm \frac{1}{i} \operatorname{sen} am(u \pm ia), \quad \frac{\eta}{\zeta} = \pm \frac{1}{i} \operatorname{cos} am(u \pm ia), \quad (9)$$

ovvero, esprimendo i secondi membri per quozienti di funzioni Θ ed approfittando del divisor comune che essi così acquistano per formare una proporzionalità,

$$\left. \begin{aligned} \rho\xi &= \Theta_0 \cdot H(u \pm ia), \\ \rho\eta &= \Theta_0 \cdot H_1(u \pm ia), \\ \rho\zeta &= \pm i H_1 \cdot \Theta(u \pm ia), \end{aligned} \right\} \quad (9^a)$$

formole nelle quali, come nelle seguenti, i segni superiori ed inferiori si corrispondono. Il fattore di proporzionalità ρ è in generale una quantità complessa, i cui due valori conjugati corrispondono ai doppii segni contenuti

nelle precedenti equazioni. Si ottiene un'equazione differenziale in ρ introducendo in una delle equazioni (7) i valori di ξ, η, ζ dati dalle (9^a). Il secondo membro dell'equazione che si sceglie assume così una forma semplice, ove si divida da ambe le parti per la rispettiva variabile ξ, η, ζ e si pongano per p, q, r i valori dati dalle (2^a). Per esempio il secondo membro dell'ultima equazione (7) diventa in tal guisa

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\zeta} q - \frac{\eta}{\zeta} p &= \pm \left(\frac{nn'}{i} + n \frac{\Theta' ia}{\Theta ia} \right) \left(\frac{\text{sen } am(u \pm ia) \cdot \text{sen } am u \cdot \Delta am ia + \text{cos } am(u \pm ia) \cdot \text{cos } am u}{\text{cos } am ia} \right) \\ &\mp nk^2 \text{sen } am(u \pm ia) \cdot \text{sen } am u \cdot \text{sen } am ia \\ &= \pm \frac{nn'}{i} \pm n \frac{\Theta' ia}{\Theta ia} \mp nk^2 \text{sen } am(u \pm ia) \cdot \text{sen } am u \cdot \text{sen } am ia, \end{aligned}$$

mentre il primo membro della stessa equazione diventa

$$\frac{d \log \zeta}{dt} \mp i n n' = \mp i n n' - n \frac{d \log \rho}{du} + n \frac{d \log \Theta(u \pm ia)}{du};$$

eguagliando queste due espressioni si ha così la seguente equazione in ρ ,

$$- \frac{d \log \rho}{du} = - \frac{d \log \Theta(u \pm ia)}{du} \pm \frac{\Theta' ia}{\Theta ia} \mp k^2 \text{sen } am(u \pm ia) \cdot \text{sen } am u \cdot \text{sen } am ia.$$

Il secondo membro può ridursi a forma semplicissima mercè il teorema di addizione per gl'integrali di seconda specie [*Fundam.*, p. 152, (4)], e si ha

$$- \frac{d \log \rho}{du} = - \frac{d \log \Theta u}{du},$$

donde

$$\rho = \kappa \Theta u, \quad (10)$$

dove κ è una costante. Di qui emerge che ρ è una funzione reale di u . Che anche κ sia reale si riconosce nel modo seguente: stante la condizione ammessa circa la posizione iniziale del corpo, si ha, per $u=0$,

$$b = -1, \quad a = c = 0, \quad b' = b'' = 0;$$

in virtù di questi valori, introducendo nella seconda equazione (9^a) il valore di ρ dato dalla (10), si ha, per $u=0$,

$$- \Theta_0 \cdot \kappa = \Theta_0 \cdot H_1 ia$$

e quindi

$$\kappa = - H_1 ia,$$

talchè

$$\rho = -H_1 ia \cdot \Theta u. \tag{11}$$

Per decidere finalmente se nelle (9^a) si debbano eguagliare le ξ, η, ζ ad $\alpha \pm ia'$, ecc: oppure ad $\alpha \mp ia'$, ecc., bisogna valersi della condizione che il determinante dei nove coseni dev'essere = +1. Da essa segue, per $u = 0$ (valore pel quale il determinante delle α, α', \dots non differisce da quello delle α, α', \dots),

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{i} \frac{H_1 ia \cdot \Theta_1 o}{H_1 ia \cdot \Theta o} & 0 & -\varepsilon \frac{\Theta_1 ia \cdot H_1 o}{\Theta o \cdot H_1 ia} \\ -\frac{\Theta_1 ia \cdot H_1 o}{H_1 ia \cdot \Theta o} & 0 & \frac{1}{i} \frac{H_1 ia \cdot \Theta_1 o}{H_1 ia \cdot \Theta o} \end{vmatrix} = 1$$

dove l'affisso ε , che risulta per tal guisa = -1, determina il segno da darsi ad α', β', γ' di modo che, se si mantiene la corrispondenza dei segni superiori ed inferiori rispettivamente, si ha

$$\left. \begin{aligned} \alpha \mp ia' &= -\frac{\Theta o \cdot H(u \pm ia)}{\Theta u \cdot H_1 ia}, \\ \beta \mp i\beta' &= -\frac{\Theta o \cdot H_1(u \pm ia)}{\Theta u \cdot H_1 ia}, \\ \gamma \mp i\gamma' &= \pm \frac{H_1 o \cdot \Theta(u \pm ia)}{i\Theta u \cdot H_1 ia}. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Le equazioni differenziali che abbiamo precedentemente adoperate per la soluzione del problema forniscono in modo semplice anche le espressioni delle velocità angolari v, v' intorno alle due rette ortogonali, che girano con moto uniforme nel piano invariabile intorno al punto fisso, e che sono determinate di posizione in ciascun istante dai coseni $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Infatti dalle equazioni (7), avendo riguardo alla prima delle equazioni (8), si traggono le seguenti:

$$\begin{aligned} \zeta \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\zeta}{dt} &= \xi(p\xi + q\eta + r\zeta), \\ \xi \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\xi}{dt} &= \eta(p\xi + q\eta + r\zeta), \\ \eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt} &= \zeta(p\xi + q\eta + r\zeta). \end{aligned}$$

Se ora si divide per esempio la seconda di queste equazioni per ζ^2 e si introducono i valori dati dalle (9) per $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$, si ottiene

$$-\frac{d \operatorname{sen} am(u \pm ia)}{dt} = \cos am(u \pm ia) \cdot \left(\frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{\zeta} \right).$$

Di qui, per una nota formola della teoria delle funzioni ellittiche, si trae

$$-\frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{\zeta} = n \cdot \Delta am(u \pm ia),$$

donde risulta finalmente, mercè le (12),

$$v \mp iv' = p\xi + q\eta + r\zeta = \mp \frac{n H_1 o \cdot \Theta o \cdot \Theta_1(u \pm ia)}{2i \Theta_1 o \cdot H_1 ia \cdot \Theta u}.$$

Giessen, 17 Gennajo 1869.

Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation

(par H. SCHRAMM, prof. à Wiener-Neustadt).

(Continuazione.)

III.

Pour compléter la discussion des équations algébriques par moyen de critères invariantifs (*), il nous reste encore à trouver une espèce d'invariants, indiquant la coëxistence de r groupes à s racines égales.

Posons d'abord, pour faciliter la déduction, $r=3$, $s=4$, et admettons qu'il y a un invariant doué de la propriété d'avoir la valeur zéro, lorsque l'équation, à la forme de laquelle il appartient, contient 3 groupes à 4 racines égales; cet invariant aura à conserver une valeur sensible pour

$$\begin{aligned} 1=2 &=3=4 \\ 5=6 &=7=8 \\ 9=10=11, & \quad \text{et} \quad 11 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 12 \end{aligned}$$

en denotant les racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ de l'équation, simplement par 1, 2, 3, ...

Posons de plus, qu'on ait représenté l'invariant cherché en fonction des différences des racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, savoir :

$$I^{(r,s)} = \sum f(\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1 - \alpha_3) \dots;$$

il est évident, que sous la dite condition la plus grande partie des termes de la somme \sum se réduira à zéro, et qu'il n'en restent exceptés que les termes,

(*) *Annali di Matematica pura ed applicata*: Serie II.^a, t. I.^o, pag. 259 a pag. 279.

Annali di Matematica, tomo III.

dans lesquels manqueront toutes les différences formées des racines: 1, 2, 3, 4; de plus, les différences formées des racines 5, 6, 7, 8, et encore les différences formées des racines 9, 10, 11.

Ces termes-ci ne contiendront donc que les différences suivantes :

(a.) Les différences formées des $(rs - s)$ racines: 1, 2, 3, 4, et 5, 6, 7, 8, en combinant toujours une racine du groupe 1, 2, 3, 4 avec une des 5, 6, 7, 8; cela donne en tout

$$\frac{(rs-s)(rs-s-1)}{1 \cdot 2} - (r-1) \cdot \frac{s(s-1)}{2} = \frac{s^2}{2}(r-1)(r-2) \text{ différences.}$$

(b.) Les différences formées des $(rs - s)$ racines: 1, 2, 3, ... 7, 8, avec les $(s - 1)$ racines: 9, 10, 11; en tout $(s - 1)(rs - s) = s(s - 1)(r - 1)$ différences.

(c.) Les $s(r-1)(n-rs+1)$ différences formées des $(rs-s)$ racines: 1, 2, ... 7, 8, avec les $(n-rs+1)$ racines: 12, 13, ... n .

(d.) Les $(s-1)(n-rs+1)$ différences formées des $(s-1)$ racines: 9, 10, 11, avec les $(n-rs+1)$ racines: 12, 13, ... n .

(e.) Les $\frac{1}{2}(n-rs)(n-rs+1)$ différences, composées des $(n-rs+1)$ racines: 12, 13, ... n .

En dénotant encore, pour abrégér, les produits des différences développées en (a), (b), (c)... par

$$A = (1, 5) (1, 6) \dots (rs - 2s, rs - s)$$

$$B = (1, 9) (1, 10) \dots (rs - s, rs - 1)$$

$$C = (1, 12) (1, 13) \dots (rs - s, n)$$

$$D = (9, 12) (9, 13) \dots (rs - 1, n)$$

$$E = (12, 13) (12, 14) \dots (n - 1, n)$$

l'invariant en question prendra la forme:

$$I^{(r,s)} = \sum A^u B^v C^x D^y E^z.$$

Mais il faut de plus, que chaque racine entre p fois dans chaque terme de la somme \sum ; p dénotant le degré de l'invariant par rapport aux coefficients de l'équation.

En faisant donc des n racines de l'équation les trois parties :

- (I)..... 1, 2, 3, $(rs - s)$
- (II)..... $(rs - s + 1), (rs - s + 2), \dots, (rs - 1)$
- (III)..... $rs, rs + 1, \dots, n$

il est facile à voir, qu'une quelconque des racines de la partie (I) entrera

dans le produit $A, \dots, s(r - 2)$ fois
 » » $B, s - 1$ »
 » » $C, m - rs + 1$ »

De même une racine de la partie (II) entrera

en $B \dots, s(r - 1)$ fois
 » $D \dots, n - rs + 1$ »

et une racine de la partie (III) entrera

en $C \dots, s(r - 1)$ fois
 » $D \dots, s - 1$ »
 » $E \dots, n - rs$ »

Il en résulte, que les exposants u, v, x, \dots sont liés aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} s(r - 2)u + (s - 1)v + (n - rs + 1)x &= p \\ s(r - 1)v + (n - rs + 1)y &= p \\ s(r - 1)x + (s - 1)y + (n - rs)z &= p. \end{aligned}$$

La première de ces équations (p) représente la somme des exposants d'une racine de la partie (I), la seconde et la troisième la somme des exposants d'un racine resp. en (II) et en (III).

Les invariants déterminés par ces équations auront la propriété de prendre la valeur zéro lorsqu'il y a dans l'équation r suites à s racines égales, et ils conserveront une valeur sensible lorsque les r suites de racines ne sont pas complètes. Aussi il va sans dire qu'ils restent égales à zéro pour des valeurs plus grandes que r et s .

On peut vérifier la correspondance de ces équations générales avec celles

trouvées dans l'article précédent, en posant $s=2$, et $r+1$ au lieu de r . La seconde et la troisième équation représentera alors identiquement la même condition, en posant encore $x=v$, $y=z$, et il n'en restent que les deux équations seules :

$$\begin{aligned} 2(r-1)u + (n-2r)v &= p \\ 2rv + (n-2r-1)z &= p. \end{aligned}$$

Ce sont en vérité les mêmes équations, moyennant desquelles nous avons calculé les invariants désignés par $I^{(r)}$ (II, pag. 272).

Pour appliquer ces invariants dans la discussion des équations algébriques il sera utile de calculer encore la somme des exposants dans les produits développés de chaque terme de l'invariant. En dénotant par S cette somme des exposants, on aura

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}s^2(r-1)(r-2)u + s(s-1)(r-1)v + s(r-1)(n-rs+1)x + (s-1)(n-rs+1)y \\ + \frac{1}{2}(n-rs+1)(n-rs)z. \end{aligned}$$

Mais on peut transformer cette expression de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}s^2(r-1)(r-2)u + \frac{1}{2}s(r-1)(s-1)v + \frac{1}{2}s(r-1)(n-rs+1)x + \\ + \frac{1}{2}s(s-1)(r-1)v + \frac{1}{2}(s-1)(n-rs+1)y + \\ + \frac{1}{2}s(r-1)(n-rs+1)x + \frac{1}{2}(s-1)(n-rs+1)y + \frac{1}{2}(n-rs+1)(n-rs)z \\ S = \frac{1}{2}s(r-1)p + \frac{1}{2}(s-1)p + \frac{1}{2}(n-rs+1)p \\ S = \frac{np}{2}. \end{aligned}$$

Cette équation est valable comme on sait pour chaque autre espèce d'invariants; car il est évident, qu'un terme quelconque en Σ contient chacune des n racines p fois, ce qui fait, en tout, np racines; mais comme celles-ci sont combinées par deux dans une différence, elles donnent un produit de

$$S = \frac{np}{2}$$

facteurs linéaires. Dans un invariant, qui doit conserver son signe, même quand on change les signes de toutes les racines de l'équation, il faut que S soit un nombre pair, et le degré p d'un tel invariant sera lié à la condition :

$$p = \frac{4S_1}{n}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}
 p &= 4p_1, & \text{pour } n &= 2m + 1 \\
 p &= 2p_1, & \text{» } n &= 4m + 2 \\
 p &= p_1, & \text{» } n &= 4m
 \end{aligned}$$

p_1 dénotant un nombre entier quelconque. C'est aussi la condition sous laquelle un invariant sera applicable dans la discussion des équations, parceque toute autre invariant aura identiquement la valeur zéro, ou pour des racines quelconques $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ou au moins pour la supposition :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\alpha_2 \\
 \alpha_3 &= -\alpha_4 \\
 &\dots \dots \dots \\
 \alpha_{n-1} &= -\alpha_n \quad (*)
 \end{aligned}$$

Les formules générales pour le degré p deviennent impraticables pour $r=1$, ou mieux dit, elles prennent une forme plus simple; car, dans ce cas particulier, il n'y aura plus de racines dans la partie (I) et par conséquent les trois équations (p) se réduiront aux deux seules :

$$\begin{aligned}
 (n - s + 1)y &= p \\
 (s - 1)y + (n - s)z &= p.
 \end{aligned}$$

Cette espèce d'invariants aura la forme

$$\begin{aligned}
 I^{(1,s)} &= \sum D^y E^z \\
 D &= (1, s)(1, s + 1) \dots (s - 1, n) \\
 E &= (s, s + 1)(s, s + 2) \dots (n - 1, n)
 \end{aligned}$$

avec les valeurs des exposants y et z :

$$y = \frac{p}{n - s + 1}, \quad z = \frac{p(n - 2s + 2)}{(n - s)(n - s + 1)}.$$

(*) On trouve dans les *Elemente der neueren Geometrie, etc.*, von D.^{or} W. FIEDLER, p. 160, un invariant du degré $p=3$ appartenant à une forme du 6^{me} degré :

$$I_{6,3} = a_0 a_2 a_6 - 3 a_0 a_3 a_5 + 2 a_0 a_4^2 - a_1^2 a_6 + 3 a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4 + 2 a_2 a_3^2 - 3 a_2^2 a_4.$$

Mais ce n'est qu'un semi-invariant résultant de la transformation linéaire $x = \alpha x + \beta$ et y constant. On reconnaît sur le champ son variabilité, en changeant les coefficients a_0, v_1, a_3, \dots en a_6, a_5, a_4, \dots

On prendra pour p un nombre entier, qui donne aussi aux exposants y et z une valeur positive et entière. Cela ne sera possible que pour

$$2s < n + 2$$

parceque pour $2s > n + 2$, z devient négatif.

Voilà une solution du problème proposé; mais on ne peut pas dire qu'elle soit la solution la plus générale, parcequ'il y a pour la déduction des invariants de la dite propriété plusieurs voies, qui mènent à des résultats en quelque part différents.

Nous en donnerons un exemple pour le cas $r=1$, et s quelconque. Posons à ce but, qu'on ait fait des n racines de l'équation $(s-1)$ parties dont les premières $(s-2)$ parties contiennent ρ racines chacune, et la dernière le reste:

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 3, \dots \rho \\ \rho + 1, & \rho + 2, \dots & 2\rho \\ \dots & \dots & \dots \\ (s-2)\rho + 1, & (s-2)\rho + 2, \dots & (s-1)\rho, \dots n-1, \quad n. \end{array}$$

En formant le produit de toutes les différences de chaque partie, on obtient:

$$\begin{array}{l} A_1 = (1, 2) (1, 3) \dots (\rho-1, \rho) \\ A_2 = (\rho + 1, \rho + 2) (\rho + 1, \rho + 3) \dots (2\rho - 1, 2\rho) \\ \dots \\ A_{s-1} = [(s-2)\rho + 1, (s-2)\rho + 2] \dots [n-1, n] \end{array}$$

Ces produits donneront un invariant de la forme

$$I_p^{(\rho)} = \sum A_1^x A_2^x \dots A_{s-2}^x A_{s-1}^y$$

en supposant les exposants x et y soumis à la condition :

$$(\rho - 1)x = [n - (s - 2)\rho - 1]y = p.$$

Il y a une différence essentielle entre ces invariants, et ceux trouvés par la déduction précédente; et pourtant ils ont la propriété commune d'avoir la valeur zéro pour s racines égales. Car en supposant parmi les n racines d'une équation s racines égales, il est évident que l'un ou l'autre des produits A_1, A_2, A_{s-1} contiendra deux ou plus racines égales et par conséquent chaque terme de la somme \sum aura zéro en facteur.

Mais en examinant la dernière équation, on voit que la valeur de ρ peut varier entre les limites :

$$\rho > 1, \quad \rho < \frac{n-1}{s-2}$$

et qu'il y aura dans certains cas plusieurs invariants différents, pour la même valeur de s . En posant pour ρ la plus simple valeur $\rho=2$, on aura pour x et y les équations :

$$x = p, \quad y = \frac{p}{n-2s+3}$$

Ces invariants auront donc en général le degré

$$p = (n - 2s + 1)p_1$$

pendant que les autres, nommés $I^{(1,s)}$, seront du degré $p' = (n-s)(n-s+1)p_1$, ce qui donne en général $p < p'$.

IV.

Passons maintenant à la recherche des critères invariantifs, indiquant la coexistence de plusieurs racines égales et imaginaires.

Nous avons exposé dans l'art. II de ce travail, que les invariants $I^{(r)}$ indiquent par le changement de signe l'existence de $2(r+1)$ racines imaginaires dans l'équation donnée, et qu'ils s'évanouissent lorsque les $2(r+1)$ racines sont deux à deux égales. Mais dans ce dernier cas, ils perdent aussi leur faculté de servir comme indices pour le nombre des racines imaginaires, et il faut qu'on les remplace par une autre espèce d'invariants.

Il est pourtant très difficile à donner des formules générales qui renfermeraient tous les cas possibles, pour chaque combinaison de racines égales, et en partie imaginaires, et nous ne chercherons par conséquent que les indices dans le cas spécial, quand l'équation donnée contient r parties à 4 racines imaginaires et deux à deux égales.

En supposant donc dans cette équation r groupes à quatre racines imaginaires deux à deux égales, on sait que celles-ci auront la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_3 &= p + q\sqrt{-1} \\ \alpha_2 = \alpha_4 &= p - q\sqrt{-1} \\ &\dots \end{aligned}$$

et en faisant $q=0, q_1=0, \dots$ ces racines seront réelles et quatre à quatre égales :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

Il faut donc que l'invariant cherché passe par zéro quand il y a 4 groupes à 4 racines égales dans l'équation, et il faut qu'il change le signe au moment, où l'on donne à q, q_1, q_2, \dots une valeur sensible.

Ces invariants résulteront des équations générales (p), en y posant $s=4$:

$$\begin{aligned} 4(r-2)u + 3v + (n-4r+1)x &= p \\ 4(r-1)v + (n-4r+1)y &= p \\ 4(r-1)x + 3y + (n-4r)z &= p. \end{aligned}$$

On déduira aussi la valeur de l'exposant μ dans la plus haute puissance du produit développé des quantités imaginaires :

$$qq_1q_2\dots(\sqrt{-1})^\mu$$

en ayant égard à ce que nous avons expliqué dans l'art. II de ce travail, pag. 273, savoir que l'on trouve cette puissance dans un terme de la somme Σ qui contient le plus petit nombre de différences formées de deux racines imaginaires. Cet exposant plus haut aura en général les valeurs suivantes :

1. En supposant $4r-2$ racines imaginaires dans l'équation donnée :

$$\mu_1 = 8(r-1)(r-2)u + 12(r-1)v + 4(r-1)(n-4r+1)x + (n-4r+1)y.$$

2. En supposant $4r+2\sigma$ racines imaginaires dans l'équation :

$$\begin{aligned} \mu_2 = 8(r-1)(r-2)u + 12(r-1)v + 4(r-1)(n-4r+1)x + 3(n-4r+1)y \\ + (2\sigma+1)(n-4r-\sigma)z \end{aligned}$$

ou aussi plus en abrégé, en plaçant $4t$ au lieu des expressions avec le coefficient 4 :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 4t + (n-4r+1)y \\ \mu_2 &= 4t + 3(n-4r+1)y + (2\sigma+1)(n-4r-\sigma)z. \end{aligned}$$

Chaque invariant de cette espèce doit rester positif pour $4r-2$ racines imaginaires, même en supposant les quantités q, q_1, q_2, \dots infiniment grandes; il faut donc que μ_1 soit un nombre de la forme

$$4t, \text{ ou } 4t+1.$$

Car en supposant $\mu_1 = 4t$, l'invariant $I^{(r,4)}$ aura pour

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_3 &= q\sqrt{-1}, & \alpha_5 = \alpha_7 &= q_1\sqrt{-1} \\ \alpha_2 = \alpha_4 &= -q\sqrt{-1}, & \alpha_6 = \alpha_8 &= -q_1\sqrt{-1} \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

le même signe qu'il a dans le cas où l'on suppose :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_3 &= q, & \alpha_5 = \alpha_7 &= q_1 \\ \alpha_2 = \alpha_4 &= -q, & \alpha_6 = \alpha_8 &= -q_1 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

(toujours pour des valeurs très grandes de q, q_1, \dots), ou, pour l'exprimer plus en général, il aura pour $4r - 2$ racines imaginaires le même signe que pour n racines réelles.

La seconde supposition $\mu_1 = 4t + 1$ donne au produit $qq_1 \dots (\sqrt{-1})^\mu$ une valeur imaginaire; mais on sait qu'un invariant reste réel pour de valeurs réelles des coefficients de l'équation. Il en suit, que les puissances impaires de $\sqrt{-1}$ s'évanouissent, et que le signe de l'invariant dépendra de la puissance $(\sqrt{-1})^{\mu-1}$, ce qui conduit au même cas : $\mu - 1 = 4t$.

En conséquence dans le choix des valeurs de y il faut avoir égard aux conditions :

$$(n - 4r + 1)y = 4t, \quad \text{ou} \quad (n - 4r + 1)y - 1 = 4t.$$

Le même invariant doit changer le signe pour $4r + 2\sigma$ racines imaginaires, et afin que cela soit possible, il faut que μ_2 ait la forme :

$$\mu_2 = 4t + 2 \quad \text{ou} \quad \mu_2 - 1 = 4t + 2.$$

Considérons la première de ces conditions, en remettant la seconde à la discussion des équations de degré particulier, et posons $\mu_1 = 4t, \mu_2 = 4t + 2$. Ces équations seront satisfaites en faisant :

$$(n - 4r + 1)y = 4t, \quad \text{et} \quad (n - 4r - \sigma)z = 4t + 2.$$

Pour $n = 2m + 1$, et $\sigma = 2\sigma_1$, on aura à satisfaire outre que les équations (p), encore les conditions :

$$\begin{aligned} (2m - 4r + 2)y &= 4t \\ (2m - 4r - 2\sigma + 1)z &= 4t + 2 \end{aligned}$$

ce que l'on peut toujours faire en posant $z=4z_1+2$, et il sera alors :

$$\text{pour } 4r+4\sigma_1 \quad \text{racines imaginaires, } \mu_2=4t+2$$

$$\text{pour } 4r+4\sigma+2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \mu_2=4t.$$

Tels invariants auront la faculté d'indiquer par un changement de signe la coëxistence de $4r$ racines imaginaires, et lorsqu'il est en même temps $I^{(r_1)}=0$, posant $2r-1=r_1$, ces $4r$ racines seront deux à deux égales.

Les équations du degré $n=2m$ donnent les conditions :

$$(2m-4r+1)y=4t, \quad \text{ou} \quad y=4y_1$$

$$\text{et } \mu_2=4t+3(2m-4r+1)y+(2\sigma_1+1)(2m-4r-\sigma)z=4t+2.$$

Mais en posant $\sigma=0$, ce qui correspond à $4r$ racines imaginaires, on déduira la valeur de $(2m-4r)z$ des deux dernières équations pour le degré (p), savoir :

$$(2m-4r)z=4(r-1)(v-x)+(2m-4r-2)4y_1=4t$$

et il sera pour $y=4y_1$, toujours $\mu_2=4t$.

Quant au second cas, lorsqu'il est μ_2 impair, on aura à satisfaire la condition :

$$(2m-4r+1)y-1=4t$$

ce qui donne :

$$\mu_2=4t+1+2(m-2r)z.$$

Cette fois il sera bien possible de donner à μ_2 la forme $4t+3$, en supposant m et z impair; et puisque cette puissance impaire de $\sqrt{-1}$ disparaît, il est évident que le signe de l'invariant dépendra de la puissance inférieure avec l'exposant :

$$\mu_2-1=4t+2.$$

Mais pour m pair, savoir pour les degrés $n=4m_1$ on trouve la valeur de μ_2 :

$$\mu_2=4t+1+4(m_1-r)z=4t'+1.$$

C'est ce qui nous apprend que les invariants $I^{(r,4)}$, lorsqu'ils appartiennent aux équations du degré $4m$, conservent pour $4r$ racines imaginaires le même signe que pour $4m$ racines réelles, en sup-

posant q, q_1, \dots infiniment grands. Ces invariants ne seront plus applicables en qualité d'indices des racines imaginaires.

On fera de même usage des formules données en III., quand il s'agit de trouver des critères invariantifs pour $6r, 8r, 10r, \dots$ racines imaginaires, trois à trois, quatre à quatre, ... égales, en posant dans les équations (p) respectivement $s=6, s=8, s=10, \dots$

Dans le cas particulier : $r=1$, on préférera la seconde espèce d'invariants dénotée par $I^{(\rho)}$ et déterminée, en posant $s=3$, par les équations

$$(\rho-1)x = (n-\rho-1)y = p$$

$$I_p^{(\rho)} = \sum A_1^x A_2^y$$

$$\mu = (2\rho-3)x + (2n-2\rho-3)y$$

Par rapport à l'équation $(\rho-1)x = (n-\rho-1)y$, la valeur de μ sera transformée en

$$\mu = 4(\rho-1)x - (x+y).$$

Afin que l'invariant $I^{(\rho)}$ puisse changer le signe pour 4 racines imaginaires, il faut qu'on ait :

$$x+y = 4t+2, \quad \text{ou} \quad x+y-1 = 4t+2.$$

V.

Application des formules précédentes, à la discussion de quelques équations du degré impair.

1. Soit $n=5$. Les équations du 5^me degré n'ont d'autres invariants de la forme $I^{(r,s)}$, que celui pour $r=1$, et $s=3$, savoir :

$$I_{12}^{(r,s)} = \sum D^4 C^2.$$

Mais c'est identiquement le même invariant du degré $p=12$, que nous avons désigné par I'_{12} dans l'art. II. de ce travail.

Les autres équations déterminant les invariants dénotés par $I^{(\rho)}$ donnent pour :

$$\rho=2, \quad s=3, \quad I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2^2$$

et les valeurs des produits A_1 et A_2 résulteront des formules générales :

$$A_1 = (1, 2), \quad A_2 = (3, 4) (4, 5) (3, 5).$$

Ici on voit, mieux peut-être que des formules précédentes, qu'il y a déjà dans les équations du 5^{me} degré, pour les cas de trois racines égales, deux critères différents et irréductibles, savoir :

$$I'_{12} = 0, \quad \text{et} \quad I_4^{(\rho)} = 0.$$

Le dernier invariant sera encore un critère pour 4 racines imaginaires car on trouve des équations développées en IV., en posant $\rho = 2$

$$x = [5 - 3]y = 4p_1 \\ \mu = 4x + (x + y) = 4t + 2.$$

Ces conditions seront satisfaites en prenant $p_1 = 1, x = 4, y = 2$, et l'invariant dénoté par le symbole :

$$I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2^2$$

indiquera par un changement de signe l'existence de 4 racines imaginaires dans les équations du 5^{me} degré, et lorsqu'il est en même temps $I'_{12} = 0$ ces racines seront deux à deux égales.

Voilà donc encore le troisième critère invariantif de M.^r SYLVESTER, résultant de nos équations générales.

Les équations du degré $n = 7$ ont les invariants suivants de la forme $I_p^{(r,s)}$:

$$\text{pour } r = 1, \quad s = 3, \quad I_{20}^{(r,s)} = \sum D^4 E^3$$

$$\text{pour } r = 1, \quad s = 4, \quad I_{12}^{(r,s)} = \sum D^3 E$$

$$\text{pour } r = 2, \quad s = 3, \quad I_{20}^{(r,s)} = \sum B^6 C^4 D E^6.$$

Les mêmes équations auront encore les invariants dénotés par le symbole $I_p^{(\rho)}$:

$$\text{pour } \rho = 2 \quad s = 3 \quad I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2$$

$$\text{» } \rho = 3 \quad s = 3 \quad I_{12}^{(\rho)} = \sum A_1^6 A_2^4$$

$$\text{» } \rho = 2 \quad s = 4 \quad I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2^4 A_3^2.$$

On aura donc les critères invariantifs des équations du 7^{me} degré indiquants plusieurs racines égales :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lorsqu'il est: } I_{20}^{(r,s)} = \sum D^4 E^3 = 0 \\ \text{ou aussi: } I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2 = 0 \\ \text{» » } I_{12}^{(\rho)} = \sum A_1^6 A_2^4 = 0 \end{array} \right\} \text{l'équation contient trois racines égales}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{et pour: } I_{12}^{(r,s)} = \sum D^3 E = 0 \\ \text{ou aussi: } I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2^4 A_3^2 = 0 \end{array} \right\} \text{» » quatre racines égales}$$

et encore pour $I_{20}^{(r,s)} = \sum B^6 C^4 D E^6 = 0$, l'équation aura deux groupes à trois racines égales.

Il est remarquable que tous ces invariants sont irréductibles, bien qu'ils possèdent quelques propriétés communes. Car en considérant p. e. les trois premiers invariants, on voit que $I_{20}^{(r,s)} = \sum D^4 E^3$ s'évanouit déjà en y supposant deux paires à deux racines égales, pendant que l'invariant

$$I_4^{(\rho)} = \sum (1, 2)^4 \times (3, 4) (3, 5) \dots (6, 7)$$

conserve une valeur sensible. Mais celui-ci devient égale à zéro pour trois paires de racines égales savoir en posant p. e.

$$1 = 4, \quad 2 = 5, \quad 3 = 6$$

parceque alors chaque terme contiendra au moins une des différences

$$(1, 4) = 0, \quad (2, 5) = 0, \quad (3, 6) = 0.$$

On voit encore que le troisième invariant :

$$I_{12}^{(\rho)} = \sum [(1, 2) (2, 3) (3, 4)]^6 \times [(4, 5) (4, 6) \dots (6, 7)]^4$$

reste différent de zéro pour la même supposition, parceque dans le terme sous le signe \sum il n'y a aucune de ces différences nulles.

Il est donc tout à fait impossible que $I_4^{(\rho)}$ soit un facteur de $I_{12}^{(\rho)}$.

Les formules générales développées en IV. nous donnent encore les critères pour la coexistence de 4 racines imaginaires, deux à deux égales savoir pour

$$I_{40}^{(\prime)} = 0$$

$$\text{et } I_4^{(\rho)} = \sum A_1^4 A_2 = - \quad \text{ou aussi } I_{12}^{\rho} = \sum A_1^4 A_2^4 = -$$

car en désignant par μ l'exposant plus haut de la puissance imaginaire $(\sqrt{-1})^\mu$, on trouve pour le premier invariant: $\mu - 1 = 10 = 4 \cdot 2 + 2$ et pour le second $\mu = 14 = 4 \cdot 3 + 2$, pendant que les invariants :

$$I_{20}^{(r,s)} \quad \text{et} \quad I_{12}^{(r,s)}$$

donnent pour 4 racines imaginaires les valeurs respectives de $\mu - 1$

$$\mu - 1 = 60 = 4 \cdot 15, \quad \mu - 1 = 40 = 4 \cdot 10$$

tant qu'ils ne seront plus applicables dans le cas mentionné.

Ces résultats suffiront peut-être à démontrer la possibilité d'une telle discussion des équations algébriques, d'un degré quelconque, au moyen des critères invariantifs.

Théorie des coordonnées curvilignes quelconques (*).

(par M.^r l'Abbé Aoust, prof. à Marseille.)

§ 5. Des relations entre les variations des courbures des lignes coordonnées.

Les relations qui existent entre les variations des courbures des lignes coordonnées tracées sur une surface se déduisent facilement des relations générales existant entre les courbures des lignes coordonnées se rapportant à un point quelconque de l'espace, relations que nous avons déjà fait connaître dans la 1.^{ère} partie de notre théorie des coordonnées curvilignes (**). En effet il suffit de supposer qu'une des trois surfaces coordonnées coupe les deux autres orthogonalement. Or, la nécessité de considérer trois surfaces nous impose l'obligation de conserver toutes les notations, hypothèses admises dans cette 1.^{ère} partie; et afin que la déduction des formules soit plus apparente, nous considérons conformément à cette partie, un système de coordonnées curvilignes tracées sur la surface ρ_1 , mais nous admettons de plus que cette surface est coupée orthogonalement par les surfaces ρ et ρ_2 , ce qui revient à dire que les angles ϕ et ϕ_2 sont droits.

26.^o *Des relations entre les composantes des diverses courbes.* Deux des trois formules contenues dans le type (15) 1.^{ère} partie deviennent

$$\left\{ \frac{1}{L_{20}} + \frac{1}{L_{10}} = 0, \quad \frac{1}{L''_{12}} + \frac{1}{L''_{02}} = 0; \right\} \quad [15]$$

or, si l'on remarque que dans la première de ces deux formules $\frac{1}{L_{20}}$ n'est pas

(*) Suite du Mémoire inséré à page 39 du tome 2^e de ce journal.

(**) *Annali di Matematica*, tome 6^e, 1.^{ère} série.

distincte de la composante $\frac{1}{L_{20}^{(1)}}$ de la courbure $\frac{1}{L_{20}}$ normalement à la surface ρ_1 et que la composante $\frac{1}{L_{10}}$ est la somme des projections des deux composantes obliques $\frac{1}{L_{10}^{(2)}}$, $\frac{1}{L_{12}^{(0)}}$ sur l'élément $d\sigma_2$, cette première formule se transforme, et en opérant de même sur la seconde, on obtient le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L_{10}^{(2)}} + \frac{\cos \varphi_1}{L_{10}^{(0)}} = -\frac{1}{L_{20}^{(1)}} = -\frac{1}{L_{20}}, \quad \frac{1}{L_{12}^{(0)}} + \frac{\cos \varphi_1}{L_{12}^{(2)}} = -\frac{1}{L_{02}^{(1)}} = -\frac{1}{L''_{02}}. \end{array} \right\} [15]$$

On obtiendrait les mêmes équations en transformant les équations [15] au moyen des équations contenues dans le type (11)' de notre théorie, 1.^{ère} partie, dans lesquelles il faudrait poser θ et θ_2 droits, et $\theta_1 + \varphi_1 = \pi$, et en transformant ces dernières au moyen des équations contenues dans les types (22) et (26) de la même théorie.

On trouvera de même que deux des équations contenues dans le type (14) donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L''_{10}} + \frac{1}{R''} = 0, \quad \frac{1}{L_{12}} + \frac{1}{R} = 0; \end{array} \right\} [14]$$

lesquelles, par une opération analogue à celle que nous venons de faire, deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L_{10}^{(0)}} + \frac{\cos \varphi_1}{L_{10}^{(2)}} = -\frac{1}{r^{(1)}} = -\frac{1}{R''}, \quad \frac{1}{L_{12}^{(2)}} + \frac{\cos \varphi}{L_{12}^{(0)}} = -\frac{1}{r_2^{(1)}} = -\frac{1}{R_2}. \end{array} \right\} [14]'$$

Les deux premières équations [14]' et [15]' forment un système linéaire, ainsi que les deux dernières équations [14]' et [15]'; on déduit de ces deux systèmes les équations suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin^2 \varphi_1}{L_{10}^{(2)}} = \frac{\cos \varphi_1}{r^{(1)}} - \frac{1}{L_{20}^{(1)}}, \quad \frac{\sin^2 \varphi_1}{L_{10}^{(0)}} = \frac{\cos \varphi_1}{L_{20}^{(1)}} - \frac{1}{r^{(1)}}; \\ \frac{\sin^2 \varphi_1}{L_{12}^{(0)}} = \frac{\cos \varphi_1}{r_2^{(1)}} - \frac{1}{L_{02}^{(1)}}, \quad \frac{\sin^2 \varphi_1}{L_{12}^{(2)}} = \frac{\cos \varphi_1}{L_{02}^{(2)}} - \frac{1}{r_2^{(1)}}. \end{array} \right\} (26)$$

La courbures inclinées $\frac{1}{L_{10}}$, $\frac{1}{L_{12}}$ des arcs $d\sigma$, $d\sigma_2$ suivant la direction $d\sigma_1$ actuellement normale à la surface ρ_1 sont les quotients des angles de deux normales à la surface ρ_1 menées par les deux extrémités des deux arcs $d\sigma$, $d\sigma_2$ par ces deux arcs, quotients que nous appellerons courbures des deux

arcs $d\sigma, d\sigma_2$ inclinées suivant la normale à la surface ρ_1 . On voit que cet élément si usité dans la géométrie des surfaces se présente comme cas particulier de la courbure inclinée, et que par suite de la théorie, il est naturellement exprimé en fonction des composantes normales à la surface ρ_1 des courbures propres et inclinées des lignes coordonnées $d\sigma, d\sigma_2$, de sorte que toutes les relations que l'on connaît sur cet élément sont implicitement ou explicitement contenues dans les équations précédentes.

Dans les formules (14) de notre théorie, 1.^{ère} partie, sont aussi contenues deux formules relatives à la variation de l'angle ϕ_1 par rapport à ρ et à ρ_2 , lesquelles par une transformation évidente s'écrivent sous la forme:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d\sigma_2} + \sin\phi_1 \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} + \frac{1}{r_2^{(0)}} \right) = 0, & \quad \frac{d\phi_1}{d\sigma} + \sin\phi_1 \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} + \frac{1}{r^{(2)}} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

27.^o *Diverses expressions de la courbure de la surface ρ_1 .* Si nous représentons par $\frac{1}{K'_n}$ la courbure de la surface ρ_1 , cette courbure, d'après le n.^o 11 de la 2.^{ème} partie de notre théorie, sera

$$\frac{\sin^2\phi_1}{K'_n} = \frac{1}{r_2^{(1)} r^{(1)}} - \frac{1}{l_{02}^{(1)} l_{20}^{(1)}}; \quad (28)$$

or, si l'on élimine les composantes normales des courbures propres ou inclinées des arcs $d\sigma, d\sigma_2$ au moyen des équations [14]' et [15]' précédemment écrites, on obtient les équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{K'_n} &= \frac{1}{l_{10}^{(0)} l_{12}^{(2)}} - \frac{1}{l_{12}^{(0)} l_{10}^{(2)}} = \frac{1}{L_{12} L''_{10}} - \frac{1}{L''_{12} L_{10}}, \\ \frac{\cos\phi_1}{K'_n} &= \frac{1}{r_2^{(1)} l_{10}^{(2)}} - \frac{1}{l_{20}^{(1)} l_{12}^{(2)}} = \frac{1}{r_0^{(1)} l_{12}^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(1)} l_{10}^{(0)}}, \\ \frac{1}{K'_n} &= \frac{1}{l_{20}^{(1)} l_{12}^{(0)}} - \frac{1}{r_2^{(1)} l_{10}^{(0)}} = \frac{1}{l_{02}^{(1)} l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{r_0^{(1)} l_{12}^{(2)}}; \end{aligned} \right\} \quad (28)'$$

la première donne l'expression de la courbure de la surface au moyen des composantes obliques suivant les éléments $d\sigma, d\sigma_2$ des angles de deux normales infiniment voisines menées par les extrémités de ces éléments.

28.^o *Relations entre les variations des composantes obliques suivant $d\sigma, d\sigma_2$ des angles de deux normales consécutives à la surface ρ_1 .* Ces relations sont la conséquence immédiate de équations (29) de notre théorie, 1.^{ère} partie,

dans lesquelles il faut poser nuls les cosinus des angles ϕ et ϕ_2 ; on obtient ainsi, en se rappelant que d_0, d_1, d_2 indiquent des différentielles par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2 , les équations

$$\left. \begin{aligned} d_0 \frac{d\sigma_2}{l_{12}^{(0)}} - d_2 \frac{d\sigma}{l_{10}^{(0)}} + d\sigma d\sigma_2 \left\{ \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)} l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{12}^{(0)} r_0^{(2)}} \right) \cos \phi_1 + \left(\frac{1}{l_{12}^{(2)} l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{10}^{(2)} r_2^{(0)}} \right) \right\} &= 0, \\ d_0 \frac{d\sigma_2}{l_{12}^{(2)}} - d_2 \frac{d\sigma}{l_{10}^{(2)}} - d\sigma d\sigma_2 \left\{ \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)} l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{12}^{(0)} r_0^{(2)}} \right) + \left(\frac{1}{l_{12}^{(2)} l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{10}^{(2)} r_2^{(0)}} \right) \cos \phi_1 \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

On déduit de ces deux équations un système équivalent. En effet si l'on multiplie la première par $\cos \phi_1$ et qu'on ajoute le résultat à la seconde, si ensuite on multiplie la seconde par $\cos \phi_1$ et qu'on ajoute le résultat à la première, on obtient deux équations, qui, par suite des équations (27), deviennent :

$$\left. \begin{aligned} d_0 \left\{ d\sigma_2 \left(\frac{1}{l_{12}^{(2)}} + \frac{\cos \phi_1}{l_{12}^{(0)}} \right) \right\} - d_2 \left\{ d\sigma \left(\frac{1}{l_{10}^{(2)}} + \frac{\cos \phi_1}{l_{10}^{(0)}} \right) \right\} + d\sigma d\sigma_2 \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)} r_2^{(0)}} - \frac{1}{l_{12}^{(0)} l_{20}^{(0)}} \right) \sin^2 \phi_1 &= 0, \\ d_0 \left\{ d\sigma_2 \left(\frac{1}{l_{12}^{(0)}} + \frac{\cos \phi_1}{l_{12}^{(2)}} \right) \right\} - d_2 \left\{ d\sigma \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} + \frac{\cos \phi_1}{l_{10}^{(2)}} \right) \right\} + d\sigma d\sigma_2 \left(\frac{1}{l_{12}^{(2)} r_2^{(2)}} - \frac{1}{l_{10}^{(2)} l_{02}^{(2)}} \right) \sin^2 \phi_1 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

si l'on représente par $\frac{1}{T^{(0)}}$, $\frac{1}{T^{(2)}}$ les binômes entre parenthèses des derniers termes de ces deux équations et qu'on ait égard aux équations [15]' de ce mémoire, on obtient, en posant $d\omega' = d\sigma d\sigma_2 \sin \phi_1$, les deux équations suivantes :

$$\left\{ d_0 I_2 - d_2 J_{20} = \frac{d\omega' \sin \phi_1}{T^{(2)}}, \quad d_2 I''_2 - d_0 J''_{02} = \frac{d\omega' \sin \phi_1}{T^{(0)}}, \right\} \quad (30')$$

Si le système des coordonnées $d\sigma, d\sigma_2$ est rectangulaire, les équations (29) et (30) donnent :

$$\begin{aligned} d_0 \frac{d\sigma_2}{l_{12}^{(0)}} - d_2 \frac{d\sigma}{l_{10}^{(0)}} + d\sigma d\sigma_2 \left(\frac{1}{l_{12}^{(2)} l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{10}^{(2)} r_2^{(0)}} \right) &= 0, \\ d_0 \frac{d\sigma_2}{l_{12}^{(2)}} - d_2 \frac{d\sigma}{l_{10}^{(2)}} - d\sigma d\sigma_2 \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)} l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{12}^{(0)} r_0^{(2)}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

29.° *Relations entre les variations des projections des arcs de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées $d\sigma, d\sigma_1$ sur la normale surface ρ_1 .*

La deuxième des équations (31) de notre théorie, 1.^{ère} partie, donne les

deux suivantes :

$$\left. \begin{aligned} d_2 \left(\frac{d\sigma}{l_{20}^{(1)}} \right) - d_0 \left(\frac{d\sigma_2}{r_2^{(1)}} \right) &= d\sigma d\sigma_2 \left\{ \left(\frac{1}{r_2^{(1)} l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{20}^{(1)} r_2^{(0)}} \right) \cos \phi_1 + \left(\frac{1}{r_2^{(1)} r_2^{(0)}} - \frac{1}{l_{02}^{(1)} l_{20}^{(0)}} \right) \right\}, \\ d_0 \left(\frac{d\sigma_2}{l_{02}^{(1)}} \right) - d_2 \left(\frac{d\sigma}{r_2^{(1)}} \right) &= d\sigma d\sigma_2 \left\{ \left(\frac{1}{r_2^{(1)} l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{02}^{(1)} r_2^{(2)}} \right) \cos \phi_1 + \left(\frac{1}{r_2^{(1)} r_2^{(2)}} - \frac{1}{l_{20}^{(1)} l_{02}^{(2)}} \right) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

or il est facile de voir que ces équations ne sont pas distinctes des équations (30); car en éliminant les composantes normales des courbures, contenues dans ces dernières équations, au moyen des relations [14]' et [15]', on retombe sur les équations (30).

30.^o *Relations entre les variations des projections obliques suivant $d\sigma$, $d\sigma_2$ des arcs de contingence propre ou inclinée des lignes coordonnées.* Si l'on pose pour abrégé

$$\frac{1}{r_2^{(2)} r_2^{(0)}} - \frac{1}{l_{20}^{(1)} l_{02}^{(2)}} = \frac{1}{K'_t},$$

la première et la dernière des équations (31) de notre théorie, 1.^{ère} partie, donnent directement les deux équations suivantes, en ayant égard aux relations (28)',

$$\left. \begin{aligned} -d\sigma d\sigma_2 \left(\frac{1}{K'_n} + \frac{\cos \phi_1}{K'_t} \right) &= d_2 \frac{d\sigma}{l_{20}^{(0)}} - d_0 \frac{d\sigma_2}{r_2^{(0)}} = d_2 \left(\frac{J'_{20}}{\sin \phi_1} \right) - d_0 \left(\frac{I'_2}{\sin \phi_1} \right), \\ d\sigma d\sigma_1 \left(\frac{1}{K'_t} - \frac{\cos \phi_1}{K'_n} \right) &= d_2 \frac{d\sigma}{l_{20}^{(2)}} - d_0 \frac{d\sigma_2}{r_2^{(2)}} = -d_2 (J'_{20} \cot \phi_1) - d_0 (I'_2 \cot \phi_1). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Si l'on multiplie la seconde par $\cos \phi_1$ et qu'on ajoute le résultat à la première, on trouve l'équation

$$\frac{d\omega'}{K'_n} = d_2 I'_2 - d_2 J'_{20}, \quad (33)$$

qui est double et qui exprime deux formes nouvelles de l'expression de la courbure d'une surface; on en déduit cette proposition:

Théorème. *Si l'on prend les variations des projections sur le plan tangent de l'angle de contingence propre d'une ligne coordonnée et de l'angle de contingence inclinée de la ligne conjuguée, par rapport aux deux paramètres réciproques, le rapport de la différence de ces variations à l'élément de surface $d\omega'$ est indépendant de tout système coordonné et égal à la courbure de la surface en ce point.*

Les équations (33) deviennent, en ayant égard aux relations (15) 1^{ère} partie

$$\left. \begin{aligned} d_0 I'_2 + d_2 I'_1 + d_0 d_2 \phi_1 &= \frac{d\omega'}{K'_n}, \\ d_0 J'_{02} + d_2 J'_{20} + d_0 d_2 \phi_1 &= -\frac{d\omega'}{K'_n}; \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

la première de ces formules donne l'expression de la courbure $\frac{1}{K'_n}$ de la surface sous la forme remarquable que lui a donnée M.^r LIOUVILLE (Compt. rend. 1851); la seconde formule est une expression nouvelle et non moins simple de la courbure de la surface en fonction des variations des projections tangentielles des angles de contigence inclinée.

31.^o *Relations entre les variations des composantes obliques des courbures des arcs $d\sigma$, $d\sigma_2$ inclinées suivant la normale à la surface ρ_1 .* Remarquons que, lorsque la surface ρ_1 coupe orthogonalement les deux surfaces ρ et ρ_2 , l'élément $d\sigma_1$ est normal à la surface ρ_1 et que par suite les courbures $\frac{1}{L_{10}}, \frac{1}{L_{12}}$ sont normales à l'élément $d\sigma_1$; donc les composantes $\frac{1}{L_{10}^{(1)}}, \frac{1}{L_{12}^{(1)}}$ de ces courbures suivant cet élément sont nulles; d'après cela les équations (33) du n.^o 18, 1.^{ère} partie, donnent les deux suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L_{12}^{(0)}} \right) - \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{L_{10}^{(0)}} \right) &= \frac{1}{L_{10}^{(0)} L_{20}^{(0)}} + \frac{1}{L_{12}^{(0)}} \left(\frac{1}{L_{20}^{(2)}} - \frac{1}{L_{02}^{(2)}} - \frac{1}{r^{(0)}} \right) + \frac{1}{L_{12}^{(2)} r^{(0)}} - \frac{1}{L_{12}^{(2)} L_{20}^{(2)}}, \\ \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{L_{10}^{(2)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L_{12}^{(2)}} \right) &= \frac{1}{L_{12}^{(2)} L_{02}^{(2)}} + \frac{1}{L_{10}^{(2)}} \left(\frac{1}{L_{02}^{(0)}} - \frac{1}{L_{20}^{(0)}} - \frac{1}{r^{(2)}} \right) + \frac{1}{L_{10}^{(0)} r^{(2)}} - \frac{1}{L_{10}^{(0)} L_{02}^{(0)}}; \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

auxquelles il faut joindre la relation qui lie les composantes obliques des courbures en question, et provenant de ce que les seconds membres des équations [15]' sont égaux d'après l'équation (32) de notre 1.^{ère} partie. Cette relation est :

$$\frac{1}{L_{12}^{(0)}} + \frac{\cos \phi_1}{L_{10}^{(0)}} = \frac{1}{L_{10}^{(2)}} + \frac{\cos \phi_1}{L_{12}^{(2)}}. \quad (36)$$

Si le système des coordonnées $d\sigma, d\sigma_2$ est orthogonal, il faut remarquer que les composants telles que $\frac{1}{L_{02}^{(0)}}, \frac{1}{L_{20}^{(2)}}, \frac{1}{r^{(0)}}, \frac{1}{r^{(2)}}$ sont nulles, et les équations (35)

deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{l_{12}^{(0)}} \right) - \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{10}^{(0)}} \right) &= \frac{1}{l_{10}^{(0)} l_{20}^{(0)}} - \frac{1}{l_{12}^{(0)} l_{02}^{(0)}} + \frac{1}{l_{12}^{(2)} l_2^{(0)}}, \\ \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{10}^{(2)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{l_{12}^{(2)}} \right) &= \frac{1}{l_{12}^{(2)} l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{10}^{(2)} l_{20}^{(0)}} + \frac{1}{l_{10}^{(0)} r^{(2)}}; \end{aligned} \right\} \quad (15)'$$

auxquelles il faut joindre la condition que les deux courbures $\frac{1}{l_{13}^{(0)}}$, $\frac{1}{l_{10}^{(2)}}$ sont égales.

32.^o *Relations entre les variations des composantes normales à la surface des courbures des lignes $d\sigma$, $d\sigma_2$.* Ces relations sont immédiatement fournies par la deuxième des équations (34) de notre 1.^{ère} partie, avec la condition que les courbures $\frac{1}{l_{20}^{(1)}}$, $\frac{1}{l_{20}^{(1)}}$ sont égales; on trouve

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_2^{(1)}} \right) &= \frac{1}{l_{02}^{(1)}} \left(\frac{1}{r_2^{(2)}} + \frac{1}{l_{02}^{(0)}} - \frac{2}{l_{30}^{(0)}} \right) + \frac{1}{r_2^{(1)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} - \frac{2}{l_{20}^{(2)}} \right) + \frac{1}{r^{(1)}} \cdot \frac{1}{r_2^{(0)}}, \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{r^{(1)}} \right) &= \frac{1}{l_{02}^{(1)}} \left(\frac{1}{r^{(0)}} + \frac{1}{l_{20}^{(2)}} - \frac{2}{l_{02}^{(2)}} \right) + \frac{1}{r^{(1)}} \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} - \frac{2}{l_{02}^{(0)}} \right) + \frac{1}{r_2^{(1)}} \cdot \frac{1}{r^{(2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Si le système des lignes $d\sigma$, $d\sigma_2$ est rectangulaire, les composantes $\frac{1}{r^{(0)}}$, $\frac{1}{r^{(2)}}$, $\frac{1}{l_{20}^{(2)}}$, $\frac{1}{l_{02}^{(0)}}$ sont nulles et l'on obtient

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_2^{(1)}} \right) &= \frac{-2}{l_{02}^{(1)}} \cdot \frac{1}{l_{20}^{(0)}} + \frac{1}{r_2^{(1)} l_{02}^{(2)}} + \frac{1}{r^{(1)} r_2^{(0)}}, \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{r^{(1)}} \right) &= -\frac{2}{l_{02}^{(1)} l_{02}^{(2)}} + \frac{1}{r^{(1)} l_{20}^{(0)}} + \frac{1}{r_2^{(1)} r^{(2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)'$$

Dans ces équations comme dans les équations (35)', les composantes $\frac{1}{l_{02}^{(2)}}$, $\frac{1}{l_{20}^{(0)}}$ sont égales aux composantes $\frac{1}{r_2^{(0)}}$, $\frac{1}{r^{(2)}}$ et de signes contraires, ainsi que cela résulte de nos équations (27).

Les équations (36) sont une conséquence des équations (35) et l'on passerait de celles-là à celles-ci en opérant comme on l'a fait au n.^o 29.

33.^o *Relations entre les variations des deuxièmes courbures géodésiques*

des arcs $d\sigma$, $d\sigma_2$. Soient $\frac{1}{U_0}$, $\frac{1}{U_2}$ les deuxièmes courbures géodésiques des lignes $d\sigma$, $d\sigma_2$, on a d'après le n.º 10 2.^{ème} partie, les deux formules

$$\frac{1}{l_{20}^{(1)}} = \frac{\cos \varphi_1}{r^{(1)}} - \frac{\sin \varphi_1}{U_0} = \frac{\cos \varphi_1}{r_2^{(1)}} + \frac{\sin \varphi_1}{U_2} = \frac{1}{l_{02}^{(1)}}; \quad (37)$$

en substituant les valeurs des composantes $\frac{1}{l_{02}^{(1)}}$, $\frac{1}{l_{20}^{(1)}}$ dans les équations (36), on trouve

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_2^{(1)}} \right) - \cos \varphi_1 \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{r^{(1)}} \right) + \sin \varphi_1 \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{U_0} \right) &= \frac{2 \sin \varphi_1}{l_{20}^{(1)} U_2} + \frac{\text{tang} \varphi_1}{l_{02}^{(2)}} \left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_2} \right), \\ \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{r_0^{(1)}} \right) - \cos \varphi_1 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_2^{(1)}} \right) - \sin \varphi_1 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{U_2} \right) &= -\frac{2 \sin \varphi_1}{l_{02}^{(2)} U_0} - \frac{\text{tang} \varphi_1}{l_{20}^{(1)}} \left(\frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

auxquelles il convient de joindre la transformée de l'équation (28) qui est

$$\frac{\sin^2 \varphi}{K'_n} - \frac{1}{r^{(1)} r_2^{(1)}} = \left(\frac{\cos \varphi_1}{r^{(1)}} - \frac{\sin \varphi_1}{U_0} \right)^2. \quad (28)''$$

On voit que les équations (38) se déduisent immédiatement des équations (36), et qu'il n'est pas nécessaire pour cela de rien emprunter à des théories étrangères. C'est une simple substitution à effectuer.

34.º *Expressions de la courbure de la surface en fonction des variations des courbures inclinées et des courbures propres des lignes coordonnées.* Le premier moyen d'obtenir ces expressions consiste à éliminer les variations des angles de contingence propre ou inclinée des équations (34) au moyen des relations (20) et (14) de notre 1.^{ère} partie; le second moyen consiste à opérer directement sur la première et la dernière des équations (34) 1.^{ère} partie. En effet ces équations, dans le cas où la surface (ρ_1) coupe orthogonalement les surfaces ρ et ρ_2 , étant transcrites, donnent en ayant égard aux équations (26) de notre théorie, 1.^{ère} partie,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{20}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_2^{(1)}} \right) &= \frac{1}{r_2^{(1)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{20}^{(2)}} \right) + \frac{1}{l_{20}^{(1)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} - \frac{1}{l_{20}^{(1)}} \right) - \frac{\cos \varphi_1}{K'_t} - \frac{1}{K'_n}, \\ \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r^{(2)}} \right) &= \frac{1}{r_2^{(2)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{20}^{(2)}} \right) + \frac{1}{l_{20}^{(2)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{20}^{(2)}} \right) + \frac{1}{K'_t} + \frac{\cos \varphi_1}{K'_n}; \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

or, si l'on multiplie la deuxième par $\cos \varphi_1$ et qu'on ajoute le résultat à la

première, en remarquant que d'après les équations (26) 1^{ère} partie, l'on a :

$$\left\{ \frac{\cos \varphi_1}{r_1^{(0)}} + \frac{1}{r_2^{(2)}} = 0, \frac{\cos \varphi_1}{r^{(2)}} + \frac{1}{r^{(0)}} = 0; \frac{\cos \varphi_1}{l_{20}^{(0)}} + \frac{1}{l_{20}^{(2)}} = 0, \frac{\cos \varphi_1}{l_{02}^{(0)}} + \frac{1}{l_{02}^{(2)}} = 0, \right\} \quad (40)$$

et sans avoir égard aux équations (27) du mémoire actuel, comme on a prétendu faussement que cela était nécessaire, on trouve l'équation suivante :

$$\frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{l_{20}^{(0)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sin \varphi_1}{r_2^{(0)}} \right) = \frac{\sin \varphi_1}{r_2^{(0)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} - \frac{1}{l_{20}^{(2)}} \right) + \frac{\sin \varphi_1}{l_{20}^{(0)}} \left(\frac{1}{l_{02}^{(0)}} - \frac{1}{l_{20}^{(0)}} \right) - \frac{\sin \varphi}{K'_n}, \quad (41)$$

laquelle donne la courbure $\frac{1}{K'_n}$ de la surface ρ_1 en fonction des variations des composantes des courbures propres ou inclinées des lignes coordonnées, suivant le plan tangent.

Cette équation se transforme immédiatement au moyen des équations (27) de notre mémoire et donne les deux suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{l_{20}^{(0)}} \right) + \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sin \varphi_1}{l_{02}^{(2)}} \right) + \frac{d^2 \varphi_1}{d\rho d\rho_2} \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d\rho_2}{d\sigma_2} + \sin \varphi \left\{ \left(\frac{1}{l_{20}^{(0)}} \right)^2 + \left(\frac{1}{l_{02}^{(2)}} \right)^2 + \frac{2 \cos \varphi_1}{l_{20}^{(0)} l_{02}^{(2)}} + \frac{1}{K'_n} \right\} &= 0, \\ \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{r^{(2)}} \right) + \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sin \varphi_1}{r_2^{(0)}} \right) + \frac{d^2 \varphi_1}{d\rho d\rho_2} \frac{d\rho}{d\sigma} \frac{d\rho_2}{d\sigma_2} + \sin \varphi \left\{ \left(\frac{1}{r_2^{(0)}} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^{(2)}} \right)^2 + \frac{2 \cos \varphi}{r^{(2)} r_2^{(0)}} + \frac{1}{K'_n} \right\} & \\ - \frac{d\varphi_1}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{r_2^{(0)}} + \frac{\cos \varphi}{r_0^{(2)}} \right) - \frac{d\varphi_1}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_0^{(2)}} + \frac{\cos \varphi}{r_2^{(0)}} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)'$$

Les formules (41) et (41)' font connaître la courbure de la surface ρ_1 en fonction des projections des courbures propres ou inclinées des deux lignes coordonnées sur le plan tangent à la surface ρ_1 ; car l'on a évidemment les relations :

$$\frac{\sin \varphi_1}{l_{20}^{(0)}} = \frac{1}{L'_{20}}, \quad \frac{\sin \varphi_1}{l_{02}^{(2)}} = \frac{1}{L'_{02}}; \quad \frac{\sin \varphi_1}{r} = \frac{1}{R'}, \quad \frac{\sin \varphi_1}{r^{(2)}} = \frac{1}{R'_2}$$

et, en ayant égard à ces valeurs, on retrouve les formules que nous avons depuis longtemps publiées.

D'après ce qui précède, on voit que la théorie des coordonnées curvilignes renferme immédiatement tout ce qui intéresse les lignes tracées sur une surface et toutes les formules relatives à cette surface; qu'il n'y a qu'à supposer une surface coordonnée ρ_1 orthogonale sur les deux autres pour obtenir ces formules particulières; qu'enfin il n'est aucun des éléments de la théorie des lignes tracées sur une surface qui ne se trouve dans la théorie des lignes

coordonnées. Ce qu'il importe de voir c'est que les formules des coordonnées curvilignes sont de deux sortes; les unes relatives à une seule des trois surfaces coordonnées, les autres relatives à deux ou trois surfaces coordonnées: les premières seront littéralement reproduites dans la théorie des lignes tracées sur une surface quelconque; les autres renfermeront implicitement les formules correspondantes de cette dernière théorie; il n'y aura qu'à supposer nuls deux cosinus dans les formules des coordonnées curvilignes quelconques pour exprimer qu'une surface coupe orthogonalement les deux autres, et on retrouvera les formules corrélatives des lignes tracées sur une surface. C'est ce que le paragraphe actuel démontre surabondamment. On voit aussi que le principe de la courbure inclinée suffit pour établir la théorie, et qu'il condense en lui seul, quand on y regarde de près, tous les principes qu'ont invoqués les géomètres qui se sont occupés des lignes tracés sur une surface. Ainsi, par exemple, l'équation (15) de notre théorie des coordonnées curvilignes, renferme le principe qui lie l'angle de deux normales à une surface infiniment voisines avec la projection sur le plan normal de la courbure inclinée d'une des lignes coordonnées suivant l'autre ligne, principe dont on a vanté avec raison la fécondité. Seulement, notre équation (15) présente ce principe sous sa véritable forme d'une équation trinome, et non point mutilé par la disparition du terme $\frac{d\phi}{d\sigma}$. Toutes nos formules de la théorie des coordonnées curvilignes sont la plus grande simplicité, eu égard à la difficulté du problème dont elles sont la solution; elles sont aussi d'une grande fécondité, comme nous l'avons déjà montré, et comme nous allons le montrer encore dans la paragraphe suivant.

§ 6. Des surfaces applicables sur une surface donnée.

Edmond BOUR, après avoir établi dans son Mémoire sur la *déformation des surfaces* (*) les équations fondamentales des surfaces applicables sur une surface donnée, équations qu'il a calculées dans le cas particulier où les lignes coordonnées de la surface sont une série de lignes géodésiques et la série de lignes orthogonales à la première série, s'exprime ainsi, page 7: « Réciproquement, on peut dire que mes équations fondamentales sont ren-

(*) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 39^e cahier.

fermées plus ou moins implicitement dans celles des coordonnées curvilignes, de sorte qu'il ne serait pas impossible de tirer synthétiquement de ces dernières tous les éléments de la déformation des surfaces. » Le but de ce paragraphe est de tirer de notre *théorie des coordonnées curvilignes* non seulement les équations fondamentales de BOUR, mais encore différents systèmes d'équations fondamentales, lesquels sont également propres à résoudre le problème de la déformation des surfaces, et sont d'ailleurs, malgré leur généralité, revêtus d'un caractère de simplicité.

35.° *Nature du problème des surfaces applicables.* Ce problème consiste à trouver toutes les surfaces qui peuvent s'appliquer exactement sur une surface donnée, sans déchirure ni duplication. Soit la surface donnée représentée par trois équations entre les coordonnées cartésiennes du point et deux variables ρ et ρ_2 , de telle sorte que x, y, z soient des fonctions des deux variables; on veut que pour cette surface et pour toute autre qui lui serait applicable, les points se correspondent deux à deux, de telle sorte que la distance de deux points sur une surface soit la même que la distance des deux points similaires sur l'autre surface, dans toutes les directions possibles autour de ces points; cette condition est bien celle pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplication. Cela posé si l'on représente par ds la distance de deux points infiniment voisins pris sur une surface ρ_1 , l'on a

$$ds^2 = d\sigma^2 + d\sigma_2^2 + 2 \cos \phi_1 \cdot d\sigma d\sigma_2;$$

il faut donc que les paramètres différentiels H, H_2 et $\cos \phi_1$ soient des fonctions des variables ρ, ρ_2 , immuables quand on passe d'une surface à l'autre; la surface ρ_1 étant donnée, et les lignes coordonnées $d\sigma, d\sigma_2$ tracées sur cette surface étant choisies, les quantités $H, H_2, \cos \phi_1$ sont déterminées en fonction de ρ, ρ_2 ; ce sont les données du problème; et ce problème consiste à déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les mêmes quantités conservent la même valeur.

36.° *Équations fondamentales du problème.* — *Différents systèmes d'équations fondamentales.* On peut prendre pour résoudre le problème différents systèmes d'inconnues, correspondants chacun à un système d'équations fondamentales.

Dans le premier système, les inconnues de la question sont les composantes

obliques suivant $d\sigma$, $d\sigma_2$ des courbures inclinées suivant les normales à la surface ρ_1 , ces courbures étant $\frac{1}{L_{10}}$, $\frac{1}{L_{13}}$ et leurs composantes obliques étant $\frac{1}{L_{10}^{(0)}}$, $\frac{1}{L_{10}^{(2)}}$; $\frac{1}{L_{12}^{(0)}}$, $\frac{1}{L_{12}^{(2)}}$, de sorte que les inconnues du problème sont au nombre de quatre, et les équations correspondantes sont la première des équations (28) et les équations (35) et (36) du présent mémoire. De ces quatre équations, deux sont en termes finis, les deux autres sont aux différences partielles, et linéaires.

Dans le second système, les inconnues du problème sont les composantes suivant la normale à la surface ρ_1 des courbures propres des lignes $d\sigma$, $d\sigma_2$, et des courbures inclinées de ces mêmes lignes suivant leurs directions réciproques; ces inconnues sont donc $\frac{1}{l_{02}^{(1)}}$, $\frac{1}{l_{20}^{(1)}}$, $\frac{1}{r^{(1)}}$, $\frac{1}{r_2^{(1)}}$. Par suite de l'égalité des deux premières, le nombre des inconnues est seulement de trois; et les équations correspondantes à ces inconnues sont les équations (28) et (36) du présent mémoire; la première est en termes finis et les deux autres sont linéaires et aux différences partielles du premier ordre. Les équations fondamentales de Bour sont un cas particulier de ce système, elles ne sont guère plus simples et on les obtiendra en introduisant dans les équations (28) et (36) la double condition que les courbes $d\sigma$, $d\sigma_2$ sont orthogonales entre elles et que l'une d'elles est géodésique. Ainsi, si la ligne $d\sigma_2$ est géodésique, la composante $\frac{1}{r_2^{(0)}}$ de la courbure de cette ligne située dans le plan tangent est nulle et les équations (36)' deviennent

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r_2^{(1)}} \right) &= - \frac{2}{l_{02}^{(1)} r^{(2)}}, \\ \frac{d}{d\sigma_2} \left(\frac{1}{l_{02}^{(1)}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{r^{(1)}} \right) &= - \frac{1}{r^{(1)} r^{(2)}} + \frac{1}{r_2^{(1)} r^{(2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)''$$

Dans le troisième système, les inconnues du problème sont les composantes normales des courbures des deux lignes $d\sigma$, $d\sigma_2$ et les deuxièmes courbures géodésiques de ces deux lignes. Ces inconnues au nombre de quatre sont donc $\frac{1}{r^{(1)}}$, $\frac{1}{r_2^{(1)}}$, $\frac{1}{U_0}$, $\frac{1}{U_2}$ et les équations correspondantes sont les équations (37), (38) et (28)'' du présent mémoire.

37.° *Nature des coefficients des équations fondamentales.* Dans les équations

tions de ces divers systèmes, les coefficients des inconnues, ainsi que les termes indépendants de ces inconnues, sont des fonctions déterminés des coordonnées ρ , ρ_2 du point considéré sur la surface; or notre théorie fournit les valeurs de ces divers coefficients. Prenons pour exemple les équations du second système; comme les paramètres différentiels du premier ordre, H , H_2 , ainsi que l'angle ϕ_1 sont des fonctions données de ρ , ρ_2 , il suffit de trouver les expressions de ces coefficients en fonction de H , H_2 et de ϕ_1 . Or si l'on a recours aux formules (18)'' et (19)', 1.^{ère} partie, la formule (33) du présent mémoire devient

$$-\frac{HH_2 \sin \phi_1}{K'_n} = \frac{d_0}{d\rho} \left\{ \frac{d_0 H_2}{H \sin \phi_1 d\rho} - \frac{d_2(H \cos \phi_1)}{H \sin \phi_1 d\rho_2} \right\} + \frac{d_2}{d\rho_2} \left\{ \frac{d_2 H}{H_2 \sin \phi_1 d\rho_2} - \cotg \phi_1 \frac{dH_2}{H_2 d\rho} \right\}; \quad (33)'$$

et il faudra porter cette valeur de $\frac{1}{K'_n}$ dans l'équation (28).

On trouvera au moyen des mêmes formules (18)'' et (19)', 1.^{ère} partie, que les coefficients de la première des équations (36) de notre mémoire sont exprimés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2^{(2)}} + \frac{2}{l_{20}^{(2)}} + \frac{1}{l_{02}^{(2)}} &= \frac{1}{H_2} \frac{d}{d\rho_2} \left(\text{Log} \frac{\sin \phi_1}{H^2} \right) + \frac{\cos \phi_1}{H} \frac{d}{d\rho} \left(\text{Log} H_2^2 \right), \\ \frac{1}{l_{02}^{(2)}} - \frac{2}{l_{20}^{(2)}} &= \frac{1}{HH_2 \sin^2 \phi_1} \left(\frac{dH_2}{d\rho} + \cos \phi \frac{dH}{d\rho_2} \right), \\ \frac{1}{r_2^{(2)}} + \frac{d_2 \phi_1}{H_2 \sin \phi_1 d\rho_2} &= \frac{-1}{HH_2 \sin^2 \phi_1} \left(\frac{dH_2}{d\rho} - \cos \phi \frac{dH}{d\rho_2} \right); \end{aligned}$$

les coefficients de la deuxième des équations (36) se déduiront des précédents par la permutation des indices 0, 2.

Un raisonnement analogue prouverait que les équations des autres systèmes ont leurs coefficients et les termes indépendants des inconnues déterminés en fonction des données H , H_2 , ϕ_1 . On peut donc regarder comme résolue la partie du problème qui consiste à établir les équations fondamentales des surfaces applicables sur une surface donnée. L'intégration de ces équations fera connaître les inconnues de chaque système en fonction des variables ρ , ρ_2 . Cette intégration présente de grandes difficultés, si elle n'est pas impossible. Mais au point de vue théorique on peut supposer qu'elle est effectuée, a fin de voir de quelle manière peut être poursuivie la solution du problème.

38.° *Équations secondaires du problème.* Les équations secondaires sont celles qui appartiennent aux types (23) et (24) de notre 1^{ère} partie et qui sont au nombre de six, quand on ne considère que celles qui renferment les cosinus X, X_1, X_2 des angles que les lignes $d\sigma, d\sigma_2$ et la normale à la surface ρ_1 font avec l'axe des x . Ce sont celles qui dans ces types donnent les expressions des dérivées $\frac{dX_2}{d\rho}, \frac{dX}{d\rho_2}; \frac{dX_2}{d\rho_2}, \frac{dX}{d\rho}; \frac{dX_1}{d\rho}, \frac{dX_1}{d\rho_2}$ en fonction linéaire de X, X_1, X_2 ; les quatre premières sont analogues à celles que nous avons déjà écrites au n.° 2 de notre 2^{ème} partie, les deux autres sont:

$$\frac{dX_1}{d\rho} = \frac{d\sigma}{d\rho} \left(\frac{X}{l_{10}^{(0)}} + \frac{X_2}{l_{10}^{(2)}} \right), \quad \frac{dX_1}{d\rho_2} = \frac{d\sigma_2}{d\rho_2} \left(\frac{X}{l_{12}^{(0)}} + \frac{X_2}{l_{12}^{(2)}} \right);$$

elles ne contiennent pas le terme en X_1 , par ce que dans le cas où la surface ρ_1 coupe orthogonalement les deux autres, les composantes $\frac{1}{l_{10}^{(1)}}, \frac{1}{l_{12}^{(1)}}$ sont nulles, suivant une remarque déjà faite. Trois de ces six équations suffisent pour déterminer les inconnues X, X_1, X_2 lorsqu'on y a remplacé les courbures par leurs valeurs en fonction de ρ et de ρ_1 déterminées par le calcul précédent; or, ces courbures sont au nombre de trois: $\frac{1}{l_{02}^{(1)}}, \frac{1}{r^{(1)}}, \frac{1}{r_2^{(1)}}$, parceque celles qui entrent dans les valeurs de $\frac{dX_1}{d\rho}, \frac{dX_1}{d\rho_2}$, sont exprimées en fonction linéaire des trois précédentes au moyen des équations (26) du présent mémoire. L'intégration de ces trois équations fera donc connaître les trois inconnues X, X_1, X_2 en fonction de ρ et de ρ_2 ; on trouvera de la même manière les autres cosinus $Y, Y_1, Y_2; Z, Z_1, Z_2$ en fonction des mêmes variables.

Il restera à intégrer un troisième système d'équations pour trouver les valeurs de x, y, z en fonction des variables ρ, ρ_2 ; or, si l'on remarque que l'on a :

$$\frac{d_0 x}{d\sigma} = X, \quad \frac{d_2 x}{d\sigma_2} = X_2; \quad \frac{d_0 y}{d\sigma} = Y, \quad \frac{d_2 y}{d\sigma_2} = Y_2; \quad \frac{d_0 z}{d\sigma} = Z, \quad \frac{d_2 z}{d\sigma_2} = Z_2;$$

comme les seconds membres de ces équations sont des fonctions des variables ρ, ρ_2 , fonctions déterminées par le calcul précédent, l'intégration de ces équations en x, y, z fera connaître ces trois inconnues en fonction des variables ρ, ρ_2 ; on aura donc les trois équations de la surface ou plutôt des surfaces qui sont applicables sur la surface donnée; ce qui est la solution complète du problème proposé. Nous dirons que l'on aura les équations de

toutes les surfaces applicables sur celle qui est donnée; car les valeurs de x, y, z renferment des fonctions arbitraires des variables ρ et ρ_2 , fonctions provenant de l'intégration des équations aux différences partielles; or, c'est en donnant à ces fonctions arbitraires toutes les formes possibles que l'on aura les équations de toutes les surfaces qui pourront s'appliquer sur la proposée.

Ce que nous venons de dire pour le second système d'équations fondamentales, s'applique sans restriction à l'un des deux autres systèmes, à cause des équations (26) ou des équations (37) du présent Mémoire. Il est inutile d'ajouter que de nombreuses vérifications se présenteront dans le calcul, à cause des relations qui existent, soit entre les inconnues fondamentales, soit entre les inconnues secondaires.

Marseille, 1 septembre 1868.

dont il s'agit, elle devient

$$\left\{ \frac{1}{(1+nx_1)\varphi'(x_1)} + \frac{1}{(1+nx_2)\varphi'(x_2)} + \dots + \frac{1}{(1+nx_m)\varphi'(x_m)} \right\} dt$$

ou bien

$$\frac{\pm n^{m-1} dt}{(1+nx_1)(1+nx_2)\dots(1+nx_m)}. \quad (2)$$

Maintenant soit ξ une racine quelconque de l'équation $f(x) = 0$ et rappelons que la méthode de JACOBI donne pour une intégrale du système (1)

$$(\xi - x_1)(\xi - x_2)\dots(\xi - x_m) = (At + B)^2;$$

on détermine A, B en différentiant cette équation par rapport à t et en nous souvenant que, pour une valeur donnée de x_1 , on sait les valeurs correspondantes de x_2, x_3, \dots, x_m . En prenant m racines quelconques de l'équation $f(x) = 0$ on obtient ainsi m équations lineaires en

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_m + \dots, \quad x_1 x_2 x_3 + \dots,$$

qui serviront à déterminer ces quantités. On voit facilement qu'elles sont toutes des fonctions quadratiques de t , en sorte que l'expression (2) prend la forme $\frac{dt}{p+qt+rt^2}$; ce qu'il fallait démontrer.

Si $\frac{1}{n}$ est une racine de l'équation $f(x) = 0$, alors cette dernière différentielle est la différentielle d'une fonction algébrique de t , parce que la quantité $p+qt+rt^2$ devient, en vertu de l'intégrale de JACOBI, un carré parfait.

On voit aussi qu'une fonction symétrique des quantités x_1, x_2, \dots, x_m , rationnelle et entière, est une fonction rationnelle et entière de t ; en sorte qu'en désignant par s un entier plus grand que $m-2$, on déduit que l'expression

$$\int \frac{x_1^s dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \int \frac{x_2^s dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \dots + \int \frac{x_m^s dx_m}{\sqrt{f(x_m)}}$$

est une fonction rationnelle et entière de t . Par exemple, si $s = m$, en ayant égard à la relation

$$\frac{x_1^m}{\varphi'(x_1)} + \frac{x_2^m}{\varphi'(x_2)} + \dots + \frac{x_m^m}{\varphi'(x_m)} = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

on trouve

$$\int \frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \int \frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \dots + \int \frac{x_m^m dx_m}{\sqrt{f(x_m)}} = \int (x_1 + x_2 + \dots + x_m) dt.$$

Nous allons maintenant faire application de ce qui précède aux fonctions abéliennes, quand on suppose que $m=3$ et que $f(x)$ a la forme suivante

$$x(1-x)(1-\kappa^2 x)(1-\kappa'^2 x)(1-\kappa''^2 x).$$

Les quantités $\kappa^2, \kappa'^2, \kappa''^2$ sont inégales et sont plus grandes que zéro et inférieures à l'unité. Posons $x = \sin^2 \theta$, et pour abrégier nous emploierons dans la suite les notations suivantes

$$\sqrt{(1-\kappa^2 \sin^2 \theta)(1-\kappa'^2 \sin^2 \theta)(1-\kappa''^2 \sin^2 \theta)} = \Delta(\kappa, \kappa', \kappa'', \theta) \text{ ou simplement } \Delta(\theta)$$

$$\int \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} = L(\kappa, \kappa', \kappa'', \theta) \text{ ou simplement } L(\theta)$$

$$\int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\Delta(\theta)} = M(\kappa, \kappa', \kappa'', \theta) \text{ ou simplement } M(\theta)$$

$$\int \frac{\sin^4 \theta d\theta}{\Delta(\theta)} = N(\theta), \quad \int \frac{\sin^6 \theta d\theta}{\Delta(\theta)} = Q(\theta), \quad \int \frac{1}{1+n \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} = P(n, \theta).$$

Nous allons maintenant chercher la valeur (circulaire ou logarithmique) de

$$P(n, \phi) + P(n, \psi) + P(n, \chi) - P(n, \sigma) - P(n, \tau)$$

en supposant que les relations suivantes subsistent

$$\left. \begin{aligned} L(\phi) + L(\psi) + L(\chi) - L(\sigma) - L(\tau) &= 0 \\ M(\phi) + M(\psi) + M(\chi) - M(\sigma) - M(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Pour cela nous poserons d'abord

$$\sin^2 \phi + \sin^2 \psi + \sin^2 \chi = g, \quad \sin^2 \phi \sin^2 \psi + \sin^2 \phi \sin^2 \chi + \sin^2 \psi \sin^2 \chi = h, \quad \sin \phi \sin \psi \sin \chi \sin \sigma \sin \tau = t$$

$$\sqrt{(1-\kappa^2 \sin^2 \sigma)(1-\kappa^2 \sin^2 \tau)} = A$$

$$\frac{\sin \sigma \cos \tau \sqrt{(1-\kappa^2 \sin^2 \sigma)(1-\kappa'^2 \sin^2 \tau)(1-\kappa''^2 \sin^2 \tau)} - \sin \tau \cos \sigma \sqrt{(1-\kappa^2 \sin^2 \tau)(1-\kappa'^2 \sin^2 \sigma)(1-\kappa''^2 \sin^2 \sigma)}}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau} = B$$

$$\frac{\sin \sigma \cos \sigma \Delta(\tau) - \sin \tau \cos \tau \Delta(\sigma)}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau} = \nabla(\sigma, \tau)$$

et en nous rappelant les résultats de mon Mémoire inséré dans ce Journal, tome 2^{ème}, page 13, nous tirons pour la détermination des quantités g, h en fonction de t les équations suivantes

$$\kappa^2 g - \kappa^4 h = 1 - A^2 - \frac{2\kappa^2 ABt}{\sin \sigma \sin \tau} - \frac{\kappa^4 t^2 (B^2 + \kappa^2)}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau}$$

(*loco citato*, pag. 18),

$$g - h = 1 - \cos^2 \sigma \cos^2 \tau - \frac{2t \cos \sigma \cos \tau}{\sin \sigma \sin \tau} \nabla(\sigma, \tau) - \frac{t^2}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \left(1 + \overline{\nabla(\sigma, \tau)}^2 \right)$$

(*loco citato*, équation 10),

d'où l'on trouve

$$g = \sin^2 \sigma + \sin^2 \tau - \frac{2t}{\sin \sigma \sin \tau} \left\{ \frac{\sin \sigma \cos \tau \Delta(\tau) - \sin \tau \cos \sigma \Delta(\sigma)}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau} \right\} + \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 t^2,$$

$$h = \sin^2 \sigma \sin^2 \tau - \frac{2t}{\sin \sigma \sin \tau} \left\{ \frac{\sin^3 \sigma \cos \tau \Delta(\tau) - \sin^3 \tau \cos \sigma \Delta(\sigma)}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau} \right\} \\ + \frac{t^2}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \left\{ 1 + \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \tau + \overline{\nabla(\sigma, \tau)}^2 \right\}$$

ou, en posant

$$\nabla'(\sigma, \tau) = \frac{\sin \sigma \cos \tau \Delta(\tau) - \sin \tau \cos \sigma \Delta(\sigma)}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau},$$

$$g = \sin^2 \sigma + \sin^2 \tau - \frac{2t}{\sin \sigma \sin \tau} \nabla'(\sigma, \tau) + \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 t^2$$

$$h = \sin \sigma \sin \tau - \frac{2t}{\sin \sigma \sin \tau} \left\{ \nabla'(\sigma, \tau) - \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \right\} \\ + \frac{t^2}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \left\{ 1 + \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \tau + \overline{\nabla(\sigma, \tau)}^2 \right\}.$$

Il résulte de ces valeurs l'équation suivante

$$(1 + n \sin^2 \phi) (1 + n \sin^2 \psi) (1 + n \sin^2 \chi) = \\ (1 + n \sin^2 \sigma) (1 + n \sin^2 \tau) - \frac{2nt}{\sin \sigma \sin \tau} \left\{ (1 + n) \nabla'(\sigma, \tau) - n \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \right\} \\ + nt^2 \left\{ (1 + n) \left(\kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 + \frac{n}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \right) + \frac{n}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \overline{\nabla(\sigma, \tau)}^2 \right\}$$

Annali di Matematica, tomo III.

et si nous mettons

$$\alpha = (1 + n \sin^2 \sigma)(1 + n \sin^2 \tau), \quad b = -\frac{n}{\sin \sigma \sin \tau} \left\{ (1+n) \nabla'(\sigma, \tau) - n \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \right\},$$

$$c = n \left\{ (1+n) \left(\kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 + \frac{n}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \right) + \frac{n}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \overline{\nabla(\sigma, \tau)^2} \right\},$$

$$ac - b^2 = \alpha,$$

nous déduisons

$$P(n, \phi) + P(n, \psi) + P(n, \chi) - P(n, \sigma) - P(n, \tau) = \frac{n^2}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{t\sqrt{\alpha}}{a+bt}. \quad (4)$$

En tirant de valeurs des a, b, c que nous venons de trouver la valeur de α , nous avons

$$\alpha = n(n+1)(n+\kappa^2)(n+\kappa'^2)(n+\kappa''^2),$$

résultat indépendant de σ et τ et qu'on pouvait facilement prévoir.

Il résulte de l'équation (4) que, si nous écrivons ϕ pour σ , ψ pour τ et *vice-versa*, et si nous changeons le signe de χ , la quantité $\frac{t}{a+bt}$ subit un changement de signe: on voit que ces procédés n'influent sur la valeur de $a+bt$ qui reste inaltéré; ce qui donne

$$(1+n \sin^2 \sigma)(1+n \sin^2 \tau) - n \sin \phi \sin \psi \sin \chi \left\{ (1+n) \nabla'(\sigma, \tau) - n \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \right\}$$

$$= (1+n \sin^2 \phi)(1+n \sin^2 \psi) + n \sin \sigma \sin \tau \sin \chi \left\{ (1+n) \nabla'(\phi, \psi) - n \cos \phi \cos \psi \nabla(\phi, \psi) \right\}$$

d'où, en rappelant les équations

$$\left. \begin{aligned} \cos \sigma \cos \tau &= \cos \phi \cos \psi \cos \chi - \sin \phi \sin \psi \sin \chi \nabla(\sigma, \tau) \\ \cos \phi \cos \psi &= \cos \sigma \cos \tau \cos \chi + \sin \sigma \sin \tau \sin \chi \nabla(\phi, \psi) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(*loco citato*, pag. 20) nous tirons

$$\sin^2 \phi + \sin^2 \psi + \sin \sigma \sin \tau \sin \chi \nabla'(\phi, \psi) = \sin^2 \sigma + \sin^2 \tau - \sin \phi \sin \psi \nabla'(\sigma, \tau)$$

ce qui donne

$$\sin \chi = \frac{\sin^2 \sigma + \sin^2 \tau - \sin^2 \phi - \sin^2 \psi}{\sin \sigma \sin \tau \nabla'(\phi, \psi) + \sin \phi \sin \psi \nabla'(\sigma, \tau)}. \quad (6)$$

On trouve

$$[\nabla'(\sigma, \tau)]^2 - [\nabla(\sigma, \tau)]^2 = 1 - (\kappa^2 \kappa'^2 + \kappa^2 \kappa''^2 + \kappa'^2 \kappa''^2) \sin^2 \sigma \sin^2 \tau + \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \tau (\sin^2 \sigma + \sin^2 \tau),$$

et on a aussi

$$\sin^2 \sigma \sin^2 \tau [\nabla(\phi, \psi)]^2 - \sin^2 \phi \sin^2 \tau [\nabla(\sigma, \tau)]^2 = \cos^2 \phi \cos^2 \psi - \cos^2 \sigma \cos^2 \tau$$

(*loco citato*, pag. 20), d'où l'on trouve

$$\begin{aligned} & \sin^2 \sigma \sin^2 \tau [\nabla'(\phi, \psi)]^2 - \sin^2 \phi \sin^2 \psi [\nabla'(\sigma, \tau)]^2 = \\ & (\sin^2 \sigma + \sin^2 \tau - \sin^2 \phi - \sin^2 \psi) (1 - \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi \sin^2 \sigma \sin^2 \tau) \end{aligned}$$

ce qui donne en vertu de l'équation (6)

$$\sin \chi = \frac{\sin \sigma \sin \tau \nabla'(\phi, \psi) - \sin \phi \sin \psi \nabla'(\sigma, \tau)}{1 - \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi \sin^2 \sigma \sin^2 \tau}.$$

Les équations (5) conduisent aussi aux suivantes

$$\begin{aligned} \sin \chi &= \frac{\sin \sigma \sin \tau \cos \phi \cos \psi \nabla(\phi, \psi) - \sin \phi \sin \psi \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau)}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau [\nabla(\phi, \psi)]^2 + \cos^2 \sigma \cos^2 \tau} \\ \cos \chi &= \frac{\cos \phi \cos \psi \cos \sigma \cos \tau + \sin \phi \sin \psi \sin \sigma \sin \tau \nabla(\phi, \psi) \nabla(\sigma, \tau)}{\sin^2 \sigma \sin^2 \tau [\nabla(\phi, \psi)]^2 + \cos^2 \sigma \cos^2 \tau} \end{aligned}$$

Si $n = -1$, l'équation (4) donne

$$\begin{aligned} P(-1, \phi) + P(-1, \psi) + P(-1, \chi) - P(-1, \sigma) - P(-1, \tau) = \\ \frac{\sin \phi \sin \psi \sin \chi \sin \sigma \sin \tau}{\cos \sigma \cos \tau [\cos \sigma \cos \tau + \sin \phi \sin \psi \sin \chi \nabla(\sigma, \tau)]}, \end{aligned}$$

et le second membre de cette dernière devient en vertu de (5)

$$\tan \phi \tan \psi \tan \chi \tan \sigma \tan \tau.$$

Si $n = -\kappa^2$, l'équation (4) donne

$$\begin{aligned} P(-\kappa^2, \phi) + P(-\kappa^2, \psi) + P(-\kappa^2, \chi) - P(-\kappa^2, \sigma) - P(-\kappa^2, \tau) = \\ \frac{\kappa^4 \sin \phi \sin \psi \sin \chi \sin \sigma \sin \tau}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau) + \kappa^2 \sin \phi \sin \psi \sin \chi \{ (1 - \kappa^2) \nabla'(\sigma, \tau) + \kappa^2 \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) \}} \end{aligned}$$

Or, on trouve

$$(1 - \kappa^2) \nabla'(\sigma, \tau) + \kappa^2 \cos \sigma \cos \tau \nabla(\sigma, \tau) = \\ \frac{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau)} \left\{ \frac{\sin \sigma \cos \tau \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa'^2 \sin^2 \tau)(1 - \kappa''^2 \sin^2 \tau)} - \sin \tau \cos \sigma \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau)(1 - \kappa'^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa''^2 \sin^2 \sigma)}}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau} \right\}}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau)}}$$

Mais nous avons (*loco citato*, pag. 18)

$$\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)(1 - \kappa^2 \sin^2 \chi)} - \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau)} = \\ \kappa^2 \sin \phi \sin \psi \sin \chi \left\{ \frac{\sin \sigma \cos \tau \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa'^2 \sin^2 \tau)(1 - \kappa''^2 \sin^2 \tau)} - \sin \tau \cos \sigma \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau)(1 - \kappa'^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa''^2 \sin^2 \sigma)}}{\sin^2 \sigma - \sin^2 \tau} \right\}$$

en sorte qu'on trouve finalement

$$P(-\kappa^2, \phi) + P(-\kappa^2, \psi) + P(-\kappa^2, \chi) - P(-\kappa^2, \sigma) - P(-\kappa^2, \tau) = \\ \frac{\kappa^4 \sin \phi \sin \psi \sin \chi \sin \sigma \sin \tau}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)(1 - \kappa^2 \sin^2 \chi)(1 - \kappa^2 \sin^2 \sigma)(1 - \kappa^2 \sin^2 \tau)}}.$$

Nous allons maintenant faire voir que l'intégrale $\int \frac{\sin^{2m} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}$ (où m est un entier) dépend des fonctions $L(\theta)$, $M(\theta)$, $N(\theta)$, $Q(\theta)$. En différentiant l'expression $\sin^{2m-1} \theta \cos \theta \Delta(\theta)$ et en posant

$$F = \kappa^2 + \kappa'^2 + \kappa''^2, \quad G = \kappa^2 \kappa'^2 + \kappa^2 \kappa''^2 + \kappa'^2 \kappa''^2, \quad H = \kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2$$

on trouve

$$\frac{d}{d\theta} \sin^{2m-1} \theta \cos \theta \Delta(\theta) = \\ \frac{\sin^{2m-2} \theta}{\Delta(\theta)} \left\{ 2m-1 - (2m+1)F \sin^2 \theta + (2m+1)(F+G) \sin^4 \theta - (2m+2)(G+H) \sin^6 \theta \right. \\ \left. + (2m+3)H \sin^8 \theta \right\}$$

en sorte que l'intégration de $\frac{\sin^{2m} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}$ peut être ramenée à celle de

$$\frac{\sin^{2m-2} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}, \quad \frac{\sin^{2m-4} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}, \quad \frac{\sin^{2m-6} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}, \quad \frac{\sin^{2m-8} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}, \dots$$

d'où par des réductions successives $\int \frac{\sin^{2m} \theta d\theta}{\Delta(\theta)}$ pourra toujours se ramener à dépendre des fonctions $L(\theta)$, $M(\theta)$, $N(\theta)$, $Q(\theta)$.

En supposant que le système (3) a lieu, on trouve

$$Q(\phi) + Q(\psi) + Q(\chi) - Q(\sigma) - Q(\tau) = \int (\sin^2 \phi + \sin^2 \psi + \sin^2 \chi) dt$$

et, en vertu de l'expression que nous avons déjà trouvée pour $\sin^2 \phi + \sin^2 \psi + \sin^2 \chi$ le second membre de cette dernière a pour valeur

$$(\sin^2 \sigma + \sin^2 \tau) t - \frac{t^2}{\sin \sigma \sin \tau} \nabla'(\sigma, \tau) + \frac{\kappa^2 \kappa'^2 \kappa''^2}{3} t^3.$$

En posant

$$N'(\theta) = \int \frac{\tan^2 \theta \sin^2 \theta d\theta}{\Delta(\theta)}$$

on tire

$$P(-1, \theta) = L(\theta) + M(\theta) + N'(\theta); \tag{7}$$

mais en différentiant $\tan \theta \Delta(\theta)$ on trouve

$$\frac{d}{d\theta} \tan \theta \Delta(\theta) = \frac{1 - F \sin^2 \theta + G \sin^4 \theta - H \sin^6 \theta}{\cos^2 \theta \Delta(\theta)} - \frac{\sin^2 \theta}{\Delta(\theta)} \left\{ F - 2G \sin^2 \theta + 3H \sin^4 \theta \right\}$$

ce qui donne, en intégrant

$$P(-1, \theta) = \tan \theta \Delta(\theta) + 2FM(\theta) - (2G + H)N(\theta) + (F - G + H)N'(\theta) + 3HQ(\theta)$$

d'où, en éliminant $N'(\theta)$ entre cette dernière et l'équation (7), nous trouvons

$$(1 - \kappa^2)(1 - \kappa'^2)(1 - \kappa''^2)P(-1, \theta) = (F - G - H)M(\theta) - (F + G + H)L(\theta) + (2G + H)N(\theta) + 3HQ(\theta) + \tan \theta \Delta(\theta).$$

Nous trouvons aussi

$$\frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2} P(-\kappa^2, \theta) + \frac{1 - \kappa'^2}{\kappa'^2} P(-\kappa'^2, \theta) + \frac{1 - \kappa''^2}{\kappa''^2} P(-\kappa''^2, \theta) = \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa'^2} + \frac{1}{\kappa''^2} - 2 \right) L(\theta) + M(\theta) - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Delta(\theta)}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin \sigma \cos \sigma}{\Delta(\sigma)} + \frac{\sin \tau \cos \tau}{\Delta(\tau)} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{\Delta(\phi)} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\Delta(\psi)} - \frac{\sin \chi \cos \chi}{\Delta(\chi)} =$$

$$= \sin \phi \sin \psi \sin \chi \sin \sigma \sin \tau \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2 \sin^2 \phi)(1-x^2 \sin^2 \psi)(1-x^2 \sin^2 \chi)(1-x^2 \sin^2 \sigma)(1-x^2 \sin^2 \tau)}} \\ + \frac{x'^2(1-x'^2)}{\sqrt{(1-x'^2 \sin^2 \phi)(1-x'^2 \sin^2 \psi)(1-x'^2 \sin^2 \chi)(1-x'^2 \sin^2 \sigma)(1-x'^2 \sin^2 \tau)}} \\ + \frac{x''^2(1-x''^2)}{\sqrt{(1-x''^2 \sin^2 \phi)(1-x''^2 \sin^2 \psi)(1-x''^2 \sin^2 \chi)(1-x''^2 \sin^2 \sigma)(1-x''^2 \sin^2 \tau)}} \end{array} \right.$$

Nous avons vu que les équations transcendentes du système (3) peuvent être remplacées par les équations algébriques

$$\frac{\sin \psi \sin \chi \cos \phi \Delta(\phi)}{(\sin^2 \phi - \sin^2 \psi)(\sin^2 \phi - \sin^2 \chi)} + \frac{\sin \phi \sin \chi \cos \psi \Delta(\psi)}{(\sin^2 \psi - \sin^2 \phi)(\sin^2 \psi - \sin^2 \chi)} + \frac{\sin \phi \sin \psi \cos \chi \Delta(\chi)}{(\sin^2 \chi - \sin^2 \phi)(\sin^2 \chi - \sin^2 \psi)} = \frac{1}{\sin \sigma \sin \tau},$$

$$\cos \sigma \cos \tau = \cos \phi \cos \psi \cos \chi - \sin \phi \sin \psi \sin \chi \nabla(\sigma, \tau)$$

(*loco citato*, pag. 16, §7).

Maintenant si nous posons

$\sin \chi = i \tan \omega$, $i = \sqrt{-1}$, $1 - x^2 = k^2$, $1 - x'^2 = k'^2$, $1 - x''^2 = k''^2$; $L(x, x', x'', \chi)$ sera transformé dans $i[L(k, k', k'', \omega) - M(k, k', k'', \omega)]$, $M(x, x', x'', \chi)$ sera aussi transformé dans $-iM(k, k', k'', \omega)$ par les mêmes substitutions, en sorte que le système des équations transcendentes

$$\begin{aligned} L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + i[L(k, k', k'', \omega) - M(k, k', k'', \omega)] \\ - L(x, x', x'', \sigma) - L(x, x', x'', \tau) = 0 \\ M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) - iM(k, k', k'', \omega) - M(x, x', x'', \sigma) \\ - M(x, x', x'', \tau) = 0 \end{aligned}$$

équivalent au système algébrique

$$\begin{aligned} \frac{i \tan \omega \sin \psi \cos \phi \Delta(x, x', x'', \phi)}{(\sin^2 \phi - \sin^2 \psi)(\sin^2 \phi + \tan^2 \omega)} + \frac{i \tan \omega \sin \phi \cos \psi \Delta(x, x', x'', \psi)}{(\sin^2 \psi - \sin^2 \phi)(\sin^2 \psi + \tan^2 \omega)} \\ + \frac{\sin \phi \sin \psi \Delta(k, k', k'', \omega)}{(\sin^2 \omega + \cos^2 \omega \sin^2 \phi)(\sin^2 \omega + \cos^2 \omega \sin^2 \psi)} = \frac{1}{\sin \sigma \sin \tau}, \\ \cos \sigma \cos \tau = \cos \phi \cos \psi \sec \omega - i \sin \phi \sin \psi \tan \omega \nabla(\sigma, \tau), \end{aligned}$$

d'où nous tirons, en posant $\omega = \frac{\pi}{2}$ et en mettant

$$L\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) - M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) = \Theta, \quad M\left(k, k', k'', \frac{\pi}{2}\right) = \Theta'$$

que le système

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + i\Theta - L(x, x', x'', \sigma) - L(x, x', x'', \tau) = 0$$

$$M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) - i\Theta' - M(x, x', x'', \sigma) - M(x, x', x'', \tau) = 0$$

peut être remplacé par les équations

$$xx'x'' \sin \phi \sin \psi \sin \sigma \sin \tau = 1, \quad \cot \phi \cot \psi = i \nabla(\sigma, \tau).$$

Soient les quantités $\sigma, \tau, \sigma', \tau'$ liées par les équations

$$L(x, x', x'', \sigma) + L(x, x', x'', \tau) + i\Theta - L(x, x', x'', \sigma') - L(x, x', x'', \tau') = 0$$

$$M(x, x', x'', \sigma) + M(x, x', x'', \tau) - i\Theta' - M(x, x', x'', \sigma') - M(x, x', x'', \tau') = 0,$$

et, en ayant égard aux équations que nous venons de trouver, nous tirons

$$xx'x'' \sin \sigma \sin \tau \sin \sigma' \sin \tau' = 1, \quad \cot \sigma \cot \tau = i \nabla(\sigma', \tau'),$$

d'où les équations simultanées

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) + 2i\Theta - L(x, x', x'', \sigma') - L(x, x', x'', \tau') = 0$$

$$M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) - 2i\Theta' - M(x, x', x'', \sigma') - M(x, x', x'', \tau') = 0$$

conduisent aux suivantes

$$\sin \phi \sin \psi = \sin \sigma' \sin \tau', \quad \cos \phi \cos \psi = -\cos \sigma' \cos \tau'$$

qui donnent aussi

$$\nabla(\phi, \psi) = -\nabla(\sigma', \tau').$$

Si nous mettons

$$L(x, x', x'', \phi) + L(x, x', x'', \psi) = u, \quad M(x, x', x'', \phi) + M(x, x', x'', \psi) = v,$$

$$\sin \phi \sin \psi = f(u, v),$$

on trouve

$$f(u, v) = f(u + 2i\Theta, \quad v - 2i\Theta')$$

et si nous posons

$$L\left(x, x', x'', \frac{\pi}{2}\right) = \Phi, \quad M\left(x, x', x'', \frac{\pi}{2}\right) = \Phi',$$

on tire facilement

$$f(u, v) = f(u + 2mi\Theta + 4m'\Phi, v - 2mi\Theta' + 4m'\Phi')$$

m, m' étant des nombres entiers.

Les équations analogues ont lieu pour les fonctions $\cos\phi \cos\psi, \nabla(\phi, \psi)$.

Collège de la Trinité à Dublin, le 7 janvier 1869.

ERRATUM POUR LE TOME 2^e DE CE JOURNAL

page 231 ligne 5: au lieu de l'expression pour $\Phi(8, 12)$ lisez:

$$\alpha_0^2(\theta HK + \phi IL + \psi I^3 + \chi J^3) + \lambda \alpha_0 H I J + \sigma H^2 L + \tau H^2 I^2.$$

Sur l'expression du module des transcendentes elliptiques, en fonction du quotient des deux périodes.

(par M.^r HERMITE à Paris.)

On sait qu'en posant :

$$\omega = \frac{iK'}{K},$$

on a pour le module $k^2 = f(\omega)$ cette expression

$$f(\omega) = \left[\frac{2e^{\frac{i\pi\omega}{4}} + 2e^{\frac{9i\pi\omega}{4}} + 2e^{\frac{25i\pi\omega}{4}} + \dots}{1 + 2e^{i\pi\omega} + 2e^{4i\pi\omega} + 2e^{9i\pi\omega} + \dots} \right]^4$$

où la variable ω entre sous forme transcendante, et j'ai observé ailleurs qu'en appliquant la formule de MACLAURIN à la quantité $f(i+\omega)$ pour obtenir un développement algébrique par rapport à ω , les coefficients au lieu d'être rationnels, comme dans les diverses séries élémentaires $\sin \omega$, $\cos \omega$, $\log(1+\omega)$, contiendront la transcendante numérique :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$$

M'étant proposé de calculer les premiers termes, j'ai été conduit à un autre développement également algébrique, mais où les coefficients sont purement rationnels, comme on va voir.

Partant des formules données par JACOBI dans les *Fundamenta* § 29 et où l'on fait :

$$q = 1 - 2k^2, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}},$$

savoir :

$$\begin{aligned}
 K' &= J \left(1 + \frac{q^2}{2 \cdot 4} + \frac{5^2 \cdot q^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5^2 \cdot 9^2 \cdot q^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots \right) \\
 &\quad + \frac{\pi}{2J} \left(\frac{q}{2} + \frac{3^2 \cdot q^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot q^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots \right), \\
 K &= J \left(1 + \frac{q^2}{2 \cdot 4} + \frac{5^2 \cdot q^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5^2 \cdot 9^2 \cdot q^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots \right) \\
 &\quad - \frac{\pi}{2J} \left(\frac{q}{2} + \frac{3^2 \cdot q^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot q^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

j'en déduis :

$$\frac{\frac{q}{2} + \frac{3^2 \cdot q^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot q^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots}{1 + \frac{q^2}{2 \cdot 4} + \frac{5^2 \cdot q^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5^2 \cdot 9^2 \cdot q^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \dots} = \frac{2J^2 K' - K}{\pi K' + K} = \frac{2J^2 \omega - i}{\pi \omega + i},$$

et le retour des suites donnant la valeur de q , on trouvera cette expression où les coefficients sont tous rationnels, savoir :

$$k^2 = \frac{1}{2} - \left[\frac{2J^2 \omega - i}{\pi \omega + i} \right] + \left[\frac{2J^2 \omega - i}{\pi \omega + i} \right]^3 - \frac{13}{15} \left[\frac{2J^2 \omega - i}{\pi \omega + i} \right]^5 + \frac{3}{5} \left[\frac{2J^2 \omega - i}{\pi \omega + i} \right]^7 - \dots$$

Faisant pour un instant :

$$\frac{2J^2 \omega - i}{\pi \omega + i} = \zeta$$

on aura donc :

$$f\left(i \frac{2J^2 + \pi \zeta}{2J^2 - \pi \zeta}\right) = \frac{1}{2} - \zeta + \zeta^3 - \frac{13}{15} \zeta^5 + \frac{3}{5} \zeta^7 - \dots$$

et la série en ζ du second membre aura cette propriété, qu'en y changeant ζ en $\frac{a+bi}{a-bi} \zeta$, où a et b sont entiers, la nouvelle série ainsi obtenue sera liée à la première par une équation algébrique, cette relation entre les deux séries étant l'équation modulaire pour la transformation dont l'ordre est : $a^2 + b^2$. Cette remarque appliquée au cas le plus simple où l'on suppose $a=1$, $b=1$ donne pour conséquence, que le développement suivant les puissances de ζ de l'expression :

$$\frac{1 - 4k^2 k'^2}{1 + 4k^2 k'^2}$$

ne contient que les termes dont l'exposant est $\equiv 2 \pmod{4}$.

Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$

(par le même.)

En supposant le radical $\sqrt{1-x^2}$ pris avec le signe +, on prouve aisément qu'on a la valeur :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

le second membre ayant le même signe que a dont la valeur absolue doit être supérieure à l'unité. Mais ce résultat suppose a réel, et si l'on fait en général $a = A + B\sqrt{-1}$, le signe du radical $\sqrt{a^2-1}$ se détermine par la condition, qu'en posant :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} = a + b\sqrt{-1},$$

a et A aient le même signe, ou encore que b et B soient de signes contraires, l'une de ces conditions entraînant l'autre.

Sur la transcendante E_n .

(par le même.)

En posant avec CAUCHY :

$$E_n = \frac{E^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2n-1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n} \omega \cos[\varepsilon \cos \omega] d\omega,$$

l'intégrale définie qui figure dans cette expression étant la transcendante de BESSEL, on trouve, lorsque n est un grand nombre, la valeur limite que voici. Posons :

$$\varepsilon = n \sin \varphi,$$

on aura :

$$E_n = \frac{\left(e^{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \right)^n}{\sqrt{2n\pi \cos \varphi}}.$$

De æquilibrîi figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem.

(*Scriptis D.^r LUDOVICUS MATTHIESSEN, Husumensis.*)

Quibus legibus centrales siderearum nebularum annularium sine centrali corpore motiones adstrictae sint, longe difficilius est perspectu, quam theoria ellipsoidum et annulorum centrali corpore non destitutorum, quoniam, cum illarum superficies ignota sit, potentiale annuli in se ipsum nonnisi ex ipsius figura deduci potest. Ac de annulis quidem longius apertis, quorum in barycentro sphaeroidale corpus versatur, et quorum massa pro corpore centrali minima est, LAPLACE in libro, qui inscribitur *Mechanica coelestis*, lib. III, § 44, computavit sagaciter, quibus aequationibus annulorum et spatium revolutionis et applanatio inveniantur. De simplicibus vero sine corpore centrali annulis et de concentricis eorum annulorum systematibus, qui aequilibria fluida libere rotantia propriaeque attractioni subjecta efficiunt, disquisitiones analyticae a me publici juris factae sunt in *Ann. math. et phys.* (ed. SCHLOEMILCH, KAHL et CANTOR) X, pag. 59, Lipsiae (1865). Sed etiam problema figurae et rotationis liberi fluidi annuli quadam regula falsi approximative tum solvi potest, quum positio fit, annulum satis magnae esse aperturae; et si porro supponimus, sectionem transversalem esse ellipticam; praeterea applanationem ut functionem crassitudinis et velocitatis rotatilis ratiocinari atque ex inventis solutionibus, id quod gravissimum est, argumentari possis, crassitudinem annuli intra stabilitatis terminos semper esse pro diametro ejus minimam, quo theoremate analysis multo facilior evadit. Dummodo certam quandam basim per exactas calculationes occupaveris, inde illud problema accurate solvere poteris.

Itaque haec tria conabimur, benevole lector, problemata solvere: primum leges motionis centralis annuli liberi fluidi homogenei et qua ratione cum tertia illa Kepleriana lege conjunctae sint, investigabimus; deinde quibus relationibus excursio, applanatio, velocitas angularis, crassitudo cum energia (energiam dico summam momentorum quantitatis motionis) cohaereant et quemadmodum illae relationes cum expansione aut condensatione massae mutantur, exponemus graphiceque delineabimus.

Primum problema ita erit solvendum. Ut M sit centrum annuli, idem erit ejus barycentrum mathematicum, simulque centrum revolutionis. Ut porro m sit centrum sectionis normalis $APBP$, idem erit ejus barycentrum et unum ex pluribus punctis maximae pressionis hydrostaticae. Omnium autem punctorum m locus geometricus est linea vectrix annuli. Maximae pressionis locus, cum in ellipsoidicis aequilibrii figuris punctum sit, in figuris annularibus fit circulus. Primo, ut calculandi rationem simpliciore habeamus, sectionem normalem esse non ellipticam sed circulem cum semiaxe a ponamus, tum massae attractio alicujus ex annulo elementi duabus infinite propinquis sectionibus normalibus terminati, in distantia angulari $\phi = \pi - 2\mathcal{S}$, quod attinet ad barycentrum m , erit aequalis

$$\Delta R = -4\pi f \rho r (1 - \cos \delta) \cos \mathcal{S} \Delta \mathcal{S}$$

qua in formula f gravitatis constantem, ρ densitatem, 2δ visibilem diametrum attrahentis sectionis transversalis, \mathcal{S} ejus amplitudinem significant. In elliptica sectione transversali ejus annuli, quae parum a circulo differt, si a et b illius semiaxes sunt, efficietur:

$$\Delta R_1 = -4\pi f \rho r \left\{ 1 - \frac{\cos \delta}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \phi}{1 + \lambda^2 \sin^2 \phi} \sin^2 \delta}} \right\} \cos \mathcal{S} \Delta \mathcal{S}$$

cum vero δ et λ^2 in $\sqrt{1 + \lambda^2} = b : a$ quantitates sint minimae, illud in simpliciore aequationem mutare licet

$$\begin{aligned} \Delta R_1 &= -4\pi f \rho r \left\{ 1 - \cos \delta - \frac{\lambda^2}{4} \cos \delta \sin^2 \delta \right\} \cos \mathcal{S} \Delta \mathcal{S} \\ &= -4\pi f \rho r \frac{1 - \cos \delta}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \cos \mathcal{S} \Delta \mathcal{S} \end{aligned}$$

unde sequitur, universum annuli potentiale in exemplo supposito sectioni ejus transversali esse proportionalem. Quod idem, si applanatio satis magna

sit, evenire infra videbimus. In praesentia conditionem circularis sectionis transversalis retineamus. Tum est

$$2r \cos \mathcal{S} = a \cot \delta$$

et

$$\cos \delta = \cos \mathcal{S} : \sqrt{\frac{a^2}{4r^2} + \cos^2 \mathcal{S}}$$

in quibus aequationibus, ut supra r radium vectorem ejus curvae significat, qua punctum m fertur. Iamvero si aequatio differentialis integrari potest, quaesita motionis aequatio evadit haec:

$$R + \omega^2 r = 0$$

in qua ω velocitatem angularem annuli significat. Et si $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = V$ ponimus, efficitur rotationis momentum

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \mathcal{S} \left\{ 1 - \frac{\cos \mathcal{S}}{\sqrt{\frac{a^2}{4r^2} + \cos^2 \mathcal{S}}} \right\} \partial \mathcal{S}$$

ita ut V valor sit positivus, qui tum demum, id quod expectari poterat in zero transit, cum r fit aequalis ∞ . Aequationis integrale est hoc:

$$\begin{aligned} V &= 4 \left\{ 1 - \frac{e^2 - 1}{e} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - \frac{1}{e} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) \right\} \\ &= 4 - e\pi \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 e^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

ubi $e = r : \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2}}$ est. Cum vero $a^2 : r^2$ secundum positionem semper pro unitate minimum sit, series convergentior vel expressio concisior litterae V nobis quaerenda erit hac ratione, ut pro V variabilis δ introducatur in hunc modum

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \arccos \left\{ \frac{a}{2r} \cot \delta \right\} \\ \partial \mathcal{S} &= -\frac{a}{2r} \frac{\partial(\cot \delta)}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2} \cot^2 \delta}}. \end{aligned}$$

Quibus formulis substitutis motionis aequatio in integrale transit hoc :

$$V = -\frac{a^2}{r^2} \int_0^{\frac{2r}{a}} \frac{z \partial z}{\sqrt{1 - \frac{a^2 z^2}{4r^2}}} - \frac{a^2}{r^2} \int_0^{\frac{2r}{a}} \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{1+z^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 z^2}{4r^2}}}$$

in quo z in locum $\cot \delta$ substitutum est. Prima integralis pars est aequalis 4; secundam in seriem sequentem transformamus :

$$-\frac{a^2}{r^2} \int_0^{\frac{2r}{a}} \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{1+z^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 z^2}{4r^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{a^4 z^4}{16r^4} + \dots \right\}$$

Iam vero est

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{z}{2} \sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2} \lg(z + \sqrt{1+z^2}) \\ \int \frac{z^4 \partial z}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{z^3}{4} \sqrt{1+z^2} - \frac{3}{4} \left\{ \frac{z}{2} \sqrt{1+z^2} - \frac{1}{2} \lg(z + \sqrt{1+z^2}) \right\} \\ \int \frac{z^6 \partial z}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{z^5}{6} \sqrt{1+z^2} - \frac{5}{6} \int \frac{z^4 \partial z}{\sqrt{1+z^2}} \\ \dots & \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Itaque, neglectis quantitibus ordinis $\frac{a^4}{16r^4}$, efficitur :

$$\begin{aligned} V &= 4 - 4 \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right) \right\} \\ &+ 4 \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right\} \frac{a^2}{4r^2} \\ &+ \frac{a^2}{2r^2} \lg \text{nat} \left\{ \frac{2r}{a} + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{a^2}} \right\} \left\{ 1 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{a^2}{4r^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Est autem

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots \right) = 1$$

et ut summam $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right\}$ invenias, pone

$$S = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x + \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^2 + \dots$$

Quod si secundum x differentiatur et per x^2 multiplicatur, habebitur

$$1 + \frac{x}{2} + x^2 \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

et

$$\partial S = \frac{\partial x}{x^2 \sqrt{1-x}} - \frac{\partial x}{x^2} - \frac{1}{2} \frac{x \partial x}{x^2}$$

ergo

$$S = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} - \frac{1}{2} \lg \left\{ \frac{2-x+2\sqrt{1-x}}{4} \right\} - \frac{1}{2}$$

quod, si $x=1$ fit, transit in

$$S = \frac{1}{2}(1 + \lg \text{nat} 4)$$

ergo

$$\begin{aligned} V &= 4 - 4 \sqrt{1 + \frac{a^2}{4r^2}} \left\{ 1 - \frac{1 + \lg 4}{4} \cdot \frac{a^2}{4r^2} \right\} + \frac{a^2}{2r^2} \lg \left\{ \frac{2r}{a} + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{a^2}} \right\} \\ &= \frac{a^2}{4r^2} \lg \text{nat} \frac{64r^2}{a^2} = \frac{a^2}{4r^2} \lg \text{nat} \left(23, 5 \frac{r^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Vide quaesitam motionis annuli aequationem, quae approximative in omnes annulos ellipticae sectionis transversalis valet, in quibus, ut infra demonstrabimus talem formam

$$V = \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} n \cdot \frac{r^2}{b^2} = \frac{b^2}{4\sqrt{1+\lambda^2} \cdot r^2} \lg \text{nat} \left(n \cdot \frac{r^2}{b^2} \right)$$

et constans numerus n , siquidem annuli valde applanati sint, valorem 9,36 recipit. Valor numeri V , ergo etiam velocitas angularis ω maximum terminum quemdam assequitur, supra quem aequilibrium fieri non potest, infra quem semper duae conditiones figuraeque aequilibrii reperiuntur: aut annulus parum applanatus magnae excursionis aperturaeve, aut annulus valde applanatus exiguae excursionis. Quodsi in illo termino, dum massa et crassitudo annuli constantes manent, momentorum summa quantitatis motionis idest energia diminuatur, anulum dissolvi oportet, sive in plura ellipsoidica corpora aequilibria, sive cum materia non dirimitur aut in LAPLACII ellipsoides rotando ortum cum elementis

$$E=1,48, \quad V=0,1554, \quad \lambda=7,0$$

aut in JACOBI ellipsoides trium axium inaequalium cum elementis

$$E=1,48, \quad V=0,0488, \quad \lambda=7,2$$

in quibus aequationibus E energiam significat. Omnino autem in eodem termino annuli energia minima, velocitas contra angularis maxima et exterior diameter minimus est. Valor V est aequalis 0,140 et idem maximus. Quia V et ω simul crescunt decrescuntve, ex calculatis elementis sequitur, illud LAPLACII ellipsoides ($\text{Ell}\beta$) majorem, JACOBI ellipsoides ($\text{Ell}\gamma$) minorem velocitatem angularem habere, quam anulum dissolutum. Rotationis ellipsoidea quoque, dico $\text{Ell}(\alpha)$ MACLAURINII et $\text{Ell}(\beta)$ maximum valorem V habent hunc 0,22446657 (RAMO auctore). Duo illi annuli cum magno corpore centrali LAPLACIO auctore maximum valorem V habent = 0,108605 et $r:R = 1,831$; satellites lunaeve auctore VAUGHANIO $r:R = 2,489$; quibus in aequationibus R radium corporis centralis perinde densi indicat. Si inde ab hoc termino energia perpetuum crescit, exterior annuli diameter augetur in infinitum, cum velocitas angularis simulque rotationis momentum V usque ad zero dimi-
nuantur. Si $V_e = 0,0022997$ est, qui valor Telluri proprius est, habebis

$$a:b:r = 1:1,0039:33,23.$$

Ergo applanatio annuli, cui angularis velocitas et densitas pares sunt, erit aequalis 0,0039 et ejus excursio $r:b = 1:\tau = 33,098$ et energia valorem 4,5595 habebit, cum vera Telluris energia tantum 0,04809 efficiat.

Quoniam autem in satis magnis valoribus $r:a$ coefficientis $\lg \text{nat } 23,5 \frac{r^2}{a^2}$ paullulum mutatur, intra certos quosdam terminos semper habebis

$$V = q \cdot \frac{a^3}{4r^2}$$

et quia massa M annuli aequalis $2\pi^2 r a^2 \rho$ est, erit $a^2 = M:2\pi^2 r \rho$ et

$$V = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = q \cdot \frac{M}{8\pi^2 r^3 \rho};$$

ergo

$$\omega^2:\omega_1^2 = r_1^3:r^3 = T_1^2:T^2.$$

Inde sequitur, liberos annulos circa barycentrum his legibus moveri:

1.º Intra mediocres terminos etiam liberi annuli cum massa constanti secundum legem tertiam Keplerianam feruntur.

2.º Si sectio transversalis et densitas constantes manent, V inverse proportionalis valori r^2 est, vel

$$\omega^2:\omega_1^2 = r_1^2:r^2$$

vel

$$\omega : \omega_1 = 2r_1 : 2r = T_1 : T.$$

3.^o Tempora circuitus proportionalia sunt annulorum diametris.

4.^o Si excursio constans manet, tempora circuitus item constantia sunt.

5.^o Si diametri circuitus constantes manent, tempora circuitus quadrata fiunt inverse proportionalia sectionibus transversalibus:

$$T_1^2 : T^2 = a^2 \pi : a_1^2 \pi$$

cujus proportionis exponens sensim diminuitur, dum radius vector crescit.

Valor V ad tempora revolutionis annularium satellitum computanda adhiberi potest. Revolutio enim satellitis annularis manifesto brevior erit, quam lunae, cui quidem idem est diameter circuitus.

Est enim

$$V = \frac{2\rho_1 R^3}{3\rho r^3} + \frac{a_2}{4r^2} \lg \text{nat } 23,5 \frac{r^2}{a^2}$$

qua in aequatione ρ_1 corporis centralis, ρ annuli densitatem indicat.

Si $3\rho_1 = \rho$ ponas, differentia illa in Saturni annulo etiam 6 sexagesimas efficere potest.

Si motionis aequationem annuli et ellipsoidis Jacobici inter se compares, dum velocitas angularis minima est

$$V_\gamma = \frac{1}{\lambda_1^2} \lg \text{nat } (4\lambda_1^3 : e^3)$$

valore $2r : a$ in locum valoris λ substituto, illam in alteram transire facile intelligitur; et profecto utraque aequilibræ figura, et Ell(γ) et annulus (α) sensim ad conditionem infiniti cylindri accedunt, qui circa brevissimum axium suorum rotatur. Ut sint M et M_1 utriusque corporis massae, in annulo (α) erit:

$$V_r = \frac{a_2}{4r^2} \lg \text{nat } \frac{64r^2}{ea^2}.$$

Qua in aequatione $e = 2,718281 \dots$ et valore M introducto

$$V_\gamma = \frac{16\pi^2 a^6}{qM^2} \lg \text{nat } \frac{36M^2}{16e^3 \pi^2 a^6}$$

$$V_r = \frac{\pi^4 a_1^6}{M_1^2} \lg \text{nat } \frac{16M_1^2}{e\pi^4 \cdot a_1^6}$$

Si a et, quod necesse erit, simul V in infinitum diminuantur, posito $M = M_r$ et $a = a_1$, erit $c : r = 3\pi : 2$, qua in aequatione c maximum semiaxem ellipsoidis (γ) significat.

Porro est

$$\text{Lim}(V_r : V_\gamma) = \frac{9}{8}\pi^2$$

ergo

$$\text{Lim}(\omega_r : \omega_\gamma) = \frac{3}{4}\pi.$$

Si V et a aequales sunt, porro est

$$\text{Lim}(M_1 : M) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\pi$$

Si V et M aequales sunt, porro est

$$\text{Lim}(a : a_1) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\pi.$$

Iam vero ad secundum problema aggrediamur. Demonstravit primus LAPLACE, satellitum annularium aequilibrio, dummodo tempora circuitus eadem sint, semper duas axium relationes satisfacere, quae, si V maximum valorem $= 0,108605$ recipiat et ellipticitas $\sqrt{1 + \lambda^2} = 2,594$ fiat, inter se non differant. Cum igitur in lunis ejusdem velocitatis angularis ROCHIO et VAUGHANIO auctoribus, item semper duae, in ellipsoidibus etiam tres axium proportionales possibiles sint, proximum erit disquirere utrum etiam solitariis sine corporibus centralibus annulis duae aequilibrum conditiones adjudicandae sint; atque rem ita se habere, analyticis disquisitionibus probatur. Paribus valoribus V semper duae axium proportionales satisfaciunt; annulus autem parum aut valde applanatus est, et ita applanatus, ut dum valor V decrescit annuli Laplaciani valde applanati excursio $r : b$ constans maneat, interior vero diameter crescat, solitarii contra annuli (β) excursio decrescat et ad unitatem accedat, interior vero diameter = zero fiat. Annulus (β) in infinitum discum transit, si $V = \text{zero}$ fit.

In Laplaciano enim annulo (β) est

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = \frac{b}{a} = \frac{r^3}{R^3}, \quad \sqrt{1 + \lambda_1^2} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{r_1^3}{R^3}$$

et inde quod, si densitas et volumen constantes valores retinent

$$M = 2\pi^2 \rho a b r = 2\pi^2 \rho a_1 b_1 r_1$$

sequitur

$$r_1^3 : r^3 = b_1 a : b a_1 = a^3 b^3 : a_1^3 b_1^3$$

ergo

$$a_1 b_1^2 = a b^2, \text{ et } a b^2 : a_1 b_1^2 = b r_1 : b_1 r$$

vel $r : r_1 = b : b_1$, ergo si $r_1 > r$ ponimus, interior diameter $r_1 - b_1 > r - b$.

Ac primum quidem ut illa theoremata demonstrentur, necesse erit potentiale annuli valde applanati in centrum principalis sectionis normalis calculare; calculari autem poterit, dummodo b ab r paullulum differre supponas, cum contraria suppositio ad nullum eventum ducat. Quod problema per se difficillimum approximative solvere conabimur supponendo sectionis normalis et principalis proportionem axium $b : a$ maximam et majorem semiaxem b non nimis a radio vectore discrepare, quas res ideo supponere licebit, quoniam item contraria suppositio ad nullum duceret eventum. Ut igitur a et b sint semiaxes ellipticae sectionis transversalis valde applanatae, porro attractio barycentri ad sectionem principalem pertinentis per unum ex annulo elementum $= A$, utriusque distantia $= e$, habebimus approximative:

$$A = 2 \int_{-b}^{+b} \frac{e}{\sqrt{e^2 + y^2}} \cdot \frac{r + y}{r} \cdot \frac{x dy}{e^2 + y^2}.$$

Addito numero coefficiente $\frac{r + y}{r}$ ejus voluminis ratio redditur, quo interius dimidium annuli ab exteriori separatur et quod per $\frac{8}{3} a b^2 \pi$ exprimi potest. Est autem hoc volumem aequale duplici ellipsoidi rotatili, cujus sectio cum sectione annuli transversali congruat. Cum attractio illius voluminis in duas perpendiculares componentes distribui possit, ex quibus una quae integrali proposito continetur manifesto $=$ zero fit, altera per se computanda erit, et prope habebis

$$A = 4 \int_0^b \frac{e x dy}{(e^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Est autem sectionis transversalis aequatio haec

$$b^2 x^2 = a^2 (b^2 - y^2)$$

et contendi poterit, attractionem A , quia $(b - y)^2 < b^2 - y^2 < b^2$, inter terminos $x = \frac{a}{b} (b - y)$ et $x = a$ versari, quin propter magnam ellipsis distantiam focalem prope ad $x = a$ accedere. Prior terminus attractionem A , rhombi exprimit, cui a et b sint semiaxes, posterior attractionem oblongi exprimit. Quoniam vero areae utriusque figurae et ellipsis proportionem retinent

$= 2:4:\pi$, erit attractio ΔR elementi ex annulo prope $\frac{\pi}{4} A$. Iam vero 1^o, si

$x = \frac{a}{b}(b-y)$ ponimus, est

$$A_{11} = 4ae \int_0^b \frac{dy}{(e^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{1+\lambda^2}} \operatorname{tg} \delta \sin \delta$$

qua in aequatione $\operatorname{tg} \delta = b:e$ ponitur et visibilem majorem semiaxem elementi ex annulo significat quippe qua ab attracta sectione normali visibilis sit.

2^o Si $x = a$ ponimus, erit

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4}{\sqrt{1+\lambda^2}} \operatorname{tg} \delta \sin \delta - \frac{4ae}{b} \int_0^b \frac{y dy}{(e^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left\{ \operatorname{tg} \delta \sin \delta - (1 - \cos \delta) \right\} \end{aligned}$$

Quia demum $dm = r d\phi = -2r d\mathcal{S}$, est etiam

$$\Delta R_1 = -\frac{4\pi f \rho r}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left\{ \operatorname{tg} \delta \sin \delta - (1 - \cos \delta) \right\} \cos \mathcal{S} \Delta \mathcal{S}$$

$$\Delta R_{11} = -\frac{2\pi f \rho r}{\sqrt{1+\lambda^2}} \operatorname{tg} \delta \sin \delta \cos \mathcal{S} \Delta \mathcal{S}$$

et siquidem pro minoribus differentiis differentialia introduxeris, id quod propter illorum valorum exiguitatem concessum erit, simulque $2r \cos \mathcal{S} = b \cot \delta$ posueris, ex secunda aequatione et ex aequatione aequilibrii

$$R + \omega^2 r = 0$$

efficietur motionis aequatio haec

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{11}^2}{2\pi f \rho} = V_{11} &= \frac{b^2}{2r^2 \sqrt{1+\lambda^2}} \int_0^{\frac{2r}{b}} \frac{d(\cot \delta)}{\sqrt{1 + \cos \delta^2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2} \cot^2 \delta}} \\ &= \frac{ab}{4r^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{4r^2}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2}{4r^2} \left(\frac{1 \cdot 3^3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5^3}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} + \dots \right) \right\} \\ &\quad + \frac{ab}{2r^2} \operatorname{lg nat} \left\{ \frac{2r}{b} + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{b^2}} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{4r^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Ut summam seriei

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^5 + \dots = S$$

posito $x=1$, reperias, differentiator secundum x , et habebis

$$1 + x \frac{dS}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0.$$

Quodsi substitueris $1-x=\xi^2$, illius summae integrale reperies hoc

$$S = -\lg \text{nat}(2-x+2\sqrt{1-x}) + \lg \text{nat} 4.$$

Ergo posito $x=1$, erit $S = \lg \text{nat} 4$.

Series altera fere est aequalis $\frac{\pi}{8}(1 + \lg \text{nat} 4)$.

Proinde habebis

$$V_{11} = \frac{ab}{4r^2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{4r^2}} \cdot \left\{ \lg \text{nat} 4 - \frac{\pi}{8}(1 + \lg \text{nat} 4) \frac{b^2}{4r^2} \right\} \\ + \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left[\left\{ \frac{2r}{b} + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{b^2}} \right\}^2 \right] \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{4r^2} \right\}$$

vel

$$V_{11} = \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(55,0 \frac{r^2}{b^2} \right).$$

Adhibitis formulis antea explicatis, porro habebis

$$V_1 = \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(80,0 \frac{r^2}{b^2} \right).$$

Cum vero V intra valores V_1 et V_{11} versetur, et proxime quidem ad valorem V_{11} , ponere licebit

$$V = \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(55,0 \frac{r^2}{b^2} \right).$$

Quae analysis ut extra omnem dubitationem sit, experimento utere hoc: inquireas in attractionem ΔR alicujus ex annulo elementi duabus principalibus sectionibus normalibus, quae altera proxime ad alterum per centrum annuli fiunt, terminati; quale elementum manifesto instar laminae est ellipticae, cujus crassitudo ab interiore ad exteriorem partem crescit. Cogitemus talem laminam parvo axi $2a$ parallelam in parallelas lamellas distributam, lamella

quaeque attractionem habebit hanc

$$\Delta A = 2 \int_0^x \frac{E}{\sqrt{E^2 + x^2}} \cdot \frac{dx}{E^2 + x^2} \cdot dy$$

qua in expressione E distantiam circuli a puncto m indicat. Integrale fit prope

$$\frac{2}{E} \operatorname{arctg} \frac{x}{E} \cdot dy.$$

Totius vero ellipsis attractio in directione distantiae centri a puncto m est

$$A = 2 \int_{-b}^{+b} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{e^2 + y^2}}}{\sqrt{e^2 + y^2}} \cdot \frac{r + y}{r} \cdot \frac{e dy}{\sqrt{e^2 + y^2}}$$

Quod attinet ad factorem $(r + y)$, integrale A in duas partes dividitur, ex quibus posterior aequalis zero est. Potentiale vero totius laminae ab interiore ad exteriorem partem crassitudine crescentis, cum in duas inter se perpendiculares componentes dissolvatur, praeterea ad calculationem adhibendum erit. Reliqua pars integralis quam proxime accedit ad hanc aequationem:

$$A = \frac{ab\pi}{e\sqrt{e^2 + b^2}}.$$

Si porro A per laminae crassitudinem $-2r d\mathcal{S}$ multiplicatur ejusque attractio in radium vectorem puncti attracti projicitur, habebimus:

$$dR = -\frac{2ab\pi}{e\sqrt{e^2 + b^2}} r \cos \mathcal{S} d\mathcal{S}$$

attractionemque totius annuli, quod attinet ad punctum m

$$R = -4f\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab\pi}{2r \cos \mathcal{S}} \cdot \frac{r \cos \mathcal{S} d\mathcal{S}}{\sqrt{4r^2 \cos^2 \mathcal{S} + b^2}} = -2a\pi f\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\mathcal{S}}{\sqrt{1 + \frac{4r^2}{b^2} \cos^2 \mathcal{S}}}.$$

Denique si posueris $\frac{2r}{b} \cos \mathcal{S} = z$, ergo

$$d\mathcal{S} = -\frac{b}{2r} \cdot \frac{dz}{\sin \mathcal{S}}$$

erit

$$R = -\frac{ab\pi f\rho}{r} \int_0^{\frac{2r}{b}} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2} \cdot \sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}z^2}}$$

qui valor R cum supra invento congruit.

Restat ut computemus, quanto potentiali exterius annuli dimidium interiori dimidio praestet. Praestat autem volumine aequali $\frac{8}{3}\pi ab^3$. Supponamus, id quod prope ad veritatem accedit, hoc volumine centrum sectionis normalis perinde attrahi, ac si illud in ejus annuli formam redactum esset, cujus radius vector $= \frac{3}{2}r$, vel si excursio parva, applanatio permagna esset, prope $= \frac{3}{2}b$ esset. Tum ejus peripheria foret $3b\pi$ atque sectio transversalis $\frac{8}{3}ab$. Qualis annuli attractio, si in directionem virium et centripetalis et centrifugae projecta esset, fere efficeretur :

$$R_{11} = -\frac{8}{3} \frac{ab}{r} \cdot \frac{24}{25} f\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{24}{25}\sin^2\vartheta}} + \frac{8}{3} \frac{ab}{r} \cdot \left(\frac{24}{25}\right)^2 f\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{24}{25}\sin^2\vartheta}}$$

et

$$V_{11} = -\frac{R_{11}}{2\pi f\rho r} = \frac{ab}{9r^3\pi} \left\{ 4 \cdot \frac{24}{25} \cdot 1,17\pi - \left(\frac{24}{25}\right)^2 \cdot 9,25\pi \right\}$$

siquidem integrale per formulam Cotesianam approximative computatur. Iam vero ubi utramque expressionem in parenthesi conjunxeris, habebis

$$V_{11} = -\frac{ab}{4r^2} \cdot 1,77 = -\frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} 5,88$$

Postremo ubi V_{11} cum valore V conjunxeris, prope terminum positionis $r=b$ habebis motionis aequationem hanc :

$$V = \frac{ab}{4r^2} \left\{ \lg \text{nat} \left(55,0 \frac{r^2}{b^2} \right) - \lg \text{nat} 5,88 \right\} = \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(9,36 \frac{r^2}{b^2} \right)$$

Itaque V versari potest tantum inter hos terminos :

$$\frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(23,5 \frac{r^2}{b^2} \right) \text{ et } \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(9,36 \frac{r^2}{b^2} \right)$$

dum $\sqrt{1+\lambda^2}$ inter 0 et ∞ , τ inter 0 et 1 versatur.

Intra terminos $\tau = 0$ et $\tau = 0,25$ constans n est aequalis 23,5, intra terminos $\tau = 0,25$ et $\tau = 1$ est constans n prope $5\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)$; nisi forte paulullo minus decreseat.

Iam vero ut applanationem accuratius definiamus, eam ut functionem valorum V et τ derivabimus. Qua approximandi ratione valores Xdx et $(Y + \omega^2 y)dy$ definiri possint, quorum valorum summam, si suprema superficies aequilibris est, aequalem zero esse oportet, in *Ann. phys. et math.* (SCHLÖMILCH) X, pg. 70 a me expositum est. Aequatio

$$Xdx + (Y + \omega^2 y)dy = 0$$

manifesto simul differentialis aequatio sectionis normalis est, quapropter idem significat quod differentialis aequatio ellipsium; dico

$$(1 + \lambda^2)x dx + y dy = 0.$$

Est vero attractio A_1 puncti $(0, a)$ ab exteriori et interiori aequatore longissime distantis per totum anulum effecta, ergo attractio poli sectionis normalis major quam vis componens A_{11} ab infinito elliptico cylindro ejusdem sectionis transversalis orta. Ea differentia $A_1 - A_{11}$ proxime exprimitur integrali hoc

$$\begin{aligned} & -4\pi f\rho a \int_{\infty}^{\frac{\pi}{8}r} \frac{ab ds}{(s^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + 4\pi f\rho a \int_0^{\frac{7\pi}{16}} \frac{ab d\vartheta}{8r^2 \cos^3 \vartheta} \\ & = -4\pi f\rho a \left\{ \frac{ab}{16r^2} \text{lg nat} \left(\text{tg} \frac{15\pi}{32} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Proinde vis componens X attractionis, quae attinet ad aliquod punctum (x, y) in directione x axi parallela aequalis est

$$X = -4\pi f\rho \left\{ \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{ab}{16r^2} \text{lg nat} \left(\text{tg} \frac{15\pi}{32} \right) \right\} x.$$

Vis autem componens B_1 , qua per anulum punctum $(0, b)$ attrahitur, a vi componente B_{11} ejusdem hypothetici cylindri paullo superatur, ita ut approximative sit

$$B_1 - B_{11} = -2\pi f\rho b \int_{\infty}^{\frac{3\pi}{16}r} \frac{ab \cdot ds}{(s^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = -4\pi f\rho b \frac{64ab}{9\pi^2 r^2}.$$

Itaque vis componens Y , qua per anulum aliquod punctum (x, y) in directione y axi parallela attrahitur, quoad ad applanationem quidem valet, erit aequalis

$$Y = -4\pi f\rho \left\{ \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} - \frac{ab}{4r^2} \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right\}.$$

Differentialis vero aequatio sectionis transversalis ellipticae efficietur, si attractiones per elementa directionum suarum dx et dy multiplicaveris, summam multiplicatarum attractionum per $2\pi f\rho$ divideris et aequalem zero posueris in hunc modum:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2\sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} + \frac{ab}{8r^2} \lg \text{nat} \left(\text{tg} \frac{15\pi}{32} \right) \right\} x dx \\ & + \left\{ \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} - \frac{ab}{2r^2} \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 - \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right) \right\} y dy \\ & + \left\{ \frac{ab}{4r} \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right) - rV \right\} dy = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Sin autem in hac formula et in differentiali aequatione ellipsium homologos numeros coefficientes aequaveris, habebis:

$$V = \frac{ab}{4r^2} \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} + \frac{ab}{8r^2} \lg \text{nat} \left(\text{tg} \frac{15\pi}{32} \right)}{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} - \frac{ab}{2r^2} \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 - V} = 1 + \lambda^2. \quad (3)$$

Secunda formula (2) revolutionis spatium, formula (3) applanatio annuli definitur. Quodsi ex formula (2) $\frac{ab}{r^2}$ in formula (3) substitueris, porro $\sqrt{1 + \lambda^2} = p$ posueris et aequationem secundum V dissolveris, efficietur formula

$$V = \frac{2p(p-1) \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right)}{(1+p) \left\{ p^2 \left[\lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right) + 2 \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \lg \text{nat} \left(\text{tg} \frac{15\pi}{32} \right) \right\}}. \quad (4)$$

Si excursio $r:b$ satis magna fit, propè reperitur

$$V = \frac{2(p-1)}{p(p+1)} = \frac{\lambda^2}{2}, \quad p = 1 + V. \quad (5)$$

Porro est -

$$\lambda : \lambda_1 = \tau : \tau_1. \quad (6)$$

Si valor V minimus est, p accedit aut ad unitatem aut ad ∞ , pariterque $r : b$ aut ad ∞ aut ad unitatem. Inde sequitur, si expressioni majores valores tribuuntur, poni posse

$$V = \frac{2(p-1)}{p(p+1) \left\{ 4 + 2 \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 : \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right) \right\}} \quad (7)$$

et quia est

$$Vp = \frac{b^2}{4r^2} \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right),$$

$$p = \frac{2 + Vp \left[1 + 5,7640 : \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right) \right]}{2 - Vp \left[1 + 5,7640 : \lg \text{nat} \left(n \frac{r^2}{b^2} \right) \right]} \quad (8)$$

Si p aliquanto major fit et τ ad unitatem accedit, postremo est

$$V = \frac{2 \lg \text{nat} \left(9,36 \frac{r^2}{b^2} \right)}{p \left\{ \lg \text{nat} \left(9,36 \frac{r^2}{b^2} \right) + 2 \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right\}} \quad (9)$$

vel

$$V = \frac{0,55911 \cdot \tau}{p}, \quad \text{vel} \quad \frac{Vp}{\tau} = 0,55911. \quad (10)$$

Itaque si $r : b$ unitati, n numero 9,36 adaequaveris, manifesto p fiet aequalis ∞ , V aequalis zero, i. e. figura terminalis annuli valde applanati eris discus infinite extenuatus sine apertura centrali.

Ut valores coordinatos τ , p et V computemus :

1.^o adaequemus $r : b$ sive $1 : \tau$ valoribus arbitrariis ;

2.^o ratiocinemur Vp sive $V\sqrt{1+\lambda^2}$ ex formula (2);

3.^o item p ex Vp secundum formulam (4) vel (8);

4.^o item V ex formulis (2) et (3). Simulatque valores p approximative computaverimus, iterum et accuratius reperiemus V ex formula (4), qua ratione identidem valores p corrigendi erunt.

Perspicuitatis causa, praesertim ut maxima et minima cognoscantur, quae

suetis methodis difficile definiuntur huic loco affixi tabulam coordinatorum valorum n, τ, p, V, E .

n	$1:\tau$	$V\sqrt{1+\lambda^2}$	$\sqrt{1+\lambda^2}$	V	E	$a: b : r$
23,5	∞	0,0000	1,0000	0,0000	∞	1: 1 : ∞
>	10000	$3:10^8$	$1+3:10^8$	$3:10^8$	601,3130	1: 1,0000 : 10000
>	198,0	0,0001	1,0001	0,0001	10,2644	1: 1,0001 : 198,0
>	33,23	0,0023	1,0039	0,0023	4,5595	1: 1,0039 : 33,359
>	25,1	0,0038	1,0065	0,0038	4,0037	1: 1,0065 : 25,164
>	17,725	0,0071	1,0132	0,0070	3,4390	1: 1,0132 : 17,958
>	16,0	0,0085	1,0153	0,0084	3,3061	1: 1,0153 : 16,245
>	13,44	0,0121	1,0234	0,0118	3,0927	1: 1,0234 : 13,735
>	10,0	0,0194	1,0372	0,0187	2,6857	1: 1,0372 : 10,372
>	8,722	0,0246	1,0481	0,0234	2,5291	1: 1,0481 : 9,148
>	7,0	0,0360	1,0731	0,0336	2,2864	1: 1,0731 : 7,513
>	6,0	0,0468	1,0980	0,0425	2,1282	1: 1,0980 : 6,588
>	5,0	0,0638	1,1390	0,0560	1,9628	1: 1,1390 : 5,690
>	4,0	0,0927	1,1500	0,0806	1,8423	1: 1,1500 : 4,600
22,5	3,5	0,1156	1,2653	0,0914	1,7757	1: 1,2653 : 4,428
20,0	3,0	0,1443	1,3591	0,1062	1,6800	1: 1,3591 : 4,077
17,5	2,5	0,1878	1,5291	0,1228	1,5719	1: 1,5291 : 3,823
15,0	2,0	0,2559	1,8906	0,1353	1,4970	1: 1,8906 : 3,781
14,5	1,9	0,2757	1,9690	0,1392	1,4816	1: 1,9690 : 3,741
13,75	1,75	0,3053	2,2675	0,1347	1,4820	1: 2,2675 : 3,968
12,5	1,5	0,3707	3,0450	0,1217	1,4928	1: 3,045 : 4,567
11,25	1,25	0,4586	5,4100	0,0848	1,5905	1: 5,410 : 6,762
—	1,055	0,5300	26,5000	0,0200	1,9560	1: 26,500 : 27,96
—	—	0,5590	24300,0	$23:10^6$	6,5290	1: 24300 : 24302
9,36	1,00	0,5591	∞	0,0000	∞	1: ∞ : ∞

Secundum hanc tabulam valor V numerum 0,139 excedere nequit; assequitur vero hoc maximum fere ubi excursio $r:b$ proportioni semiaxium $b:a$ aequalis fit. Si densitas et massa constantes manent, ibidem annulus simul cum maxima velocitate angulari minimum habet diametrum exteriorem minimumque radium vectorem circuitus; denique, id quod infra probabitur, mi-

nimam energiam $E=1,481$. Quod attinet ad minima valorum r et $r+b$ (exterioris diametri) exempli gratia est:

$$a_0 : b_0 : r_0 = 1 : 1,9690 : 3,741, \quad (r_0 + b_0) : r_0 = 2,9 : 1,9$$

$$a_1 : b_1 : r_1 = 1 : 1,1500 : 4,600, \quad (r_1 + b_1) : r_1 = 5 : 4$$

ergo

$$a_0 = r_0 : 3,741, \quad b_0 = r_0 \cdot 1,969 : 3,741$$

$$a_1 = r_1 : 4,600, \quad b_1 = r_1 \cdot 1,150 : 4,600.$$

Cum quidem voluminibus constantibus sit

$$r_0 : r_1 = a_1 b_1 : a_0 b_0$$

efficitur

$$\frac{(r_0 + b_0)^3}{(r_1 + b_1)^3} = \frac{1,15 \cdot 3,741^2 \cdot 2,9^3 \cdot 4^3}{1,969 \cdot 4,600^2 \cdot 1,9^3 \cdot 5^3}$$

ergo $r_0 + b_0 < r_1 + b_1$. Eodem modo reperietur

$$\frac{r_0^3}{r_1^3} = \frac{1,15 \cdot 3,741^2}{1,969 \cdot 4,600^2}$$

ergo $r_0 < r_1$. Praeterea est

$$\frac{b_0^3}{b_1^3} = \frac{1,969^3 \cdot 4,600}{1,15^3 \cdot 3,741}$$

unde sequitur $b_0 > b_1$. Exigua quaedam numerorum ab indicatis theorematibus discrepantia prope locum minimi valoris E e dubia aliqua approximandi ratione, qua constans n computatus est, exoritur, quem numerum hoc loco reapse aliquantulo majorem esse verisimile est. Cum maximo velocitatis rotatilis valore etiam minimus energiae valor coincidit, quae nunc erit speculanda.

Quae relationes inter excursionem, applanationem, velocitatem rotatilem sive angularem, crassitudinem et inter energiam intercedant, et quomodo illae relationes expansione et condensatione commutentur dum energia massaque constantes manent, erit accuratius investigandum.

Ad energiam computandam utamur eo principio, quod summa planitierum substantatur, in hunc modum:

$$\int r^2 dm = M(r^2 + \frac{3}{4}b^2)$$

$$E = M \frac{\omega}{2} (r^2 + \frac{3}{4}b^2) = \frac{\sqrt{2}\pi f^2 V}{8} (4 + 3\dot{r}^2) r^2 \cdot M$$

$$M = 2\pi^2 \rho a b r = 2\pi^2 \rho \tau^2 r^5 : \sqrt{1 + \lambda^2}$$

$$E = \frac{\sqrt{2\pi f \rho V}}{8} (4 + 3\tau^2) \cdot 2\pi^2 \rho \tau^2 r^5 : \sqrt{1 + \lambda^2}$$

et quia

$$r^5 = \sqrt[3]{M^5 : \left[(2\pi^2 \rho)^5 \frac{a^5 b^5}{r^{10}} \right]} = \sqrt[3]{\frac{M^5}{(2\pi^2 \rho)^5 \tau^{10} (1 + \lambda^2)^{\frac{5}{2}}}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2\pi f \rho V}}{2(16\pi^2 \rho)^{\frac{5}{3}}} M^{\frac{5}{3}} \frac{4 + 3\tau^2}{\sqrt[3]{\tau^4}} (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{6}} \quad (11)$$

Si unitatem talem eligimus, qualem jam antea in speculandis ellipsoidibus supposui (*)

$$\frac{M^{\frac{5}{3}} \sqrt{2\pi f \rho}}{5 \left(\frac{4\pi \rho}{3} \right)^{\frac{5}{3}}} = 1 \quad (12)$$

efficitur

$$E = \frac{5}{8} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{V} \left\{ \frac{4 + 3\tau^2}{\tau^{\frac{4}{3}}} \right\} (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{6}} \quad (13)$$

Quae aequatio, si annuli parum applanati valoresque τ minimi sint, in sequentem transit:

$$E = \frac{5}{8} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{V} : \tau^{\frac{4}{3}}$$

Hisce formulis adhibitis momentorum summa, si massa et densitas constantes manent, positis certis quibusdam valoribus V et τ sic computari possunt, ut jam per tabulam supra affixam computavimus. Praecipue respiciendi videntur valores E positis $V = 0$ et $V = \max$.

In priore positione τ erit aut 0 aut 1, $\sqrt{1 + \lambda^2}$ aut 1 aut ∞ .

a)posito $V = 0$, $\tau = 0$ est

$$\frac{\sqrt{V}}{\tau^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{\lg \text{nat}(23,5 : \tau^2)}}{2 \cdot \tau^{\frac{4}{3}}} = \infty, E = \infty$$

(*) *Zeitschrift f. Math. u. Phys.* von SCHLOEMILCH, Dresden (1861), pag. 69.

b) posito $V=0$, $\tau=1$ secundum formulam (10) est

$$p = \frac{0,55911}{V}, \sqrt{V} \cdot (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{0,55911^{\frac{2}{3}}}{V^{\frac{1}{3}}} = \infty, E = \infty$$

c) posito $V=0,1392$, $\tau=1:1,9$ est

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = 1,969, E = 1,481$$

ergo E ad minimum valorem pervenit, sicut secundum problematis naturam expectaveris.

Valores $\text{Lim } E$, quod attinet ad anulum (α) et $\text{Ell}(\gamma)$ mirum in modum congruunt cum valoribus $\text{Lim } E$, quod attinet ad anulum (β) et $\text{Ell}(\beta)$, unde affinitate quadam has aequilibrii figuras contineri perspicitur. Est enim

$$\text{in annulo } (\alpha) \text{ Lim } E = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{2 \lg \text{nat} \frac{2}{\tau}}}{2\tau^{\frac{1}{3}}} = 0,62893 \frac{\sqrt{\lg \text{nat} \frac{2}{\tau}}}{\tau^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{in Ellipsoide } (\gamma) \text{ Lim } E = \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{2} \sqrt{2 \lg \text{nat} \lambda} = 0,7071 \lambda^{\frac{1}{3}} \sqrt{\lg \text{nat} \lambda}$$

et posito $\lambda_1 = \frac{2}{\tau_1}$, uti secundum $\text{Lim } V$ licet

$$\text{Lim } E = \frac{2^{\frac{1}{3}} \sqrt{2 \lg \text{nat} \frac{2}{\tau_1}}}{2\tau_1^{\frac{1}{3}}} = 0,88836 \frac{\sqrt{\lg \text{nat} \frac{2}{\tau_1}}}{\tau_1^{\frac{1}{3}}}$$

porro est

$$\text{in annulo } (\beta) \text{ Lim } E = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot 7 \cdot 0,55911^{\frac{2}{3}} : V^{\frac{1}{6}} = 1,0564 : V^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{in Ellipsoide } (\beta) \text{ Lim } E = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} : V^{\frac{1}{6}} = 1,3513 : V^{\frac{1}{6}}$$

Ex valore minimo E colligitur, in annulis aliter atque in ellipsoidicis aequilibrii corporibus valorem V maximum quemdam terminum assequi posse, supra quem ne stabilitas quidem permaneat, ita ut energia etiam magis diminuta (ne subintelligas diminutam revolutionis velocitatem) aequilibrium desinere necesse sit. Novus contra in hoc termino impulsus annulo adjectus i. e. quaeque amplificatio energiae efficit, ut revolutionis velocitas diminuatur, augeantur radius vector atque diameter exterior. Quo fit, ut annulus in for-

nam (α) vel (β) transeat cum aut ejus apertura dilatatur et applanatio diminuitur et applanatio augetur.

Denique posito $E = \infty$, annulus (α) in infinitum cylindrum cum sectione circulari transit, geneticam quandam cum Jacobico ellipsoide (γ) relationem recipiens; annulus (β) autem in infinitum discum transit, geneticam quandam cum Laplaciano ellipsoide (β) relationem recipiens. Omnes autem inter annulos et ellipsoidea relationes maxime perspicue intelligentur, dummodo graphicae delineationis causa V et $\frac{E}{16}$ abscissas et ordinatas alicujus curvae feceris.

Ubi V maximi, E minimi valoris terminum assequitur, curva

$$E = f(V)$$

habebit punctum prosiliens quod dicitur, cum ibi $\frac{\partial E}{\partial V}$ duas valores recipiat, scilicet

$$\frac{\partial E_1}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial E_2}{\partial V} \text{ approximative} = 0,25.$$

Simulatque annulus in maxima sua velocitate ω se dissolvit, massa tantum energiam 1,481 retinet. Secundum tabulas ellipsoidum (α) (β) (γ) computatas ac delineationem graphicam ex iis deductam, massam necesse est in formam aut ellipsoidis (β) aut (γ) transire et quidem

$$\text{Ell}(\beta) \text{ cum elementis } E = 1,48, \quad V = 0,1554, \quad \lambda = 7,0$$

$$\text{aut Ell}(\gamma) \text{ cum elementis } E = 1,48, \quad V = 0,0488, \quad \lambda_1 = 7,2.$$

Porro ex natura problematis sequitur velocitatem revolutionis propter majorem massae in centro accumulationem augeri, si exterior annuli diameter a diametro ellipsoidis (β) parum discrepat; atque ita profecto res se habent; nam

$$M = \frac{1}{3} a b^2 \pi = 2 \pi^2 a_1 b_1 r$$

quia porro

$$a_1 = r : 3,74, \quad b_1 = r : 1,9, \quad a = b : 7,0$$

est $b = 1,63r$. Exterior annuli diameter est $r \left(1 + \frac{1}{1,9} \right) = 1,53r$, qui valor parum a valore b differt.

Porro sequitur ex graphica delineatione, si $V = 0,033$ et $E = 2,352$ sunt, annulum (α) et Ell(β) commune intersectionis punctum habere; item si $V = 0,033$ et $E = 1,872$ sunt, annulum (β) et Ell(γ). Uterque igitur singu-

laris valor E principalem massae impetum significat, quo fluidum absolutum et homogeneum in duas diversas aequilibrum conditiones figurasve ejusdem velocitatis rotandi transformari potest. Quale problema LAPLACE in *Mechanica Coelesti* proposuit primus quidem, sed non solvit, quum ellipsoide trium axium inaequalium aequilibrem figuram esse ei ignotum esset. Existunt autem omnino non nimis quam quatuor singulares valores E , quoniam si

$$V = 0,0038, \quad E = 4,037$$

ponuntur, annulus (α) cum Ell(γ) intersectionis punctum commune habet; item si

$$V = 0,011, \quad E = 2,842$$

sunt, Ell(β) cum Ell(γ) intersectionis punctum commune habet.

Hae coordinatae approximative etiam ratiocinando definiri possunt. Posito igitur $V = V_r$, $E = E_r$, quia

$$\frac{E}{E_r} = \frac{\frac{\sqrt{V}}{2} (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{5}{8} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{V_r} \frac{4 + 3\tau^2}{\tau^{\frac{4}{3}}} (1 + \lambda_r^2)^{\frac{1}{3}}}$$

et

$$V = \text{arc tg } \lambda : \lambda = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{4}{\lambda^2},$$

ergo si V parvus valor est, approximative $\sqrt{1 + \lambda^2} = \pi : 2V$ efficietur

$$\left\{ \frac{\pi}{\tau^2 \lg \text{nat}(23,5 : \tau^2)} \right\}^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^3 \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \frac{(4 + 3\tau^2)^3}{\tau^4} \cdot 1,06^2$$

vel approximative

$$\lg \text{nat} \frac{23,5}{\tau^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 3\pi^2 = 7,07$$

et

$$1 : \tau = b : a = 7,1, \quad V = 0,033, \quad \frac{E}{16} = 0,147.$$

Ut alterae coordinatae definiantur, ordimur ab aequatione

$$\frac{E}{E_r} = \frac{\frac{1}{2} \lambda^{\frac{4}{3}}}{\frac{5}{2} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{2}{3}} : \tau^{\frac{4}{3}}}$$

Approximative est etiam

$$V = \frac{2 \lg \text{nat} 2\lambda_1 - 3}{\lambda_1^2} = \frac{\tau^2}{4} \lg \text{nat} (23,5 : \tau^2).$$

Posito $E = E_r$, fit ergo

$$\lambda_1 = 5^{\frac{3}{4}} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\tau} = 1,5403 : \tau.$$

Quodsi substituitur in aequationem valoris V , habemus

$$6 = 4 \lg \text{nat} 2\lambda_1 - 1,54^2 \lg \text{nat} \left(\frac{4,85\lambda_1}{1,54} \right) = \lg \text{nat} 2\lambda_1 (4 - 1,54^2) - 1,54^2 \lg \text{nat} \frac{2,42}{1,54}$$

$$\lg \text{nat} 2\lambda_1 = 4,3493, \quad \lambda_1 = 38,7, \quad \frac{1}{\tau} = 25,1$$

$$V = 0,0038, \quad E = 4,034.$$

Praeter has intersectiones nulla intersectionis puncta existere posse, immo quatuor curvas nostras magis magisque parallelas fieri, ex terminis proportionis $E : E_r$ colligitur.

a) in annulo (α) et Ell(β) haec proportio, si τ aequalis zero fit, ad valorem zero accidit; nam

$$\text{Lim}(\dot{E} : E_r) = m : \text{Lim} \left(\lg \text{nat} \frac{4}{\tau} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ergo posito $V = V_r$ inde a puncto intersectionis E_r est $> E$.

b) In annulo (α) et Ell(γ) est $\text{Lim} \lambda_1 = 2 : \tau$, proinde

$$\text{Lim}(E : E_r) = 1,4165.$$

Itaque E_r inde ab intersectionis puncto est $< E$.

c) In annulo (β) et Ell(β) propter aequationes supra deductas est

$$\text{Lim} E_r = 1,0564 : V_r^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{Lim} E = 1,3513 : V^{\frac{1}{5}}.$$

Posito $V = V_r$ est

$$\text{Lim}(E : E_r) = 1,3513 : 1,0564$$

ergo E_r inde ab intersectionis puncto $< E$ erit.

Ut postremo indagemus, qua ratione per expansionem et condensationem, si massa et energia constantes manent, excursio, applanatio, revolutionis velocitas annuli fluidi homogenei commutentur, ordimur ab aequatione

$$E = \frac{\sqrt{2\pi f\rho} V}{2(16\pi^2\rho)^{\frac{3}{2}}} \cdot M^{\frac{5}{2}} \frac{4 + 3\tau^2}{\tau^{\frac{4}{3}}} (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Si ad duas densitates ρ et ρ_1 respicimus, est

$$\frac{\sqrt{\rho V}}{\rho^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{4 + 3\tau^2}{\tau^{\frac{4}{3}}} (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{\rho_1 V_1}}{\rho_1^{\frac{3}{2}}} \frac{4 + 3\tau_1^2}{\tau_1^{\frac{4}{3}}} (1 + \lambda_1^2)^{\frac{1}{3}}$$

vel

$$\frac{V^3(1 + \lambda^2)^3(4 + 3\tau^2)\tau_1^{\frac{4}{3}}}{V_1^3(1 + \lambda_1^2)^3(4 + 3\tau_1^2)\tau^{\frac{4}{3}}} = \frac{\rho}{\rho_1} \tag{14}$$

et introducto ω in locum valoris V , qui est aequalis $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$

$$\frac{\omega^3(1 + \lambda^2)(4 + 3\tau^2)\tau_1^{\frac{4}{3}}}{\omega_1^3(1 + \lambda_1^2)(4 + 3\tau_1^2)\tau^{\frac{4}{3}}} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}. \tag{15}$$

Si quantitates indice signatas constantes esse supponimus, ex ea aequatione sequitur in termino maximae expansionis scilicet in positione $\rho = 0$, etiam valorem ω esse aequalem zero; et ex aequatione antecedenti sequitur, etiam valorem V fieri aequalem zero. Nihilosecius nondum constat, utrum $\lambda = 0$ an $= \infty$ fiat. Quae quaestio ut dirimatur, disquiramus annulos et maximae et minimae excursionis. In illis prioribus inter mediocres terminos semper erit

$$\tau^{14} : \tau_1^{14} = \rho^3 : \rho_1^3 \tag{16}$$

i. e. apertura et excursio annuli (α) crescunt dum densitas decrescit. Idem efficitur ex aequatione

$$\lambda^{14} : \lambda_1^{14} = \rho^3 : \rho_1^3 \tag{17}$$

quae deduci potest ex formulis (6) et (16). Itaque valores coordinati sunt

$$\rho = 0, \quad \tau = 0, \quad \lambda = 0.$$

In annulis contra minimae excursionis, in quibus λ major numerus est, ex formulis (10) et (14) efficitur

$$\frac{\tau^3}{\tau_1^3} \cdot \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \cdot \frac{\tau_1^{\frac{4}{3}}}{\tau^{\frac{4}{3}}} = \frac{\rho}{\rho_1}$$

et quia τ ad unitatem accedit, dum λ maximus valor fit

$$\lambda : \lambda_1 = \rho : \rho_1. \quad (18)$$

Idem etiam ad Ell(β) valet.

Unde sequitur annuli (β) aperturam diminui, applanationem crescere, dum densitas augetur. Coordinati igitur valores sunt

$$\rho = \infty, \quad \tau = 1, \quad \lambda = \infty$$

posito nempe atque concesso usque ad hos terminos statum fluidum permanere. Inde concluditur gravissimum theorema hoc:

Si massa et energia constantes manent, per condensationem annulus (α) in annulum (β) transit, non dissolutus ubi $1 : \tau = 1,9$, et magis magisque usque ad figuram disci applanatur.

Porro ex aequatione

$$M = 2\pi^2 \rho a b r = 2\pi^2 \rho_1 a_1 b_1 r_1$$

annulis (β) jam valde applanatis secundum formulam (18) esse sequitur

$$a b r : a_1 b_1 r_1 = \rho_1 : \rho = \frac{b_1}{a_1} : \frac{b}{a}$$

ergo

$$b^2 : b_1^2 = r_1 : r \quad (19)$$

et

$$\tau^2 : \tau_1^2 = r_1^3 : r^3 = b^6 : b_1^6. \quad (20)$$

Cum vero Lim τ constans sit, ex formula (20) intelligitur, etiam limitem valoris r constantem fieri, i. e. quamvis infinite condensatum sit fluidum, tamen tabulae instar finitam extensionem retinere. Idem cadit in Ell(β).

Iam vero secundum formulam (18) habemus

$$\text{Lim}(a_1 : a_0) = \text{Lim}(\rho_1 : \rho_0) \quad (21)$$

i. e. in eo termino, ubi r et b constantes fiunt, annulus extenuatur proportionaliter cum gradu condensationis [ut in Ell(β)]. Maxime vero mirum est, quod etiam velocitas rotatilis ω ad finitum quendam terminum accedit et idem in Ell(β) fit.

Ut enim sit $\rho_1 = 1$ et $\omega_1 = 1$, positis praeterea

$$V_1 = 0,1392, \quad \sqrt{1 + \lambda_1^2} = 1,969, \quad \tau_1 = 1,9, \quad E_1 = 1,481$$

efficitur $2\pi f = \frac{1}{0,1392}$ et ubi λ aliquanto crevit

$$V = 0,55911 : \lambda.$$

Quod si in formulam (14) substituitur, fit

$$\frac{\lambda}{\rho} = \left(\frac{0,1392}{0,55911} \right)^3 \cdot 1,969^4 = 0,23195 \quad (22)$$

et quia

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{0,55911}{\lambda}$$

$$\text{Lim } \omega = \left(\frac{0,55911}{1,969 \cdot 0,1392} \right)^2 = 4,161. \quad (23)$$

Aequatio (22) offert exponentem proportionis, quae inest in formula (18).
Secundum aequationem

$$M = 2\pi^2 \rho a b r = 2\pi^2 \rho_1 a_1 b_1 r_1$$

est

$$\frac{\omega^3}{\omega_1^3} = \frac{b_1^{\frac{8}{3}} \cdot r_1^{\frac{10}{3}} (4 + 3\tau_1^2)}{b^{\frac{8}{3}} \cdot r^{\frac{10}{3}} (4 + 3\tau^2)} = \frac{b_1^{\frac{8}{3}} r_1^{\frac{4}{3}} (4r_1^2 + 3b_1^2)}{b^{\frac{8}{3}} r^{\frac{4}{3}} (4r^2 + 3b^2)}. \quad (24)$$

Vires centrifugae in exterioribus aequatoribus sunt in proportione

$$k_0 : k_1 = \omega_0^2 (r_0 + b_0) : \omega_1^2 (r_1 + b_1)$$

in interioribus aequatoribus annulorum

$$k_0 : k_1 = \omega_0^2 (r_0 - b_0) : \omega_1^2 (r_0 - b_0)$$

ergo

$$\frac{k_0}{k_1} = \frac{r_0 \pm b_0}{r_1 \pm b_1} \cdot \frac{\tau_1^{\frac{16}{5}}}{\tau_0^{\frac{16}{5}}} \cdot \frac{(4 + 3\tau_1^2)^{\frac{2}{3}}}{(4 + 3\tau_0^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{r_1^4}{r_0^4}. \quad (26)$$

Si τ_0 et τ_1 minimi sunt valores, habemus

$$k_0^3 : k_1^3 = \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^{16} : \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{11}. \quad (27)$$

Cum vero $\text{Lim}(b_1 : b_0) = \text{Lim}(r_0 : r_1) = 1$ sit, secundum formulam (26) fit etiam $\text{Lim}(k_0 : k_1) = 1$.

Ad limitem r definiendum, adhibeamus formulam (25) ponamusque

$$1 : \tau_1 = 1,9, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega = 4,161.$$

Tum habebitur

$$\text{Lim}(r : r_1) = 0,34647. \quad (28)$$

Ergo per infinitam condensationem radius vector inde a maximo valore V tantummodo fere usque ad tertiam partem longitudinis abbreviari potest. Idem approximative fit in $\text{Ell}(\beta)$.

Ex aequatione

$$k_0 : k_1 = \omega_0^2(r_0 + b_0) : \omega_1^2(r_1 + b_1)$$

porro sequitur, positis $1 : \tau_1 = 1,9$ et $k_1 = 1$, ergo $r_1 + b_1 = 1$, esse

$$\text{Lim}(k_0 : k_1) = 4,161^2 \cdot \frac{2 \cdot 1,9}{2,9} \cdot 0,34647 = 7,8604. \quad (29)$$

Tum igitur vis centrifuga in exteriore aequatore maximum terminum assequitur. Cum vis centrifuga in interiore aequatore aequalis zero fiat, itemque gravitas, exterioris aequatoris gravitationem, ut aequilibrium permanere possit, cum vi centrifuga aequari oportet. Universa enim massae attractio in aequatore est:

$$\begin{aligned} B &= -4\pi f\rho \left\{ \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} - \frac{\tau^2}{4\sqrt{1 + \lambda^2}} \left(\frac{16}{3\pi} \right)^2 \right\} b_0 - \omega_0^2 r_0 \\ &= -4\pi f \frac{\rho}{\lambda} 0,2795 - 4,161^2 \cdot 0,34647 \end{aligned}$$

et secundum formulam (22), quia praeterea

$$\begin{aligned} b_0 &= r_0 = 0,34647 r_1 = 0,2247(r_1 + b_1) \\ B &= -2 \frac{0,2795}{0,1392} \left(\frac{0,55911}{0,1392} \right)^3 \cdot \frac{0,2267}{1,969^4} - 4,161^2 \cdot 0,2267 \\ &= -3,9802 - 3,9802 = -7,8604. \quad (30) \end{aligned}$$

Memoria dignum fuerit, id quod ex antecedentibus tabulae numeris sequitur, esse

$$V_{max} = \frac{1}{4} \text{Lim}(V\sqrt{1 + \lambda^2}).$$

Porro qualitas annuli (β) posito $\rho = \infty$, etiam eo cum qualitate $\text{Ell}(\beta)$ congruit, quod in hoc termino vis centrifuga cum massae attractione in aequatore equiparatur. Itaque gravitas in aequatore inter terminos $\rho = 0$ et $\rho = \infty$ maximum quemdam valorem assequitur. Idem in $\text{Ell}(\beta)$ fit, si $\lambda = 7,07$. Quantus autem ille maximus valor sit in annulis, difficillimum erit dictu, et quod attinet ad ellipsoida etiam impeditae ac difficilis aequationis transcendens dissolutionem requirit.

Priusquam hanc commentationem concludamus, ex graphica relationum quae inter valores E et V intercedunt, delineatione, in qua abscissae curvarum variabilem valorem V , ordinatae variabilem valorem $\frac{E}{16}$ repraesentant, colligimus hoc gravissimum theorema :

Pro quaque energia inter terminos 0 et 0,62003, massa fluida nonnisi *unam* aequilibrii figuram scilicet $\text{Ell}(\alpha)$ induere; pro quaque energia inter terminos 0,62003 et 1,48 semper *duas* aequilibrii figuras scilicet $\text{Ell}(\beta)$ aut $\text{Ell}(\gamma)$ recipere; denique pro quaque energia inter terminos 1,48 et ∞ semper *quatuor* aequilibrii figuras, $\text{Ell}(\beta)$, $\text{Ell}(\gamma)$, annulum (α) et annulum (β) explere potest.

Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques.

(par M.^r SMITH, à Oxford)

On admet qu'on peut résoudre par de simples intersections de lignes droites tout problème de géométrie plane, qui n'a qu'une seule solution, et qui n'est pas transcendantal; ou, pour nous exprimer avec plus de précision, tout problème dont la solution unique peut s'obtenir par des intersections de courbes géométriques d'un ordre quelconque fini. On admet de même, que tout problème quadratique, qui n'est pas transcendantal, peut se résoudre par des intersections de lignes droites, et de sections coniques; et, plus généralement, que tout problème qui n'a que n solutions, et qui n'est pas transcendantal, peut se résoudre par des intersections de droites, et de courbes de l'ordre n . Et en effet, la vérité de ces théorèmes paraît découler des premiers principes de l'Algèbre. Mais quand il s'agit de problèmes d'un degré supérieur au second il se présente un choix de méthodes, puisqu'on peut se servir, soit des intersections de droites par des courbes dont l'ordre n est égal au nombre de solutions du problème, soit des intersections de courbes dont l'ordre est intermédiaire entre les deux nombres 1 et $n-1$. Ainsi, l'on peut faire dépendre la solution de tout problème cubique ou biquadratique, soit des intersections de courbes du troisième ou du quatrième ordre par des droites, soit des intersections mutuelles de courbes du second ordre, puisqu'on a la même évidence algébrique de la généralité absolue des deux méthodes. Or, c'est la dernière de ces deux méthodes qui paraît la plus simple, et qui à été, à juste titre, préférée par les géomètres. Ainsi, l'on a ramené la recherche des points d'intersection d'une droite par une courbe du troisième ou du quatrième ordre à la recherche plus simple des points d'intersection de deux coniques, tandis que personne, que nous sachions, n'a suivi la marche inverse, qui à la vérité serait peu naturelle.

Il nous a donc paru qu'il fallait avant tout apporter quelque perfectionnement théorique aux moyens dont on se sert pour trouver les intersections de deux coniques données. Pour cela, nous avons cru devoir imiter, autant que possible, les méthodes dont on s'est servi si heureusement pour les problèmes quadratiques. En effet, on sait que tout problème, qui n'admet que deux solutions, et qui n'est pas transcendantal, peut être résolu par les intersections de lignes droites, et d'une seule circonférence de cercle, tracée d'avance dans le plan. On doit ce beau résultat, base véritable de la partie opérative de la science, aux travaux des illustres fondateurs de la géométrie moderne; il suffira de citer à cet égard le *Traité des Propriétés Projectives* de M. PONCELET, et l'ouvrage élémentaire de STEINER, ayant pour titre: *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie, und Eines festen Kreises*. On suppose ordinairement que le centre du cercle tracé est donné, afin d'avoir en même temps la ligne droite à l'infini, et les deux points imaginaires conjugués où cette droite est coupée par une circonférence quelconque; éléments dont la connaissance est indispensable pour la solution d'un grand nombre de problèmes dont les données en dépendent, soit explicitement, soit implicitement. Nous ajouterons, qu'au lieu d'une circonférence de cercle, on peut prendre pour courbe auxiliaire une section conique quelconque complètement décrite, dont on doit connaître, non seulement le centre (ou deux diamètres, si la courbe est parabolique) mais aussi le foyer.

En passant aux problèmes d'un ordre plus élevé, nous supposerons qu'une seule section conique (qui d'ailleurs ne doit pas être un cercle) soit complètement donnée et décrite, et nous démontrerons qu'en se servant de cette courbe auxiliaire on résout tous les problèmes cubiques et biquadratiques avec la règle et le compas seulement, en les ramenant, pour ainsi dire, dans les limites de la géométrie élémentaire. Nous ferons aussi remarquer que pour chaque problème il suffira de tracer une seule circonférence de cercle, et qu'en supposant connus cinq points seulement de la section conique, on peut remettre la description de cette courbe jusqu'au moment où l'on veut en déterminer les points d'intersection par le cercle qu'on doit tracer. Il est bien entendu que, lorsqu'on veut opérer de cette manière, on doit supposer que la ligne droite à l'infini, et les points cycliques sur cette droite soient connus; c'est à dire que doivent être données (1) un parallélogramme quelconque (2), deux angles droites, ou trois angles égaux quelconques, ces angles dans les deux cas pouvant avoir ou le même sommet, ou des som-

mets différents, mais étant assujettis à ne pas former un parallélogramme. Sans ces données, on ne pourrait déterminer ni le centre du cercle, qu'on aura à tracer, ni son rayon. La solution de chaque problème cubique sera purement linéaire, sauf le tracé du cercle; mais pour les problèmes biquadratiques il y aura en général une construction quadratique, qu'on ne pourra éviter, mais qu'on pourra effectuer, soit avant, soit après le tracé du cercle. Mais puisqu'au point de vue pratique on abrège beaucoup d'opérations linéaires en se servant d'une section conique, nous n'insisterons point sur la linéarité absolue des constructions, et, le plus ordinairement, nous ferons usage en chaque problème de la conique auxiliaire dès le commencement même de la solution.

La méthode que nous venons d'esquisser n'a rien de bien nouveau, puisqu'on la trouve déjà, comme résultat analytique, dans la *Géométrie* de DESCARTES (*). Mais nous ne connaissons pas un seul problème qui ait été résolu géométriquement par cette méthode. Les auteurs qui ont traité de cette matière, parmi lesquels nous signalerons DE LA HIRE, MACLAURIN, et JOACHIMSTHAL (**), nous paraissent ne pas avoir cherché à démontrer par des considérations de géométrie pure la proposition si remarquable de DESCARTES, ni à s'en servir pour la solution géométrique des problèmes. Ainsi MACLAURIN ne s'occupe-t-il guère que de la construction géométrique des racines des équations algébriques; DE LA HIRE, qui s'est proposé de trouver les normales à une section conique qui passent par un point donné, n'a rattaché sa solution de ce problème à aucune théorie géométrique; enfin, JOACHIMSTHAL, qui a donné une autre solution, d'une élégance admirable, de ce même problème biquadratique, s'est encore servi de formules analytiques, dont, comme il l'avoue lui-même, sa construction géométrique n'est pas entièrement affranchie. Il restait donc à trouver les liens qui rattachent la proposition de DESCARTES aux théories modernes de la science, et à montrer de parti qu'on peut en tirer pour les constructions actuelles de la géométrie pure. Nous nous empressons d'ajouter que dans ces développements nous n'aurons qu'à nous occuper de considérations très élémentaires. En effet, nous admettrons que la solution de tout problème cubique ou biquadratique peut se réduire à la détermination des points d'intersection de deux coniques, qui ne sont pas décrites, mais dont chacune est déterminée par un nombre suffisant

(*) Note I.

(**) Note II.

d'éléments; et nous ramènerons ce dernier problème à celui de trouver les points d'intersection d'une circonférence de cercle par la section conique décrite d'avance, au moyen de simples transformations homographiques ou corrélatives, dont on pourra se servir en plusieurs manières différentes.

Les problèmes que nous aurons à résoudre, et surtout le problème cubique dont la solution est spécialement demandée par l'Académie, impliquent nécessairement des considérations relatives aux éléments imaginaires. Nous jugeons donc à propos, avant de venir au sujet qui doit nous occuper principalement, d'entrer dans quelques détails sur cette matière. Nous sommes loin de penser que nous pourrions ajouter à cet égard quelque chose qui fût inconnue aux géomètres; et nous n'avons aucune prétention de pouvoir éclaircir la vraie nature de ce phénomène singulier qu'on nomme l'imaginaire en géométrie. Mais nous avons remarqué que les questions théoriques qui concernent les imaginaires ont été traitées avec beaucoup plus de détail que les questions pratiques. On a bien donné les moyens nécessaires pour déterminer les éléments réels, qui dépendent pour ainsi dire immédiatement d'éléments imaginaires donnés. On sait, par exemple, trouver les axes de symptose réels de deux couples de droites imaginaires conjuguées etc.; mais il s'en faut beaucoup que de telles déterminations suffisent aux besoins actuels de la science. Il paraît résulter de considérations algébriques très élémentaires que tout problème qui peut se résoudre lorsqu'on en suppose les données réelles, devra également rester résoluble lorsqu'on substitue deux éléments imaginaires conjugués à deux éléments quelconques réels qui entrent symétriquement dans la question. Mais pour opérer généralement cette extension de la solution d'un problème aux données réelles à la solution d'un problème aux données imaginaires, il faut souvent, du moins dans l'état actuel de la science, isoler l'un de l'autre les deux éléments d'un même couple d'éléments imaginaires conjugués, afin de faire sur chacun d'eux une suite d'opérations plus ou moins longue, ayant pour résultat des couples d'éléments imaginaires conjugués, dont la combinaison donne enfin les éléments réels qu'on cherche. Cette isolation des éléments imaginaires n'a rien d'absolu; elle est relative à un système de deux éléments imaginaires conjugués arbitrairement choisis. En effet, étant donnée une seule couple d'éléments imaginaires conjugués, il paraît tout aussi impossible de distinguer entre ces éléments que de distinguer entre les racines de l'équation

$$x^2 + 1 = 0.$$

Mais, de même qu'en distinguant hypothétiquement entre les deux racines de cette équation, (ce qu'on fait, par exemple, quand on les désigne par $+i$ et $-i$), on parvient à distinguer en même temps entre les deux racines imaginaires, de toute autre équation quadratique; de même, en créant une fois pour toutes une distinction fictive entre les deux éléments d'une couple quelconque d'éléments imaginaires conjugués on arrive à établir en même temps une distinction pareille entre les deux éléments de toute autre couple; puis, en admettant cette isolation relative, on peut opérer sur les éléments imaginaires tout aussi bien que sur les éléments réels; quoiqu'il faut avouer que, dans le cas des premiers, les opérations auxquelles on se trouve conduit sont presque toujours d'une longueur rebutante. L'illustre et regrettable auteur de la *Géométrie de Situation* a sagement effectué cette isolation hypothétique des éléments imaginaires, en rattachant chaque élément d'une même couple à l'un des deux sens opposés qu'on peut observer en toute formation géométrique qui contient des éléments imaginaires. Mais cette manière de considérer la chose, quoique très utile pour les développements théoriques, nous semble se prêter aux constructions avec moins de simplicité que celle que nous avons dû préférer pour notre but actuel.

D'après ce qui vient d'être dit, nous diviserons ce mémoire en trois parties. Dans la première nous traiterons des constructions dont les données sont imaginaires; dans la seconde nous démontrerons le théorème de DESCARTES; dans la troisième nous étudierons divers problèmes cubiques ou biquadratiques, et notamment celui qui a été signalé par l'Académie.

Première partie.

ART. 1.

Dans cette partie de notre travail nous ferons usage du mot grec *dyade* pour exprimer l'ensemble de deux éléments conjugués imaginaires. Par chaque dyade de points imaginaires il passe une seule droite réelle; elle sera pour nous l'*axe* de la dyade. Dans l'espace, il existe, comme on sait, des dyades de droites imaginaires qui ne se coupent pas, et qui ne passent par aucun point réel. Mais les deux rayons d'une dyade de droites imaginaires, qui se trouvent dans un plan réel, se coupent en un point qui est toujours réel, et que nous nommerons le *centre* de la dyade de lignes droites.

Pour plus de simplicité, nous considérerons chaque dyade comme formée par les éléments doubles d'une involution réelle, dont les segments, ou les angles, empiètent les uns sur les autres. Cette définition d'une dyade aura toute la généralité nécessaire, puisqu'on sait que toute détermination quadratique se réduit, en dernière analyse, à la recherche des éléments doubles de deux systèmes homographiques, éléments qui sont en même temps les éléments doubles d'une involution, qu'on déduit linéairement des deux systèmes homographiques, en prenant dans chacun des deux systèmes, l'élément conjugué d'un même élément P , dont le conjugué harmonique par rapport à ces deux éléments sera aussi le conjugué dans l'involution cherchée. Nous dirons qu'une dyade est donnée, quand on a deux couples d'éléments réels de l'involution dont la dyade représente les éléments doubles.

Maintenant, si l'on prend une première dyade $a_1 a_2$ sur l'axe A , et une seconde dyade $b_1 b_2$ sur l'axe B , différent de A , qu'il coupe au point (A_1, B_1) , les deux couples de droites imaginaires $a_1 b_1, a_2 b_2$, et $a_1 b_2, a_2 b_1$, seront évidemment des dyades de droites. Soient P et Q les centres de ces dyades; nous les appellerons les *centres d'homologie* des dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$. On trouve linéairement la droite PQ , en joignant les deux points A_2, B_2 qui sont conjugués de (A_1, B_1) dans les deux involutions qui déterminent les dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$. Mais la construction des points P, Q eux-mêmes est essentiellement quadratique. Soient $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$ des couples de points appartenant aux deux involutions respectivement; les points P, Q seront les points doubles d'une involution, dont $A_2 B_2$ est une première couple, et dont on trouve deux autres couples en prenant les intersections de PQ par les deux couples de droites $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_2$ et $\alpha_1 \beta_2, \alpha_2 \beta_1$. Cependant, on voit facilement que les segments de cette involution ne peuvent pas empiéter les uns sur les autres; donc les points PQ seront toujours réels, comme on peut voir *a priori*. L'un des points PQ étant donné, l'autre s'en déduit linéairement, puisque $PQ, A_2 B_2$ sont quatre points harmoniques. Pour avoir une image nette des deux dyades et de leurs deux centres d'homologie, on peut remarquer que si $a_1 a_2$ est la dyade cyclique à l'infini, $b_1 b_2$ est la dyade commune à un système de cercles, ayant B pour axe radical, et PQ pour points limites. Nous ne nous arrêterons pas à la construction correlative des *axes d'homologie*, ou de *symptose*, de deux dyades de droites imaginaires, qui n'ont pas le même centre.

En considérant deux dyades de points imaginaires, qui n'ont pas le même axe, comme homologues par rapport à l'un de leurs centres d'homologie,

on établit une certaine correspondance entre les points des deux dyades, en telle sorte que si l'on échange entr'eux les points imaginaires de l'une, il faut en même temps échanger entr'eux les points imaginaires de l'autre. Puisqu'il y a deux centres d'homologie, cette correspondance peut s'établir de deux manières différentes, qui se rapportent à ces deux centres respectivement. Ainsi nous dirons que l'homologie des deux dyades est donnée par le centre P , ou par le centre Q , selon que l'on a choisi le premier ou le second de ces deux centres pour établir la correspondance. Pour les dyades de droites imaginaires dont les centres sont différents, on a une définition correlative.

III

Si l'on a deux dyades de même espèce, ayant le même centre, ou le même axe, on doit établir leur homologie d'une manière indirecte, en prenant une troisième dyade, dont le centre ou l'axe soit différent, mais dont l'homologie avec chacune des deux premières soit donnée.

L'homologie d'une dyade de points, et d'une dyade de droites, est donnée immédiatement, lorsque les droites de la seconde dyade passent par les points correspondants de la première. En tout autre cas on établit indirectement l'homologie des deux dyades; soit en déterminant le centre d'homologie de la première dyade, et de la dyade de points qui résulte de l'intersection de la seconde dyade par un axe quelconqué réel, soit en déterminant l'axe d'homologie de la seconde dyade et d'une dyade quelconqué de droites imaginaires passant par la première dyade (*).

ART. 2.

Quand on ne considère que deux dyades, indépendantes l'une de l'autre, on peut choisir arbitrairement entre les deux manières de déterminer leur homologie. Mais en considérant un plus grand nombre de dyades, on voit qu'on peut disposer comme on veut de l'homologie de la seconde avec la première, de la troisième avec la première, et ainsi de suite, mais qu'alors l'homologie de deux dyades quelconques de cette série sera complètement déterminée. Nous aurons donc à résoudre le problème très général, mais très élémentaire, que voici.

Etant donnée l'homologie des dyades $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, et aussi l'homologie des dyades $a_1 a_2$, $c_1 c_2$, trouver l'homologie des dyades $b_1 b_2$, $c_1 c_2$.

(*) Note III.

Ce problème est toujours résoluble linéairement. Il y a plusieurs cas à considérer, mais pour abrégéer nous n'en considérons que la moitié, d'où l'on pourra déduire la solution des autres en s'appuyant sur le principe de dualité.

I. Soient A, B, C les axes des trois dyades de points $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$; nous supposons en premier lieu que ces droites soient toutes différentes entr'elles. Soient Q et R les centres d'homologie de $a_1 a_2, c_1 c_2$ et de $a_1 a_2, b_1 b_2$ respectivement. Il s'agit de trouver P le centre d'homologie de $b_1 b_2, c_1 c_2$. On se rappelle que si P' est le centre d'homologie opposé à P , la droite PP' peut se construire linéairement (*).

Première solution. — Du point Q projetons les points de l'axe A sur la droite C , et du point R projetons les mêmes points sur la droite B : Soient $\alpha_1 \alpha_2$ deux points conjugués de l'involution déterminant la dyade $a_1 a_2$; $\beta_1 \beta_2$ et $\gamma_1 \gamma_2$ les projections de ces points sur B et C respectivement. Les droites $\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2$, etc., envelopperont une section conique, tangente aux deux droites B et C ; de plus, les couples de tangentes, telles que $\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2$, formeront un système de tangentes en involution de cette conique; donc les points d'intersection des deux tangentes de chaque couple seront en ligne droite. Le pôle de cette droite, par rapport à la conique, est le point P cherché. Pour le déterminer, il suffira de trouver le point de contact sur chacune des deux tangentes $\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2$: la corde joignant ces points ira couper PP' au point P .

Si les trois axes A, B, C se coupent au même point O , les deux droites B, C , qui sont déjà homographiques par rapport aux points $\beta_1 \beta_2 \dots, \gamma_1 \gamma_2 \dots$, deviendront homologues par rapport à ces mêmes points, puisque le point O se correspondra à lui même sur chacune des deux droites. Dans ce cas le centre d'homologie des deux droites est précisément le point cherché P , qui se trouvera à l'intersection des droites PP', QR . Il y aurait aussi une simplification, si les trois droites QR, B, C concouraient en un même point.

Seconde solution. — On déterminera, comme nous avons fait dans la première solution, deux divisions homographiques sur les droites B et C . L'axe (**) de ces deux divisions coupera PP' au point P . Ce point trouvé, la position du point P s'en déduira linéairement.

Cette solution se simplifie (1) si les divisions homographiques sur les deux

(*) Note IV.

(**) L'axe des deux divisions homographiques $\alpha_1 \alpha_2 \dots, \beta_1 \beta_2 \dots$ est la droite lieu des points d'intersection des couples de droites telles que $\alpha_1 \beta_2, \alpha_2 \beta_1$.

droites B et C deviennent homologues, (2) si l'axe de ces deux divisions se confond avec PP' . En ce dernier cas, on échange entr'eux, sur l'un des deux droites B et C , les deux points conjugués de chaque couple de l'involution qui détermine la dyade que l'on considère sur cette droite. Alors les deux droites deviennent homologues, et leur centre d'homologie est le point P qu'on cherche.

Si l'axe A se confond avec l'un des axes B et C , on pourrait encore trouver l'homologie des dyades $b_1 b_2, c_1 c_2$, en faisant de légères modifications dans les solutions précédentes sans rien changer à leur principe. Mais on peut aussi opérer de la manière suivante. Soit $z_1 z_2$ la dyade auxiliaire qui établit l'homologie de $a_1 a_2, b_1 b_2$, dont on suppose les axes coïncidents. L'homologie des dyades $a_1 a_2, z_1 z_2$ sera donnée, et aussi celle des dyades $a_1 a_2, c_1 c_2$; on en déduira l'homologie des dyades $z_1 z_2, c_1 c_2$. Mais l'homologie des dyades $z_1 z_2, b_1 b_2$ est connue; donc on pourra trouver l'homologie des dyades $b_1 b_2, c_1 c_2$. Cette solution suppose seulement, que l'axe de la dyade $z_1 z_2$ ne se confonde pas avec C .

Si les trois axes A, B, C coïncident, soit $y_1 y_2$ la dyade auxiliaire qui établit l'homologie de $a_1 a_2, c_1 c_2$; on trouvera par le cas précédent l'homologie de $b_1 b_2, y_1 y_2$. Mais alors $y_1 y_2$ sera une dyade auxiliaire qui établira l'homologie de $b_1 b_2, c_1 c_2$.

II. Ce qui précède suffit pour tous les cas où l'on ne considère que des dyades de la même espèce: nous allons maintenant supposer que les trois dyades $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ soient d'espèces différentes. Nous ne considérons que les deux cas suivants, dans lesquels nous supposons toujours que l'homologie de $a_1 a_2, b_1 b_2$, et de $a_1 a_2, c_1 c_2$, soit donnée, et que l'on cherche l'homologie de $b_1 b_2, c_1 c_2$.

(i.) Soient $a_1 a_2, b_1 b_2$ des dyades de points, $c_1 c_2$ une dyade de droites: soit aussi $y_1 y_2$ la dyade de points auxiliaires qui sert à établir l'homologie de $a_1 a_2, c_1 c_2$. Pour déterminer l'homologie de $b_1 b_2, c_1 c_2$, on n'aura qu'à trouver l'homologie de $y_1 y_2, b_1 b_2$, ce qu'on pourra faire, puisqu'on connaît l'homologie de $a_1 a_2, b_1 b_2$, et aussi celle de $a_1 a_2, y_1 y_2$.

(ii) Soit $a_1 a_2$ une dyade de droites, $b_1 b_2, c_1 c_2$ des dyades de points. Désignons par $y_1 y_2, z_1 z_2$ les dyades de points qui établissent l'homologie de $a_1 a_2$ avec $c_1 c_2$ et $b_1 b_2$ respectivement. Dans la série de dyades $b_1 b_2, z_1 z_2, y_1 y_2, c_1 c_2$, on connaît l'homologie de chacune avec celle qui la précède: donc on pourra trouver l'homologie de la première avec la dernière.

On peut donner un énoncé plus général du problème de cet article.

« Soient $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, x_1, x_2$ des dyades en nombre quelconque, de même espèce ou d'espèces différentes; étant donnée l'homologie de chacune d'elles avec celle qui la suit immédiatement, on peut trouver l'homologie de la première avec la dernière. »

ART. 3.

Maintenant, prenons arbitrairement une dyade fixe, qui doit nous servir comme terme de comparaison pour toutes les autres dyades que nous aurons à considérer. Nous dirons qu'un élément imaginaire est donné, quand la dyade à laquelle cet élément appartient est donnée, l'homologie de cette dyade avec la dyade fixe étant aussi donnée. On voit que pour connaître un élément imaginaire, il faut connaître (1) l'axe, ou le centre, de la dyade à laquelle l'élément appartient, (2) deux couples d'éléments réels de l'involution qui détermine cette dyade, (3) l'homologie de cette même dyade avec la dyade fixe. Il faut convenir que de cette manière on n'isole pas l'un des deux éléments imaginaires d'une même dyade, et que, par conséquent, l'expression « élément imaginaire donné », n'est pas rigoureuse. Cependant on voit que si l'on échange un élément imaginaire donné avec son conjugué, il faut en même temps échanger tout autre élément donné avec son conjugué. Et c'est là tout ce qu'il faut pour qu'on puisse opérer avec des données imaginaires, de la même manière qu'avec des données réelles. En effet, nous pourrions maintenant résoudre les deux problèmes corrélatifs que voici.

Trouver le point d'intersection de deux droites données, dont l'une au moins est supposée imaginaire.

Trouver la droite qui passe par deux points donnés, dont l'un au moins est supposé imaginaire.

Il suffira de considérer le second de ces deux problèmes. Soient donc a_1, b_1 , deux points imaginaires donnés, dont les axes ne se confondent pas. Puisque les points a_1, b_1 sont donnés, les dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$, auxquelles ils appartiennent, sont aussi données, de même que l'homologie de chacune d'elles avec la dyade fixe. On peut donc trouver linéairement l'homologie de ces deux dyades. Soit P leur centre d'homologie; P sera le centre de la dyade à laquelle appartient la droite cherchée (a_1, b_1). Les involutions qui correspondent aux dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$ déterminent la même involution au point P ; cette involution déterminera la dyade $P a_1 b_1, P a_2 b_2$. Enfin l'homologie de cette dyade de droites avec chacune des dyades $a_1 b_1, a_2 b_2$ est donnée

immédiatement; on peut donc trouver son homologie avec la dyade fixe; ce qui achève la détermination de la droite (a_1, b_1) .

ART. 4.

Il résulte de la solution de ces deux problèmes, que lorsqu'on peut résoudre linéairement un problème quelconque, dont les données ne contiennent que des points et des droites réelles, on pourra encore résoudre linéairement ce même problème, après qu'on aura substitué, en tout ou en partie, des droites et des points imaginaires donnés, aux données réelles du problème. On n'aura qu'à suivre de pas en pas la solution du problème aux données réelles pour en conclure la solution du problème correspondant aux données imaginaires. Seulement, puisque les déterminations des droites joignant des points donnés, et des points d'intersection des droites donnés, qui sont des *Postulata* pour les cas réels, exigent des constructions détournées pour les cas imaginaires, on conçoit que la méthode, quoique parfaitement générale, doit conduire à des opérations assez longues.

Supposons qu'on ait résolu linéairement un problème dont les données soient toutes réelles; si, parmi ces données, il y en a deux qui entrent symétriquement dans la question, on pourra substituer une dyade donnée à ces éléments symétriques, sans que le problème cesse d'être résoluble linéairement. En effet, après cette substitution il n'y aura qu'une seule dyade indépendante; en la prenant pour la dyade fixe, on trouvera linéairement l'homologie de toute dyade dérivée qu'on aura à considérer, et l'on n'aura qu'à opérer sur des éléments imaginaires donnés. Mais il en serait autrement, si l'on voulait substituer à la fois plusieurs dyades à la place d'un nombre égal de couples de données réelles. Toutes ces dyades seraient indépendantes, et pour qu'on pût appliquer la méthode précédente, il faudrait qu'on en connût les centres, ou les axes d'homologie. Dans les applications, on fera bien de déterminer actuellement ces centres ou ces axes par la construction que nous avons appelée ci-dessus. Mais, puisque cette construction est quadratique, il importe de faire voir qu'on pourrait s'en passer à la rigueur. Pour cela, il faut seulement qu'au lieu d'introduire toutes les dyades à la fois, on les introduise l'une après l'autre. Toutes les fois que l'on substituera une seule dyade à deux données symétriques réelles, on aura un nouveau problème, dont on pourra trouver la solution par ce qui précède. Mais on peut considérer ce nouveau problème comme n'impliquant que des

données réelles, puisque la dyade que nous y avons fait entrer, peut être remplacée par deux couples de l'involution qui la détermine. On pourra donc substituer une seconde dyade à une seconde couple de données réelles, et ainsi de suite, sans qu'on ait besoin d'aucune construction quadratique.

ART. 5.

Nous allons maintenant indiquer quelques problèmes dont on puisse trouver les solutions par les principes précédents. Tout élément, qui n'est pas dit expressément être réel, pourra être imaginaire.

(i.) *Étant donnés trois points d'une même droite, ou trois droites passant par un même point, trouver le conjugué harmonique d'un de ces éléments, par rapport aux deux autres.*

Soient a_1, b_1, c_1 des points donnés d'une même droite ω_1 , et proposons nous de trouver le point d_1 , conjugué harmonique de c_1 , par rapport à $a_1 b_1$. Soient A, B, C les axes des dyades $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$; α, β, γ , les trois sommets du triangle ABC . La droite A sera l'axe d'homologie des dyades $(\alpha a_1, \alpha a_2)$ et $\omega_1 \omega_2$; pareillement, B sera l'axe d'homologie des dyades $(\beta b_1, \beta b_2)$ et $\omega_1 \omega_2$; on pourra donc déterminer l'axe d'homologie X des dyades $(\alpha a_1, \alpha a_2); (\beta b_1, \beta b_2)$; soit $x_1 x_2$ la dyade de points déterminée sur X par ces deux dyades, et D l'axe d'homologie des dyades $(\gamma x_1, \gamma x_2)$ et $\omega_1 \omega_2$; D sera l'axe de la dyade cherchée $d_1 d_2$, dont l'homologie avec $\omega_1 \omega_2$ sera évidemment connue.

(ii.) *Étant donnés, dans deux séries homographiques, trois éléments de l'une, et les trois éléments correspondants de l'autre, trouver l'élément de l'une des deux séries qui correspond à un élément quelconque de l'autre.*

On résoudra linéairement ce problème général, en imitant, de la manière que nous avons expliquée, les solutions qu'on a données du problème dans le cas particulier où les données sont réelles. Le principe de ces solutions (auxquelles on peut donner des formes très variées) consiste, comme on sait, à trouver une troisième série qui soit homologique avec chacune des deux séries données.

On aura en même temps la solution du problème important,

Étant donnés cinq éléments de même espèce qui déterminent une conique, trouver autant d'éléments de cette courbe qu'on voudra, qui est au fond le même que le précédent.

Il y a deux cas très particuliers qui méritent quelque attention.

(1.) *Étant données deux dyades de droites $a_1 a_2, b_1 b_2$ ayant le même centre P , et deux autres dyades $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$, ayant le même centre Π , et vérifiant l'équation (*)*

$$\Pi \cdot [\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2] = P \cdot [a_1 a_2, b_1 b_2]$$

trouver la droite d'un des deux faisceaux qui correspond à une droite donnée de l'autre faisceau.

Pour que ce problème n'admette qu'une seule solution il faut qu'on connaisse l'axe d'omologie A des dyades $a_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2$, et l'axe d'homologie B des dyades $b_1 b_2, \beta_1 \beta_2$. Il est vrai que l'un des deux axes étant donné, on pourrait trouver l'autre linéairement, mais, pour abrégé, nous supprimerons la démonstration de cette assertion, et nous supposerons que les axes A et B soient tous les deux donnés (**). Soient $p_1 p_2, q_1 q_2$ les dyades qu'on aura sur les droites A et B . En faisant passer une conique par les points $p_1 p_2, q_1 q_2, P\Pi$ on ramènera le problème à celui de déterminer autant de points qu'on voudra d'une conique dont on connaît deux dyades et deux points réels. Mais, comme on sait, le théorème de CARNOT conduit à une solution linéaire de ce dernier problème, même en supposant qu'un seul point réel de la conique soit donné.

(2.) *Par un point P d'une conique dont on connaît cinq points réels il passe une droite imaginaire donnée; trouver le second point d'intersection de cette droite par la conique.*

Soit (1°) P un point réel. On sait trouver l'axe de symptôse réel de la conique et de la dyade à laquelle appartient la droite imaginaire: le point d'intersection de cet axe par la droite imaginaire donnée sera le point cherché.

Soit (2°) P un point imaginaire. L'axe de la dyade à laquelle ce point appartient sera l'un des axes de symptôse de la conique et de la dyade à laquelle appartient la droite imaginaire donnée. L'autre axe se trouvera linéairement et fera connaître la solution du problème.

(iii.) *Étant donné le tracé complet d'une conique réelle, trouver les points d'intersection d'une droite ω_1 par une conique C , réelle ou imaginaire, dont on donnait cinq points.*

Soit C réelle. On trouvera par une construction quadratique connue, pour laquelle on se servira de la conique tracée, les deux axes de symptôse de

(*) Voir la note Art. 3, troisième partie.

(**) Note V.

C et de la dyade de droites ω_1, ω_2 ; les points d'intersection de ces deux axes par ω_1 seront les points cherchés.

Soit C imaginaire. On ramenera la question à la recherche des points doubles de deux divisions homographiques sur une même droite. On projettera ces deux divisions sur la conique tracée; et l'on cherchera l'axe des deux divisions projetées. Cet axe sera en général imaginaire; on déterminera les points où il est coupé par la conique tracée; ces points feront connaître la solution du problème.

(iv.) *Étant donnés cinq points imaginaires, trouver des coniques réelles appartenant au faisceau qui contient les coniques imaginaires déterminées par ces cinq points, et par leurs cinq points conjugués.*

Soit P un point réel, et proposons nous de déterminer la conique du faisceau qui passe par le point P .

Il importe d'observer que si l'homologie des cinq dyades était inconnue (hypothèse que nous excluons, puisque nous supposons que les cinq points sont donnés) il y aurait seize solutions correspondant à chaque point P , puisque les cinq dyades déterminent trente deux coniques dont chacune passe par l'un de deux points de chaque dyade. Cette remarque montre clairement l'importance qu'on doit attacher à l'homologie des dyades.

Pour trouver la conique passant par P , on prendra un point quelconque réel q , et l'on en déterminera la polaire relativement à l'une des coniques imaginaires. Cette détermination sera toujours possible puisqu'elle n'exige que des opérations linéaires que nous avons déjà enseigné à faire. Soit Q le centre de la dyade à laquelle appartient la polaire de q ; toute conique du faisceau divisera harmoniquement le segment réel qQ . En prenant quatre points q_1, q_2, q_3, q_4 , et leurs quatre points réciproques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , on aura la solution du problème, puisqu'on sait construire la conique qui passe par un point réel donné, et coupe harmoniquement quatre segments réels.

On résoudrait de la même manière le problème suivant.

Étant donnés deux systèmes polaires réels, dont les coniques peuvent être imaginaires, trouver la conique qui passe par un point réel donné, et qui appartient au faisceau déterminé par les deux coniques.

Nous ferons remarquer à cette occasion qu'il y a deux espèces différentes de coniques imaginaires qu'il importe de distinguer entr'elles. Une conique imaginaire de la première espèce n'a aucun point réel; elle est coupée par toute transversale réelle en deux points imaginaires conjugués; elle a un système polaire réel. Une conique imaginaire de la seconde espèce a une

base formée, soit de quatre points réels, soit de deux points réels et d'une dyade, soit de deux dyades. Elle coupe toute transversale réelle (autre que celles qui joignent deux des points de la base) en deux points qui ne sont ni tous les deux réels, ni des points imaginaires conjugués. La polaire de tout pôle réel qui n'est pas un sommet du triangle harmonique de la base, est imaginaire.

(v.) *Etant données deux dyades $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$, ayant le même axe, et deux autres dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$, ayant des axes A et B différents l'un de l'autre; trouver la conique Σ qui passe par les deux dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$, et qui satisfait à l'équation*

$$[a_1, a_2, b_1, b_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2].$$

Pour que ce problème soit linéaire il faut que l'homologie des dyades $\alpha_1 \alpha_2, a_1 a_2$, et aussi celle des dyades $\beta_1 \beta_2, b_1 b_2$, soient données. On prendra le centre d'homologie de $\alpha_1 \alpha_2, a_1 a_2$; de ce centre on projettera $\beta_1 \beta_2$ sur A ; et l'on déterminera le centre d'homologie de $b_1 b_2$, et de la projection de $\beta_1 \beta_2$ sur A . Ce dernier centre sera un point de la conique cherchée Σ , qui sera dès lors complètement déterminée.

Si l'on supposait que les dyades $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$, n'ont pas le même axe, mais qu'elles appartiennent à une conique réelle Γ , l'expression $[\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2]$ étant relative à cette courbe, on pourrait encore déterminer la conique Σ par la construction précédente. On n'aurait qu'à projeter les dyades $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$ sur une droite L , en prenant pour centre de projection un point quelconque de Γ .

On voit que les deux coniques Γ et Σ seront homographiques par rapport aux points $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$, et $a_1 a_2, b_1 b_2$. Soit ξ un point donné réel de Γ ; on trouvera de la manière suivante le point correspondant x de la conique Σ . Soient $\alpha'_1 \alpha'_2, \beta'_1 \beta'_2, \xi'$ les projections de $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \xi$ sur la droite L : du centre d'homologie des dyades $\alpha'_1 \alpha'_2, a_1 a_2$ on projettera $\beta'_1 \beta'_2, \xi'$ sur A : soient $\beta''_1, \beta''_2, \xi''$ les projections de ces points. On trouvera le centre d'homologie ρ des dyades $\beta''_1 \beta''_2, b_1 b_2$; ce centre appartiendra à la conique Σ , et le point x cherché sera le second point d'intersection de la droite $\rho \xi''$ par Σ .

Si, au lieu d'un point réel ξ , une dyade $\xi_1 \xi_2$, appartenant à Γ , était donnée, on trouverait $x_1 x_2$, la dyade correspondante de Σ , par une construction toute semblable. On aurait sur la droite A une dyade $\xi''_1 \xi''_2$, dont l'homologie avec $\xi_1 \xi_2$ serait connue; puis on déterminerait l'axe de symptôte de Σ et de la dyade des droites $\rho \xi''_1, \rho \xi''_2$; ce qui suffirait pour faire connaître la dyade $x_1 x_2$, et l'homologie de cette dyade avec la dyade donnée $\xi_1 \xi_2$.

On peut énoncer le problème que nous venons de résoudre de la manière suivante:

Étant données deux dyades d'une première figure correspondant à deux dyades d'une seconde figure, transformer la première figure homographiquement en la seconde.

(vi.) *Étant données deux dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$, ayant des axes différents A et B , et quatre points 1, 2, 3, 4 formant la base d'un faisceau de coniques réelles, trouver la conique qui passe par les deux dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$ et qui satisfait à l'équation*

$$(1, 2, 3, 4) [a_1, a_2, b_1, b_2] = [a_1, a_2, b_1, b_2].$$

Soit Γ une conique quelconque passant par les deux dyades $a_1 a_2, b_1 b_2$. Qu'on prenne un point réel γ de cette conique et que de ce point on projette sur la conique les involutions qui sont déterminées par le faisceau (1, 2, 3, 4) sur les droites A, B . Soient p et q les pôles des deux involutions qu'on aura maintenant sur la conique; les droites des deux faisceaux (p) et (q) correspondront anharmoniquement aux coniques du faisceau (1, 2, 3, 4); donc ces deux faisceaux de droites seront homographiques; soit C la conique, lieu des points d'intersection des rayons correspondants. Qu'on détermine les axes de symptôse des dyades (pa_1, pa_2), (qb_1, qb_2) avec la conique C ; soient $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2$ les points d'intersection de ces axes par C ; les points p et q seront les centres d'homologie des dyades $a_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2$ et $b_1 b_2, \beta_1 \beta_2$ respectivement. Dans le faisceau (p) les droites imaginaires pa_1, pa_2 correspondront aux coniques (1, 2, 3, 4, a_1), (1, 2, 3, 4, a_2); de même dans le faisceau (q) les droites imaginaires qb_1, qb_2 correspondront aux coniques (1, 2, 3, 4, b_1), (1, 2, 3, 4, b_2). Donc le rapport anharmonique des quatre points $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ appartenant à la conique C , sera égal au rapport anharmonique

$$(1, 2, 3, 4) \cdot [a_1, a_2, b_1, b_2].$$

On déterminera la conique qui passe par les deux dyades a_1, a_2, b_1, b_2 , et qui satisfait à l'équation

$$[a_1, a_2, b_1, b_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2];$$

cette conique sera celle qu'on cherche.

Cette solution est purement linéaire, puisqu'on ne trace pas les coniques dont il y est question. On pourra l'abrégier en opérant de la manière suivante. Soit ω le point d'intersection des droites A et B ; ξ, η les points où

ces mêmes droites coupent pour la seconde fois la conique $(1, 2, 3, 4, \omega)$. Soit γ un point quelconque de la droite $\xi\eta$; en prenant pour Γ la conique $(a_1, a_2, b_1, b_2, \gamma)$ les faisceaux (p) et (q) deviendront homologues, et les dyades $\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2$ seront connues, dès que l'on aura déterminé l'axe d'homologie de ces deux faisceaux.

Si l'on se permettait une construction quadratique, on pourrait encore raccourcir la solution. On trouverait un centre d'homologie des deux involutions déterminées par le faisceau $(1, 2, 3, 4)$ sur les axes A et B ; en prenant ce centre pour le point γ , les deux points p et q viendraient se confondre en un seul point, qui appartiendrait à la conique cherchée. À la vérité, cette méthode ne serait pas applicable, si les centres d'homologie des deux involutions étaient imaginaires.

Nous ajouterons quelques corollaires de ce problème, qui nous seront utiles plus tard.

(1.) *Étant données quatre dyades $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$, et un point réel p , trouver le point ω opposé à deux de ces dyades $c_1 c_2, d_1 d_2$, par rapport à la courbe cubique $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, p)$.*

On déterminera la conique Σ qui passe par les points a_1, a_2, b_1, b_2 , et qui satisfait à l'équation

$$(c_1, c_2, d_1, d_2) \cdot [a_1, a_2, b_1, b_2] = [a_1, a_2, b_1, b_2].$$

Ensuite on trouvera le point p' de cette conique pour lequel on a

$$(c_1, c_2, d_1, d_2) [a_1, a_2, b_1, b_2, p] = [a_1, a_2, b_1, b_2, p'].$$

Pour cela, on remarquera que dans la solution générale précédente (où l'on peut remplacer les points $1, 2, 3, 4$ par les points c_1, c_2, d_1, d_2) on trouve immédiatement le point π de la conique auxiliaire C , qui correspond à la conique (c_1, c_2, d_1, d_2, p) . Mais ce point trouvé, on en déduira le point p' par une construction qui a été déjà indiquée (v). Enfin, le point où la droite pp' rencontre pour la seconde fois la conique (a_1, a_2, b_1, b_2, p') sera le point ω cherché.

Ainsi on pourra trouver linéairement autant de points qu'on voudra d'une cubique dont on ne connaîtra que quatre dyades de points imaginaires, et un seul point réel. Ce cas nous paraît avoir été omis par les auteurs qui ont traité des constructions des courbes cubiques.

Si, au lieu d'un point réel p , une dyade $p_1 p_2$ de points imaginaires était donné, on pourrait encore trouver la dyade $\omega_1 \omega_2$, dont les éléments sont

les points opposés au système des quatre points c_1, c_2, d_1, d_2 , par rapport aux deux courbes cubiques imaginaires $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, p_1)$ et $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, p_2)$ (*). On commencera par trouver la dyade $\pi_1 \pi_2$, qui appartient à la conique auxiliaire C , et dont les éléments correspondent aux coniques imaginaires $(c_1, c_2, d_1, d_2, p_1)$ et $(c_1, c_2, d_1, d_2, p_2)$. Le centre d'homologie de cette dyade et de $p_1 p_2$, sera un point connu. Puis on déterminera la dyade $p'_1 p'_2$, qui appartient à la conique Σ , et qui vérifie l'équation

$$(c_1, c_2, d_1, d_2) \cdot [a_1, a_2, b_1, b_2, p_1, p_2] = [a_1, a_2, b_1, b_2, p'_1, p'_2].$$

Soit P le centre d'homologie des dyades $p'_1 p'_2, p_1 p_2$. Un des axes de symptose de la dyade de droites (Pp_1, Pp_2) , et de la conique Σ , sera l'axe de la dyade $p'_1 p'_2$; l'autre pourra se déterminer linéairement; les points d'intersection des droites Pp_1, Pp_2 par ce second axe de symptose seront les points ω_1, ω_2 cherchés.

(2.) *Étant données quatre dyades de points imaginaires $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2, d_1 d_2$, trouver le neuvième point θ , appartenant à toute courbe cubique qui passe par les quatre dyades.*

C'est ce qui se fera par une construction connue. Soient x, y deux points réels; soient ξ, η les points opposés au système $c_1 c_2, d_1 d_2$ par rapport aux deux courbes $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, x)$ et $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, y)$ respectivement, ξ', η' les points opposés au système $a_1 a_2, b_1 b_2$ par rapport à ces mêmes courbes; les droites $\xi \xi', \eta \eta'$ se couperont au point θ .

Seconde partie.

ART. 1.

Soit Σ une section conique, qui ne soit ni évanescence ni un cercle, et que nous supposerons complètement tracée; nous reviendrons plus tard sur le cas où l'on n'aurait qu'une partie de la courbe. Toutes les autres coniques dont nous aurons à nous occuper ne seront point tracées (à moins qu'elles ne soient des cercles, ou des couples de lignes droites); elles seront seule-

(*) Note VI.

ment définies par un nombre suffisant de conditions. Voici le problème que nous aurons à résoudre.

« Étant données deux coniques S_1, S_2 , trouver leurs quatre points d'intersection, ou, ce qui revient au même, leur triangle harmonique commun, avec la règle et le compas seulement, mais en se servant de la conique tracée Σ . »

Les coniques S_1, S_2 peuvent être imaginaires de première espèce, ou imaginaires de seconde espèce et conjuguées l'une à l'autre. Mais puisque, dans ces deux cas, on peut construire autant de points qu'on voudra sur les coniques réelles du faisceau (S_1, S_2) , nous pourrions supposer, sans perte de généralité, que S_1, S_2 soient elles-mêmes réelles.

Il y a trois réseaux de coniques qu'on est conduit naturellement à considérer relativement au faisceau (S_1, S_2) , ou plutôt relativement à son triangle harmonique $\alpha\beta\gamma$; ce sont (1) le réseau des coniques circonscrites au triangle $\alpha\beta\gamma$, (2) le réseau des coniques inscrites à ce triangle, et (3) le réseau harmonique, c'est à dire le réseau des coniques dont ce même triangle est un triangle harmonique. Une conique du premier réseau est déterminée par deux points; une conique du second réseau par deux tangentes; une conique du troisième réseau, soit par deux points, soit par deux tangentes. Le second réseau contient quatre cercles, dont la construction est déjà un problème biquadratique. Mais chacun des autres réseaux ne contient qu'un seul cercle; ce sont le cercle circonscrit, et le cercle polaire, du triangle $\alpha\beta\gamma$. On peut se servir de l'un ou de l'autre de ces deux cercles pour résoudre notre problème, et l'on est ainsi conduit à deux méthodes de solution différentes. D'après la première méthode on transforme homographiquement une conique quelconque du premier réseau dans la conique Σ , ou bien on transforme corrélativement une conique du second réseau en cette même conique. D'après la seconde méthode, c'est sur une conique du troisième réseau que l'on opère, et la transformation peut être de l'une ou de l'autre espèce. Dans tous les cas on cherche le cercle unique du réseau transformé: les intersections de ce cercle avec la conique Σ , font connaître la solution du problème.

ART. 2.

Avant de donner les détails nécessaires sur ces deux méthodes, nous allons résoudre quelques problèmes préliminaires, qui se rapportent aux coniques des trois réseaux: surtout, nous ferons voir comment on peut con-

struire, dans tous les cas possibles, les cercles du premier et du troisième réseau.

Les coniques du réseau circonscrit sont précisément les coniques réciproques de droites, qui ont été considérées par MM. PONCELET et CHASLES. Ainsi chaque conique K de ce réseau est le lieu des points qui sont réciproques des points d'une certaine droite k relativement au faisceau (S_1, S_2) ; K est aussi le lieu des pôles de k , relativement aux coniques du faisceau (S_1, S_2) ; enfin, l'ensemble des lignes K, k est la courbe Jacobienne du réseau déterminé par S_1, S_2 et la droite k , prise deux fois. Pour construire la conique du réseau circonscrit qui passe par deux points p_1, p_2 , on construit les points P_1, P_2 , réciproques de p_1, p_2 ; la conique réciproque de la droite P_1, P_2 est la conique cherchée. De même, on pourra trouver la conique du réseau circonscrit qui soit tangente en un point donné p à une droite L . On prendra la conique réciproque de L ; sa tangente, au point réciproque de p , sera réciproque de la conique cherchée. Pour les coniques du second réseau on a des constructions analogues; mais la construction de la conique σ appartenant au réseau harmonique, et passant par deux points p_1, p_2 , est un peu moins facile. Soient x_1, x_2, y_1, y_2 deux couples de points qui divisent harmoniquement le segment p_1, p_2 ; construisons les points réciproques X_1, X_2, Y_1, Y_2 , et menons les droites X_1, X_2, Y_1, Y_2 en passant au point g . Soient encore abc les points où la droite p_1, p_2 rencontre les côtés du triangle α, β, γ ; et désignons par a', b', c' les points conjugués harmoniques de abc par rapport à p_1, p_2 . En considérant l'involution dont les points doubles sont p_1, p_2 , on voit que le quatrième point commun aux coniques $(\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2), (\alpha, \beta, \gamma, y_1, y_2)$, (c'est-à-dire le point Q réciproque de g) est le point d'intersection des trois droites $aa', \beta\beta', \gamma\gamma'$; mais ces trois droites sont évidemment les polaires de α, β, γ , relativement à σ ; donc le point Q réciproque de g est le pôle de la droite p_1, p_2 , relativement à cette conique. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, x, y)$ une conique du réseau circonscrit qui passe par deux points quelconques x, y de la droite p_1, p_2 ; cette conique est aussi une conique du réseau circonscrit appartenant au faisceau (S_1, σ) ; par conséquent les points réciproques des points de $(\alpha, \beta, \gamma, x, y)$, considérés relativement au faisceau (S_1, σ) , seront en ligne droite. Pour avoir cette droite, on déterminera les points XY , réciproques de xy , qu'on sait trouver, puisqu'on connaît les polaires de x, y relativement aux coniques σ et S_1 . Soit θ un point quelconque de $(\alpha, \beta, \gamma, x, y)$; les polaires de θ , relativement à σ et S_1 , se croisent sur la droite XY ; on connaît aussi le point où la polaire de θ relativement à σ coupe la droite p_1, p_2 ; on pourra

donc construire cette polaire, qui déterminera complètement la conique σ . On ne doit pas prendre pour xy les points doubles de l'involution déterminée par (S_1, σ) sur la droite $p_1 p_2$; ce qui ferait coïncider la droite XY avec $p_1 p_2$; de même, on ne doit pas prendre pour θ le point réciproque du point d'intersection de XY , $p_1 p_2$.

De ce que nous avons dit on tire la construction suivante pour les deux cercles. Soient $x_1 x_2, y_1 y_2$ deux couples de points rectangulaires à l'infini; $X_1 X_2, Y_1 Y_2$ leurs points réciproques relativement au faisceau (S_1, S_2) . Le centre Q du cercle polaire est le point réciproque de l'intersection q de $X_1 X_2, Y_1 Y_2$. Soient $r_1 r_2$ les deux autres points diagonaux du quadrilatère $X_1 X_2, Y_1 Y_2$. Le cercle circonscrit est réciproque de la droite $r_1 r_2$; de plus, les points $R_1 R_2$, réciproques de $r_1 r_2$, sont les extrémités opposées d'un même diamètre de ce cercle. En effet, la droite $r_1 r_2$ coupe la conique C , réciproque de la droite à l'infini, en deux points imaginaires $\Omega_1 \Omega_2$, qui sont réciproques des deux points $\omega_1 \omega_2$ de la dyade cyclique. Car les points d'une conique réciproque d'une droite, correspondent anharmoniquement aux points de cette droite; de sorte qu'aux points doubles de l'involution $x_1 x_2, y_1 y_2$ sur la droite à l'infini correspondent les points doubles de l'involution $X_1 X_2, Y_1 Y_2$ sur la conique C . De plus, les deux points $r_1 r_2$ sont harmoniquement conjugués aux points $\Omega_1 \Omega_2$; donc, sur le cercle réciproque de la droite $r_1 r_2$, les points $R_1 R_2$ sont harmoniquement conjugués à $\omega_1 \omega_2$; ce qui veut dire que $R_1 R_2$ est un diamètre du cercle. On connaît donc le cercle circonscrit; quant au cercle polaire on achevera sa détermination, soit en observant qu'il coupe orthogonalement le cercle directeur du cercle circonscrit, soit en trouvant par la méthode que nous avons indiquée la polaire d'un point quelconque. Dans les applications, on pourra toujours remplacer la conique non tracée S , par la conique tracée Σ . On prendra pour x, y dans la construction précédente les points $x_1 x_2$ dont on s'est déjà servi, et dont on aura construit les polaires relativement à Σ . On abaissera de Q des perpendiculaires sur ces polaires; la droite qui joindra leurs pieds sera réciproque de l'hyperbole équilatère $(\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2)$ par rapport au faisceau (Σ, σ) . Soit θ un point quelconque de l'hyperbole, θ' le point d'intersection de la droite réciproque de cette courbe par la polaire de θ relativement à Σ ; la perpendiculaire abaissée de θ' sur QO sera la polaire de θ relativement au cercle polaire. On arriverait aussi à des constructions assez simples, en prenant pour xy , soit les deux points à l'infini sur Σ , soit les deux points de la dyade cyclique. Il est inutile d'ajouter qu'on ne peut déterminer linéairement aucun point du cercle polaire, ce cercle pouvant être imaginaire.

On sait que le cercle circonscrit à un triangle harmonique de la conique S , coupe orthogonalement le cercle directeur de S ; et que le cercle polaire d'un triangle circonscrit à S coupe aussi orthogonalement ce même cercle directeur. On pourrait donc trouver le cercle circonscrit en construisant les cercles directeurs de trois coniques quelconque du réseau harmonique, et le cercle polaire en construisant les cercles directeurs de trois coniques quelconques du réseau inscrit. On aura aussi les résultats particuliers que voici, dont la plupart étaient connus:

« Le lieu des centres des hyperboles équilatères du réseau circonscrit, est le « cercle des neuf points » du triangle harmonique fondamental.

« Le lieu des centres des hyperboles équilatères du réseau harmonique est le cercle circonscrit. Ces hyperboles se coupent aux quatre centres des cercles inscrits au triangle harmonique.

« Le lieu des foyers des paraboles du réseau inscrit est le cercle circonscrit.

« Les droites directrices des paraboles du réseau inscrit se coupent au centre du cercle polaire,

« Les droites directrices des paraboles du réseau harmonique se coupent au centre du cercle circonscrit. »

ART. 3.

▽

Ce qui précède suffit pour notre but actuel; cependant nous croyons devoir ajouter quelques observations élémentaires qui pourraient être utiles en d'autres occasions. On peut considérer les sommets du triangle harmonique commun à deux coniques comme représentant d'une certaine manière les trois racines d'une équation cubique. Ainsi au problème analytique « Trouver les fonctions symétriques des racines d'une équation cubique » correspondra le problème géométrique « Trouver les lieux et les enveloppes qui dépendent symétriquement des trois éléments du triangle harmonique commun à deux coniques non tracées. » D'après ce qui a été dit, on aura des moyens assez simples pour trouver les points, les droites et les coniques qui dépendent symétriquement des éléments du triangle, considéré par rapport au système de deux points ou de deux droites quelconques. Mais nous ne nous sommes pas occupé des lieux et des enveloppes qui se rapportent au triangle considéré relativement à un seul point ou à une seule droite. Parmi tous ceux qu'on pourrait imaginer ce sont surtout les dérivées polaires du triangle (considéré comme ligne soit du troisième ordre, soit de la troisième classe)

qui offrent quelque intérêt. Pour abrégé, nous ne parlerons que du centre des distances moyennes du triangle, et de la droite à l'infini considérée relativement au triangle, puisqu'on tirera facilement de ce que nous allons dire tout ce qui est relatif à un point ou à une droite quelconque. En revenant donc sur la notation de l'article 2, nous nous proposerons de trouver (1) le centre des distances moyennes, (2) l'ellipse *minima* circonscrite, (3) l'ellipse *maxima* inscrite.

Supposons que le point q' soit harmoniquement conjugué à q par rapport aux points $X_1 X_2$; si Q' est le point réciproque de q' relativement au faisceau (S_1, S_2) , il est évident que QQ' sera un diamètre de l'hyperbole équilatère $(\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2)$. Soit O le point milieu de $R_1 R_2$, O' le point milieu de QQ' ; O et O' seront les centres du cercle circonscrit, et du cercle des neuf points. Ce dernier cercle sera complètement déterminé, puisque le point milieu de QQ' sera un point de sa circonférence. Soit Γ le point harmoniquement conjugué à Q par rapport à OO' ; Γ sera le centre des distances moyennes du triangle; on sait, en effet, que le centre des distances moyennes et le centre du cercle polaire sont les deux centres de similitude du cercle circonscrit et du cercle des neuf points, et que les deux centres de similitude divisent harmoniquement le segment OO' . On voit en même temps, qu'en généralisant convenablement cette construction, on pourra trouver avec la règle seule le pôle d'une droite quelconque, et la polaire d'un point quelconque par rapport au triangle $\alpha\beta\gamma$. Les deux ellipses *maxima* et *minima* sont les coniques polaires du centre des distances moyennes et de la droite à l'infini, par rapport au triangle. Mais elles sont aussi les coniques du premier et du second réseau pour lesquelles la droite à l'infini est l'orbite du centre des distances moyennes. Il suffira donc de résoudre ce problème « Trouver la conique du premier réseau pour laquelle un point donné Γ est le pôle d'une droite donnée Λ . »

Soit x_1 un point quelconque de Λ ; on trouvera la conique du troisième réseau qui est tangente aux droites $x_1\Gamma$ et Λ , et l'on mènera de ce point Γ la seconde tangente à cette conique, qui coupera Λ au point x_2 . Les deux points $x_1 x_2$ seront conjugués par rapport à la droite qu'on se règle. Soient $y_1 y_2$ une seconde paire de points conjugués sur la même droite; prenons $X_1 X_2 Y_1 Y_2$ les points réciproques de $x_1 x_2 y_1 y_2$; la diagonale du quadrilatère $X_1 X_2 Y_1 Y_2$ qui ne passe pas par le point d'intersection de $X_1 X_2 Y_1 Y_2$ sera la droite cherchée de la conique cherchée. On peut aussi opérer de la manière suivante. Soit x un point quelconque de Λ ; toute des coniques du

résseau circonscrit, qui coupent harmoniquement le segment $\Gamma\delta$, passent par le même quatrième point, dont nous allons trouver le point réciproque. Soient Γ, X les points réciproques de Γ, δ ; les coniques de δ et il s'agit d'en avoir pour droites réciproques des droites conjuguées à la droite ΓX par rapport à la conique réciproque de $\Gamma\delta$; puisque quatre points harmoniques en ligne droite ont pour réciproques quatre points harmoniques sur la conique réciproque de la droite. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 deux couples de points harmoniquement conjugués aux points Γ, δ ; m_1, m_2, O_1, O_2 les points réciproques correspondants; le point ξ où les cordes A_1A_2, B_1B_2 vont concourir est le point réciproque du quatrième point d'intersection. En prenant un second point η sur la droite A_1 , on trouvera un autre point η tel que ξ ; la droite $\xi\eta$ sera réciproque de la conique cherchée (*).

On trouverait la conique du second réseau, qui aurait un pôle et une polaire donnés, par la construction corrélatrice. Si c'était le conique du troisième réseau qu'on voulait trouver, on prendrait le conique réciproque de la droite A , puis la polaire de Γ par rapport à cette conique; et enfin la conique réciproque de la polaire. Cette dernière conique coupe la droite A aux mêmes points où elle est coupée par la conique harmonique qu'on cherche. On pourra donc trouver avec la règle seule, autant de pôles et de polaires relativement à cette courbe que l'on voudra; puisque pour cela il n'est pas nécessaire de connaître les deux points où la courbe est coupée par la droite A , mais seulement l'involution qui détermine ces deux points (**).

Nous ajoutons encore un exemple de l'application des principes précédents. Soit proposé de déterminer le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissés d'un point donné P sur les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$. On déterminera la conique du réseau inscrit qui a pour foyer le point P . Le cercle cherché sur l'axe focal de cette conique comme diamètre sera le cercle cherché.

Quoiqu'on puisse représenter les racines d'une équation cubique par les trois éléments d'un triangle harmonique commun à deux sections coniques, il arrive ordinairement que la solution d'un problème cubique ne conduit pas à la recherche d'un tel triangle, mais à la recherche de trois des points d'intersection de deux sections coniques, dont un des points d'intersection est donné d'avance; ou à la recherche des trois points communs à un réseau de coniques circonscrites au même triangle. Or, le second de ces deux cas

(*) Nota. VII.

se réduit au premier, puisqu'en considérant les coniques d'un faisceau déterminé par deux coniques du réseau, on voit qu'elles correspondent anharmoniquement aux points où elles coupent une troisième conique du réseau qui n'appartient pas au faisceau que l'on considère. On pourra donc déterminer linéairement le quatrième point commun à une conique quelconque du faisceau et à la troisième conique. De plus, étant donné un des points d'intersection P de deux coniques, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est homologique au triangle abc , dont les sommets sont les trois autres points d'intersection; il est aussi inscrit à ce même triangle. Le centre d'homologie est le point P ; quant à l'axe d'homologie, c'est l'axe de symptôse d'une conique circonscrite à $P\alpha\beta\gamma$ et d'une conique du réseau harmonique qui est tangente à la première conique au point P . L'homologie des deux triangles pourra donc se déterminer linéairement; et l'on aura ainsi une méthode générale, dont on pourra se servir pour déduire les lieux et les enveloppes relatives à l'un de ces triangles des lieux et des enveloppes relatives à l'autre.

ART. 4.

Première méthode. On déterminera cinq points a, b, c, d, e d'une conique quelconque σ du réseau circonscrit appartenant au système des deux coniques (S_1, S_2). On choisira à volonté trois points $a'b'c'$ de la conique Σ , qu'on fera correspondre homographiquement à abc ; et l'on en déterminera un quatrième d' de manière que le rapport anharmonique des quatre points $a'b'c'd'$ de la conique Σ soit égal à celui des points $abcd$ de σ . Puis on transformera homographiquement les coniques (S_1, S_2) de manière qu'aux points $abcd$ de la figure donnée correspondent les points $a'b'c'd'$ de la figure nouvelle. La conique σ se transforme en Σ , laquelle sera ainsi une conique du réseau circonscrit appartenant aux transformées de S_1 et S_2 . Le cercle appartenant à ce réseau coupera Σ en quatre points, dont un qui est réel sera connu d'avance, et pourra se construire linéairement, sans tracer ni le cercle, ni la conique Σ . Les trois autres points (dont un sera toujours réel) seront les points de la nouvelle figure qui correspondent aux sommets $\alpha\beta\gamma$ du triangle harmonique commun à S_1 et S_2 . On pourra donc construire ce triangle; ce qui permettra de trouver par une construction quadratique les points d'intersection de S_1 et S_2 .

On voit que cette construction est purement linéaire, jusqu'au moment où l'on veut déterminer les intersections du cercle et de Σ . Mais on peut

l'abrégé de beaucoup, en se servant dès le commencement du tracé de la conique Σ . On prendra deux points $p_1 p_2$ de cette conique, et l'on choisira pour σ la conique $(\alpha, \beta, \gamma, p_1, p_2)$. Puis on considérera la droite $p_1 p_2$ comme axe d'homologie de σ et Σ ; en se servant du tracé de Σ on pourra trouver les deux centres d'homologie des deux courbes, appartenant à cet axe. On voit qu'on fera bien de prendre pour $p_1 p_2$ deux points imaginaires conjugués appartenant à Σ ; si l'on prenait deux points réels, il pourrait arriver que les points d'intersection de Σ et σ fussent tous réels, sans qu'il y eût aucune tangente commune; mais alors les deux centres d'homologie appartenant à l'axe $p_1 p_2$ pourraient devenir imaginaires. En supposant donc que $p_1 p_2$ soient imaginaires, on fera avec deux couples de l'involution qui détermine ces points les mêmes opérations que nous avons faites avec les deux couples de points rectangulaires $x_1 x_2, y_1 y_2$ de l'article 2; et, de même que nous y avons trouvé les deux extrémités d'un même diamètre du cercle circonscrit, on trouvera ici les deux extrémités réelles $a_1 a_2$ d'une corde de σ passant par le pôle de la droite $p_1 p_2$ relativement à σ . On joindra le point d'intersection de $a_1 a_2, p_1 p_2$, au pôle de $p_1 p_2$ relativement à Σ , par une droite qui coupera Σ en deux points $b_1 b_2$, qui seront toujours réels, puisque le pôle de $p_1 p_2$ est intérieur à Σ ; les intersections de $a_1 b_1, a_2 b_2$, et de $a_1 b_2, a_2 b_1$ seront les deux centres d'homologie de σ et Σ , appartenant à l'axe d'homologie ($p_1 p_2$). Avec l'un de ces centres d'homologie, on déterminera la droite λ et la dyade $\theta_1 \theta_2$, homologues de la droite à l'infini et de la dyade cyclique; puis on trouvera la segment réel intercepté par la conique $(\alpha, \beta, \gamma, \theta_1, \theta_2)$ sur une droite passant par le pôle de λ relativement à cette conique; enfin on déterminera le quatrième point d'intersection de $(\alpha, \beta, \gamma, \theta_1, \theta_2)$ avec $(\alpha, \beta, \gamma, p_1, p_2)$ ou σ . En passant à la figure homologique, la première de ces deux coniques deviendra un cercle, dont on connaîtra un diamètre et une des intersections avec Σ . On n'aura donc qu'à tracer le cercle pour avoir les trois points homologues des points cherchés.

Si Σ est une ellipse on prendra pour $p_1 p_2$ les deux points imaginaires où cette courbe est coupée par la droite à l'infini. Dans ce cas, on déterminera un diamètre du cercle circonscrit, au triangle $\alpha\beta\gamma$, et un diamètre de σ , qui sera l'ellipse circonscrite au même triangle et homothétique avec Σ . On trouvera les deux centres de similitude des deux ellipses, en déterminant les points extrêmes d'un diamètre de Σ parallèle au diamètre de σ ; ce qui exigerait une construction quadratique, si Σ n'était point tracée. Alors, pour avoir la solution du problème, on n'aura qu'à tracer le cercle cor-

respondant au cercle circonscrit à $a\beta\gamma$. Nous croyons que cette solution est peut-être la plus simple qu'on puisse trouver; cependant elle ne laisse pas d'être fort longue. Pour l'abrégier autant que possible, on prendra les deux points à l'infini sur les axes principaux de Σ pour l'un des couples de points dont on se servira pour trouver un diamètre, soit du cercle circonscrit, soit de l'ellipse σ ; le second couple ne pourra pas être le même pour les deux courbes, mais on fera en sorte que les deux couples aient un point commun. Ainsi il faudra chercher les points réciproques, par rapport au faisceau donné, de dix points différents, afin d'avoir un diamètre de chacune des deux courbes, et leur quatrième point d'intersection. Cette recherche sera un peu pénible, puisque la détermination de chaque point réciproque exige la construction de la polaire d'un même point par rapport à chacune des deux coniques non tracées S_1 et S_2 .

On pourrait éviter toute construction quadratique, sans cesser de se servir d'une conique homologue de Σ , en prenant pour σ la conique du réseau circonscrit qui est tangente à Σ en un point donné, puisqu'en ce cas, un des centres d'homologie des deux coniques étant connu d'avance, on peut trouver l'autre linéairement. C'est ce qu'on serait conduit naturellement à faire si la conique Σ était une parabole. On prendrait pour σ la parabole homothétique du réseau circonscrit; on en trouverait trois points, dont un serait son quatrième point d'intersection par le cercle circonscrit. En menant des tangentes à Σ parallèles aux tangentes de σ en deux de ces trois points, et en joignant les points de contact des tangentes homologues, on aurait le centre de similitude. En ce cas on n'aurait à trouver que [neuf] points réciproques, mais, par compensation, la détermination du centre de similitude serait un peu plus compliquée.

ART. 5.

Cette première méthode va nous fournir une démonstration bien simple de ce beau théorème de DESCARTES, qu'il n'y a pas un arc de section conique si petit qu'il ne suffise pas pour résoudre géométriquement tout problème cubique ou biquadratique. Prenons deux points a, b sur une conique quelconque σ du réseau circonscrit; faisons correspondre à ces deux points deux points $a'b'$ de la partie tracée de Σ . Soit α le sommet réel, ou l'un des sommets réels, du triangle $a\beta\gamma$. La conique σ est divisée par la corde ab en deux parties; en déterminant, avec une approximation même très gros-

sière, la position du point α (ce qui se fera dans tous les cas au moyen de quelques points qu'on prendra sur une conique quelconque du réseau circonscrit, autre que σ) on distinguera l'arc aab , qui passe par α , de l'autre partie de la courbe. Selon que l'on prend pour c un point de l'arc aab , ou de l'arc opposé, on prendra pour c' un point de l'arc tracé $a'b'$, ou un point de la conique Σ qui ne soit pas compris entre ces deux points. D'après cela, les points de l'arc tracé $a'b'$ correspondront sur la conique Σ aux points de l'arc aab de la conique σ ; donc le point correspondant de α tombera entre les points a' , b' de l'arc tracé, et y sera déterminé par le cercle circonscrit, appartenant à la figure transformée, qui viendra couper l'arc $a'b'$ en ce point. Mais on connaît un second point d'intersection de ce cercle et de Σ ; c'est celui qu'on peut construire linéairement; donc on pourra trouver par une construction linéaire la sécante commune, dont les intersections avec le cercle feront connaître les deux autres sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$.

ART. 6.

Seconde méthode. Lorsqu'on se sert du cercle polaire pour trouver les intersections des coniques données S_1 et S_2 , on peut opérer d'un grand nombre de manières différentes. Nous n'indiquerons ici que les constructions que nous croyons les plus simples, mais nous n'osons pas affirmer qu'on ne pourrait en trouver d'autres, dépendant du même principe général, qui auraient quelque avantage sur celles que nous allons exposer.

(1.) Supposons que $\alpha\beta\gamma$, le triangle harmonique commun de S_1 et S_2 , n'ait qu'un sommet réel. En ce cas, deux coniques quelconques réelles du réseau harmonique se coupent en deux points réels, et en deux points imaginaires conjugués; de plus, ce réseau ne contient aucune conique imaginaire de la première espèce. D'après cela, on peut opérer avec une conique quelconque de ce réseau de la même manière qu'avec une conique circonscrite. Soit σ la conique qu'on choisit; on la transformera soit homographiquement; soit corrélativement, en Σ , et après avoir déterminé le cercle appartenant au réseau transformé, on trouvera les deux intersections réelles du cercle et de Σ . On aura ainsi le triangle harmonique commun à ces deux coniques, triangle qui est le correspondant dans la nouvelle figure du triangle $\alpha\beta\gamma$ dans l'ancienne. On pourra aussi employer une transformation homologique, au lieu de la transformation homographique générale; seulement

on remarquera que la détermination des centres d'homologie de σ et Σ est loin d'être aussi facile dans le cas actuel que dans le cas d'une conique circonscrite. En effet, il convient de prendre pour σ une conique du réseau harmonique ayant avec Σ une sécante idéale commune. Or, on ne peut déterminer linéairement aucun point d'une telle conique, quoiqu'on sache trouver son système polaire. On aura donc besoin d'une construction quadratique pour trouver les points extrêmes d'une corde de σ passant par le pôle de l'axe d'homologie relativement à cette conique; points dont on fait usage pour trouver directement les deux centres d'homologie. Il est vrai qu'on pourrait opérer avec une conique σ tangente à Σ en un point donné, mais la construction d'une telle conique serait un peu pénible.

La méthode que nous venons d'indiquer s'applique aussi au cas que nous avons exclu, mais elle conduit quelquefois à un résultat inutile. En effet, quand le triangle $\alpha\beta\gamma$ est réel, les coniques du réseau harmonique qu'on détermine par deux points imaginaires conjugués peuvent être imaginaires; ainsi, le cercle du réseau transformé peut être imaginaire, ou, tout en restant réel, il peut ne reconstruire Σ en aucun point réel. D'ailleurs, quand même cette méthode réussirait, elle conduirait à des opérations assez prolixes.

ART. 7.

(2.) Supposons que les points d'intersection de S_1, S_2 ne soient pas tous imaginaires; nous allons voir qu'on pourra déterminer ces points directement, sans chercher préalablement le triangle harmonique.

Soit (1°) Σ une ellipse, $A_1 A_2, B_1 B_2$ ses deux axes principaux. Qu'on mène une transversale L qui coupe en deux points imaginaires une conique quelconque réelle S du faisceau (S_1, S_2) . Ce faisceau détermine une involution sur la transversale L , dont les points doubles $\mu_1 \mu_2$ sont nécessairement réels. Des points μ_1, μ_2 menons des tangentes à S ; soient $a_1 a_2, b_1 b_2$ les points de contact des tangentes issues de μ_1 et μ_2 respectivement; ces points, qui seront tous réels, diviseront la conique S harmoniquement. Qu'on transforme la figure homographiquement de manière qu'aux deux couples $a_1 a_2, b_1 b_2$ correspondent les deux couples $A_1 A_2, B_1 B_2$; ce qui peut se faire de huit manières différentes. La conique S deviendra Σ , puisqu'elle doit devenir une conique divisée harmoniquement par les deux couples de points $A_1 A_2, B_1 B_2$. De plus les quatre points d'intersection de S_1 et S_2 se transformeront en quatre points de l'ellipse Σ , situés sur une même circonférence de cercle.

Car les points μ_1, μ_2 , qui sont des points conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau (S_1, S_2) , se transformeront en les points situés à l'infini sur les axes principaux de Σ ; donc toutes les coniques du faisceau transformé auront leurs axes principaux parallèles à ceux de Σ , et par conséquent se couperont sur une circonférence de cercle Ω . Pour avoir ce cercle, on cherchera son centre par la construction ci-dessus; puis on prendra un couple de points réciproques $P_1 P_2$ par rapport au faisceau transformé; le cercle Ω coupera orthogonalement le cercle dont $P_1 P_2$ est un diamètre. On peut aussi déterminer Ω en prenant trois couples de points réciproques par rapport au faisceau transformé: ce qui donnera trois cercles que Ω coupera orthogonalement.

Soit (2°) Σ une hyperbole ayant $A_1 A_2$ pour axe réel, et passant par les points $\Phi_1 \Phi_2$ à l'infini. On coupera le faisceau $(S_1 S_2)$ par une transversale sur laquelle on ait une involution aux points doubles réels $\mu_1 \mu_2$. Soit S une conique du faisceau qui coupe la transversale en des points réels $\phi_1 \phi_2$. L'un des points $\mu_1 \mu_2$ sera extérieur à S ; soit μ_1 ce point, et désignons par $a_1 a_2$ les points de contact de tangentes à S issues de μ_1 ; la conique S sera divisée harmoniquement par les couples de points $\phi_1 \phi_2, a_1 a_2$. En transformant la figure de manière que a_1, a_2 deviennent A_1, A_2 , et que ϕ_1, ϕ_2 deviennent $\Phi_1 \Phi_2$, S deviendra Σ , et aux points $\mu_1 \mu_2$ correspondront respectivement les points à l'infini sur l'axe imaginaire et sur l'axe réel de Σ . Donc les points d'intersection du faisceau transformé appartiendront à une circonférence de cercle, qu'on pourra déterminer comme précédemment.

Soit enfin (3°) Σ une parabole, ayant A pour sommet et tangente au point M à la ligne droite à l'infini. On coupera toujours le faisceau $(S_1 S_2)$ par une transversale sur laquelle on ait des points doubles réels $\mu_1 \mu_2$. Soit S la conique du faisceau qui touche la transversale au point μ_1 ; de μ_2 menons la seconde tangente à S ; soit a son point de contact. Choisissons à volonté deux points x et X sur les coniques S et Σ respectivement; soient y et Y deux autres points sur ces mêmes coniques, tels que le rapport anharmonique des points μ_1, a, x, y de S soit égal à celui des points M, A, X, Y de Σ . En faisant correspondre homographiquement les points $MAXY$ aux points $\mu a x y$, on aura la même construction que dans les deux cas précédents.

Nous remarquerons qu'après avoir mené la transversale on est plus restreint, quant au choix de la conique qui doit être transformée en Σ , quand cette courbe est une parabole, que quand elle est une conique centrale. Mais, dans le premier cas, la transformation de la conique en Σ peut être opérée d'une infinité de manières différentes.

Cette méthode offre de grands avantages. On n'opère que sur les coniques du faisceau donné, sans avoir besoin d'aucune autre conique du réseau harmonique; ce qui facilite beaucoup la construction. De plus, on arrive directement à la solution du problème biquadratique des intersections, et on ne la fait pas dépendre du problème cubique du triangle harmonique. Quand Σ est une parabole on peut prendre une droite tangente à l'une des courbes S_1 et S_2 , pour la transversale qui coupe le faisceau; en opérant ainsi, on n'aura qu'une seule construction quadratique à effectuer; c'est celle qui est inévitable (à ce qu'il paraît) quand on veut trouver le rayon du cercle polaire au moyen duquel on résout le problème.

ART. 8.

(3.) Quand aucun des points d'intersection de S_1 et S_2 n'est réel, la détermination du triangle harmonique précède nécessairement la détermination des points d'intersection. En ce cas on peut faire usage de l'un ou de l'autre des procédés suivants.

(i.) Prenons une droite tangente à S_1 en un point quelconque x_1 ; ce point sera un des points doubles de l'involution déterminée par le faisceau donné sur la droite; soit x_2 le second point double, qui pourra être trouvé linéairement; en désignant par S_2 la conique du faisceau qui passe par x_2 , on aura deux coniques du faisceau tangentes à la même droite réelle. Puisque ces coniques n'ont aucun point réel commun, et qu'elles ont une tangente réelle commune, elles en ont quatre. Soient σ_1 et σ_2 les coniques réciproques polaires de S_1 et S_2 par rapport à Σ ; σ_1 et σ_2 se couperont en quatre points réels qu'on déterminera par la méthode précédente, dont l'application sera très facile, puisqu'un des quatre points d'intersection étant connu d'avance, il suffira de trouver le centre du cercle polaire pour déterminer complètement ce cercle. Les polaires des points d'intersection de σ_1 et σ_2 seront les tangentes communes de S_1 et S_2 , et feront connaître le triangle harmonique du faisceau.

Au lieu de prendre les coniques réciproques polaires de S_1 et S_2 , il sera plus facile, en beaucoup de cas, de faire usage de la transformation corrélative suivante. En supposant, pour abrégé, que Σ soit une ellipse, soit L un point intérieur à S_1 , soient μ_1, μ_2 les rayons doubles réels du faisceau en involution déterminé au point L par les coniques S_1, S_2 considérées comme formant un faisceau tangentiel. Soient enfin a_1, b_1 et a_2, b_2 les deux couples

de tangentes à S_1 aux points où cette conique coupe les droites μ_1, μ_2 . En faisant correspondre corrélativement les deux couples de sommets de Σ aux deux couples de droites $a_1 b_1, a_2 b_2$, on transformera S_1 en Σ , et les quatre tangentes communes de S_1 et S_2 deviendront quatre points de Σ , situés sur une même circonférence de cercle, dont un sera connu d'avance. On déduira la démonstration de celle de l'article 7. Cette méthode pourra servir à trouver directement les tangentes communes de deux coniques données, en supposant toutefois qu'il y en a de réelles.

(ii.) Deux coniques quelconques du réseau harmonique, qui se coupent en un point réel, se coupent aussi, dans le cas qui nous occupe, en trois autres points réels. On pourra donc considérer, au lieu de S_1 et S_2 , deux des coniques du réseau harmonique qui passent par un même point, et l'on appliquera la méthode de l'article 7. Ici encore il y aura l'avantage qu'on connaîtra d'avance un des points communs à Σ et au cercle polaire du réseau transformé.

ART. 9.

(4.) Les cas du problème général, où il s'agit de trouver les intersections d'une conique tracée Σ avec une conique non tracée S , mérite quelque attention. On pourra en ce cas se servir des principes de l'article 7, et l'on transformera le faisceau (S, Σ) en un autre faisceau qui contienne à la fois la conique Σ et un cercle, soit en transformant S en Σ , soit en transformant Σ en elle même. Quand le faisceau (S, Σ) détermine, sur la ligne droite à l'infini, une involution ayant des points doubles réels (ce qui arrivera toujours si Σ est une ellipse ou une parabole), on pourra opérer cette dernière transformation de manière que la ligne droite à l'infini se corresponde à elle même. Pour cela, on n'aura qu'à prendre la ligne droite à l'infini pour la transversale L de l'article 7, et la conique Σ elle même pour la conique S . Lorsque Σ est une conique centrale, on transformera les quatre points d'intersection de S et Σ en quatre points d'une même circonférence, en transformant Σ en elle même, de manière que les points extrêmes d'un certain couple de diamètres conjugués deviennent les sommets de la courbe. Lorsque Σ est une parabole, on aura une transformation encore plus simple. [Soit A le sommet de Σ , a le point de contact de la tangente à Σ menée parallèlement à la polaire par rapport à S du point à l'infini sur l'axe de Σ ; on n'aura qu'à transformer Σ homologiquement en elle même, en prenant pour centre d'homologie le point à l'infini sur Aa .]

Troisième partie.

ART. 1.

Problème. *Abaisser d'un point donné P des normales sur une conique complètement décrite.*

Pour abrégier le discours nous supposerons que la conique soit centrale. On sait que ce problème a été résolu par APOLLONIUS de Perge, qui a démontré que les pieds des normales se trouvent sur une hyperbole équilatère, passant par P et par le centre de la conique, et ayant ses asymptotes parallèles aux axes principaux de cette courbe. L'hyperbole est le lieu des points d'intersection des diamètres de la conique par des perpendiculaires abaissées de P sur les diamètres conjugués.

En employant les diverses méthodes précédentes, on parviendrait à résoudre ce problème d'un grand nombre de manières différentes. Mais c'est surtout la belle solution de JOACHIMSTHAL qui peut intéresser les géomètres; c'est pourquoi nous la reproduirons ici avec une démonstration fondée sur les principes précédents.

Soit Σ la conique tracée; Γ l'hyperbole équilatère d'APOLLONIUS: S , C les centres respectifs de ces deux courbes. Soit encore A_1 , A_2 l'axe réel, ou l'un des deux axes réels, de Σ ; α le point à l'infini sur cet axe, β le point à l'infini sur l'axe conjugué. Qu'on désigne par γ un point quelconque de Γ , et qu'on abaisse du sommet A_1 une perpendiculaire sur la droite $P\gamma$. Cette perpendiculaire, qui sera en même temps parallèle au diamètre de Σ conjugué à $S\gamma$, coupera Σ en un second point que nous désignerons par σ . Il est évident qu'on pourra considérer les deux courbes Γ et Σ comme homographiques par rapport aux deux séries de points γ et σ . Qu'on transforme Γ en Σ , et que, dans la seconde figure, Σ' soit la courbe correspondant à Σ dans la première. Nous allons voir que les points d'intersection de Σ et Σ' appartiendront à une même circonférence. Aux points α et β de Γ correspondront évidemment les points A_1 et A_2 de Σ ; d'où l'on conclut qu'au point C de la première figure correspond le point β de la seconde. Soit L la droite de la première figure qui correspond à la droite à l'infini de la seconde: il faut que cette droite passe par C , puisque le point correspondant de C est à l'infini. En se rappelant la propriété caractéristique des points de Γ , on verra que, si Σ est une ellipse, la droite L est l'axe d'homologie

de la dyade asymptotique de Σ et de la dyade des perpendiculaires abaissées de P sur la dyade asymptotique; et que les points imaginaires, où L est coupée par l'une ou l'autre de ces dyades, appartiennent à Γ . Soit D le point à l'infini de la droite L ; les deux points CD seront évidemment des points conjugués par rapport à la conique Γ ; donc, au point D de la première figure il correspondra le point α de la seconde. Mais les points CD sont aussi des points conjugués par rapport à Σ , puisqu'ils sont harmoniquement conjugués aux points où la droite L rencontre la dyade asymptotique de Σ ; d'où il s'ensuit que L est parallèle à la polaire de C par rapport à Σ . Par conséquent, les points α, β seront des points réciproques par rapport aux deux courbes Σ et Σ' ; donc il passe une circonférence de cercle par les points d'intersection de Σ et Σ' . La démonstration serait tout aussi simple si l'on supposait que Σ fût une hyperbole. Soit Ω le cercle appartenant au faisceau (Σ, Σ') ; pour le déterminer complètement, il faudra trouver trois couples de points réciproques par rapport à ce faisceau. Pour cela, soit s le point de Σ qui correspond au point S de Γ , et qui se trouve sur la perpendiculaire abaissée de A_1 sur PS ; les droites sA_1, sA_2 de la seconde figure correspondront aux droites $S\alpha, S\beta$ de la première, c'est-à-dire, aux deux axes de Σ . Qu'on prenne les points réciproques de α et β par rapport au système des deux courbes Σ et Γ ; les points de la seconde figure qui correspondront à ces deux points réciproques seront évidemment les points d'intersection de la tangente $A_1\beta$ par sA_2 , et de la tangente $A_2\beta$ par sA_1 ; points qu'on désignera par a_1 et a_2 . Donc les deux points A_1a_1 , et les deux points A_2a_2 seront réciproques par rapport au système (Σ, Σ') . Le cercle Ω coupera orthogonalement les cercles (A_1a_1) et (A_2a_2) décrits sur A_1a_1 et A_2a_2 comme diamètres; mais il est évident que ces cercles coupent orthogonalement le cercle (A_1A_2) ; de plus la droite qui joint leurs centres est précisément la tangente à Σ au point s . On aura donc le beau résultat démontré par JOACHIMSTHAL que les cercles (A_1A_2) et (Ω) ont pour axe radical la tangente à Σ au point s .

Pour achever la détermination du cercle Ω , il reste à trouver un troisième couple de points réciproques par rapport à Σ et Σ' . C'est ce qu'on peut faire d'une infinité de manières différentes. Soit, par exemple, F le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur la polaire de ce point relativement à Σ ; P, F seront des points réciproques par rapport au système (Σ, Γ) , puisque PF est la tangente à Γ au point P . On trouvera le point p de Σ qui correspond au point P de Γ en menant par le point A une parallèle à la

polaire de P relativement à Σ . Pour trouver le point f de la seconde figure qui correspond au point F de la première, on menera dans la conique Σ la corde $A_1 f'$ parallèle à la polaire de F ; l'intersection de la droite $s f'$ par la tangente à Σ au point p sera le point f cherché. Le cercle Ω coupera orthogonalement le cercle (pf) , et se trouvera par cela complètement déterminé.

On pourrait aussi se servir de la méthode suivante. Qu'on fasse varier le point P sur la droite fixe SP , et qu'on prenne sur cette droite $SP' = -SP$. Les points s et p resteront fixes; les cercles Ω passeront toujours par les points d'intersection de la tangente au point s et du cercle $(A_1 A_2)$. Aux deux points P et P' correspondra le même cercle; de plus les cercles Ω varieront anharmoniquement avec les segments de l'involution $P_1 P'_1, P_2 P'_2$, etc. On en tirera la construction suivante. Soit π le centre du cercle Ω qui passe par le point p ; et qu'on désigne par ρ l'intersection de SP par la polaire de P . Le centre du cercle Ω cherché sera le point d'intersection de la ligne des centres par une droite menée de P parallèlement à $\rho\pi$ (*).

ART. 2.

On sait qu'un grand nombre de problèmes cubiques et biquadratiques conduisent à l'étude des *correspondances* déterminées par les équations

$$x_1(A_1 y_1^2 + 2B_1 y_1 y_2 + C_1 y_2^2) + x_2(A_2 y_1^2 + 2B_2 y_1 y_2 + C_2 y_2^2) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_1^2(A_1 y_1^2 + 2B_1 y_1 y_2 + C_1 y_2^2) + 2x_1 x_2(A_2 y_1^2 + 2B_2 y_1 y_2 + C_2 y_2^2) \\ + x_2^2(A_3 y_1^2 + 2B_3 y_1 y_2 + C_3 y_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_1(A_1 y_1^3 + 3B_1 y_1^2 y_2 + 3C_1 y_1 y_2^2 + D_1 y_2^3) \\ + x_2(A_2 y_1^3 + 3B_2 y_1^2 y_2 + 3C_2 y_1 y_2^2 + D_2 y_2^3) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

dans lesquelles on peut supposer que les quotients $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}$ sont des rapports anharmoniques qui déterminent la position des points variables x et y , soit sur une droite, soit sur une conique. Une théorie complète de ces correspondances dépasserait de beaucoup les limites de ce mémoire. Il nous suffira de placer ici quelques observations qui sont d'une grande importance dans cette théorie.

(*) Note VIII.

(1.) Soient a, b, c trois points d'une conique déterminés par l'équation cubique

$$F = Ax_1^3 + 3Bx_1^2x_2 + 3Cx_1x_2^2 + Dx_2^3 = 0.$$

Soient aussi ABC le triangle circonscrit, L l'axe d'homologie des deux triangles ABC, abc ; a', b', c' les points d'intersection des droites Aa, Bb, Cc par la conique. Alors les trois points $a'b'c'$ sont les points déterminés par le covariant cubique de F ; et les deux points d'intersection de L par la conique sont déterminés par le covariant quadratique.

Supposons qu'on donne sur une droite trois points P, Q, R , et trois autres points p, q, r harmoniquement dérivés des premiers par rapport à un système F de trois points inconnus. Proposons nous de déterminer (1) le point s harmoniquement dérivé d'un point donné S par rapport au système F , (2) les deux points covariants de ce système, (3) le système de deux points $S_1 S_2$ harmoniquement dérivés d'un point donné s , (4) les trois points inconnus eux mêmes. De ces problèmes le premier n'est que linéaire, le second et le troisième sont quadratiques, le quatrième est cubique. On projétera les points PQR, pqr sur une conique, en prenant pour centre de projection un point de la conique; nous désignerons les points projetés par les mêmes lettres. Soient $P'Q'R'$ les pôles des droites Pp, Qq, Rr relativement à cette conique. Le point λ , pôle de la droite L , satisfait à l'équation

$$\lambda \cdot [P', P, Q', Q, R', R] = [P, p, Q, q, R, r];$$

donc ce point pourra être déterminé linéairement, puisqu'on pourra trouver deux sections coniques dont il sera le quatrième point d'intersection, les trois autres étant connus. Le point s sera déterminé linéairement par l'équation

$$\lambda \cdot [P, Q, R, S] = [p, q, r, s];$$

de même, en supposant que s soit donné, la droite λS , déterminée par cette équation anharmonique coupera la conique, aux deux points $S_1 S_2$. Enfin, en prenant un point quelconque ω de la conique, et en faisant correspondre anharmoniquement les faisceaux $\lambda \cdot [P, Q, R, \dots]$ et $\omega \cdot [p, q, r, \dots]$, on aura une section conique S qui coupera Σ au point connu ω , et aux trois points inconnus. On pourra se passer, comme on voit, du tracé de la conique Σ , si l'on ne veut déterminer que les points s et λ , et la droite L .

Dans la solution du problème cubique on remarquera que le point ω peut être pris à volonté sur la conique Σ ; on pourra même déterminer d'avance

la position de ce point de sorte qu'on puisse faire passer une circonférence de cercle par les quatre points $\omega, \alpha, \beta, \gamma$. Pour cela, on observera que les points ω correspondent anharmoniquement aux coniques du faisceau $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$. On prendra trois positions du point ω , et l'on déterminera les points rectangulaires à l'infini appartenant aux axes principaux des coniques correspondantes $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \omega)$; ou, plutôt, les trois points ρ harmoniquement conjugués à un point fixe par rapport à ces trois systèmes de points rectangulaires. Il est évident que les points ρ correspondront anharmoniquement aux points ω ; donc, en désignant par σ le conjugué harmonique du point fixe par rapport aux points à l'infini appartenant aux axes principaux de Σ , le point ω sera déterminé linéairement par l'équation

$$[\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma] = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega].$$

(2.) Dans l'équation (2), qu'on considérera relativement à une conique Σ , on fera varier le point y , ou ce qui revient au même, le rapport $y_1 : y_2$. Les cercles qui joignent les deux points déterminés par les valeurs correspondantes de $x_1 : x_2$ envelopperont une section conique X . Pareillement, on aura une section conique Y , enveloppe des droites joignant les points y correspondant à une même position de x . Soit θ un point quelconque de Σ ; soient η_1, η_2 les deux points qui correspondent à θ , considéré comme appartenant à la série des x ; ξ_1, ξ_2 les deux points correspondant au même point θ , considéré comme appartenant à la série des y . Qu'on prenne la corde θ_1, θ_2 , conjuguée harmonique de $\sigma\theta$ par rapport aux deux droites $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$ se coupant au point σ . Cette corde sera la polaire de θ par rapport à une troisième section conique, que nous désignerons par Θ . Pour les deux coniques X et Y , les droites enveloppantes, ou, si l'on veut, les points de contact sur ces droites, correspondront anharmoniquement aux points de la conique Σ .

Il y a trois problèmes biquadratiques qui se présentent naturellement, quand on considère la correspondance doublement quadratique (2).

Trouver les quatre points (x) pour lesquels les deux points (y) correspondants deviennent coïncidents.

Trouver les quatre points dont chacun représente deux points (y), qui sont devenus coïncidents.

Trouver les points où le point (x) coïncide avec l'un des points (y) correspondants.

Qu'on prenne sur la conique Σ les quatre points de contact des tangentes communes à Σ et X ; chacun de ces points représentera deux points y devenus coincidents. On en déduira les quatre points x , auxquels correspondent ces quatre points doubles, en se servant de la relation anharmonique que nous avons indiquée. Enfin le point x coïncide avec l'un des points y correspondants aux quatre points de rencontre de Σ et Θ .

La théorie de l'équation (2) se simplifie, si elle est symétrique relativement aux deux séries de points x et y . En ce cas, les deux coniques X et Y coïncident l'une avec l'autre, et avec la conique, polaire réciproque de Σ par rapport à Θ . Les points d'intersection des deux coniques X et Σ sont précisément les points x pour lesquels les points y correspondants deviennent coincidents; et les points de contact sur Σ des tangentes communes de Σ et X sont ces doubles points. En supposant toujours que l'équation (2) soit symétrique, prenons les points $y_1 y_2$ correspondant à un point quelconque x : soit x' l'un de ces deux points; l'un des deux points correspondant à x' sera x , l'autre sera un nouveau point x'' . Déterminons successivement de la même manière les points x''' , x'''' , ...; il peut arriver, comme on sait, qu'après un nombre fini d'opérations on retombe à la fin sur le point de départ x . Ces cas particuliers ont été beaucoup étudiés par les géomètres; mais c'est surtout le cas où l'on aurait $x''' = x$, qui est important (ainsi que nous allons voir) pour la théorie des problèmes du troisième et du quatrième ordre.

Les problèmes linéaires et quadratiques qui se rattachent à l'équation (2) peuvent se résoudre en beaucoup de cas par les méthodes connues. Par exemple, l'on voit qu'étant donnés huit points x , et un point y correspondant à chacun de ces points, les deux points y correspondant à un point x quelconque doivent s'obtenir par une construction quadratique. Et, en effet, on peut opérer cette construction, en se servant des propriétés des courbes du quatrième ordre, ayant deux points doubles.

(3.) Considérons la correspondance définie par l'équation (3); et supposons que cette équation soit relative à une conique Σ . A chaque point x correspondront trois points de la série y : et l'on aura ainsi une série de triangles inscrits à Σ . Mais cette série de triangles sera en même temps circonscrite à une seconde conique; elle sera de plus une série de triangles harmoniques par rapport à une troisième conique. Ainsi, cette série de triangles pourra être définie par une correspondance quadratique double, qui sera symétrique, et dans laquelle le troisième élément dérivé coïncidera avec l'élément d'où l'on est parti. Il s'ensuit que la plupart des questions relatives à l'involution

cubique définie par l'équation (3) pourront être réduites aux recherches analogues relatives à cette espèce particulière de correspondances quadratiques doubles (*).

ART. 3.

Nous désignerons par $[a, b, c, d]$ le quotient $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$, qui est un des rapports anharmoniques des quatre points a, b, c, d en ligne droite; de même, nous représenterons par $P \cdot [a, b, c, d]$ le rapport anharmonique $\frac{\sin aPc}{\sin aPd} : \frac{\sin bPc}{\sin bPd}$ des quatre droites Pa, Pb, Pc, Pd se coupant au même point P (**). Cela posé, nous aurons les deux lemmes suivants.

Lemme I. Soient

$$Pp, Pp_1, Pp_2, Qq, Qq_1, Qq_2, Rr, Rr_1, Rr_2,$$

neuf droites données; le lieu d'un point x , qui satisfait à l'équation

$$P \cdot [x, p, p_1, p_2] \times Q \cdot [x, q, q_1, q_2] \times R \cdot [x, r, r_1, r_2] = a, \quad (1)$$

a étant une constante, est une courbe cubique passant par les neuf points d'intersection des droites Pp_1, Qq_1, Rr_1 avec les droites Pp_2, Qq_2, Rr_2 .

Démonstration. (1°). Le lieu du point x qui satisfait à l'équation

$$Q \cdot [x, q, q_1, q_2] \times R \cdot [x, r, r_1, r_2] = \mu, \quad (2)$$

μ étant une constante, est une conique (μ) passant par les quatre points

(*) Note IX.

(**) En général, si a, b, c, d sont quatre éléments quelconques, dont on peut définir le rapport anharmonique (par exemple, quatre points d'un même conique, ou quatre courbes d'un même faisceau) nous exprimerons ce rapport pas la formule $[a, b, c, d]$; et, toutes les fois qu'il sera nécessaire de distinguer entr'eux les divers rapports anharmoniques du même système de quatre éléments, la formule $[a, b, c, d]$ désignera pour nous le rapport anharmonique analogue au rapport $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ de quatre points en ligne droite.

Nous nous servirons, avec quelques géomètres, des parenthèses pour exprimer des courbes passant pas des points donnés; ainsi (a, b) sera la droite qui joint les points a, b ; (a, b, c, d, e) sera la conique des cinq points a, b, c, d, e . Si P est la base d'un faisceau de courbes d'ordre quelconque, (P, a) sera la courbe de ce faisceau qui passe par le point a ; et $P \cdot [a, b, c, d]$ sera le rapport anharmonique des quatre courbes $(P, a), (P, b), (P, c), (P, d)$.

d'intersection des droites Qq_1, Rr_1 avec les droites Qq_2, Rr_2 . Soit $R\rho$ le rayon du faisceau (R) qui satisfait à l'équation

$$R \cdot [\rho, r, r_1, r_2] = \mu \dots \quad (3)$$

En divisant membre à membre l'équation (2) par l'équation (3), on aura

$$Q \cdot [x, q, q_1, q_2] \times R \cdot [x, \rho, r_1, r_2] = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$R \cdot [x, q, q_1, q_2] = R \cdot [x, \rho, r_2, r_1],$$

équation qui démontre ce qui a été avancé.

(2°.) En donnant à μ des valeurs successives différentes, les coniques (μ) correspondantes, lieux des points x , seront toutes circonscrites au même quadrilatère. Or, ces coniques correspondront anharmoniquement aux valeurs de μ . En effet, supposons que Qx soit une direction fixe; on sait que les coniques correspondront anharmoniquement aux points où elles coupent cette droite. En désignant par ρ, r_1, r_2 les points d'intersection de Qx par $R\rho, Rr_1, Rr_2$, la position du point x , appartenant à la conique (μ), sera déterminée par l'équation

$$[x, \rho, r_2, r_1] = Q \cdot [x, q, q_1, q_2],$$

dont le second membre est une constante C . En multipliant les deux membres de cette équation par les deux membres de l'équation

$$\mu = [\rho, r, r_1, r_2],$$

on aura

$$[x, r, r_1, r_2] = \frac{\mu}{C},$$

d'où il s'ensuit que le rapport anharmonique de quatre points x est égal au rapport anharmonique des valeurs correspondantes de μ .

(3.) La position de la droite Px , qui satisfait à l'équation

$$P \cdot [x, p, p_1, p_2] = \frac{a}{\mu},$$

variera anharmoniquement avec les valeurs de μ . Donc le lieu des points d'intersection d'une conique (μ) par la droite correspondant à la même valeur de μ sera une courbe cubique; mais il est évident que ce sont précisément ces points d'intersection qui satisfont à l'équation (1). On voit d'ailleurs que la courbe cubique passera par cinq des neuf points d'intersection des

droites données; elle passera aussi par les quatre autres, puisque dans la démonstration on peut échanger entre eux les faisceaux (P) , (Q) , (R) .

Lemme II. Soient S_1, S_2, S_3 trois courbes du même ordre; $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ les courbes des faisceaux $(S_2, S_3), (S_3, S_1), (S_1, S_2)$ qui passent par les points α et β respectivement; on aura l'équation

$$[S_2, S_3, A_1, B_1] \times [S_3, S_1, A_2, B_2] \times [S_1, S_2, A_3, B_3] = +1. \quad (3)$$

Démonstration. Puisqu'il y a toujours une courbe du faisceau (S_2, S_3) qui appartient en même temps au faisceau déterminé par deux courbes quelconques des faisceaux $(S_3, S_1), (S_1, S_2)$, il y a une courbe commune aux faisceaux $(S_2, S_3), (A_2, A_3)$. Mais cette courbe commune ne peut être autre que A_1 , puisque A_1 est une courbe du faisceau (S_2, S_3) , et qu'elle passe par α , un des points d'intersection de A_2, A_3 . Donc les trois courbes A_1, A_2, A_3 appartiennent au même faisceau; le même raisonnement s'applique aux trois courbes B_1, B_2, B_3 . Soient α et β les points où vont concourir les droites polaires d'un même point O par rapport à A_1, A_2, A_3 , et à B_1, B_2, B_3 respectivement; soient aussi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les points d'intersection de (α, β) par les polaires de O relativement à S_1, S_2, S_3 ; on aura évidemment

$$[S_2, S_3, A_1, B_1] = [\sigma_2, \sigma_3, \alpha, \beta]$$

$$[S_3, S_1, A_2, B_2] = [\sigma_3, \sigma_1, \alpha, \beta]$$

$$[S_1, S_2, A_3, B_3] = [\sigma_1, \sigma_2, \alpha, \beta],$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation (3).

Avant de terminer ces préliminaires nous rappellerons qu'étant donné trois points sur chacune de deux cubiques, et en outre six des neuf points d'intersection des deux courbes, on trouve aisément les trois autres points d'intersection par une construction cubique qu'on doit à M. CHASLES. Soient 1, 2, ... 6 les six points d'intersection donnés, 7, 8, 9 les trois points cherchés; on détermine linéairement deux coniques telles que (5, 6, 7, 8, 9), (4, 6, 7, 8, 9), dont les quatre points d'intersection sont le point connu 6, et les trois points cherchés. Pareillement, étant donné trois des points d'intersection d'une conique et d'une cubique, qu'on suppose déterminées toutes les deux par un nombre suffisant de points, on trouvera les trois autres points d'intersection par une construction cubique facile. Soient a, b, c les

points donnés, d, δ , des points donnés de la cubique et de la conique respectivement, ω le point opposé au système a, b, c, d , relativement à la cubique. En désignant par x un point quelconque de la cubique, les coniques (a, b, c, d, x) et les droites (ω, x) se correspondront anharmoniquement. Soit ξ le quatrième point d'intersection de la conique donnée par (a, b, c, d, x) ; les deux faisceaux $(\delta, \xi), (\omega, x)$ seront homographiques, et la conique, lieu des points d'intersections des rayons correspondants, coupera la conique donnée au point connu δ et, en outre, aux trois points cherchés.

ART. 4.

PROBLÈME. *Étant donné treize des points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trouver les trois autres.*

Nous supposons que les treize points soient tels qu'on peut faire passer actuellement par ces points une vraie courbe du quatrième ordre. Nous excluons donc absolument les cas où l'on aurait, soit cinq points en ligne droite, soit neuf points sur une même conique, soit treize points sur une même cubique. Mais, afin de simplifier la discussion générale, nous en excluons aussi, pour le moment, les cas où l'on aurait

- (1) Neuf points formant la base d'un faisceau de cubiques.
- (2) Huit points sur une même conique.
- (3) Onze points sur une même cubique.
- (4) Quatre points en ligne droite.

Pour tous ces cas la solution générale se simplifie plus ou moins; nous les considérerons séparément plus tard. Enfin, nous supposons que les treize points soient tous réels, et tous différents; nous reviendrons ci-après sur les cas où l'on aurait des points imaginaires.

Soient 1, 2, 3... 13 les treize points donnés, 14, 15, 16 les points qu'il s'agit de trouver.

Prenons six points quelconques des treize points, par exemple les points 8, 9, 10, 11, 12, 13; nous allons montrer comment on peut déterminer la cubique qui passe par ces six points, et par les trois points inconnus.

Pour cela, nous prenons un quelconque des six points que nous avons choisis, par exemple le point 8; nous le joignons aux sept points 1, ... 7, et nous considérons le système des huit points 1, ... 8 comme formant la

base P_8 d'un faisceau de courbes cubiques. Déterminons le point p_8 , de sorte que les cinq droites

$$(p_8, 9), (p_8, 10), (p_8, 11), (p_8, 12), (p_8, 13)$$

correspondent anharmoniquement aux courbes cubiques

$$(P_8, 9), (P_8, 10), (P_8, 11), (P_8, 12), (P_8, 13).$$

La détermination du point p_8 se fera linéairement par une construction sur laquelle nous reviendrons plus tard; nous dirons que ce point est *biquadratiquement opposé* aux points 1, ... 8 de la base P_8 . La courbe du quatrième ordre, qu'on peut faire passer par les treize points et par le point p_8 , aura pour faisceaux générateurs le faisceau de droites (p_8) , et le faisceau de courbes cubiques (P_8) ; de plus, les droites

$$(p_8, 14), (p_8, 15), (p_8, 16)$$

du premier faisceau correspondront aux courbes cubiques

$$(P_8, 14), (P_8, 15), (P_8, 16)$$

du second faisceau, puisque 14, 15, 16 sont des points de la courbe du quatrième ordre. Substituons successivement au point 8 deux autres points du système de six points, par exemple les points 9 et 10; soient P_9, P_{10} les bases cubiques qu'on aura ainsi, p_9, p_{10} les points biquadratiquement opposés à ces bases; nous allons voir que les trois points opposés p_8, p_9, p_{10} , et les trois points d'intersection des trois couples de droites

$$p_9(10), p_{10}(9); p_{10}(8), p_8(10); p_8(9), p_9(8),$$

sont des points de la cubique cherchée, qui sera dès lors complètement déterminée puisqu'on en connaîtra douze points. Considérons la courbe cubique, lieu des points x qui satisfont à l'équation

$$p_8 \cdot [x, 11, 9, 10] \times p_9 \cdot [x, 11, 10, 8] \times p_{10} \cdot [x, 11, 8, 9] = +1.$$

D'après le lemme I, cette courbe passe par les points $p_8, p_9, p_{10}, 8, 9, 10$, et par les trois points d'intersection des trois couples de droites

$$(p_9, 10), (p_{10}, 9); (p_{10}, 8), (p_8, 10), (p_8, 9), (p_9, 8);$$

elle passe en outre par le point 11, puisque chacun des trois rapports anharmoniques devient égal à l'unité positive si l'on fait coïncider x avec ce point. Mais les points 12, 13, 14, 15, 16 appartiennent aussi à la même

courbe. En effet, soit ξ un quelconque de ces points; d'après la relation anharmonique qui subsiste entre les faisceaux $(p_8), (P_8)$; $(p_9), (P_9)$; $(p_{10}), (P_{10})$, on aura

$$\begin{aligned} p_8 \cdot [\xi, 11, 9, 10] &= P_8 \cdot [\xi, 11, 9, 10] \\ p_9 \cdot [\xi, 11, 10, 8] &= P_9 \cdot [\xi, 11, 10, 8] \\ p_{10} \cdot [\xi, 11, 8, 9] &= P_{10} \cdot [\xi, 11, 8, 9]. \end{aligned}$$

Mais le produit des seconds membres de ces équations est l'unité positive; comme il résulte du lemme II, en y écrivant

$$\begin{aligned} S_1 &= (P_9, 10) = (P_{10}, 9) \\ S_2 &= (P_{10}, 8) = (P_8, 10) \\ S_3 &= (P_8, 9) = (P_9, 8). \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que la cubique, qui passe par les neuf points 8, ... 16, passe aussi par les neuf points biquadratiquement opposés aux systèmes de huit points, qu'on obtient en joignant successivement aux sept points 1, ... 7 chacun des huit points 8, ... 16; et par les trente-six points d'intersection des couples de droites (p_α, β) , (p_β, α) , en désignant par α, β deux nombres inégaux de la série 9, ... 16. De ces cinquante-quatre points, on en connaît ving-sept, qui ne dépendent pas des points inconnus 14, 15, 16.

Pour avoir une autre cubique passant par ces trois points, nous remarquons que, par hypothèse, la cubique C_1 des neuf points 8, ... 16, ne peut pas passer par tous les sept points 1, ... 7. Soit donc 7 un de ces points qui n'appartient pas à C_1 ; on échangera entr'eux dans la construction précédente le point 7 et un point quelconque 8 des six points 8, ... 13; et l'on déterminera ainsi la cubique C_2 des neuf points 7, 9, ... 16. Les cinq points 9, ... 13 seront des points communs aux deux courbes C_1 et C_2 ; le point biquadratiquement opposé aux points 1, ... 8 sera un sixième point commun; enfin, les points qu'il s'agit de trouver seront précisément les trois autres points communs. Puisque par hypothèse les huit points 1, ... 8 n'appartiennent pas tous à une même conique, on pourra dire autant des huit points 9, ... 16. Soient 11, 12, 13 trois des points 9, ... 13 qui n'appartiennent pas à une même conique avec les points inconnus. Qu'on détermine les deux coniques (12, 13, ... 16) et (11, 13, ... 16), se coupant au point connu 13; les trois autres points d'intersection de ces courbes seront finalement les points cherchés.

On remarquera que les deux courbes du quatrième ordre dont nous nous sommes servis dans la démonstration précédente, ne sont pas deux courbes quelconques du faisceau déterminé par les treize points donnés. Chacune des deux courbes est assujettie à passer par le neuvième point appartenant à la base cubique formée par un système de huit points choisis parmi les treize points donnés (*).

ART. 5.

La solution précédente dépend essentiellement de la détermination des points biquadratiquement opposés aux divers systèmes de huit points qu'on peut former avec les treize points donnés. Soit $P = [1, 2, 3, \dots, 8]$ l'un quelconque de ces systèmes; pour avoir le point opposé biquadratiquement à P , il nous faudra avant tout un système de cinq points, ou de cinq droites, qui correspondent anharmoniquement aux cubiques $(P, 9)$, $(P, 10)$, $(P, 11)$, $(P, 12)$, $(P, 13)$. À cet effet, on pourrait se servir, comme on sait, soit des tangentes à ces courbes en un point quelconque de la base P , soit de leurs points d'intersection par une des droites qui joignent deux des points P , soit enfin de cinq droites, polaires d'un même point par rapport aux cinq courbes. Mais nous préférons la méthode suivante, qui conduit à des opérations moins pénibles. On choisira parmi les points P un système Q de quatre points quelconques 1, 2, 3, 4, et l'on déterminera pour chacune des cinq cubiques le point opposé au système Q . Pour cela on déterminera la conique Γ qui passe par les quatre points 5, 6, 7, 8, et qui admet le rapport anharmonique $Q \cdot [5, 6, 7, 8]$; puis, on prendra sur cette conique des points $9', 10', 11', 12', 13'$, tels qu'on ait

$$[5, 6, 7, 8, 9', 10', 11', 12', 13'] = Q \cdot [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]:$$

les intersections de Γ par les droites

$$(9, 9'), (10, 10'), (11, 11'), (12, 12'), (13, 13')$$

seront les points opposés à Q , appartenant respectivement aux cubiques

$$(P, 9), (P, 10), (P, 11), (P, 12), (P, 13).$$

Nous les désignerons par $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$, et nous nous en servirons pour un système de points correspondants anharmoniquement aux cinq

(*) Note X.

cubiques. Ensuite, on déterminera la conique Σ qui passe par quatre points quelconques 9, 10, 11, 12 des cinq points 9, 10, 11, 12, 13, et qui admet le rapport anharmonique $[\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}]$. Soit 13'' le point de cette conique qui satisfait à l'équation

$$[9, 10, 11, 12, 13''] = [\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}];$$

le point d'intersection de Σ par la droite (13, 13'') est le point opposé biquadratiquement au système P . On voit que la construction revient au fond à la construction si connue du point opposé à un système de quatre points appartenant à une courbe cubique.

La construction ne réussit pas si trois des points Q sont en ligne droite, mais elle ne devient que plus facile si trois des points 5, 6, 7, 8, ou bien trois des points 9, 10, 11, 12, 13 sont en ligne droite, puisqu'alors l'une ou l'autre des coniques Γ , Σ est remplacée par un système de deux droites. On peut donc toujours faire en sorte que le système Q ne contienne pas trois points en ligne droite. Cependant, s'il y avait quatre points en ligne droite parmi les points P , on ferait bien de les prendre pour le système Q , puisque en ce cas la détermination du point biquadratiquement opposé au système P se réduirait tout simplement à la détermination du point opposé au système des quatre points 5, 6, 7, 8, relativement à la courbe cubique (5, 6... 13). Encore, s'il y avait quatre des cinq points 9, 10, 11, 12, 13 en ligne droite, la construction précédente ne serait plus applicable. En effet, dans ce cas il n'y a aucun point opposé biquadratiquement au système P , à moins que la condition

$$P \cdot [9, 10, 11, 12] = [9, 10, 11, 12]$$

ne soit satisfaite par les quatre points en ligne droite. En supposant que cette condition eût lieu, on déterminerait sur la droite (9.. 12) le point 13' qui satisfait à l'équation

$$P \cdot [9, 10, 11, 12, 13] = [9, 10, 11, 12, 13'];$$

et on trouverait que tout point de la droite (13, 13') aurait la propriété caractéristique d'un point opposé biquadratiquement au système P .

La construction cesse encore d'être applicable si les points P et trois des points 9, ... 13 appartiennent à une même cubique. Elle deviendrait indéterminée si l'un des cinq points 9... 13 était le neuvième point appartenant à la base cubique P . Ainsi en supposant que 13 appartint à cette base, tout point de la conique Σ serait opposé biquadratiquement au système P .

C'est ce qui arriverait aussi si l'on avait la relation

$$P \cdot [9, \dots 13] = [9, \dots 13],$$

ce dernier symbole se rapportant à la conique qu'on peut mener par les cinq points.

ART. 6.

Nous allons maintenant revenir sur les cas particuliers que nous avons exclus de la discussion générale (art. 4). Dans tous ces cas, comme on a pu voir par ce qui précède, on pourra simplifier la détermination des points opposés biquadratiquement à certains systèmes de huit points, si toutefois ces points ne cessent pas d'exister.

(1.) Supposons que les neuf points $1, 2, \dots 9$ forment la base P d'un faisceau de courbes cubiques. La conique Σ , qui passe par les points $10, \dots 13$, et admet le rapport anharmonique $P \cdot [10, 11, 12, 13]$ passera aussi par les points $14, 15, 16$. Car on pourra faire passer par les treize points et par un point quelconque σ de cette conique, une courbe S du quatrième ordre qui aura pour faisceaux générateurs le faisceau de cubiques (P), et le faisceau de droites (σ). Les courbes Σ et S se couperont en huit points, dont $\sigma, 10, 11, 12, 13$ seront cinq; nous allons voir que les trois autres seront précisément les points inconnus $14, 15, 16$. Soit, en effet, x un des trois points d'intersection de Σ et S , autres que $\sigma, 10, 11, 12, 13$; en prenant x pour centre du faisceau générateur, on aura une courbe X du quatrième ordre, qui passera par x et par les treize points, mais qui ne pourra pas coïncider avec S , puisque, en désignant par α un point quelconque qui n'appartient pas à la conique Σ , les deux rapports anharmoniques

$$x \cdot [10, 11, 12, \alpha], \quad \sigma \cdot [10, 11, 12, \alpha]$$

ne sauraient être égaux. Donc le point x est bien un des trois points $14, 15, 16$, puisqu'il appartient en même temps aux deux courbes S et X . On arriverait au même résultat en s'appuyant sur la proposition générale de l'article 4, d'où l'on conclurait qu'un point quelconque de Σ appartient à la cubique déterminée par les sept points $10 \dots 16$ et deux quelconques des points P ; c'est-à-dire que cette cubique est composée de Σ et de la droite qui joint les deux points. Pour compléter la solution du problème, on déterminera par la méthode générale une cubique qui passera par les trois

points inconnus, par trois des points 10... 13, et par trois des points P . Trois des points d'intersection de cette cubique par Σ seront connus; donc on trouvera les trois autres par la construction cubique que nous avons déjà indiquée.

Nous ferons remarquer que si les points 10... 13 appartiennent, deux à deux, à deux courbes cubiques du faisceau (P), la solution du problème sera linéaire. En effet, soient $(P, 10, 11)$, $(P, 12, 13)$ les deux cubiques; on pourra considérer la droite $(12, 13)$ et la cubique $(P, 10, 11)$, prises ensemble, comme une courbe du quatrième ordre passant par les treize points; pareillement la droite $(10, 11)$ et la cubique $(P, 12, 13)$ composeront une autre courbe du quatrième ordre passant par les mêmes points; donc le point d'intersection de $(10, 11)$ et $(12, 13)$ sera un des points cherchés; et l'un des deux autres sera le troisième point d'intersection de la cubique $(P, 10, 11)$ par $(10, 11)$, point qu'on sait déterminer linéairement.

La construction ne sera que quadratique, si trois des points qui n'appartiennent pas à P sont en ligne droite. Soient 10, 11, 12 trois points d'une même droite λ ; soit aussi α le point de λ qui satisfait à l'équation

$$[10, 11, 12, \alpha] = P \cdot [10, 11, 12, 13];$$

la conique Σ sera remplacée par l'ensemble des deux droites λ , et $(13, \alpha)$. Qu'on détermine par la méthode générale ci-dessus une cubique qui passe par les trois points cherchés, par trois des points P , par deux des points 10, 11, 12, et enfin par 13; un des points cherchés sera le troisième point d'intersection de la cubique par λ ; celui-ci se trouvera linéairement; les deux autres seront les deux points d'intersection, autres que 13, de la droite $(13, \alpha)$ par la cubique; on les aura par une construction quadratique.

Enfin, si tous les quatre points 10, 11, 12, 13 appartiennent à la même droite, il n'y aura aucune vraie courbe du quatrième ordre qui pourra passer par les treize points donnés, à moins que la condition

$$P \cdot [10, 11, 12, 13] = [10, 11, 12, 13]$$

ne soit vérifiée; donc tous les fois que cette relation ne subsistera pas, ce cas sera un de ceux que nous devons rejeter. De plus, quand même la condition se trouverait réalisée, on pourra faire abstraction du point 13, puisque toute courbe du quatrième ordre qui passe par les points 1... 12, passera nécessairement par ce point. Il faudra donc qu'un quatorzième point soit donné pour que les seize points soient complètement déterminés; mais

ce point étant donné, les deux autres se trouveront par la construction quadratique précédente.

Nous avons déjà remarqué qu'en désignant par P le système $1, \dots, 8$, tout point appartenant à la conique $(9, \dots, 13)$ est opposé biquadratiquement à P , si l'on a la relation

$$P \cdot [9, 10, 11, 12, 13] = [9, 10, 11, 12, 13].$$

Ce cas se réduit immédiatement à celui que nous venons de traiter. En effet, le neuvième point appartenant à la base cubique P , est évidemment un des trois points cherchés, puisqu'il est un point commun à deux courbes du quatrième ordre, passant toutes les deux par les treize points, et ayant le même faisceau générateur de courbes cubiques (P), mais ayant des points différents biquadratiquement opposés à ces faisceaux. Donc on trouvera linéairement un des trois points $14, 15, 16$; on obtiendra les autres par une construction quadratique, puisqu'on connaîtra quatre des points d'intersection de la conique $(9, \dots, 13)$ par une cubique qu'on fera passer par les deux points inconnus, par quatre des points $9, \dots, 13$, et par trois des points de la base cubique.

(2.) Supposons que les huit points $1, \dots, 8$ appartiennent tous à une même conique (P). La conique $\sigma = (9, 10, 11, 12, 13)$ sera une première conique passant par les points inconnus $14, 15, 16$. Soit C une cubique déterminée par les trois points inconnus, par trois des points $9, \dots, 12$, et par trois des points P . On pourra déterminer cette cubique par la méthode générale, et puisqu'on connaîtra trois des points d'intersection de C par σ , on pourra trouver une seconde conique σ' , qui coupera σ en quatre points, dont un sera connu d'avance, tandis que les autres seront les points cherchés.

(3.) Supposons que onze des treize points appartiennent à une même cubique (P); soient $1, 2, \dots, 11$ ces onze points, que nous désignerons par P . On sait que toute courbe du quatrième ordre, qui passe par onze points d'une cubique, rencontre la cubique en un douzième point fixe. Ce point fixe sera un des trois points cherchés; nous le désignerons par 14 ; il pourra se déterminer linéairement; de plus, cette détermination dépendra uniquement des onze points P , et nullement des points $12, 13$. On pourra donc substituer à ces deux points deux autres points quelconques choisis à volonté, pourvu qu'ils ne soient pas situés sur la cubique (P). Nous prendrons actuellement, au lieu de 12 et 13 , deux points $12'$ et $13'$ qui forment avec sept des onze points les neuf points basiques Q d'un faisceau de courbes cubiques, auquel

la cubique (P) n'appartient pas. Soient 1, 2... 7 les sept points; on prendra pour 12' un point quelconque qui n'appartient pas à (P); 13' sera le neuvième point appartenant à la base cubique 1... 7, 12', mais il ne sera pas nécessaire de le trouver, puisqu'on n'en fait aucun usage dans la construction. On déterminera la conique qui passe par les quatre points 8, 9, 10, 11, et qui admet le rapport anharmonique $Q \cdot [8, 9, 10, 11]$: cette conique passera par le point 14 cherché, puisqu'elle doit passer (art. 6, 1) par les trois points qui complètent la base biquadratique 1... 11, 12', 13'. En échangeant entre eux un des quatre points et un des sept points, on aura une seconde conique, qui coupera la première en trois points connus d'avance; le quatrième point d'intersection sera le point 14. Pour trouver les points 15 et 16, on considérera un système de huit points Ω , composé des deux points 12 et 13, et de six points quelconques des points P . Soient 1... 6 ces six points, et désignons par ω le point biquadratiquement opposé à Ω . La cubique (P) et la droite (12, 13) composent une courbe du quatrième ordre passant par les treize points donnés. Donc les points 15, 16 sont les deux points d'intersection (autres que 12, 13) de la droite (12, 13) par la courbe du quatrième ordre qui a pour faisceaux générateurs le faisceau de cubiques (Ω) et le faisceau de droites (ω). Donc enfin les points 15, 16 sont les points doubles des deux divisions homographiques déterminées par les deux faisceaux sur la droite (12, 13).

Si douze des points donnés se trouvaient sur une même cubique, il faudrait qu'un quelconque de ces douze points fût déterminé par les onze autres de la manière que nous avons indiquée; autrement on ne pourrait faire passer aucune vraie courbe du quatrième ordre par ces points. Mais en ce cas il faudrait aussi qu'un quatorzième point fût donné, afin de déterminer complètement le système des seize points; alors la construction des points 15 et 16 serait la même que ci-dessus.

(4.) Lorsque quatre des treize points sont en ligne droite, on aura tout d'abord une cubique passant par les trois points inconnus, puisque ces points appartiendront évidemment à la cubique des neuf autres points. Mais on peut aussi opérer de la manière suivante, sans faire usage de cette cubique. Soient 10, 11, 12, 13 les quatre points en ligne droite; les points p_{10} , p_{11} , p_{12} , p_{13} pourront se déterminer par la méthode générale de l'article 5. Ces points, ainsi que les points d'intersection des droites (p_{10} , 11), (p_{11} , 10), etc., appartiendront à la conique (8, 9, 14, 15, 16), qui se trouvera ainsi complètement déterminée. De même on pourra déterminer la conique

(7, 9, 14, 15, 16), dont les intersections avec la première conique feront connaître la solution du problème.

ART. 7.

Il y a encore quelques cas particuliers du problème qui ne sont pas dépourvus d'intérêt, mais dont la discussion, d'ailleurs très facile, dépasserait les limites que nous nous sommes prescrites. Mais nous ne saurions nous dispenser de placer ici les observations suivantes qui serviront à éclaircir la solution générale.

(1.) La détermination de la cubique (8, 9, 16) exige la connaissance de deux seulement des points p_8, p_9, \dots, p_{13} . En effet, quand on aura trouvé les deux points p_8 et p_9 on aura neuf points de la cubique, puisque le point d'intersection des droites $(p_8, 9), (p_9, 8)$ appartient aussi à cette courbe. De plus, tant que le problème reste cubique, il ne peut arriver que les neuf points forment la base d'un faisceau de courbes cubiques. Pour que le point d'intersection de $(p_8, 9), (p_9, 8)$ fût le neuvième point appartenant à la base cubique 8... 13, p_8, p_9 , il faudrait que les six points $p_8, 9, \dots, 13$ appartenissent à une même conique. Or la conique $(p_8, 10, \dots, 13)$ n'est autre que la conique qui satisfait à la relation

$$P_8 \cdot [10, 11, 12, 13] = [10, 11, 12, 13];$$

en outre, x étant le point de cette conique qui vérifie l'équation

$$P_8 \cdot [9, 10, 11, 12, 13] = [x, 10, 11, 12, 13],$$

p_8 sera le second point d'intersection de la droite $(x, 9)$ avec la conique. Donc, si le point 9 appartient lui-même à la conique, p_8 viendra se confondre avec 9, mais la position limite de la droite qui joindra ces deux points coïncidents sera toujours la droite $(x, 9)$; d'où il s'ensuit que les six points $p_8, 9, \dots, 13$ (dont les deux premiers sont coïncidents) ne peuvent pas être censés appartenir à une même conique, à moins que le point x ne coïncide avec 9. Mais si cela arrivait, l'équation

$$P_8 \cdot [9, 10, 11, 12, 13] = [9, 10, 11, 12, 13]$$

serait satisfaite; c'est-à-dire, le neuvième point appartenant à la base P_8

serait un des trois points cherchés, et la détermination des deux autres ne serait que quadratique.

On conclura aussi, de ce qui vient d'être dit, que si p_8 , l'un des deux points opposés qu'on aura à déterminer, venait à coïncider avec l'un des points 9... 10, la cubique (8... 16) n'en serait pas moins complètement déterminée, puisqu'on aurait remplacé deux points par une tangente et son point de contact.

Nous ajouterons que si les deux points p_8 et p_9 , tout en restant déterminés l'un et l'autre, venaient à se confondre en un seul point p , ce point serait un des trois points cherchés; puisqu'en considérant successivement les deux bases P_8 et P_9 (qui auraient le même point opposé p , mais qui ne pourraient pas être identiques, parceque nous avons supposé que la position du point opposé p n'est pas indéterminée), on aurait deux courbes du quatrième ordre, passant par les treize points, et se coupant en outre au point p .

Donc on conclura généralement qu'afin d'avoir les deux cubiques, dont on a besoin pour déterminer les trois points cherchés, il suffira de trouver trois points opposés biquadratiquement à trois systèmes de huit points, choisis convenablement parmi les treize points donnés.

(2.) Puisque les deux courbes cubiques (8,... 16) et (7, 9... 16) se coupent au point p_8 , il est évident que p_8 est le neuvième point qui appartient à la base cubique 9... 16. Nous aurons donc le théorème que voici:

« Si l'on partage les seize points d'une base biquadratique en deux systèmes de huit points, le point biquadratiquement opposé à l'un de ces systèmes appartient en même temps à la base cubique déterminée par l'autre système. La courbe du faisceau qui passe par le neuvième point appartenant à l'un des deux systèmes, passe aussi par le neuvième point appartenant à l'autre système. »

ART. 8.

Nous allons maintenant supposer que quelques uns des treize points deviennent imaginaires. Il suffira de considérer les deux cas (1) où l'on n'aurait que trois points réels, (2) où l'on n'aurait qu'un seul point réel. Pour abrégé, nous supposerons que la position des treize points soit tout-à-fait générale, et nous ne nous occuperons pas encore des circonstances spéciales que nous avons considérées dans l'article 6.

(1.) Supposons que 1, 2; 3, 4; 5, 6; 10, 11; 12, 13 soient des dyades de points imaginaires, mais 7, 8, 9 soient des points réels. La détermination des points a, b, c biquadratiquement opposés aux bases cubiques (1, ... 6, 8, 9), (1, ... 6, 9, 7), (1, ... 6, 7, 8), que nous désignerons par A, B, C , se fera à peu près comme si les treize points étaient tous réels. En effet, d'après ce que nous avons dit dans la première partie de ce mémoire, on saura déterminer (1) la conique Γ de l'article 5; (2) le point réel ω_9 et les dyades $\omega_{10}\omega_{11}$, $\omega_{12}\omega_{13}$ appartenant à cette conique et correspondant anharmoniquement à la cubique réelle $(C, 9)$ et aux cubiques imaginaires conjuguées $(C, 10)$, $(C, 11)$ et $(C, 12)$, $(C, 13)$; (3) la conique Σ qui passe par les points 10, ... 13, et qui satisfait à l'équation

$$[10, 11, 12, 13] = [\omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}] = C \cdot [10, 11, 12, 13];$$

(4) le point $9'$ de cette conique qui vérifie la relation

$$[9', 10, 11, 12, 13] = [\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}] = C \cdot [9, 10, 11, 12, 13];$$

(5) enfin, le point c cherché, où la droite $(9, 9')$ rencontre pour la seconde fois la conique Σ . Les points a, b, c une fois trouvés, les cubiques $(8, 9, 10 \dots 16)$, $(9, 7, 10 \dots 16)$, $(7, 8, 10 \dots 16)$, dont deux suffisent pour notre but, seront complètement déterminées. En effet, on connaîtra neuf points, dont trois réels, de chacune de ces courbes; et nous avons vu que ces neuf points ne peuvent pas appartenir à une même base cubique.

(2.) On étendra la solution au cas où l'on n'aurait qu'un seul point réel 7, au moyen des principes généraux que nous avons établis dans la première partie. La cubique $(8, \dots 16)$ sera réelle; la détermination de cette courbe se réduira à celle des points b, c qui seront des points imaginaires conjugués. Pour les trouver il faudra substituer dans la solution précédente la dyade 8, 9 aux deux points réels que nous avons désignés par les mêmes nombres. Quoiqu'en cette solution il soit question de points imaginaires, elle ne consiste actuellement que d'une certaine suite d'opérations linéaires, portant sur des points et des droites réelles. Donc, en substituant aux points réels 8, 9 la dyade de points imaginaires, on parviendra à déterminer linéairement les deux points imaginaires c, b biquadratiquement opposées aux systèmes 1, ... 7, 8 et 1, ... 7, 9; il est d'ailleurs évident que ces deux points appartiendront à la même dyade, dont on connaîtra l'homologie avec la dyade 8, 9. Le centre d'homologie des deux dyades appartiendra lui-même à la cubique cherchée; il sera le seul point réel qu'on en connaîtra. Pour éviter

la considération de courbes cubiques imaginaires, on pourra substituer successivement à la dyade 8, 9 les dyades 1, 2 et 3, 4; on aura ainsi trois courbes cubiques réelles se coupant en quatre points connus. On déterminera, par la méthode de M. CHASLES, les trois coniques dont chacune passe par les cinq points d'intersection inconnus de deux de ces trois courbes. Ces coniques se couperont aux trois points cherchés, qu'on pourra dès lors déterminer par une construction cubique.

(La suite au cahier prochain.)



Notizia sulla rappresentazione conforme di un'area ellittica sopra un'area circolare.

(del prof. A. SCHWARZ in Zurigo.)

Nella sua dissertazione inaugurale (*Annali di Matematica*, I^a serie, t. 2^o), RIEMANN enunciò il teorema, come sia sempre possibile di rappresentare la superficie di una figura semplicemente connessa (U) sopra di un circolo (S), conservando la connessione e la simiglianza nelle parti infinitesime, e ciò soltanto in una maniera quando si voglia che al centro corrisponda un punto interno fissato ad arbitrio, e ad un punto qualsivoglia della circonferenza un punto del contorno di quella figura, pure dato arbitrariamente.

La rappresentazione conforme della figura U sul circolo S si compie mediante una funzione analitica di variabile complessa $s=f(u)$, indicando ogni valore determinato dell'argomento $u = x + iy$ la posizione di un punto determinato nell'interno della figura U , ed il valore corrispondente s della funzione il posto del punto omologo nell'interno di S .

La funzione analitica $f(u)$ dipende dalla forma del contorno della figura U , dalla posizione dei punti di diramazione nell'interno della medesima ed inoltre da tre costanti; e propriamente alla soluzione completa dell'indicato problema basta la conoscenza di una funzione $s=f(u)$, mediante la quale si rappresenti la superficie della figura U sopra la superficie di un circolo S . Infatti, se si rappresenta l'interno della stessa figura U mediante due funzioni s ed s' sopra l'interno di due circoli S ed S' , ciascuna delle due funzioni s ed s' è una funzione razionale di primo grado dell'altra; basta adunque trovare in ogni caso particolare una unica soluzione e determinare convenientemente le tre costanti.

La determinazione effettiva della funzione rappresentatrice non riuscì sino ad ora che in alcuni casi particolari.

Nella memoria del sig. CHRISTOFFEL, *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie* (*Annali di Matematica*, II^a serie, t. I), il problema della rappresentazione della superficie di un circolo sulla superficie di un poligono limitato da segmenti rettilinei è ridotto ad una quadratura ed alla determinazione di un numero finito di costanti. In modo analogo si può ridurre il problema di rappresentare una area circolare sopra una figura limitata da archi circolari alla soluzione di una equazione differenziale ordinaria ed alla determinazione di un numero finito di costanti. Riguardo a ciò si veda una memoria contenuta nel giornale di BORCHARDT, tomo 70, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*.

La presente nota ha per oggetto la soluzione del problema indicato, quando il contorno della figura U è una ellisse. Sia data nel piano, i cui punti rappresentano geometricamente i valori della quantità complessa $u = x + iy$, una ellisse, i cui fuochi siano i punti $u = +1$ e $u = -1$ ed i cui semi-assi maggiore e minore siano eguali ad a e b .

Si immagini tagliata rettilineamente quest'area ellittica lungo l'asse maggiore dai fuochi sino ai vertici, cioè dal punto $u = +1$ al punto $u = +a$ e dal punto $u = -1$ al punto $u = -a$, e si rappresenti l'interno della superficie semplicemente connessa, in tal guisa ottenuta, mediante la funzione analitica

$$v = \arcsen u$$

sul piano (v). Il campo della variabile complessa v è l'interno di un rettangolo, i punti di mezzo dei cui lati corrispondono ai valori $v = \pm \frac{\pi}{2}$, $v = \pm \frac{i}{2} \log \frac{a+b}{a-b}$ (*). Se ora si rappresenta l'interno di questo rettangolo mediante la funzione

$$s = \operatorname{sen} \operatorname{am} \frac{2Kv}{\pi}$$

sul piano (s), essendo il modulo k scelto secondo le seguenti condizioni

$$\frac{K'}{K} = \frac{2}{\pi} \log \frac{a+b}{a-b}, \quad q = e^{-\frac{K'}{K}\pi} = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2,$$

$$k = 4\sqrt{q} \left\{ \frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(*) Si veda una memoria del sig. SIEBECK nel giornale di Crelle-Borchardt, tomo 55, pag. 246-252 e: CASORATI, *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, pag. 243-245.

si avrà in quest'ultimo piano un circolo di raggio $\frac{1}{\sqrt{k}}$, per modo che combinando le due rappresentazioni, ossia adoperando la funzione

$$s = \operatorname{sen am} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} u \right),$$

avremo rappresentato l'interno della data ellisse, serbata la connessione e la simiglianza nelle parti infinitesime, sopra l'interno di questo circolo. Al centro della ellisse $u=0$ corrisponde il centro del circolo $s=0$, ai vertici $u=\pm a$, $u=\pm bi$ corrispondono i punti $s=\pm \frac{1}{\sqrt{k}}$, $s=\pm \frac{i}{\sqrt{k}}$ (*).

Le linee, lungo le quali è costante la parte reale o imaginaria di v , sono nella superficie della ellisse rispettivamente iperboli o ellissi confocali, nella superficie del circolo curve confocali del quarto ordine coi fuochi $s=\pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$: curve, le cui proprietà geometriche furono studiate più accuratamente dal sig. SIEBECK e dal sig. CASEY (**).

La seguente soluzione analitica del problema proposto completerà la precedente sintetica.

Per determinare sulla superficie della ellisse una funzione della variabile complessa u , la quale sia monodroma, finita e continua per tutti i valori di u nell'interno della ellisse, e la cui parte reale per tutt'i punti del contorno coincida in valore colla funzione $\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ (***) , s'introduca in luogo di u una nuova variabile complessa $z = r e^{i\varphi}$, per modo che

$$u = \frac{1}{2i} (z - z^{-1}), \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right) \operatorname{sen} \phi, \quad y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \operatorname{cos} \phi,$$

e si indichi la costante $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ con r_0 , o in altri termini, si rappresenti la superficie della ellisse nel piano (u) sopra la superficie di una corona circolare giacente nel piano (z) e limitata dai circoli di raggi r_0 e $\frac{1}{r_0}$. Ad ogni valore di u corrispondono due valori di z , e la funzione cercata di u si trasforma in

(*) Si veda SIEBECK, *Ueber eine Gattung von Curven von vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen*, Giornale di Crelle-Borchardt, t. 57 e 59, e nell'opera suaccennata del sig. CASORATI, pag. 246-249.

(**) *On bicircular quartics* (Trans. R. Irish Acad. 1869).

(***) Vedi art. 21 della dissertazione inaugurale di RIEMANN.

una funzione di z , la quale è monodroma, finita e continua insieme colle sue derivate per tutti i valori di z , il cui valore assoluto è compreso tra r_0 e $\frac{1}{r_0}$.

La funzione cercata si può adunque svolgere per tutti questi valori di z nella forma

$$\psi(z) = A_0 + B_0 i + \sum_1^{\infty} (A_m + B_m i) z^m + \sum_1^{\infty} (A_{-m} + B_{-m} i) z^{-m},$$

mentre i coefficienti ancora ignoti A e B si possono determinare in guisa che la parte reale di $\psi(z)$, tanto per $z = r_0 e^{i\varphi}$ quanto per $z = \frac{1}{r_0} e^{-i\varphi}$, sia eguale

$$\text{a } \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = \log \frac{1}{2r_0} + \frac{1}{2} \log(1 - 2r^2 \cos 2\phi + r^4) =$$

$$= \log \frac{1}{2r_0} - r_0^2 \cos 2\phi - \frac{1}{2} r_0^4 \cos 4\phi - \frac{1}{3} r_0^6 \cos 6\phi - \dots$$

La funzione $\psi(z) = \log \frac{1}{2r_0} - \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{r_0^{2n}}{1 + r_0^{2n}} (z^{2n} + z^{-2n})$ soddisfa alle condizioni proposte, e, per espressione della funzione mediante la quale si rappresenta in modo conforme la superficie della ellisse su quella di un circolo S' di raggio 1, essendo i centri delle due figure punti corrispondenti, si ottiene

$$s' = u e^{-\psi(z)} = e^{\log u - \psi(z)}.$$

Se si pone $z = e^{iv}$, $r_0^2 = q$, riesce $u = \text{sen } v$, $z^{2n} + z^{-2n} = 2 \cos 2nv$, e

$$\log s' = \log 2\sqrt{q} \cdot \text{sen } v + \frac{2q}{1+q} \cos 2v + \frac{1}{2} \frac{2q^2}{1+q^2} \cos 4v + \frac{1}{3} \frac{2q^3}{1+q^3} \cos 6v + \dots$$

espressione equivalente (JACOBI, *Fundamenta* pag. 99, form. 6) a

$$\log \text{sen am } \frac{2Kv}{\pi} + \log \sqrt{k}.$$

È manifesta adunque la esattezza della fatta asserzione, come cioè si possa rappresentare l'interno della suaccennata ellisse mediante la funzione

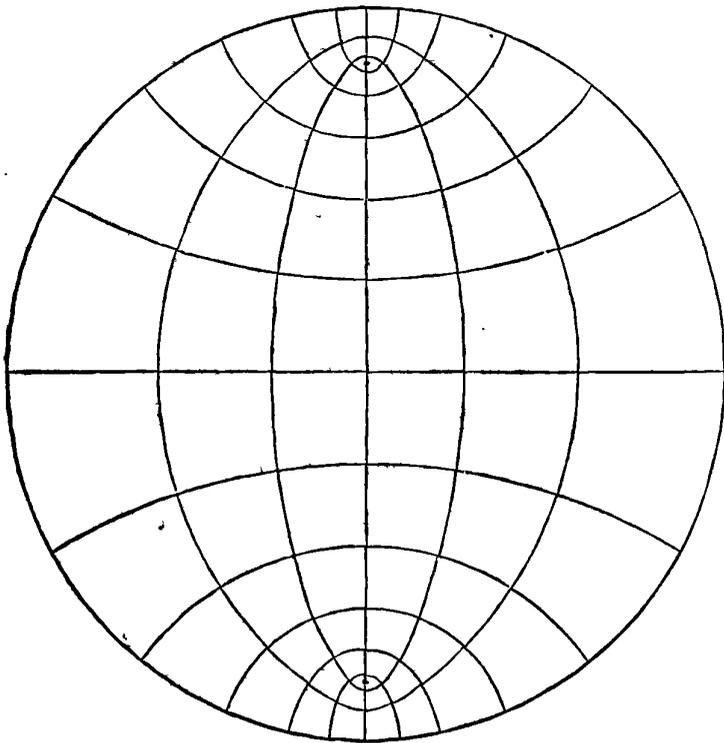
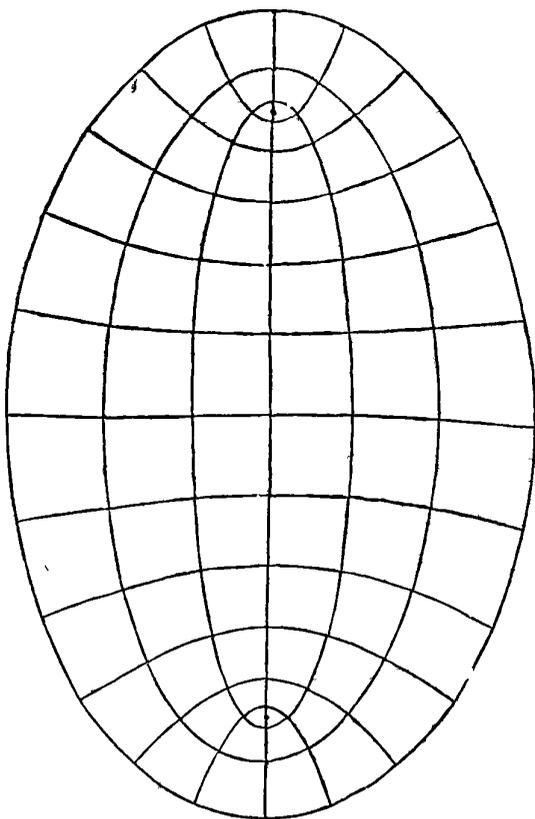
$$s = \text{sen am} \left(\frac{2K}{\pi} \text{arc sen } u \right)$$

nell'interno di un circolo di raggio $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Per rendere intuitiva questa rappresentazione con un disegno, si è calcolata la seguente tabella pel modulo $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, e per mezzo di essa si è costruita la figura annessa, nella quale, per difetto di spazio, l'asse reale è disposto verticalmente:

$$\text{sen am} \left(\frac{m+ni}{6} K, \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

<i>n</i>							
3	1,189 <i>i</i>	0,576 + 1,041 <i>i</i>	0,935 + 0,734 <i>i</i>	1,099 + 0,455 <i>i</i>	1,162 + 0,254 <i>i</i>	1,184 + 0,112 <i>i</i>	1,189
2	0,684 <i>i</i>	0,398 + 0,624 <i>i</i>	0,707 + 0,482 <i>i</i>	0,906 + 0,326 <i>i</i>	1,018 + 0,193 <i>i</i>	1,074 + 0,088 <i>i</i>	1,093
1	0,317 <i>i</i>	0,323 + 0,294 <i>i</i>	0,597 + 0,236 <i>i</i>	0,799 + 0,166 <i>i</i>	0,930 + 0,102 <i>i</i>	1,101 + 0,048 <i>i</i>	1,024
0	0	0,302	0,565	0,765	0,900	0,976	1
	0	1	2	3	4	5	6 <i>m</i>



Maggio 1869.

La risolvente dell'equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee.

(del prof. L. SCHLÄFLI, a Berna.)

Sieno $x_m = \varepsilon^m a + \varepsilon^{2m} b + \varepsilon^{4m} c + \varepsilon^{3m} d$ ($\log \varepsilon = \frac{2\pi}{5}$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$) le radici della equazione

$$x^5 - 10\alpha x^3 - 10\beta x^2 - 5\gamma x - \delta = 0; \quad (1)$$

e per maggior brevità si ponga

$$\left. \begin{array}{l} g = ab^2 + cd^2 \\ g' = bc^2 + da^2 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} h = a^3 b + c^3 d \\ h' = b^3 c + d^3 a \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} j = a^5 + c^5 \\ j' = b^5 + d^5 \end{array} \right|. \quad (2)$$

Le somme delle potenze delle radici sono:

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 10(ac + bd) = 20\alpha, \quad S_3 = 15(g + g') = 30\beta,$$

$$S_4 = 30(ac + bd)^2 + 60acbd + 20(h + h') = 200\alpha^2 + 20\gamma,$$

$$S_5 = 5(j + j') + 100(ac + bd)(g + g') + 50(acg + bdg') = 500\alpha\beta + 5\delta.$$

La 2^a e la 3^a di queste cinque uguaglianze suggeriscono di porre

$$ac = \alpha + t, \quad bd = \alpha - t, \quad g = \beta + u, \quad g' = \beta - u,$$

ed allora le due ultime diventano

$$h + h' = 3t^2 + \alpha^2 + \gamma \quad (3)$$

$$j + j' = \delta - 20tu. \quad (4)$$

Dalle uguaglianze

$$gg' = bdh + ach', \quad hh' = acg^2 + bdh^2 - 4(acbd)^2,$$

$$bdj = g'h - \alpha^2 c^2 g, \quad acj' = gh' - b^2 d^2 g',$$

che danno

$$abcd(j+j') = acg'h + bdgh' - a^3c^3g - b^3d^3g',$$

seguono le relazioni

$$t(h-h') = 3\alpha t^2 + u^2 - \beta^2 + \alpha^3 + \alpha\gamma, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}hh' = \alpha(u^2 + \beta^2) + 2\beta tu - 2(\alpha^2 - t^2)^2, \quad (6)$$

$$(t^2 - \alpha^2)(20tu - \delta) + (tu - \alpha\beta)(h + h') + (\alpha u - \beta t)(h - h') \\ + 2tu(t^2 + 3\alpha^2) + 2\alpha\beta(3t^2 + \alpha^2) = 0. \quad (7)$$

Eliminando le h, h' prima dalle (3), (5), (6), poi dalle (3), (5), (7) si ottengono due equazioni, l'una di quarto grado in u , l'altra del terzo. Considerando le due equazioni come rappresentanti due curve, le cui coordinate variabili siano t, u , la prima di queste due curve ha due punti doppj determinati da

$$t = 0, \quad u^2 - \beta^2 + \alpha^3 + \alpha\gamma = 0,$$

pei quali passa anche la seconda curva. Le due curve hanno il punto $t = 0, u = 0$ per centro comune e si segano fra loro nei tre punti

$$t = \alpha, \quad u^3 - \beta u^2 + (16\alpha^3 + 2\alpha\gamma - \beta^2)u - 2\alpha\beta\gamma + \beta^3 = 0.$$

Dunque la risultante delle due equazioni, nascente dalla eliminazione di u , è divisibile per $t^4(t^2 - \alpha^2)^3$. Per evitare almeno il fattore t^4 , pongo

$$tv = u^2 - \beta^2 + \alpha^3 + \alpha\gamma,$$

cosicchè $h - h' = v + 3\alpha t$. Le due equazioni diventano

$$v^2 + 14\alpha tv + 16\beta tu - 25t^4 + (35\alpha^2 - 6\gamma)t^2 + 16\alpha\beta^2 - (5\alpha^2 + \gamma)^2 = 0,$$

$$(\alpha u - \beta t)v + (25t^2 - 10\alpha^2 + \gamma)tu - \delta t^2 + \alpha^2\delta + \alpha^3\beta - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Moltiplicate rispettivamente per $\alpha t^2, -tu$, e sommate danno una equazione di terzo grado in u . Dalle due equazioni di terzo grado si derivano nel modo consueto tre equazioni di secondo grado, le quali considerate come lineari in $u^2, u, 1$ conducono ad un determinante simmetrico. Ma introducendo v invece di u^2 e modificando una delle tre equazioni per mezzo delle altre due di modo che il determinante rimanga simmetrico, otteniamo dei coefficienti divisibili per $\alpha^2 - t^2$. Allora possiamo espellere il fattore $t^4(t^2 - \alpha^2)^3$ dalla risolvente. Ma poichè rimane ancora il fattore α^2 , introduco una terza incognita ausiliare w e formo il sistema

$$\begin{aligned}
 I &= v^2 + 14atv + 16\beta tu - 25t^4 + (35\alpha^2 - 6\gamma)t^2 + 16\alpha\beta^2 - (5\alpha^2 + \gamma)^2 = 0, \\
 II &= uv + tw - 10\alpha tu + \alpha^2\beta - \beta\gamma + \alpha\delta = 0, \\
 III &= u^2 - tv + \alpha^3 + \alpha\gamma - \beta^2 = 0, \\
 IV &= \alpha w - (25t^2 + \gamma)u + \beta v + \delta t = 0.
 \end{aligned}$$

I polinomi dell'ultimo sistema lineare si chiamino p, q, r, s . Allora il calcolo sopra mentovato è equivalente alle uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}
 & [atv - \beta tu + 25t^4 + (\gamma - 10\alpha^2)t^2 - \alpha^2(\alpha^2 + \gamma) + \alpha\beta^2] \cdot I \\
 & + [-\alpha uv - 14\alpha^2 tu - (16\alpha\beta + \delta)t^2 + \alpha^3\beta - \alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta] \cdot II \\
 & + \left(\alpha v^2 + (25t^2 + 4\alpha^2 + \gamma)tv + 350\alpha t^4 + [16\beta^2 + 14\alpha(\gamma - 10\alpha^2)]t^2 \right) \cdot III \\
 & + [tuv + 14\alpha t^2 u + \beta t(16t^2 - \alpha^2 + \gamma)] \cdot IV = (\alpha^2 - t^2)p, \\
 & (\alpha u - \beta t)I + [-\alpha v + 25t^3 + (\gamma - 24\alpha^2)t]II - 16\alpha\beta t \cdot III \\
 & + (tv^2 - \alpha t^2 - \alpha\gamma) \cdot IV = (\alpha^2 - t^2)q, \\
 & \alpha t \cdot I - (\alpha u + \beta t) \cdot II + [\alpha v + 25t^3 + (\gamma - 10\alpha^2)t] \cdot III \\
 & + (tu + \alpha\beta) \cdot IV = (\alpha^2 - t^2)r, \quad IV = s.
 \end{aligned}$$

L'ultimo sistema lineare è

$$\left. \begin{aligned}
 p &= A + Hu + Gv + \delta t \cdot w = 0, \\
 q &= H + Bu + Fv + Lw = 0, \\
 r &= G + Fu + Cv + \beta w = 0, \\
 s &= \delta t + Lu + \beta v + \alpha w = 0,
 \end{aligned} \right\} \text{dove}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 625t^6 + 25(-20\alpha^2 + 7\gamma)t^4 + (100\alpha^4 - 45\alpha^2\gamma + 31\gamma^2 - 25\alpha\beta^2 - 16\beta\delta)t^2 \\
 & + (\alpha^2 + \gamma)(5\alpha^2 + \gamma)^2 - \alpha\beta^2(40\alpha^2 + 28\gamma) + 16\beta^4 + 2\beta\delta(\alpha^2 - \gamma) + \alpha\delta^2, \\
 B &= 250\alpha t^2 - 25\alpha^3 - 10\alpha\gamma + 16\beta^2, \quad C = 25t^2 + \alpha^2 + \gamma, \\
 F &= -\alpha\beta - \delta, \quad G = 25\alpha t^3 + (-35\alpha^3 - 19\alpha\gamma + 25\beta^2)t, \\
 H &= -25\beta t^3 + (-15\alpha^2\beta + 19\beta\gamma - 24\alpha\delta)t, \quad L = -25t^2 - \gamma.
 \end{aligned}$$

Il determinante di questo sistema lineare è di sesto grado per rapporto a t^2 (termine ACL^2); esso uguagliato a zero è la risolvente cercata. Quando uno dei sei valori di t^2 sia trovato, una estrazione di radice quadrata farà conoscere la t , poi i minori del determinante ci daranno u, v ; allora $g = \beta + u$, $g' = \beta - u$, $h = \frac{1}{2}(v + 3t^2 + 3\alpha t + \alpha^2 + \gamma)$, $h' = \frac{1}{2}(-v + 3t^2 - 3\alpha t + \alpha^2 + \gamma)$

si formeranno con un processo lineare. Ora si ponga

$$\zeta = ab^2 - cd^2, \quad \zeta' = bc^2 - da^2;$$

sarà $\zeta\zeta' = ach' - bdh = -\alpha v + 3t^3 + (\gamma - 2\alpha^2)t$, $\zeta^2 = g^2 - 4(\alpha + t)(\alpha - t)^2$; bisogna dunque una seconda estrazione di radice quadrata per trovare la ζ ; ma la ζ' è allora razionalmente determinata, e si conoscono $ab^2 = \frac{1}{2}(g + \zeta)$, $cd^2 = \frac{1}{2}(g - \zeta)$, $bc^2 = \frac{1}{2}(g' + \zeta')$, $da^2 = \frac{1}{2}(g' - \zeta')$. Poichè

$$a^5 = \frac{ab^3 \cdot (da^3)^2}{(bd)^2} = \frac{(g + \zeta)(g' - \zeta')^2}{8(\alpha - t)^2},$$

bisogna una estrazione di radice quinta, la quale farà conoscere la a , poi si hanno le

$$b = \frac{g' + \zeta'}{2(\alpha + t)^2} a^2, \quad c = \frac{\alpha + t}{a}, \quad d = \frac{g' - \zeta'}{2a^2},$$

e finalmente

$$x_0 = a + b + c + d.$$

Esempio. $x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = 0$, donde $\alpha = \frac{1}{10}$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{2}{5}$, $\delta = 1$.

Sia $T = 500t^2$; allora

$$A = \frac{1}{200000} (T^3 + 52T^2 + 596T + 1245), \quad B = \frac{1}{200} (10T + 43).$$

$$C = \frac{1}{100} (5T + 41), \quad F = -\frac{51}{50}, \quad G = \frac{t}{200} (T + 41),$$

$$H = \frac{t}{100} (-T - 91), \quad L = \frac{1}{20} (-T - 8).$$

Il determinante moltiplicato per $2^{12} \cdot 5^8$ diventa

$$T^6 + 74T^5 + 1599T^4 + 8012T^3 - 5201T^2 - 2319286T + 62001,$$

ed ha $T - 9$ per fattore:

$$B = \frac{133}{200}, \quad C = \frac{43}{50}, \quad G = \frac{3}{40\sqrt{5}}, \quad H = -\frac{3}{10\sqrt{5}}, \quad L = -\frac{17}{20}, \quad A = \frac{231}{4000},$$

$$t = \frac{3}{10\sqrt{5}}, \quad u = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \quad v = \frac{11}{20\sqrt{5}}, \quad w = -\frac{7}{10\sqrt{5}};$$

$$\alpha + t = \frac{3 + \sqrt{5}}{10\sqrt{5}}, \quad \alpha - t = -\frac{3 - \sqrt{5}}{10\sqrt{5}},$$

$$g = \frac{2 + \sqrt{5}}{5\sqrt{5}}, \quad g' = +\frac{\sqrt{5} - 2}{5\sqrt{5}}, \quad \zeta^2 = 47 \cdot \frac{2 + \sqrt{5}}{625\sqrt{5}}, \quad \zeta\zeta' = \frac{47}{625\sqrt{5}}.$$

Milano, 13 agosto 1869.

Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable.

(par H. G. ZEUTHEN à Copenhague.)

On appelle ordinaires les singularités d'une courbe gauche et géométrique et de la surface développable, enveloppe de ses plans osculateurs, celles qui, corrélatives les unes aux autres, ont toujours lieu, ou les unes par rapport au système de points, ou les autres par rapport au système de plans, que forment la courbe et la développable, si l'une ou l'autre de celles-ci est représentée d'une manière générale. Mr. CAYLEY (*) a indiqué les principales de ces singularités ordinaires, dont il a désigné les nombres de la manière suivante :

- 1.^o l'ordre de la courbe, par m ;
- 2.^o la classe de la développable, par n ;
- 3.^o le rang du système des points et des plans, c'est à dire le nombre qui indique à la fois la classe de la courbe et l'ordre de la développable, par r ;
- 4.^o le nombre des points stationnaires de la courbe, par β ;
- 5.^o le nombre des plans tangents stationnaires de la développable, par α ;
- 6.^o la classe de la surface développable, enveloppe des plans tangents doubles de la courbe donnée, par y ;
- 7.^o l'ordre de la courbe double de la surface développable donnée, par x ;
- 8.^o le nombre des droites partant d'un même point et rencontrant deux fois la courbe donnée, par h ;
- 9.^o le nombre des droites dans un même plan qui se trouvent sur deux plans tangents à la surface développable donnée, ou qui la touchent deux fois, par g .

(*) *Journal de Mathématiques* de Mr. LIOUVILLE: t. X, p. 245.

Mr. CAYLEY a aussi tiré des équations Plückeriennes, relatives à une courbe plane, six équations (*) auxquelles satisfont ces neuf nombres, de façon qu'on n'a besoin d'en connaître que trois pour trouver les autres.

Plus tard MM. CAYLEY et SALMON ont exprimé, au moyen de ces nombres, ceux de plusieurs autres singularités ordinaires d'une courbe et d'une développable, et enfin, j'y ai ajouté, dans une correspondance insérée par Mr. CHASLES dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (**), encore d'autres résultats, toutefois sans démonstration. En démontrant ici ces résultats, j'en augmenterai en même temps considérablement le nombre. Je me bornerai aux singularités ordinaires « du premier ordre », c'est à dire à celles qui sont relatives à des points, des plans et des droites qui ont des rapports avec la courbe, en laissant de côté pour le moment celles qui ont égard à la courbure, à des surfaces ou à des courbes tangentes, etc. (***). Même avec cette restriction, il serait impossible d'épuiser toutes les singularités possibles; mais j'espère de donner ici les résultats qui sont les plus importants, non seulement dans la théorie des courbes gauches et des surfaces développables, mais aussi pour celle des surfaces gauches; ou de fournir au moins le moyen de les trouver.

1. *Notations.* 1.^o Je désigne par $P(\dots)$ le nombre des plans qui satisfont à des conditions données: un p dans la parenthèse indiquera que le plan passe par un point donné; de même le nombre 1 ou 2 indiquera que le plan a avec la courbe gauche dont nous nous occupons un contact simple ou une osculation, respectivement. On aura, par exemple

$$y = P(p, 1, 1), \quad n = P(p, 2);$$

mais pour ces singularités primitives nous garderons les notations déjà posées.

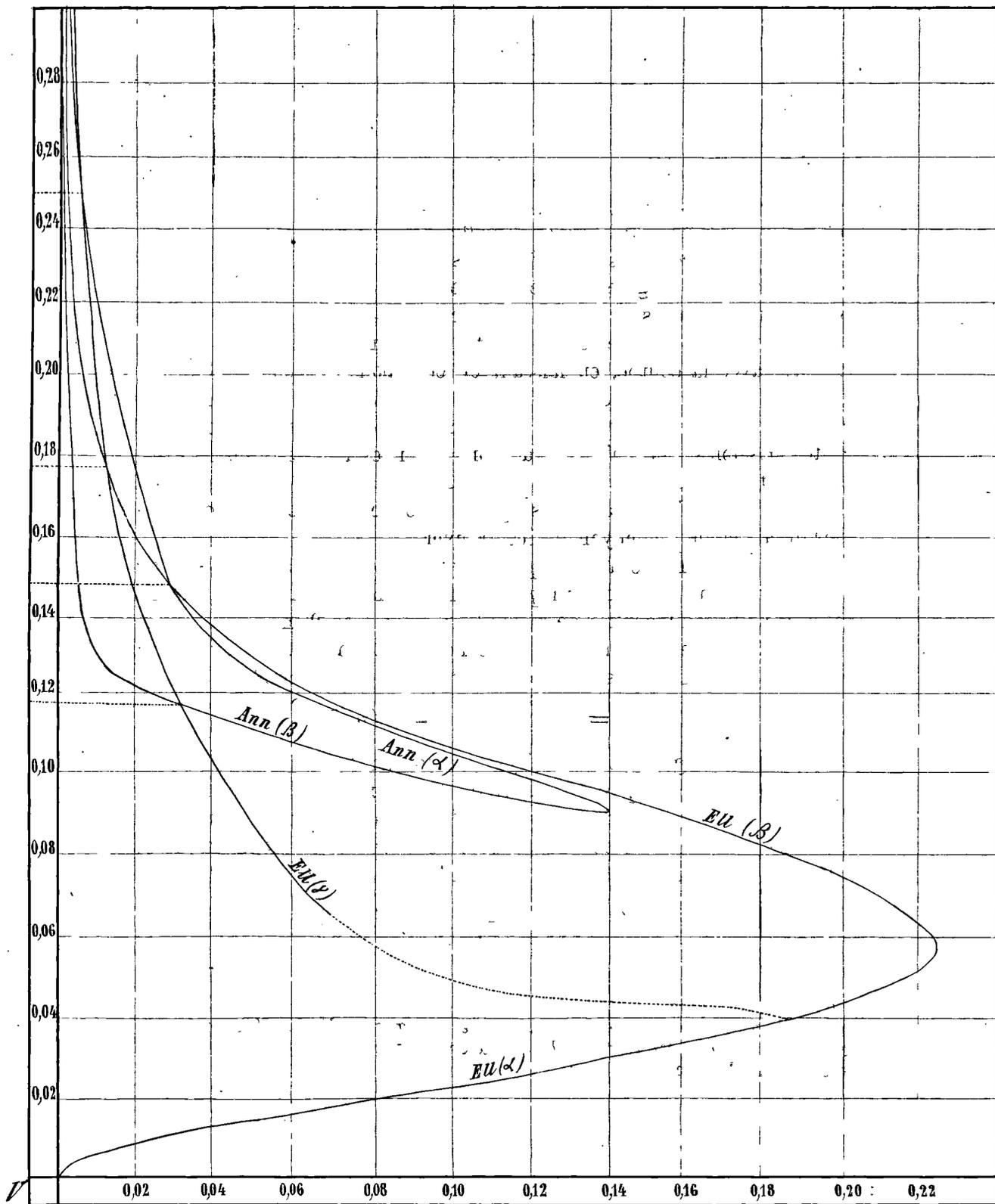
2.^o Je désigne par $p(\dots)$ le nombre des points qui satisfont à des conditions données: un P dans la parenthèse indiquera que le point se trouve dans un plan donné; 1 ou 2, qu'il se trouve, respectivement, sur la surface développable ou sur la courbe. On aurait par exemple

$$x = p(P, 1, 1), \quad m = p(P, 2).$$

(*) Voir dans la suite au n.^o 2.

(**) 27 juillet 1868.

(***) Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de Math.*, 2^e série, t. VII, sur les caractéristiques des surfaces du second ordre, j'ai déduit quelques singularités du second ordre d'une courbe.



3.° Je désigne enfin par $d(\dots)$ ou par $D(\dots)$ le nombre des droites qui satisfont à des conditions données: un d ou un D dans la parenthèse indiquera que la droite rencontre une droite fixe; 1 ou 2 dans la première parenthèse (après d), qu'elle rencontre ou qu'elle est tangente à la courbe donnée, respectivement; 1 ou 2 dans la seconde parenthèse (après D), qu'elle est dans un plan tangent à la surface développable, ou qu'elle en est une génératrice, respectivement; 2 aura donc la même signification après d et après D .

4.° Une parenthèse carrée renfermant deux ou plusieurs des notations précédentes, $P(\dots)$ et $d(\dots)$, $p(\dots)$ et $D(\dots)$, $d(\dots)$ et $d(\dots)$, ou $D(\dots)$ et $D(\dots)$, indiquera que les droites d ou D doivent être dans les plans P , passer par les points p , ou se rencontrer entre elles; et j'aurai ainsi une notation du nombre des figures composées de cette façon.

5.° $P[d(\dots) d(\dots) d(\dots)]$ et $p[d(\dots) d(\dots) d(\dots)]$ désignent respectivement le nombre des plans où se trouvent, et le nombre des points d'où partent, trois droites qui satisfont aux conditions indiquées dans les parenthèses.

6.° En marquant de la même manière $\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ — les chiffres 1 et 2 dans les différentes parenthèses rondes d'un même symbole, nous exprimerons que les points d'intersection des droites d et de la courbe coïncident entre eux ou avec les points de contact des plans P , et que les plans tangents à la développable qui passent par les droites D coïncident entre eux ou que leurs génératrices de contact passent par les points p . Partout où ces marques sont omises, nous entendons que les points et les plans qui correspondent aux chiffres sont distincts (*).

Au lieu de donner, dès à présent, des exemples de ces notations, nous expliquerons chaque notation particulière au moment de l'introduire.

2. Les résultats qu'on trouve en supposant que la courbe dont on cherche les singularités est une courbe générale (qui n'a que des singularités ordinaires) seront aussi applicables dans le cas d'une courbe douée de particularités extraordinaires; mais alors plusieurs plans, points ou droites singulières pourront coïncider, et souvent il ne sera pas facile de se rendre compte des nombres des solutions coïncidentes. Il sera donc bon, pour étendre l'usage de nos recherches, d'avoir, dès au commencement, égard à certaines singularités extraordinaires. Nous attribuerons à notre courbe les trois sui-

(*) Nous introduirons encore quelques abréviations dans les n.° 23 et 30.

vantes: H points doubles, G plans bi-osculateurs (plans tangents doubles de la développable) et v tangentes d'inflexion (droites passant par trois points consécutifs de la courbe et, par conséquent, situées sur trois plans tangents consécutifs de la développable). L'application de nos formules à une courbe douée d'autres singularités extraordinaires (*) nécessitera des discussions particulières.

Voyons ce que deviennent les formules de Mr. CAYLEY, lorsqu'on y a égard aux trois singularités que nous venons de nommer. Si l'on prend un point quelconque de l'espace pour sommet et la courbe donnée pour directrice d'un cône (cône perspectif), celui-ci sera de l'ordre m , de la classe r , doué de $h + H$ génératrices doubles (**) et de β génératrices stationnaires, de y plans tangents doubles et de $n + v$ plans tangents stationnaires. Les formules de PLÜCKER donnent par conséquent

$$\left. \begin{aligned} r &= m(m-1) - 2h - 2H - 3\beta \\ m &= r(r-1) - 2y - 3n - 3v \\ n + v - \beta &= 3(r-m). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

La courbe d'intersection de la surface développable avec un plan quelconque sera de la classe n , de l'ordre r , douée de $g + G$ tangentes doubles et de α tangentes stationnaires, de x points doubles et de $m + v$ points stationnaires. Par conséquent

$$\left. \begin{aligned} r &= n(n-1) - 2g - 2G - 3\alpha \\ n &= r(r-1) - 2x - 3m - 3v \\ m + v - \alpha &= 3(r-n). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Il suffit donc de donner six des nombres $m, n, r, \beta, \alpha, y, x, h, g, H, G, v$. Dans le cas où $H = G = v = 0$, c'est-à-dire pour une courbe générale, trois des autres nombres suffiront, comme nous l'avons dit.

Si le sommet du cône perspectif ou le plan de la section de la surface développable prennent des positions particulières, les nombres caractéristiques du cône et de la courbe d'intersection subiront des altérations, dont

(*) Par exemple, des tangentes qui rencontrent encore deux fois la courbe ou, plus particulièrement, des tangentes doubles.

(**) Une droite n'est pas censée ici comme rencontrant deux fois la courbe, pour la seule raison qu'elle passe par un point double; ni une droite est censée être une tangente double de la développable, pour la seule raison qu'elle se trouve dans un plan tangent double de celle-ci; de façon que H n'est renfermée dans le nombre h , ni G dans g .

on peut trouver au moyen des relations Plückeriennes celles qui ne se présentent pas directement (*).

Cônes ayant la courbe pour directrice.

LE SOMMET SE TROUVE:	Ordre	Classe	Génératrices doubles	Génératrices stationnaires	Plans tangents doubles	Plans tangents station.
sur la tangente	m	$r-1$	$\frac{h-H}{+1}$	$\frac{\beta}{+1}$	$y-r+4$	$\frac{n-2}{+v}$
sur la courbe	$m-1$	$r-2$	$\frac{h-m+2}{+H}$	β	$y-2r+8$	$\frac{n-3}{+v}$
à un point double	$m-2$	$r-4$	$\frac{h-2m+6}{+H-1}$	β	$y-4r+20$	$\frac{n-6}{+v}$
à un point stationnaire	$m-2$	$r-3$	$\frac{h-2m+6}{+H}$	$\beta-1$	$y-3r+13$	$\frac{n-4}{+v}$
sur une tangente d'inflexion	m	$r-2$	$\frac{h-2}{+H}$	$\frac{\beta}{+2}$	$y-2r+9$	$\frac{n-3}{+v-1}$
à un point d'inflexion	$m-1$	$r-3$	$\frac{h-m+1}{+H}$	$\frac{\beta}{+1}$	$y-3r+14$	$\frac{n-4}{+v-1}$

Sections planes de la surface développable.

LE PLAN:	Classe	Ordre	Tangentes doubles	Tangentes stationnaires	Points doubles	Points station.
contient une génératrice	n	$r-1$	$\frac{g-1}{+G}$	$\frac{\alpha}{+1}$	$x-r+4$	$\frac{m-2}{+v}$
est tangent à la surface	$n-1$	$r-2$	$\frac{g-n+2}{+G}$	α	$x-2r+8$	$\frac{m-3}{+v}$
est un plan tangent double	$n-2$	$r-4$	$\frac{g-2n+6}{+G-1}$	α	$x-4r+20$	$\frac{m-6}{+v}$
est un plan tangent stationnaire	$n-2$	$r-3$	$\frac{g-2n+6}{+G}$	$\alpha-1$	$x-3r+13$	$\frac{m-4}{+v}$
contient une tangente d'inflexion de la courbe donnée	n	$r-2$	$\frac{g-2}{+G}$	$\frac{\alpha}{+2}$	$x-2r+9$	$\frac{m-3}{+v-1}$
est tangent à la développable en un point d'inflexion de la courbe	$n-1$	$r-3$	$\frac{g-n+1}{+G}$	$\frac{\alpha}{+1}$	$x-3r+14$	$\frac{m-4}{+v-1}$

(*) Voir, pour une partie des nombres que contiennent les tableaux et de ceux que j'y

J'ai fait, dans ces deux tableaux, distinction entre les solutions propres et les solutions singulières (par exemple, dans la troisième colonne du premier tableau, entre les génératrices du cône qui rencontrent la courbe en deux points distincts, et celles qui la rencontrent en deux points coïncidents).

Aux résultats qui sont exprimés immédiatement par ces tableaux, je dois ajouter les suivants : Une tangente ordinaire de la courbe rencontre $r - 4$ autres tangentes ; la tangente à un point stationnaire de la courbe ou dans un plan tangent stationnaire de la développable rencontre $r - 5$ autres tangentes ; et une tangente d'inflexion en rencontre $r - 6$ (*).

3. Dans nos démonstrations, nous ferons usage du principe de correspondance. Ce principe, dû à Mr. CHASLES, s'énonce ainsi, lorsqu'on n'a égard qu'à son application à des séries de points d'une droite (**):

« Lorsqu'on a sur une droite L deux séries de points x et u tels, qu'à un point x correspondent λ points u , et à un point u correspondent μ points x , le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est $\lambda + \mu$.

En effet, représentons par les lettres x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L . On aura entre ces distances une relation telle que

$$x^\mu (Au^\lambda + Bu^{\lambda-1} + \dots) + x^{\mu-1} (A'u^\lambda + B'u^{\lambda-1} + \dots) + \dots = 0, \quad (1)$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u seront donnés par l'équation

$$Ax^{\lambda+\mu} + (B + A')x^{\lambda+\mu-1} + \dots = 0 \text{ »}. \quad (2)$$

Ce qui peut, notamment, causer des difficultés dans l'application de ce principe, c'est que de se rendre compte du degré de multiplicité des so-

ai ajoutés: CREMONA, *Teoria geometrica delle superficie*, n.° 13 [ou plutôt, voir les p. 81-95 de l'édition allemande de cet ouvrage, qui est sous presse à Berlin, chez Mr. Calvary. — *Ed.*] Ici, et notamment dans le n.° 22, une description de la figure que la courbe double de la surface développable présente dans ses points singuliers, que Mr. CREMONA m'a fait l'honneur de me faire, m'a été très-utile.

(*) Je dois encore faire remarquer, que l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans tangents doubles de la courbe, ainsi que la courbe double de la développable, ont, à un point d'inflexion de la courbe donnée, la même singularité, la même tangente et le même plan osculateur, que la courbe donnée.

(**) Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. V, p. 295.

lutions. Dans une note insérée dans les *Nouvelles Annales* (*), j'ai montré comment une représentation graphique peut aider à surmonter cette difficulté. Je me permets de répéter ici l'exposé de ce procédé.

« Si l'on prend les distances x et u pour abscisses et ordonnées dans un système de coordonnées planes, l'équation (1) représentera une courbe, que nous appellerons S , dont les points d'intersection avec la droite $x=u$ ont pour valeurs communes des deux coordonnées les distances des points cherchés sur L à l'origine prise sur cette droite.

Si l'on sait qu'en un point p de L un point x coïncide avec un ou plusieurs points correspondants u , la distance de p à l'origine prise sur L sera donc égale aux deux coordonnées d'un point q qui, dans la représentation graphique, est commun à la courbe S et à la droite $x=u$, et le nombre des coïncidences de points correspondants qui ont lieu au point p est égal à celui des points communs à la courbe S et à la droite $x=u$ qui coïncident en q . Ce dernier nombre dépend : 1° de celui des branches de la courbe S qui passent par q ; et 2° du nombre et des ordres des contacts qu'elle y a avec la droite $x=u$.

1.° Soit γ le nombre des points u correspondants à un point x qui coïncident avec lui s'il est au point p , et δ celui des points x correspondants à un point u qui coïncident avec lui s'il est au point p , et supposons que $\gamma \geq \delta$. Alors le point q de la courbe S sera multiple de l'ordre δ , à moins qu'une droite menée par q parallèlement à l'axe des x ne touche en ce point une branche de la courbe, c'est à dire à moins qu'un point u qui correspond à un point x infiniment peu éloigné de p ne soit à une distance de p qui est infiniment petite d'un ordre supérieur. Dans ce cas exceptionnel, on trouve l'ordre du contact par une comparaison des distances infiniment petites de p à deux points x et u qui se correspondent, et l'on aura de cette manière le nombre qu'il faut soustraire de δ . On doit obtenir le même résultat en faisant une semblable soustraction de γ .

2.° Si une branche de la courbe S a au point q un contact avec la droite $x=u$, la valeur de $x-u$ qui correspond à un point de cette branche infiniment peu éloigné de q sera infiniment petite d'un ordre supérieur. Dans ce cas, un des points u qui correspondent à un point x infiniment peu éloigné de p doit être infiniment plus près de x que de p . Si cela a lieu, une comparaison exacte des ordres de ces quantités infiniment petites servira à déterminer l'ordre du contact ».

(*) 2° série, t. VI.

Nous ferons aussi usage ici de l'application du principe de correspondance à deux faisceaux de droites dans le même plan et au même centre, et à deux faisceaux de plans au même axe. Alors on pourra déterminer les degrés de multiplicité des coïncidences au moyen de la même représentation graphique (*). Dans les renvois, nous gardons aussi pour ces séries les mêmes notations, en représentant par x et u les distances des points où les droites ou les plans des deux séries rencontrent une droite fixe L , à une origine fixe prise sur L .

Le procédé que nous venons d'exposer ici ne suffira pas toujours, ou il sera au moins, en beaucoup de cas, assez difficile à employer. J'aurai donc, pour trouver les degrés de multiplicité qui ne sont pas déterminés au moyen de cette première méthode, recours à une autre, qui est, en quelque sorte expérimentale, mais qui donne néanmoins une sûreté parfaite. Elle ne consiste qu'à appliquer le principe de correspondance de différentes manières à la résolution d'un même problème. De cette façon on trouve pour le même nombre deux ou plusieurs expressions dont l'égalité donne les moyens de déterminer les coefficients inconnus qui y entrent, et qui représentent les degrés de multiplicité qu'on n'a pas déterminés par la première méthode.

Les deux procédés seront éclaircis par l'exposé détaillé que je donnerai de leur application dans le deuxième des problèmes que je vais résoudre ici (dans le n.º 5).

4. Détermination du nombre $d(d_1, d_2, 1, 1)$ des droites qui rencontrent deux droites fixes et deux fois la courbe donnée (en deux points distincts). On fait passer par un point x de d_1 une droite rencontrant deux fois la courbe. Chacun des points de rencontre détermine avec la droite d_2 un plan qui coupe la droite d_1 en un point u . Dans ce cas on trouve

$$\lambda = 2h, \quad \mu = m(m - 1).$$

Toutes les coïncidences d'un point x avec un point u ont lieu aux points où les droites cherchées rencontrent la droite d_1 , mais deux coïncidences sont réunies dans chacun de ces points (les points correspondants q de la courbe S seront doubles, et en général, c'est à dire pour une position arbi-

(*) Nous ne ferons pas ici usage de l'extension que Mr. CAYLEY a fait du principe de correspondance à des séries de points d'une courbe quelconque, même d'une courbe unicursale (courbe du genre 0).

traire des droites d_1 et d_2 , aucune des branches n'est tangente à la droite $x=u$). On trouve donc (*)

$$d(d_1, d_2, 1, 1) = h + \frac{m(m-1)}{2}.$$

4. b. Détermination du nombre $D(D_1, D_2, 1, 1)$ des droites qui rencontrent deux droites fixes et qui touchent deux fois la développable donnée (en deux plans tangents distincts).

Le principe de dualité, ou bien un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, nous donne

$$D(D_1, D_2, 1, 1) = g + \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. Le nombre $d(d, 1, 1, 1)$ des droites qui rencontrent une droite fixe et trois fois la courbe donnée se trouve de la manière suivante.

On fait passer par un point x de la droite donnée d une droite qui rencontre deux fois la courbe. Par un des points de rencontre, on fait passer une droite différente de la première, mais qui rencontre aussi encore une fois la courbe et la droite d , la dernière en un point u . Alors

$$\lambda = \mu = 2h(m-2).$$

Les coïncidences ont lieu :

1.° six en chacun des points d'issue des droites cherchées (les points correspondants q de la courbe S sont multiples de l'ordre 6);

2.° une en chacun des $r(m-2)$ points où d rencontre une droite joignant le point de contact d'un plan tangent mené par d avec un point d'intersection du même plan et de la courbe (le point correspondant q de S est un point simple et la tangente y est perpendiculaire à la droite $x=u$);

3.° deux en chacun des $H(m-2)$ points de d d'où partent des droites rencontrant la courbe en un point double et en un autre point (les points correspondants q sont doubles);

4.° trois en chacun des $\beta(m-2)$ points de d d'où partent des droites rencontrant la courbe en un point stationnaire et en un autre point (les points

(*) Voir CAYLEY, *On skew surfaces, otherwise scrolls* (Philosophical Transactions, vol. 153, p. 453). Les résultats que nous citerons d'après ce mémoire y sont démontrés par des méthodes différentes de la notre, notamment par la méthode fonctionnelle, et pour une courbe sans points doubles et stationnaires. — On pourrait aussi tirer le résultat actuel du cas particulier, où les deux droites d_1 et d_2 se rencontrent.

correspondants q de la courbe plane S sont des points de rebroussements dont les tangents coïncident avec la droite $x = u$).

On trouve (*) donc

$$4h(m-2) = 6d(d, 1, 1, 1) + r(m-2) + 2H(m-2) + 3\beta(m-2),$$

ou, en réduisant au moyen des équations du n.º 2,

$$d(d, 1, 1, 1) = (m-2) \left(h - \frac{m(m-1)}{6} \right),$$

qui ne dépend que de m et de h .

Autrement. Afin de donner, dès à présent, un exemple de la détermination expérimentale de coefficients inconnus, nous supposons qu'on ne sache pas déterminer directement, comme nous venons de faire, les degrés de multiplicité des trois dernières coïncidences (**) qui se présentaient dans la première solution du problème actuel. Alors nous n'aurions obtenu que l'équation suivante :

$$4h(m-2) = 6d(d, 1, 1, 1) + (\xi r + \eta \cdot H + \zeta \cdot \beta)(m-2), \quad (1)$$

où ξ , η et ζ sont des nombres entiers et constants, mais inconnus.

Afin de nous procurer une nouvelle équation qui puisse, avec celle-là, nous donner l'expression cherchée et les valeurs des coefficients inconnus, nous ferons usage d'un plan fixe P dans une position arbitraire. On fait passer par un point x de la droite d une droite rencontrant deux fois la courbe. Par le point d'intersection de cette dernière droite et du plan P , on fait passer une autre droite qui rencontre la courbe et la droite d , la dernière à un point u . Alors on a (***)

$$\lambda = h(m-2), \quad \mu = m \left(h + \frac{m(m-1)}{2} \right) - 2h - m(m-1).$$

(*) CAYLEY, *On skew surfaces*.

(**) On voit qu'il est nécessaire de déterminer directement, au moins les coefficients des termes dont on cherche les valeurs. La méthode expérimentale ne permet donc pas de se passer entièrement de la méthode directe, mais seulement d'en éviter les difficultés.

(***) Les μ droites qui partent d'un point donné u rencontrent le plan P aux points d'intersection des traces: 1.º de la surface gauche ayant pour directrices la droite d et deux fois la courbe donnée, et 2.º du cône ayant pour sommet u et pour directrice la courbe donnée, exceptés les points d'intersection qui coïncident aux points où le plan P est rencontré 1.º par les h droites qui coupent deux fois la courbe et qui partent du point u et 2.º par la courbe elle-même.

Les coïncidences ont lieu :

1.° trois en chacun des $d(d, 1, 1, 1)$ points d'où partent les droites cherchées ;

2.°, 3.° et 4.° aux $r(m-2)$, $H(m-2)$ et $(\beta(m-2))$ points, où elles avaient lieu dans la première application du principe de correspondance au problème actuel, et l'on voit sans difficulté que les degrés de multiplicité doivent être les mêmes qu'alors (*);

5.° au point où la droite d rencontre le plan P .

Il ne serait pas difficile de déterminer directement le nombre des coïncidences qui ont lieu en ce dernier point, mais pour bien faire connaître la méthode expérimentale, nous nous contenterons de supposer démontré par la méthode directe, que ce nombre est un multiple de $h(m-2)$, et que le coefficient qui multiplie ce nombre, comme ξ , η et ζ , est indépendant de m , h , etc. Nous appelons ce coefficient θ . On a donc

$$h(m-2) + m\left(h + \frac{m(m-1)}{2}\right) - 2h - m(m-1) = 3d(d, 1, 1, 1) + (\xi r + \eta H + \zeta \beta + \theta h)(m-2). \quad (2)$$

En éliminant l'expression $d(d, 1, 1, 1)$ des équations (1) et (2), on trouve

$$\xi r + \eta H + \zeta \beta + 2\theta h = m(m-1),$$

ou, à cause de la première équation du n.° 2,

$$\xi r + \eta H + \zeta \beta + 2\theta \cdot h = r + 2H + 3\beta + 2h.$$

Comme r , H , β et h (aussi suivant le n.° 2) sont indépendants entre eux, on en tire

$$\xi = 1, \quad \eta = 2, \quad \zeta = 3, \quad \theta = 1.$$

Puis on trouve pour $d(d, 1, 1, 1)$ l'expression que nous avons déjà indiquée.

Dans la suite, nous ne ferons qu'indiquer les valeurs des degrés de multiplicité, sans en exposer la déduction, qui est ordinairement due à un mélange des deux méthodes. Nous nommerons pourtant parfois les applications du principe de correspondance, différentes de celles dont nous ferons l'usage principal, qui nous ont servi à y déterminer expérimentalement les coefficients et à en contrôler les résultats.

(*) Ordinairement, les différentes manières d'employer le principe de correspondance ne nous donnent pas comme ici plusieurs fois les mêmes termes. (Voir, par exemple, au n.° 7.)

5. b. Le nombre $D(D, 1, 1, 1)$ des droites qui rencontrent une droite fixe et touchent trois fois la développable donnée, se trouve par le principe de dualité:

$$D(D, 1, 1, 1) = (n-2) \left(g - \frac{n(n-1)}{6} \right).$$

6. Pour trouver le nombre $d(1, 2) = p(1, 2)$ des tangentes de la courbe qui la rencontrent encore une fois, nous appliquerons le principe de correspondance à deux faisceaux de plans dont l'axe commun a une position arbitraire. Par un point d'intersection d'un plan x et de la courbe, on fait passer une droite qui la rencontre en deux autres points. Chacun de ces deux points détermine, avec l'axe des faisceaux, un plan u . Alors (*)

$$\lambda = \mu = 2m(h - m + 2).$$

Le plan x coïncide avec le plan correspondant u , si les deux points de la courbe qui les déterminent coïncident (les cas 1-4), ou si la droite qui joint ces deux points rencontre l'axe des faisceaux (le 5^me cas). Les coïncidences ont donc lieu:

- 1.° une dans chacun des plans passant par les points de contact des droites cherchées;
- 2.° $2(m-4)$ dans chacun des H plans passant par les points doubles de la courbe;
- 3.° $3(m-4)$ dans chacun des β plans passant par les points stationnaires;
- 4.° deux dans chacun des v plans passant par les points d'inflexion;
- 5.° six dans chacun des $d(d, 1, 1, 1)$ plans où se trouvent des droites rencontrant trois fois la courbe.

On trouve par conséquent

$$4m(h - m + 2) = d(1, 2) + (2H + 3\beta)(m - 4) + 2v + 6d(d, 1, 1, 1),$$

d'où (**)

$$d(1, 2) = r(m - 4) + 4h - 2m(m - 3) - 2v.$$

6. b. Le nombre $D(1, 2) = P(1, 2)$ des génératrices de la développable par lesquelles passant d'autres plus tangents (ou le nombre des plans qui ont

(*) Voir, sur le nombre des droites rencontrant la courbe en un point donné et en deux points inconnus, le premier tableau du n.° 2.

(**) SALMON: *Geometry of three dimensions*, 2^e ed. p. 460.

un contact simple et une osculation avec la courbe donnée) aura l'expression suivante

$$D(1, 2) = r(n - 4) + 4g - 2n(n - 3) - 2v.$$

7. Pour trouver le nombre $[P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ des plans passant par un point fixe, tangents à la courbe et renfermant une droite qui la rencontre au point de contact et en deux autres points, nous ferons usage de deux faisceaux de droites qui se trouvent dans un plan passant par le point fixe p , et dont le centre commun est p . Par une droite x de l'un de ces faisceaux, on fait passer un plan tangent à la courbe, et par le point de contact une droite qui rencontre la courbe en deux autres points. La trace de cette droite sur le plan des faisceaux sert à déterminer une droite u correspondant à x . Alors

$$\lambda = r(h - m + 2), \quad \mu = 3d(d, 1, 1, 1).$$

Une droite x coïncide avec une droite correspondante u , si la droite rencontrant trois fois la courbe se trouve dans le plan tangent (les cas 1-3; dans les cas 1-2 elle coïncide avec la tangente), ou si seulement la trace de cette droite coïncide avec celle de la tangente (le 4^{me} cas).

Les coïncidences ont donc lieu :

- 1.° une dans chacune des traces des plans cherchés,
- 2.° une dans chacune des droites qui joignent p aux traces des tangentes de la courbe qui la rencontrent ailleurs,
- 3.° deux dans chacune des droites qui joignent p aux traces des tangentes d'inflexion;
- 4.° $h - m + 2$ dans chacune des m droites qui joignent p aux points d'intersection du plan des faisceaux avec la courbe.

Par conséquent :

$$r(h - m + 2) + 3d(d, 1, 1, 1) = [P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] + d(1, 2) + 2v + m(h - m + 2)$$

d'où

$$[P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] = h(2m + r - 10) - \left(2r + \frac{m(m-6)}{2}\right)(m - 3).$$

[La détermination expérimentale des coefficients, notamment de celui du terme v , se fait ici par la recherche du même résultat au moyen de deux faisceaux de plans ayant le même axe. Par un point d'intersection d'un plan x avec la courbe, on fait passer une droite qui la rencontre encore

en deux points. Un point d'intersection du plan, déterminé par cette droite et par le point p , avec la courbe, différent des trois qui sont sur la droite, détermine un plan u correspondant à x . Ce procédé a l'avantage de n'introduire pas de nouveau le terme v , dont on pourra par conséquent trouver le coefficient, introduit par le premier procédé, en même temps que les nouveaux coefficients qu'on introduira maintenant.]

7b. Le nombre $[p(P, \bar{1})D(\bar{1}, 1, 1)]$ des tangentes triples de la surface développable, dont un des trois points de contact soit dans un plan fixe, a l'expression suivante:

$$[p(P, \bar{1})D(\bar{1}, \bar{1}, 1)] = g(2n + r - 10) - \left(2r + \frac{n(n-6)}{2}\right)(n-3).$$

8. Pour trouver le nombre $d(1, 1, 1, 1)$ des droites qui rencontrent quatre fois la courbe, nous ferons usage de deux faisceaux de droites dans un plan arbitraire et dont le centre commun a est un point arbitraire de ce plan. Nous ferons aussi usage d'un autre point b du même plan. Une droite rencontrant un rayon x de l'un des faisceaux, et ayant trois intersections avec la courbe, détermine, avec le point b , un plan, qui a encore $m-3$ intersections avec la courbe. La trace d'une droite qui joint un de ces $m-3$ points d'intersection à un des trois premiers détermine, avec a , une droite u correspondant à x . On trouve alors (*)

$$\lambda = 3d(d, 1, 1, 1)(m-3), \quad \mu = 2h(h-m+2) + 3d(d, 1, 1, 1)(m-3).$$

Une droite x coïncide avec une droite correspondante u , si la droite qui rencontre trois fois la courbe coïncide avec celle qui joint un des trois points de rencontre à une des autres $m-3$ intersections du plan (les cas 1-4), ou si ces deux droites ont la même trace (le cas 5), ou enfin si leurs traces sont sur une même droite passant par a (le cas 6). Il y aura donc:

1.° do uze coïncidences dans chacune des droites qui joignent a aux traces des droites cherchées;

2.° deux dans chacune des $[P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ droites qui joignent a aux traces des droites qui rencontrent trois fois la courbe et qui se trouvent dans des plans tangents à la courbe en un des points de rencontre et passant par le point b ;

(*) On trouve le nombre μ , ou par le principe de correspondance, ou au moyen d'une discussion du cas particulier où le point p est situé sur la droite u .

3.° quatre dans chacune des $H(h-2m+6)$ droites qui joignent a aux traces des droites partant d'un point double et rencontrant encore deux fois la courbe (*);

4.° six dans chacune des $\beta(h-2m+6)$ droites qui joignent a aux traces des droites partant d'un point stationnaire de la courbe et la rencontrant encore deux fois;

5.° $(h-m+2)(m-3)$ dans chacune des droites qui joignent a aux m points où le plan des faisceaux rencontre la courbe;

6.° $3 \cdot d(d, 1, 1, 1)(m-3)$ dans la droite ab .

Par conséquent:

$$3d(d, 1, 1, 1)(m-3) + 2h(h-m+2) + 3d(d, 1, 1, 1)(m-3) = \\ 12d(1, 1, 1, 1) + 2[P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] + 4H(h-2m+6) \\ + 6\beta(h-2m+6) + m(h-m+2)(m-3) + 3d(d, 1, 1, 1)(m-3),$$

d'où (**)

$$d(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{24} \left\{ 12h(h-4m+11) - m(m-2)(m-3)(m-13) \right\},$$

qui ne dépend que de m et h .

8. b. Le nombre $D(1, 1, 1, 1)$ des tangentes quadruples de la développable a l'expression suivante:

$$D(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{24} \left\{ 12g(g-4n+11) - n(n-2)(n-3)(n-13) \right\}.$$

9. Le nombre $P(1, 1, 1)$ de plans tangents triples de la courbe se trouve au moyen de deux séries de points d'une droite fixe, mais arbitraire. Par un point x , on fait passer un plan tangent double, et par l'une des deux tangentes qui s'y trouvent on fait passer un autre plan qui touche encore une fois la courbe. Ce dernier plan rencontre la droite fixe à un point u correspondant à x . Par ce moyen, on trouve l'équation suivante, où nous avons écrit séparément les termes exprimant les valeurs de λ et de μ et ceux

(*) Voir sur le nombre de ces droites, le premier tableau n.° 2.

(**) CAYLEY, *On skew surfaces*. — On voit, qu'une branche de la courbe qui dégénère en une droite comptera dans le résultat pour une droite rencontrant la courbe en quatre points — à moins qu'elle rencontre d'autres branches de la courbe. Dans ce dernier cas elle ne fait pas partie du nombre trouvé.

qui correspondent aux différentes espèces de coïncidences :

$$\begin{aligned}
 & 2y(r-5) \\
 + 2y(r-5) &= 6 \cdot P(1, 1, 1) \\
 & \quad + 3D(1, 2) \\
 & \quad + 3 \cdot v(r-6) \\
 & \quad + 1 \cdot d(1, 2) \\
 & \quad + 2 \cdot v \\
 & \quad + 4 \cdot H \\
 & \quad + 12 \cdot G \\
 & \quad + 1 \cdot r(r-4)(r-5).
 \end{aligned}$$

Les coïncidences comptées dans les sept premiers termes du seconde membre de cette équation sont causées par la coïncidence des deux plans tangents doubles qui passent par x et u ; celles du dernier terme ont lieu parce que la droite d'intersection de ces deux plans rencontre la droite fixe. On trouvera en réduisant

$$P(1, 1, 1) = \frac{1}{3}[-r^3 + 13r^2 + 8m - 42r + y(3r - 26)],$$

nombre qui est indépendant des singularités extraordinaires H , G et v .

9. b. De même on trouve pour le nombre $p(1, 1, 1)$ des points triples de la développable, l'expression suivante (*)

$$p(1, 1, 1) = \frac{1}{3}[-r^3 + 13r^2 + 8n - 42r + x(3r - 26)].$$

10. Quoique nous faisons ici ordinairement usage du principe de correspondance, nous avons aussi recours à d'autres procédés, qui puissent simplifier les recherches. On voit, par exemple, que les [$P(p, 1)d(1, 1, 1)$] plans tangents à la courbe qui passent par un point fixe p et qui contiennent une droite rencontrant la courbe en trois points différents du point de contact, sont au nombre des plans tangents communs à deux cônes dont le sommet commun est p : c'est-à-dire au cône perspectif à la courbe donnée et au cône circonscrit à la surface gauche, lieu des droites rencontrant trois fois la courbe. La classe de ces deux cônes étant r et $d(d, 1, 1, 1)$, on

(*) SALMON, à l'endroit cité de la *Geometry of three dimensions*.

trouve, eu égard aux différentes espèces de plans tangents communs,

$$\begin{aligned} r \cdot d(d, 1, 1, 1) &= 1 \cdot [P(p, 1) d(1, 1, 1)] \\ &+ 2 \cdot [P(p, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1)] \\ &+ 1 \cdot d(1, 2) \\ &+ 2 \cdot v, \end{aligned}$$

d'où

$$[P(p, 1) d(1, 1, 1)] = r d(d, 1, 1, 1) - 2 [P(p, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1)] - d(1, 2) - 2v.$$

Cependant, il m'a été impossible de déterminer ici, immédiatement, le coefficient indiqué de v ; mais j'ai évité cette difficulté par une application du principe de correspondance à deux faisceaux de plans dont une droite arbitraire menée par p était l'axe commun. J'ai joint un point d'intersection d'un plan x et de la courbe au point p par une droite. Celle-ci servait, avec une autre droite qui la rencontrait et qui avait trois points d'appui sur la courbe, à déterminer un plan. Un cinquième point d'intersection de ce plan avec la courbe servait à déterminer le plan u correspondant à x . Alors on avait

$$\lambda = \mu = m(m - 4) [d(d, 1, 1, 1) - (h - m + 2)], \text{ etc.}$$

10. *b.* On trouve pour le nombre $[p(P, 1) D(1, 1, 1)]$ des points d'une section plane de la surface développable par lesquels on peut faire passer une droite tangente à la développable en trois points différentes du point d'issue, l'expression suivante

$$[p(P, 1) D(1, 1, 1)] = r D(D, 1, 1, 1) - 2 [p(P, \bar{1}) D(\bar{1}, 1, 1)] - d(1, 2) - 2v$$

11. Dans la recherche de l'ordre $[P(\bar{1}, \bar{1}) d(d, \bar{1}, \bar{1})]$ de la surface développable, enveloppe des plans tangents doubles de la courbe donnée, (le rang du système de plans tangents doubles) nous aurons besoin de connaître le nombre des plans, passant par une droite donnée d , qui contiennent deux droites partant d'un même point de d et rencontrant deux fois la courbe. Nous appellerons ce nombre L . Nous considérons, pour le trouver, deux séries de points sur la droite d . Une droite partant d'un point x et rencontrant deux fois la courbe détermine avec d un plan. Chacune des autres droites rencontrant deux fois la courbe et comprises dans le même plan, coupe la

droite d en un point u correspondant à x . On trouve de cette manière:

$$h \frac{(m-2)(m-3)}{2} + h \frac{(m-2)(m-3)}{2} = 2 \cdot L.$$

Pour trouver ensuite le nombre $[P(\bar{1}, 1)d(d, \bar{1}, \bar{1})]$, nous ferons usage de deux faisceaux de plans, ayant la droite d pour axe commun. Du point où d est coupée par une droite contenue dans un plan x et rencontrant deux fois la courbe, on tire une autre droite qui coupe deux fois la courbe. Celle-ci détermine (avec d) le plan correspondant u . On trouve ainsi:

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-1)}{2}(h-1) \\ + & \frac{m(m-1)}{2}(h-1) = 6 \cdot d(d, 1, 1, 1) \\ & + 1 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})] \\ & + 2 \cdot H(m-2) \\ & + 3 \cdot \beta(m-2) \\ & + 2 \cdot L. \end{aligned}$$

Les deux équations trouvées donnent (*)

$$[P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})] = 2h + r(m-2) - m(m-1).$$

11. *b.* La courbe double de la surface développable donnée sera de la classe (**):

$$[p(\bar{1}, \bar{1})D(D, \bar{1}, \bar{1})] = 2g + r(n-2) - n(n-1).$$

12. Parmi les résultats déjà trouvés il y a aussi les nombres qui servent à caractériser la surface développable, enveloppe des plans tangents doubles de la courbe donnée, et son arête de rebroussement. Toutefois, comme cette surface est douée de singularités tout-à-fait spéciales dans ses contacts avec les G plans tangents doubles de la développable donnée, les différentes formules auxquelles nous sommes parvenus ne sont pas immédiatement appli-

(*) SALMON, *Geometry of three dimensions*, p. 460.

(**) SALMON, à l'endroit cité.

cables à ce nouveau système de points et de plans. Afin de n'entrer pas dans une discussion spéciale à cet égard, nous supposons donc ici que $H=G=0$, c'est à dire, que la courbe donnée n'est pas douée d'autres singularités extraordinaires que de v tangentes d'inflexion. Alors nous aurons, en désignant par m_1, n_1 etc. les nombres caractéristiques du nouveau système,

$$n_1 = y, \quad r_1 = [P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})], \quad \alpha_1 = D(1, 2) + v(r - 6),$$

$$G_1 = 3P(1, 1, 1), \quad H_1 = 0, \quad v_1 = v,$$

d'où, suivant les formules du n.º 2,

$$g_1 = \frac{1}{2} \{ y(y-1) - 6P(1, 1, 1) - 3D(1, 2) - 3v(r-6) - [P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})] \},$$

et

$$x_1 = \frac{1}{2} \left\{ [P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})] \left([P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})] - 10 \right) + 8y - 3D(1, 2) - 3v(r-6) \right\}.$$

Ici g_1 est le nombre des droites d'un plan qui se trouvent dans deux plans tangents doubles de la courbe donnée; x_1 est l'ordre de la courbe double de la surface développable dont nous nous occupons pour le moment; mais la courbe donnée, prise $\frac{(r-4)(r-5)}{2}$ fois, fait partie de cette courbe double.

Si nous en faisons abstraction, il restera une courbe de l'ordre

$$x_1 - m \frac{(r-4)(r-5)}{2},$$

qui sera le lieu des points d'où partent deux droites qui joignent, respectivement, les deux points de contact de deux plans tangents doubles (qui n'ont aucun point de contact commun) (*).

12. b. Si nous désignons par m_2, n_2 etc. les nombres caractéristiques de la courbe double de la développable donnée et ceux de la surface développable, enveloppe des plans osculateurs de cette courbe double, nous aurons,

(*) L'expression que j'ai donnée pour cet ordre, dans la correspondance aux *Comptes Rendus de l'Ac. de Sciences*, que j'ai déjà citée, est erronée. Quant aux autres résultats que j'y ai exposés, pour une courbe douée seulement de singularités ordinaires, et dans une forme qui est souvent différente de celle que j'emploie ici, ils sont en accord parfait avec ceux que j'ai obtenus ici, en partie par des voies différentes.

en supposant $H = G = 0$,

$$m_2 = x, \quad r_2 = [p(\bar{1}, \bar{1})D(D, \bar{1}, \bar{1})], \quad \beta_2 = d(1, 2) + v(r - 6),$$

$$H_2 = 3p(1, 1, 1), \quad G_2 = 0, \quad v_2 = v.$$

Ces valeurs serviront à déterminer les autres nombres caractéristiques.

13. L'ordre $[P(1, \bar{1})d(d, \bar{1}, 1)]$ de la surface gauche, lieu des droites qui rencontrent deux fois la courbe donnée et par lesquelles passent des plans qui ont deux contacts avec la même courbe, l'un en un des deux points de rencontre de la droite (mais l'autre au dehors de la droite), se trouve au moyen de deux séries de points sur la droite d dont on cherche les intersections avec la surface gauche. Une droite, issue d'un point de contact d'un plan tangent double mené par x , et rencontrant encore une fois la courbe et la droite d , détermine par cette dernière intersection un point u , correspondant à x , ce qui donne l'équation suivante:

$$2y(m - 1) + 2h(r - 4) = 1 \cdot [P(1, \bar{1})d(d, \bar{1}, 1)]$$

$$+ 4 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})]$$

$$+ 1 \cdot r(r - 4)$$

$$+ 4 \cdot H$$

$$+ 3 \cdot \beta,$$

qui sert à déterminer l'expression cherchée.

Nous ne nous arrêterons pas ici et dans la suite aux résultats analogues fournis par le principe de dualité. La déduction en est toujours immédiate et nous n'aurons pas à faire usage de ces résultats dans nos démonstrations.

14. L'ordre $[P(1, 1)d(d, 1, 1)]$ de la surface gauche, lieu des droites qui rencontrent deux fois la courbe et par lesquelles passent des plans tangents doubles dont les points de contact sont différents des points de rencontre, se trouve aussi au moyen de deux séries de points sur la droite d , dont on cherche les intersections avec la surface gauche; mais c'est ici une droite issue d'un point d'intersection (et non plus d'un point de contact), et rencontrant encore une fois la courbe et la droite d , qui détermine le point u . On trouve ainsi l'équation suivante:

$$y(m - 4)(m - 1) + 2h(y - 2r + 8) = 2 \cdot [P(1, 1)d(d, 1, 1)]$$

$$+ 2 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{d}, \bar{1}, 1)],$$

qui donne l'expression cherchée.

On aura une vérification de cette expression, et conséquemment aussi de la précédente, en cherchant les plans coincidents de deux faisceaux de plans, dont l'axe commun est d et qu'on détermine de la manière suivante: par un point d'intersection d'un plan x avec la courbe, on fait passer un plan tangent double, dont un autre point d'intersection avec la courbe détermine le plan u correspondant à x . Cet autre procédé sert notamment à s'assurer de la justesse des coefficients de l'équation qui nous fournit l'expression de $[P(1, \bar{1}) d(d, \bar{1}, 1)]$.

15. On détermine l'ordre $[P(\bar{2}) d(d, \bar{1}, 1)]$ de la surface gauche, lieu d'une droite qui rencontre deux fois la courbe et qui se trouve dans le plan osculateur de la courbe à un des points de rencontre, par un procédé analogue à celui qui nous donne l'expression de $[P(1, \bar{1}) d(d, \bar{1}, 1)]$. Une droite, issue du point de contact d'un plan osculateur à la courbe mené par un point x de la droite fixe d , et rencontrant encore une fois la courbe et la droite d , détermine par cette dernière intersection un point u correspondant à x . Par ce moyen, on parvient à l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & n(m-1) \\ & + 2h = 1 \cdot [P(\bar{2}) d(d, \bar{1}, 1)] \\ & + 2 \cdot r \\ & + 1 \cdot \beta, \end{aligned}$$

qui donne l'expression cherchée.

16. Le même procédé nous fournit encore l'ordre $[P(2) d(d, 1, 1)]$ de la surface gauche, lieu d'une droite qui rencontre deux fois la courbe et qui est située dans un plan osculateur à la courbe à un point différent des deux points de rencontre de la droite. Seulement la droite qui détermine le point u doit ici partir d'un point d'intersection du plan osculateur à la courbe mené par le point x . On trouve alors:

$$\begin{aligned} & n(n-3)(m-1) \\ & + 2h(n-3) = 2 \cdot [P(2) d(d, 1, 1)] \\ & + 3 \cdot [P(\bar{2}) d(d, \bar{1}, 1)] \\ & + 4 \cdot \beta. \end{aligned}$$

d'où

$$[P(2) d(d, 1, 1)] = \frac{1}{2} \{ n(n-1)(m-6) + 2h(n-6) + 6r + 2\beta \}.$$

On aura pour les deux derniers résultats une vérification analogue à celle que nous avons indiquée dans le n.º 14.

17. Le nombre $[P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)]$ des droites rencontrant la courbe en trois points dont deux sont les points de contact d'un même plan tangent double, se trouve ainsi: par un point x d'une droite fixe, mais arbitraire, on fait passer un plan, tangent à la courbe, et renfermant une droite qui rencontre la courbe au point de contact et en deux autres points; un plan passant par cette même droite et par la tangente en un des deux derniers points de rencontre, coupe la droite fixe en un point u correspondant à x . En cherchant les coïncidences d'un point x avec le point correspondant u , on trouve

$$\begin{aligned} & 2[P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\ & + 2[P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] = 2 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)] \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot d(1, 2) \\ & \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot H(m - 4) \\ & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot \beta(m - 4) \\ & \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot v \\ & \qquad \qquad \qquad + 6 \cdot d(d, 1, 1, 1), \end{aligned}$$

qui donne l'expression suivante

$$\begin{aligned} [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)] & = 2 [P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] - 2m(h - m + 2) \\ & = 2h(m + r - 10) - \frac{1}{4}r(m - 3) - m(m^2 - 11m + 22). \end{aligned}$$

Vérification. Dans un plan fixe on a deux faisceaux concentriques de droites. Dans un plan tangent double où se trouve une droite, rencontrant une droite x , et ayant deux intersections avec la courbe, dont l'une à un point de contact, on joint les deux points de contact par une droite. Celle-ci détermine, par son point d'intersection avec le plan des faisceaux, une droite u correspondante à x . Alors

$$\lambda = [P(1, \bar{1})d(d, \bar{1}, 1)], \quad \mu = 2 [P(\bar{1}, \bar{1})d(d, \bar{1}, \bar{1})](m - 4), \text{ etc.}$$

18. La détermination du nombre $[P(1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ des plans tangents doubles de la courbe qui contiennent des droites rencontrant la courbe à un point de contact et en deux autres points, est semblable à celle de $[P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)]$: par un point x d'une droite fixe on fait passer un plan, tangent à la courbe, et renfermant une droite qui rencontre la courbe au

point de contact et en deux autres points; mais ici le plan qui détermine le point u passe par la tangente à la courbe que renferme le premier plan, et touche encore une fois la courbe. On trouve l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 & [P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](r-4) \\
 & + 2y(h-m+2) = 1 \cdot [P(1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \quad + 4 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)] \\
 & \quad + 4 \cdot H(m-4) \\
 & \quad + 3 \cdot \beta(m-4) \\
 & \quad + 1 \cdot d(1, 2) \\
 & \quad + 2 \cdot v \\
 & \quad + 1 \cdot r(r-4)(h-m+2),
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & [P(1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] = [P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](r-12) \\
 & + (h-m+2)[2y-r(r-4)+8m] - (m-4)(4H+3\beta) - d(1, 2) - 2v.
 \end{aligned}$$

On pourra se procurer une vérification analogue à celle que nous avons indiquée pour la recherche précédente. Quelques uns des coefficients se trouvent aussi par l'analogie avec la détermination du nombre $[P(1, \bar{1})d(d, \bar{1}, 1)]$ (voir le n.º 13).

19. Pour trouver le nombre $[P(1, 1)d(1, 1, 1)]$ des plans tangents doubles où se trouvent des droites rencontrant la courbe en trois points différents des points de contact, on fait usage du même procédé. Seulement le plan, passant par le point x et tangent à la courbe, doit maintenant renfermer une droite rencontrant la courbe en trois points différents du point de contact, pendant que, comme dans le n.º 18, le plan passant par le point u est tangent à la courbe au même point que le premier plan et encore en un autre point. On trouve:

$$\begin{aligned}
 & [P(p, 1)d(1, 1, 1)](r-4) \\
 & + 2y \{ d(d, 1, 1, 1) + 2(h-m+2) \} = 2 \cdot [P(1, 1)d(1, 1, 1)] \\
 & \quad + 2 \cdot [P(1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \quad + 1 \cdot d(1, 2)(r-6) \\
 & \quad + 2 \cdot \psi(r-6) \\
 & \quad + 1 \cdot r(r-4) \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h-m+2) \},
 \end{aligned}$$

d'où

$$[P(1, 1)d(1, 1, 1)] = (m-6) \left\{ y \left(h - \frac{m^2 + 3m - 6}{6} \right) - 4h(r-5) + r(m^2 - m - 4) - 2m(3m-7) \right\}.$$

On pourra se procurer une vérification, ou de la même manière que dans les numéros précédents, ou en cherchant les plans tangents communs à la surface enveloppe des plans tangents doubles, et à la surface gauche, ayant la courbe trois fois pour directrice.

20. Recherche du nombre $[P(\bar{2})d(\bar{1}, 1, 1)]$ des plans osculateurs où se trouvent des droites rencontrant la courbe au point d'osculation et en deux autres points. Un plan, passant par un point x d'une droite fixe, touche la courbe et renferme une droite qui la rencontre au point de contact et en deux autres points. Un plan passant par un point correspondant u est osculateur à la courbe au point de contact du premier plan. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} & [P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\ & + n(h-m+2) = 1 \cdot [P(\bar{2})d(\bar{1}, 1, 1)] \\ & \quad + 1 \cdot \beta(m-4) \\ & \quad + 1 \cdot d(1, 2) \\ & \quad + 1 \cdot v \\ & \quad + 1 \cdot r(h-m+2), \end{aligned}$$

qui donne le résultat cherché, où il n'y aura lieu à aucune réduction notable.

21. Recherche du nombre $[P(2)d(1, 1, 1)]$ des plans osculateurs à la courbe où se trouvent des droites rencontrant la courbe en trois points différents du point d'osculation. On trouve, employant un procédé analogue:

$$\begin{aligned} & [P(p, 1)d(1, 1, 1)] \\ & + n \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h-m \pm 2) \} = 1 \cdot [P(2)d(1, 1, 1)] \\ & \quad + 1 [P(\bar{2})d(\bar{1}, 1, 1)] \\ & \quad + 1 \cdot r \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h-m+2) \}, \end{aligned}$$

d'où

$$[P(2)d(1, 1, 1)] = (m+5) \left\{ h(n-6) + \frac{m^2 + 2m - 6}{6} + \beta + 3r + \frac{3m(m-4)}{2} \right\}.$$

On peut se procurer de ce résultat et du précédent des vérifications semblables à celles dont nous avons fait usage dans les n.^{os} 17-19.

22. La surface développable donnée et la surface gauche lieu des droites rencontrant trois fois la courbe donnée, se coupent $2(h - m + 2)$ fois suivant la courbe donnée, une fois suivant les $d(1, 2)$ tangentes de la courbe qui la rencontrent encore une fois, et deux fois suivant les v tangentes d'inflexion. Il reste encore une courbe d'intersection simple, dont nous désignerons l'ordre par $[p(P, 1)d(1, 1, 1)]$. On trouve par conséquent :

$$[p(P, 1)d(1, 1, 1)] = r \cdot d(d, 1, 1, 1) - 2m(h - m + 2) - d(1, 2) - 2v.$$

J'ai, pour déterminer le coefficient de v , résolu la même question au moyen du principe de correspondance.

23. Pour déterminer le nombre $[p(1, 1)d(1, 1, 1)]$ des points d'où partent deux tangentes à la courbe donnée et une droite qui la rencontre trois fois, nous considérons deux faisceaux de plans au même axe. Nous supposons que deux plans correspondants x et u rencontrent une même tangente de la courbe, respectivement, en un point où elle coupe une autre tangente et en un point où elle coupe une droite rencontrant trois fois la courbe. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} 2x \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h - m + 2) \} \\ + [p(P, 1)d(1, 1, 1)](r - 4) = & 2 \cdot p[(1, 1)d(1, 1, 1)] \\ & + 8 \cdot H(h - 2m + 6) \\ & + 2 \cdot \beta(h - 2m + 6) \\ & + 2 \cdot d(1, 2)(h - m + 1) \\ & + 2 \cdot v(h - m + 1) \\ & + 1 \cdot d(1, 2)(r - 6) \\ & + 2 \cdot v(r - 6) \\ & + 1 \cdot r(r - 4) \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h - m + 2) \} \end{aligned}$$

qui donne le nombre cherché.]

Le même procédé s'applique, sans aucune altération des coefficients, à la recherche du nombre $[p(1, 1)d(d, 1, 1)]$. Mais ce dernier nombre se détermine aussi par une autre application du principe de correspondance, ce qui m'a fourni les valeurs de plusieurs des coefficients indiqués. Cette autre

détermination du nombre $[p(1, \bar{1})d(d, 1, 1)]$ se fait au moyen de deux séries de points sur la droite donnée d . Deux points correspondants x et u sont sur deux droites issues d'un même point de la courbe double de la surface développable donnée et rencontrant toutes les deux (en deux points différents entre eux et du point de la courbe double) la courbe donnée. On trouve ainsi:

$$\begin{aligned}
 & [mx - 8H - 3\beta - 2d(1, 2) - 3v - a](m - 1) \\
 + & [mx - 8H - 3\beta - 2d(1, 2) - 3v - a](m - 1) = 2 \cdot [p(1, 1)d(d, 1, 1)] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot r(x - r + 4) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot r(r - 4) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot H(x - 4) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot \beta(x - 1) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot \beta.
 \end{aligned}$$

23. Recherche de la classe $[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)]$ de la surface développable, enveloppe des plans passant par deux droites qui partent d'un même point de la courbe et qui la rencontrent chacune en deux autres points. On fait ici usage de deux faisceaux de droites dans le même plan et au même centre p . Deux droites correspondantes x et u passent par les traces, sur le plan des faisceaux, de deux droites issues d'un même point de la courbe et dont chacune la rencontre en deux autres points. On trouve de cette façon:

$$\begin{aligned}
 & 3d(d, 1, 1, 1)(h - m + 1) \\
 + & 3d(d, 1, 1, 1)(h - m + 1) = 2 \cdot [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \cdot 3 \cdot 2d(1, 1, 1, 1) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \cdot H(h - 2m + 6) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 6 \cdot \beta(h - 2m + 6) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot m \frac{(h - m + 2)(h - m + 1)}{2},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] = & \frac{1}{2}(m - 4)\{5h^2 - (m^2 + 7m - 25)h \\
 & + 2m(m^2 - 5m + 6)\}.
 \end{aligned}$$

Le nombre cherché ne dépend donc que de m et h .

Dans le suivant, nous aurons besoin de connaître aussi le nombre des plans, issus d'un point donné de la courbe, dans lesquels se trouvent deux droites qui partent d'un autre point inconnu de la courbe et dont chacune la rencontre encore en deux points, différents, eux aussi, du point donné. Pour donner une notation particulière à ce nombre, nous désignerons ici et dans le suivant un point donné de la courbe par p_I et p_{II} , suivant qu'il est un point simple ou qu'il est un point double ou stationnaire, et nous entendons en même temps qu'on n'ait pas égard aux droites dont un point d'intersection avec la courbe est en ce point donné. On trouve donc par une simple soustraction des nombres qu'on néglige :

$$\begin{aligned}
 [d(1, 1, \bar{1})P(p_I)d(\bar{1}, 1, 1)] &= [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 &\quad - 2 \cdot (h - m + 2)(h - m + 1) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(h - m + 2)(h - m + 1) \\
 &= [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] - \frac{5}{2}(h - m + 2)(h - m + 1), \\
 [d(1, 1, \bar{1})P(p_{II})d(\bar{1}, 1, 1)] &= [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 &\quad - 4 \cdot (h - 2m + 6)(h - m) \\
 &\quad - 2 \cdot (h - 2m + 6) \\
 &\quad - 1 \cdot (m - 4)(h - m + 1) \\
 &\quad - 2 \cdot \frac{1}{2}(h - 2m + 6)(h - 2m + 5) \\
 &\quad - 2 \cdot (m - 4)(h - 2m + 6) \\
 &\quad + 4 \cdot \frac{1}{2}(m - 4)(m - 5) \\
 &= [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 &\quad - 5h^2 + (13m - 25)h - 9m^2 + 35m - 30.
 \end{aligned}$$

24. La développable, dont nous venons de déterminer la classe dans le n.º 23, fait partie de la développable bitangente de la surface gauche qui a la courbe donnée pour directrice triple. L'autre partie de cette développable est l'enveloppe des plans contenant deux droites qui rencontrent la courbe en six points tous différents (trois pour chacune d'elles); nous désignerons sa classe par

$$[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)].$$

D'après un théorème de Mr. CAYLEY (*) la classe de la développable bitangente d'une surface gauche est égale à l'ordre de sa courbe nodale. La courbe donnée, prise $\frac{1}{2}(h-m+2)(h-m+1)$ fois, fait partie de cette courbe nodale. Nous désignerons par $[d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)]$ l'ordre du reste de cette courbe nodale (*Nodal Residue*) et trouvons alors (**)

$$[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] + d[(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] = \\ [d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)] + m \cdot \frac{1}{2}(h-m+2)(h-m+1).$$

Le principe de correspondance nous donne une seconde équation pour la détermination des nombres inconnus

$$[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \text{ et } [d(1, 1, 1)(P)d(1, 1, 1)].$$

Nous ferons usage de faisceaux de droites dans le même plan et au même centre. Deux droites correspondantes x et u passent par les traces de deux droites dont chacune rencontre la courbe en trois points et qui se rencontrent elles-mêmes en un autre point. On trouve ainsi:

$$d(d, 1, 1, 1)\{d(d, 1, 1, 1) - 3(h-m+1) - 2\} \\ + d(d, 1, 1, 1)\{d(d, 1, 1, 1) - 3(h-m+1) - 2\} = 2 \cdot [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \\ + 2 \cdot [d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)].$$

Les deux équations trouvées nous donnent les résultats suivants (***)

$$[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] = \frac{1}{72}(m-4)(m-5)\{36h^2 - 12(m^2 + m - 9)h \\ + m(m^3 + 3m^2 - 34m + 48)\}, \\ [d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)] = \frac{1}{72}(m-5)\{36mh^2 - 12(m^3 + 5m - 24)h \\ + m(m^4 - m^3 + 26m^2 - 140m + 168)\}.$$

Dans la suite, nous aurons aussi besoin de connaître les nombres

$$[d(1, 1, 1)P(p_x)d(1, 1, 1)] \text{ et } [d(1, 1, 1)P(p_u)d(1, 1, 1)],$$

(*) *On the theory of skew surfaces* (Camb. a. D. Math. J. t. 7).

(**) Nous n'avons pas égard aux génératrices doubles qui comptent également dans l'ordre de la courbe nodale et dans la classe de la développable bitangente.

(***) Le nombre $[d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)]$ est le même que Mr. CAYLEY, dans le mémoire que nous avons cité déjà plusieurs fois (*On skew surfaces, otherwise scrolls*; Phil. Trans., vol. 153), a déterminé à la page 457 sous le nom de *N. R. (m³)*. Il s'est glissé dans l'expression qu'y donne Mr. CAYLEY le terme $+3m$ au lieu de $-3m$, ce qu'on voit aussi en examinant les calculs de ce savant géomètre, anglais.

où p_i et p_{ii} ont les significations que nous avons indiquées dans le n.º 23. On trouve

$$[d(1, 1, 1)P(p_i)d(1, 1, 1)] = [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \\ - (h - m + 2)[d(d, 1, 1, 1) - 3(h - m + 1) - 2],$$

$$[d(1, 1, 1)P(p_{ii})d(1, 1, 1)] = [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \\ - 2 \cdot (h - 2m + 6) \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h - m) \\ - 2(h - 2m + 5) - (m - 4) - 4 \} \\ - (m - 4) \{ d(d, 1, 1, 1) - (h - m + 1) \\ - 2(h - 2m + 6) - 2(m - 5) - 2 \} \\ - 2 \cdot \frac{(h - 2m + 6)(h - 2m + 5)}{2} =$$

$$[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] - (2h - 3m + 8) \{ d(d, 1, 1, 1) - 3(h - m + 1) - 2 \} \\ + (h - 2m + 6)(h - 2m + 5).$$

On voit que tous les nombres que nous avons déterminés dans ce numéro-ci et dans le numéro précédent ne dépendent que de m et h . La même chose sera constatée pour les nombres que nous parviendrons à exprimer, dans le suivant, au moyen de $m, h, d(d_1, d_2, 1, 1), d(d, 1, 1, 1), d(1, 1, 1, 1), [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)], [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)], [d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)]$, sans que nous ayons besoin de réduire les expressions ultérieurement.

25. Détermination du nombre $P[d(d, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})]$ des points de la courbe d'où partent trois droites qui se trouvent dans un même plan et dont les deux rencontrent encore deux fois la courbe, pendant que la troisième la rencontre une seule fois et s'appuie sur une droite donnée. On fait usage de deux séries de points sur la droite donnée d . Par un point x on fait passer une droite rencontrant la courbe en deux points. Par un de ces points on fait passer deux droites dont chacune rencontre encore deux fois la courbe. Le plan passant par ces deux droites détermine, par son intersection avec la droite d , un point u correspondant à x . On trouve ainsi:

$$2h \frac{(h - m + 2)(h - m + 1)}{2} \\ + [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](m - 1) = P[d(d, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})] \\ + 3 \cdot 2d(d, 1, 1, 1)(h - m + 1).$$

On voit que le nombre cherché dépend seulement de m et h (selon le n.º 24).

26. Détermination du nombre $[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ des plans tangents de la courbe qui renferment deux droites, issues du point de contact, et dont chacune rencontre encore deux fois la courbe. On fait usage de deux faisceaux de plans au même axe. Par un point d'intersection d'un plan x et de la courbe on fait passer deux droites dont chacune la rencontre encore en deux points. Un point d'intersection du plan passant par ces deux droites détermine, avec l'axe des faisceaux, un plan u correspondant à x . On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
 & m \frac{(h-m+2)(h-m+1)}{2} (m-5) \\
 + m [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] &= P[d(d, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + [d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 2 \cdot H \frac{(h-2m+6)(h-2m+5)}{2} \\
 & + 3 \cdot \beta \frac{(h-2m+6)(h-2m+5)}{2}.
 \end{aligned}$$

d'où (au moyen des n.^{os} 23 et 25)

$$\begin{aligned}
 [d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] &= \frac{1}{2}(h-m+1) \{ (h-m+2)(-9m+r) + 12d(d, 1, 1, 1) \} \\
 + [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] &- \frac{1}{2}(m^2 - m - 2h - r)(m-4)(2h-3m+7).
 \end{aligned}$$

Le nombre trouvé dépend de m , h et r .

On peut contrôler les expressions trouvés dans ce numéro-ci et dans le numéro précédent, en déterminant le nombre $[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ par un autre procédé. Ce n'est pas que les coefficients soient douteux dans les deux équations que nous avons trouvées, mais il est bon ici, et encore plus dans le suivant, d'avoir un moyen de s'assurer qu'on n'oublie aucun terme. L'autre détermination de $[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ se fait au moyen de deux séries de points sur une droite quelconque. Par un point x on fait passer un plan renfermant deux droites qui partent d'un même point de la courbe et dont chacune la rencontre encore deux fois. Un plan passant par l'une de ces deux droites et tangent à la courbe au point où elle rencontre l'autre, détermine un point u correspondant à x . Alors

$$\lambda = 2 [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(1, 1, 1)], \quad \mu = [P(p, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](h-m+1), \text{ etc.}$$

27. Détermination du nombre $P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})]$ des trian-

gles dont les trois sommets sont sur la courbe, et dont deux côtés rencontrent encore une fois la courbe, pendant que le troisième rencontre une droite fixe. On fait usage de deux faisceaux de plans ayant la droite d pour axe commun. Par un point d'intersection d'un plan x et de la courbe on fait passer une droite qui rencontre encore en deux points la courbe. Par un de ceux-ci, on fait passer une nouvelle droite qui rencontre aussi la courbe en deux autres points: un de ces derniers points détermine, avec l'axe des faisceaux, un plan u correspondant à x . On trouve ainsi:

$$\begin{aligned}
 & 4m(h-m+2)(h-m+1) \\
 + 4m(h-m+2)(h-m+1) &= 2 \cdot P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})] \\
 & \quad + 2 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)] \\
 & \quad + 4 \cdot 3 \cdot 2d(1, 1, 1, 1) \\
 & \quad + 4 \cdot H(h-2m+6) \\
 - & \quad + 3 \cdot \beta(h-2m+6) \\
 & \quad + 4 \cdot H(h-2m+6) \\
 & \quad + 3 \cdot \beta(h-2m+6) \\
 & \quad + 2H(m-4)(m-5) \\
 - & \quad + 3\beta(m-4)(m-5).
 \end{aligned}$$

Or les n.^{os} 8 et 17 nous donnent l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)] + 12d(1, 1, 1, 1) + 2(2H + 3\beta)(h - 2m + 6) = \\
 (h - m + 2)(2h - m^2 + m) + 3d(d, 1, 1, 1)(m - 3),
 \end{aligned}$$

de façon qu'on trouve:

$$\begin{aligned}
 P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})] = (h - m + 2)\{4m(h - m + 1) - 2h + m^2 - m\} \\
 - 3d(d, 1, 1, 1)(m - 3) - \frac{1}{2}(m^2 - m - 2h - r)(m - 4)(m - 5)
 \end{aligned}$$

qui dépend de m , h et r .

28. Recherche du nombre $P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ des triangles dont deux côtés ont avec la courbe trois intersections, le troisième côté rencontre deux fois la courbe et s'appuie sur une droite fixe, et dont un des sommets adjacents au troisième côté et le sommet qui y est opposé sont

sur la courbe (*) et sont comptés aux nombres indiqués des intersections des côtés (une fois pour chacun des côtés adjacents aux sommets respectifs). On fait usage de deux séries de points sur la droite fixe d . On fait passer par un point x une droite qui rencontre la courbe en deux points. Par un de ceux-ci on fait passer une droite qui rencontre encore en deux autres points la courbe, et par un de ces derniers points une nouvelle droite qui satisfait aux mêmes conditions. Le plan qui passe par les dernières droites rencontre la droite d à un point u correspondant à x . On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
 & 4h(h-m+2)(h-m+1) \\
 & + 4[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](m-1) = 1 \cdot P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \quad + 2 \cdot P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})] \\
 & \quad + 2 \cdot H(m-4)(m-5) \\
 & \quad + 3 \cdot \beta(m-4)(m-5) \\
 & \quad + 3 \cdot 2 \cdot 2d(d, 1, 1, 1)(h-m+1)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] &= 4(h-m+1)\{h-m+2\}(h-2m)-3d(d, 1, 1, 1)\} \\
 & + 4(m-1)[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] + 6d(d, 1, 1, 1)(m-3) + (4h-2m^2+2m)(h-m+2).
 \end{aligned}$$

Cette expression (***) ne dépend que de m et h .

29. Recherche du nombre $P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$ des triangles dont deux côtés ont avec la courbe trois intersections, le troisième rencontre deux fois la courbe et en outre une droite fixe, et dont le sommet opposé à ce dernier côté est sur la courbe et est compté aux nombres indiqués des intersections des côtés. On fait usage d'un procédé analogue à celui que nous venons d'employer dans le n.º 28 (aussi dans le n.º 25), et on trouve alors :

(*) Nous supposons ici et dans le suivant qu'aucun des sommets que nous ne nommons pas ne se trouve sur la courbe.

(**) Comme les termes contenant les facteurs

$$(h-m+1)(h-m+2) \text{ et } (h-m+1)d(d, 1, 1, 1)$$

seront assez fréquents dans le suivant, nous les avons déjà rassemblés ici.

$$\begin{aligned}
 & 3h \{ d(d, 1, 1, 1) - 2(h - m + 2) \} \cdot (h - m + 1) \\
 & + 2 [d(1, 1, \bar{1}) P(p) d(\bar{1}, 1, 1)] \{ d(d_1, d_2, 1, 1) - 3(m - 1) \} \\
 & \qquad \qquad \qquad = 2 \cdot P[d(d, 1, 1) d(1, 1, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 1 \cdot P[d(d, 1, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot d(d, 1, 1, 1) (h - m + 1) \\
 & \qquad \qquad \qquad + 3 \cdot d(d, 1, 1, 1) (h - m + 1) (h - 3),
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 P[d(d, 1, 1) d(1, 1, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1)] &= (h - m + 1) \{ (h - m + 2) (-5h + 4m) + 9d(d, 1, 1, 1) \} \\
 & + [d(1, 1, \bar{1}) P(p) d(\bar{1}, 1, 1)] \{ d(d_1, d_2, 1, 1) - 5(m - 1) \} \\
 & \qquad \qquad - 3d(d, 1, 1, 1) (m - 3) - (h - m + 2) (2h - m^2 + m).
 \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend que de m et h .

30. Recherche du nombre $P[d(d, \bar{1}, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1) d(1, 1, \bar{1})]$ des triangles dont deux côtés ont avec la courbe trois intersections, le troisième rencontre deux fois la courbe et en outre une droite fixe, et dont les sommets adjacents à ce dernier côté sont sur la courbe et sont comptés aux nombres indiqués des intersections des côtés. On y emploie un procédé analogue à celui dont nous avons fait usage dans le n.º 27, et l'on trouve alors, en représentant par la notation abrégative $d(d_m, 1, 1, 1)$ le nombre des intersections d'une droite donnée qui rencontre la courbe en trois points, avec d'autres droites qui la rencontrent en trois autres points, de façon que :

$$d(d_m, 1, 1, 1) = d(d, 1, 1, 1) - 3(h - m + 1) - 2,$$

l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & 3m(h - m + 2) d(d_m, 1, 1, 1) \\
 & + 3m(h - m + 2) d(d_m, 1, 1, 1) = 2 \cdot P[d(d, \bar{1}, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1) d(1, 1, \bar{1})] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot [d(1, 1, \bar{1}) P(\bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4 \cdot H \frac{(h - 2m + 6)(h - 2m + 5)}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad + 6 \cdot \beta \frac{(h - 2m + 6)(h - 2m + 5)}{2},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 P[d(d, \bar{1}, \bar{1}) d(\bar{1}, 1, 1) d(1, 1, \bar{1})] &= 3m(h - m + 2) d(d_m, 1, 1, 1) \\
 - \frac{1}{2}(h - m + 1) \{ (m^2 - 10m - 2h)(h - m + 2) + 12d(d, 1, 1, 1) \} &- [d(1, 1, \bar{1}) P(p) d(\bar{1}, 1, 1)]
 \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend que de m et h .

31. Recherche du nombre $P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)]$ des triangles dont deux côtés ont avec la courbe trois intersections, le troisième rencontre deux fois la courbe et en outre une droite fixe, et dont un sommet adjacent à ce dernier côté est sur la courbe et est compté au nombre indiqué des intersections des côtés. On y emploie un procédé analogue à celui dont nous avons fait usage dans les n.^{os} 25, 28 et 29, et on trouve alors

$$\begin{aligned} & 2h(h - m + 2)d(d_m, 1, 1, 1) \\ & + 6[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)](m - 1) = 1 \cdot P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\ & \quad + 2 \cdot P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})] \\ & \quad + 3 \cdot 2 \cdot d(d, 1, 1, 1)d(d_m, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] = & \\ & 2 \cdot d(d_m, 1, 1, 1)\{h - m + 2\}(h - 3m) - 3d(d, 1, 1, 1)\} \\ & + 6[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)](m - 1) \\ & + (h - m + 1)\{h - m + 2\}(m^2 - 10m - 2h) + 12d(d, 1, 1, 1)\} \\ & + 2[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)]. \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend que de m et h .

32. Recherche du nombre $P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)]$ des triangles dont deux côtés ont avec la courbe trois intersections, le troisième rencontre aussi trois fois la courbe et en outre une droite fixe, et dont aucun des sommets ne se trouve sur la courbe. En employant toujours avec très peu de modifications le même procédé, on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & h\{d(d, 1, 1, 1) - 2(h - m + 2)\}d(d_m, 1, 1, 1) \\ & + 2[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)]\{d(d_1, d_2, 1, 1) - 3(m - 1)\} \\ & = 2 \cdot P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\ & \quad + 1 \cdot P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\ & \quad + 3 \cdot d(d, 1, 1, 1) \cdot d(d_m, 1, 1, 1) \\ & \quad + 1 \cdot d(d, 1, 1, 1) \cdot d(d_m, 1, 1, 1) \cdot (h - 3), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] = & \\
 & d(d_{uv}, 1, 1, 1)\{(h-m+2)(-2h+3m)+3d(d, 1, 1, 1)\} \\
 + [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)]\{d(d_1, d_2, 1, 1)-6(m-1)\} & \\
 - \frac{1}{2}(h-m+1)\{(h-m+2)(m^2-10m-2h)+12d(d, 1, 1, 1)\} & \\
 & - [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)].
 \end{aligned}$$

33. Recherche du nombre $[d(\bar{1}, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, \bar{1})]$ des triangles dont deux côtés ont avec la courbe trois intersections, pendant que le troisième est une tangente, et dont un sommet est au point de contact et le sommet opposé à la tangente se trouve aussi sur la courbe, ces deux sommets étant comptés aux nombres indiqués des intersections des deux premiers côtés. La méthode que nous avons à employer ici est analogue à celle dont nous avons fait usage dans le n.º 26 pour trouver le nombre $[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$. Nous employons deux faisceaux de plans au même axe. Par un point d'intersection d'un plan x et de la courbe, on fait passer une droite qui rencontre la courbe en deux autres points et, par un de ceux-ci, une nouvelle droite qui rencontre la courbe en deux autres points. Un point d'intersection du plan déterminé par ces deux droites est sur un plan u correspondant à x . On trouve:

$$\begin{aligned}
 & 2m(h-m+2)(h-m+1)(m-5) \\
 + 4m[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] = & 1 \cdot P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 1 \cdot [d(\bar{1}, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + 4 \cdot H(h-2m+6)(h-m) \\
 & + 6 \cdot \beta(h-2m+6)(h-m) \\
 & + 2 \cdot H(m-4)(m-5) \\
 & + 3 \cdot \beta(m-4)(m-5),
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 [d(\bar{1}, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, \bar{1})] = & 2(h-m+1)\{(h-m+2)(r-5m)+6d(d, 1, 1, 1)\} \\
 & + 4[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & - 6d(d, 1, 1, 1)(m-3) - (4h-2m^2+2m)(h-m+2) \\
 & + (m^2-m-2h-r)\{2(m-3)h-3m^2+15m-16\}.
 \end{aligned}$$

Cette expression dépend de m , h et r .

On peut contrôler le résultat obtenu et, en même temps, l'expression que nous avons trouvée pour le nombre $P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$, au moyen d'un procédé analogue à celui qui avait le même but dans le n.º 26.

34. Recherche du nombre $[d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})]$ des triangles dont les deux côtés ont avec la courbe trois intersections, pendant que le troisième est tangent, et dont le sommet opposé à la tangente est sur la courbe et est compté aux nombres indiqués des intersections. Un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, donne :

$$\begin{aligned}
 & m[d(1, 1, \bar{1})P(p_1)d(\bar{1}, 1, 1)](m-6) \\
 + m[d(1, 1, \bar{1})P(p_1)d(\bar{1}, 1, 1)](m-6) &= 2 \cdot P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 1 \cdot [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + 2 \cdot H[d(1, 1, \bar{1})P(p_1)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 3 \cdot \beta[d(1, 1, \bar{1})P(p_1)d(\bar{1}, 1, 1)],
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})] &= (h-m+1)\{ (h-m+2)(-5r+17m)-48d(d, 1, 1, 1) \} \\
 & + [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](r-10) \\
 & + 6d(d, 1, 1, 1)(m-3) + (4h-2m^2+2m)(h-m+2) \\
 & - (m^2-m-2h-r)\{ (3m-10)h-4(m^2-5m+5) \}.
 \end{aligned}$$

Cette expression dépend de m , h et r . Même contrôle que dans le n.º précédent.

35. Recherche du nombre $[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, 1)]$ des triangles dont les deux côtés ont avec la courbe trois intersections, pendant que le troisième est tangent à la courbe en un des six points d'intersections. On trouve, en employant toujours une méthode analogue :

$$\begin{aligned}
 & m(h-m+2)d(d_m, 1, 1, 1)(m-6) \\
 + 6m[d(1, 1, 1)P(p_1)d(1, 1, 1)] &= 1 \cdot P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\
 & + 1 \cdot [d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, 1)] \\
 & + 2 \cdot H(h-2m+6)\{ d(d_m, 1, 1, 1) - (h-2m+5) \} (*) \\
 & + 3 \cdot \beta(h-2m+6)\{ d(d_m, 1, 1, 1) - (h-2m+5) \}
 \end{aligned}$$

(*) Le dernier facteur de ce terme et du suivant indique le nombre d'intersections d'une droite donnée qui passe par un point double ou stationnaire et rencontre encore deux

d'où :

$$[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, 1)] = \\ d(d_m, 1, 1, 1)\{(h-m+2)(r-5m)+6d(d, 1, 1, 1)+(m^2-m-2h-r)(m-4)\} \\ + 6[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] - 2[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)].$$

Cette expression dépend de m , h et r (voir les n.^{os} 24 et 26).

36. Recherche du nombre $[d(1, 1, 1)P(1)d(1, 1, 1)]$ des triangles dont les deux côtés rencontrent trois fois la courbe, pendant que le troisième y est tangent; et dont aucun sommet n'est sur la courbe. On trouve, en employant toujours une méthode analogue :

$$m[d(1, 1, 1)P(p_1)d(1, 1, 1)](m-7) \\ + m[d(1, 1, 1)P(p_2)d(1, 1, 1)](m-7) = 2P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\ + 1 \cdot [d(1, 1, 1)P(1)d(1, 1, 1)] \\ + 2 \cdot H[d(1, 1, 1)P(p_m)d(1, 1, 1)] \\ + 3 \cdot \beta[d(1, 1, 1)P(p_n)d(1, 1, 1)],$$

d'où :

$$[d(1, 1, 1)P(1)d(1, 1, 1)] = \\ -d(d_m, 1, 1, 1)\{(h-m+2)(2r-6m)+6d(d, 1, 1, 1)+(m^2-m-2h-r)(m-4)\} \\ + [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)](r-12) + 2[d(1, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)].$$

Cette expression dépend de m , h et r .

37. Recherche du nombre $P[d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})]$ de points de la courbe d'où partent trois droites qui sont dans un même plan et dont chacune rencontre encore deux fois la courbe. On fait usage de deux faisceaux de droites dans un même plan et au même centre. Deux droites x et u qui se correspondent passent par les traces de deux droites qui 1° partent d'un même point de la courbe, 2° la rencontrent encore, chacune en un point, et 3° sont dans le même plan que deux autres droites qui partent du même point de la courbe que les deux premières et qui la rencontrent encore, chacune en deux points. On trouve ainsi :

fois la courbe, avec des droites qui rencontrent la courbe en des points différents des points d'intersection avec la première.

$$\begin{aligned}
 & Pd[(d, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})(m-6)] \\
 + & P[d(d, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})(m-6)] = 6 \cdot P[d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + 1 \cdot [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + 2 \cdot H[d(1, 1, \bar{1})P(p_x)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 3 \cdot \beta [d(1, 1, \bar{1})P(p_x)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 1 \cdot m \frac{(h-m+1)(h-m+2)}{2} (m-5)(m-6) \\
 & + 1 \cdot [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](m-5)(m-6).
 \end{aligned}$$

Or, suivant le n.º 34:

$$\begin{aligned}
 & [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})] + (2H+3\beta) [d(1, 1, \bar{1})P(p_x)d(\bar{1}, 1, 1)] = \\
 & 2m(m-6) [d(1, 1, \bar{1})P(p_x)d(\bar{1}, 1, 1)] - 2P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)],
 \end{aligned}$$

où le dernier membre ne dépend que de m et h (voir le n.º 29). Par conséquent la même chose aura lieu pour le nombre cherché.

Autrement. On peut aussi faire usage de deux séries de points sur une même droite. Par un point x on fait passer un plan renfermant deux droites qui se rencontrent sur la courbe et dont chacune a encore deux intersections avec elle. Par le point de rencontre de ces deux droites on fait passer une nouvelle droite qui rencontre, elle aussi, encore deux fois la courbe. Le plan déterminé par la nouvelle droite et par l'un des deux premières passe par un point u correspondant à x . On trouve ainsi l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 & 2[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](h-m) \\
 + & 2[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](h-m) = 6 \cdot P[d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot d(1, 1, 1, 1)(h-m-1) \\
 & + 1 \cdot [P(\bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, \bar{1}, 1)](h-m) \\
 & + 4 \cdot H(h-2m+6)(h-m) \\
 & + 6 \cdot \beta (h-2m+6)(h-m) \\
 & + 3 \cdot d(d, 1, 1, 1)(h-m+1)(h-m).
 \end{aligned}$$

Cette équation concorde parfaitement avec la précédente. —

On en tire, sans difficulté, en ayant égard à l'équation qui sert dans le n.º 23 à déterminer $[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)]$, l'égalité suivante:

$$P[d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, \bar{1})] = \frac{1}{6}(h-m)\{6[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] + (h-m+1)[9d(d, 1, 1) - m(h-m+2)]\} + 4d(1, \bar{1}, 1)$$

Ce sont des méthodes analogues à la première de celles que nous venons d'appliquer à la recherche actuelle, qui nous ont servi à trouver, et ce sont des méthodes analogues à la seconde, qui nous ont servi à contrôler les équations que nous allons exposer dans les n.^{os} suivants.

38. Équation servant à déterminer le nombre $P[d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})]$ des triangles dont les sommets sont sur la courbe et dont chaque côté la rencontre encore une fois :

$$\begin{aligned} & 2P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})](m-5) \\ & + 2P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] = 6 \cdot P[d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})] \\ & \quad + 2 \cdot [d(\bar{1}, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})] \\ & \quad + 8 \cdot H(h-2m+6)(h-m) \\ & \quad + 12 \cdot \beta(h-2m+6)(h-m) \\ & \quad + 2 \cdot H(m-4)(m-5) \\ & \quad + 3 \cdot \beta(m-4)(m-5) \\ & \quad + 4 \cdot m(h-m+2)(h-m+1)(m-5) \\ & \quad + 8 \cdot [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](m-5). \end{aligned}$$

Selon le n.^o 33, on y peut faire la substitution suivante :

$$\begin{aligned} & 2[d(\bar{1}, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(1, 1, \bar{1})] + (8H+12\beta)(h-2m+6)(h-m) \\ & \quad - (2H+3\beta)(m-4)(m-5) \\ & = 4m(m-5)(h-m+2)(h-m+1) + 8m[d(\bar{1}, 1, \bar{1})P(\bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\ & \quad - 2P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] - (2H+3\beta)(m-4)(m-5); \end{aligned}$$

mais, comme on voit, elle n'éloigne pas $2H+3\beta (= m^2 - m - r)$ qui est aussi contenu au nombre $P[d(d, \bar{1}, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})]$ (voir le n.^o 27), et le nombre $P[d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})]$ contient donc, à côté de termes qui ne dépendent que de m et h , le terme suivant :

$$- \frac{1}{6}(2H+3\beta)(m-4)(m-5)(m-6).$$

39. Équation servant à déterminer le nombre

$$P[d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)]$$

des triangles dont les côtés ont avec la courbe trois intersections, et dont deux sommets sont sur la courbe et sont comptés aux nombres indiqués des intersections des côtés:

$$\begin{aligned}
 & P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](m-6) \\
 + & P[d(d, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](m-6) = 4 \cdot P[d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 4 \cdot [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})] \\
 & + 8 \cdot H[d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 12 \cdot \beta [d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)] \\
 & + 2 \cdot m(h-m+2)(h-m+1)(m-5)(m-6) \\
 & + 4 \cdot [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)](m-5)(m-6).
 \end{aligned}$$

Ici, selon le n.º 34, on peut faire la substitution suivante:

$$\begin{aligned}
 & [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})] + (2H + 3\beta)[d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)] = \\
 & 2m(m-6)[d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)] - 2P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)],
 \end{aligned}$$

de façon que le nombre cherché ne dépendra que de m et h .

40. Équation servant à déterminer le nombre

$$P[d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)]$$

des triangles dont les trois côtés ont trois intersections avec la courbe, et dont un seul sommet est sur la courbe et est compté aux nombres indiqués des intersections des côtés:

$$\begin{aligned}
 & 2P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](m-7) \\
 + & 2P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)](m-7) = 6 \cdot P[d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\
 & + 1 \cdot [d(\bar{1}, 1, 1)P(1)d(1, 1, \bar{1})](m-7) \\
 & + 2 \cdot H[d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)](m-7) \\
 & + 3 \cdot \beta [d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)](m-7) \\
 & + 1 \cdot m[d(1, 1, \bar{1})P(p_n)d(\bar{1}, 1, 1)](m-6)(m-7) \\
 & + 2 \cdot [d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] \frac{(m-5)(m-6)}{2} (m-7).
 \end{aligned}$$

Au moyen de la même substitution dont nous avons fait usage dans le n.º précédent, on trouve pour le nombre cherché l'expression suivante, plus

simple que celle que fournit immédiatement l'équation antérieure :

$$P[d(1, 1, \bar{1})d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] = (m - 7) \{ P[d(d, 1, 1)d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)] \\ - \frac{1}{6}(4m - 5)(m - 6)[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] + \frac{3}{4}m(m - 6)(h - m + 2)(h - m + 1) \}$$

qui ne dépend que de m et h .

41. Équation servant à déterminer le nombre $P[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)]$ des triangles dont les trois côtés ont trois intersections avec la courbe, sans qu'aucun des sommets tombe sur elle :

$$2 \cdot P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)](m - 8) \\ + 2 \cdot P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)](m - 8) = 18 \cdot P[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\ + 1 \cdot [d(1, 1, 1)P(1)d(1, 1, 1)](m - 8) \\ + 2 \cdot H[d(1, 1, 1)P(p_u)d(1, 1, 1)](m - 8) \\ + 3 \cdot \beta[d(1, 1, 1)P(p_u)d(1, 1, 1)](m - 8) \\ + 1 \cdot m[d(1, 1, 1)P(p_r)d(1, 1, 1)](m - 7)(m - 8) \\ + 2 \cdot [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \frac{(m - 6)(m - 7)}{2}(m - 8).$$

Au moyen du n.º 36 on en tire l'expression suivante :

$$P[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] = \frac{1}{18}(m - 8) \{ 6P[d(d, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\ - 2(2m - 3)(m - 7)[d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \\ + 3m(m - 7)(h - m + 2)d(d_m, 1, 1, 1) \},$$

qui ne dépend que de m et h .

42. On ne peut déterminer le nombre que nous venons de trouver, par la seconde méthode indiquée dans le n.º 37; car en employant celle-ci, on introduirait un nouveau nombre inconnu: celui des génératrices de la surface gauche ayant la courbe donnée pour directrice triple, qui sont en même temps tangentes à la courbe double de cette surface. Mais comme nous avons déjà trouvé $P[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)]$ par une autre voie (*), nous aurons le moyen de déterminer le nombre que nous venons de nommer et que nous désignerons par T . La connaissance de ce nombre nous sera utile dans le n.º suivant.

(*) Qui n'a pas besoin d'être contrôlée et, en tout cas, il existe d'autres procédés qui peuvent servir.

On trouve:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\} \\
 + & 2' \cdot [d(1, 1, 1)P(p)d(1, 1, 1)] \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\} \\
 & = 6 \cdot P[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\
 & + 2 \cdot P[d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\
 & + 4 \cdot 3 \cdot d(1, 1, 1, 1) \{d(d_m, 1, 1, 1) - (h - m - 1)\} \\
 & + 1 \cdot T \\
 & + 2 \cdot H(h - 2m + 6) \{d(d_m, 1, 1, 1) - (h - 2m + 5)\} \\
 & + 3 \cdot \beta(h - 2m + 6) \{d(d_m, 1, 1, 1) - (h - 2m + 5)\} \\
 & + 1 \cdot d(d, 1, 1, 1) d(d_m, 1, 1, 1) \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\}
 \end{aligned}$$

43. Recherche du nombre $p[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)]$ des points d'où partent trois droites distinctes qui rencontrent trois fois la courbe, ou des points triples ordinaires de la surface gauche qui a la courbe pour directrice triple. Nous y appliquons deux faisceaux de plans qui ont le même axe. Deux plans correspondants x et u passent par les deux points où une même génératrice de la surface gauche est rencontrée par deux autres; seulement aucun de ces points ne doit coïncider avec un des trois points d'intersection de la génératrice et de la courbe donnée. On trouve ainsi:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot [d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)] \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\} \\
 + & 2 \cdot [d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)] \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\} \\
 & = 6 \cdot p[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] \\
 & + 4 \cdot d(1, 1, 1, 1)(h - m - 1)(h - m - 2) \\
 & + 4 \cdot H \frac{(h - 2m + 6)(h - 2m + 5)}{2} (h - 2m + 4) \\
 & + 6 \cdot \beta \frac{(h - 2m + 6)(h - 2m + 5)}{2} (h - 2m + 4) \\
 & + 4 \cdot 3 \cdot d(1, 1, 1, 1) \{d(d_m, 1, 1, 1) - (h - m - 1)\} \\
 & + 1 \cdot T \\
 & + 2 \cdot H(h - 2m + 6) \{d(d_m, 1, 1, 1) - (h - 2m + 5)\} \\
 & + 3 \cdot \beta(h - 2m + 6) \{d(d_m, 1, 1, 1) - (h - 2m + 5)\} \\
 & + 1 \cdot d(d, 1, 1, 1) \cdot d(d_m, 1, 1, 1) \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\}.
 \end{aligned}$$

On trouve, en éliminant T de cette équation et de l'équation précédente, et en ayant aussi égard au n.º 24:

$$6\{p[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)] - P[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)]\} \\ = 2\{2[d(1, 1, \bar{1})P(p)d(\bar{1}, 1, 1)] - m(h-m+2)(h-m+1)\} \{d(d_m, 1, 1, 1) - 1\} \\ + 2P[d(1, 1, \bar{1})d(\bar{1}, 1, 1)d(1, 1, 1)] - 4d(1, 1, 1, 1)(h-m-1)(h-m-2) \\ - (2H+3\beta)(h-2m+6)(h-2m+5)(h-2m+4).$$

On voit qu'il est impossible d'exprimer $p[d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)d(1, 1, 1)]$ au moyen des seuls nombres m et h .

44. Recherche du nombre $[d(1, 1, 1)p(1)d(1, 1, 1)]$ des points d'où sortent deux droites qui rencontrent trois fois la courbe et une autre droite qui lui est tangente, les six points d'intersection et le point de contact étant différents entre eux. On fait usage de deux faisceaux de plans au même axe. Deux plans correspondants x et u passent par des points où une même droite qui a trois intersections avec la courbe rencontre 1º un autre droite qui satisfait aux mêmes conditions et 2º une tangente à la courbe. On trouve alors:

$$2[d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)](r-6) \\ + [p(P, 1)d(1, 1, 1)]d(d_m, 1, 1, 1) = 2 \cdot [d(1, 1, 1)p(1)d(1, 1, 1)] \\ + 1 \cdot d(1, 2)d(d_m, 1, 1, 1) \\ + 2 \cdot v d(d_m, 1, 1, 1) \\ + 8d(1, 1, 1, 1)(h-m+1) \\ + 8 \cdot H \frac{(h-2m+6)(h-2m+5)}{2} \\ + 12 \cdot \beta \frac{(h-2m+6)(h-2m+5)}{2} \\ + 1 \cdot d(d, 1, 1, 1)d(d_m, 1, 1, 1)(r-6)$$

Copenhague, juillet 1869.

CORRECTIONS.

Page	179	lig.	5	au lieu de	$h-H$	lisez	$h-1$
					$+1$		$+H$
»	191	»	22	»	$d(1, 2)$	»	$D(1, 2)$
»	202	»	10	»	$[d(1, 1, 1)(P)d(1, 1, 1)]$	»	$[d(1, 1, 1)p(P)d(1, 1, 1)]$
»	203	»	21	»	... trois fois ...	»	... deux fois ...

Appendice au Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques (*).

(par H. J. S. SMITH, prof. à Oxford.)

NOTE I, p. 114.

DESCARTES, *Géométrie*, livre troisième (*Œuvres de DESCARTES*, ed. Cousin, vol. v, p. 409).

« Or, quand on est assuré que le problème proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au carré de carré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple. »

NOTE II, p. 114.

DE LA HIRE, *La construction des équations analytiques*, opuscule qui fait partie (pp. 297-452) des *Nouveaux éléments des sections coniques*, Paris, 1679. Le problème des normales d'une section conique sert à l'auteur pour exemple de la méthode algébrique générale.

(*) Voir à pag. 112-165 de ce tome, où se trouve en entier le Mémoire que l'Académie royale des sciences de Berlin a couronné en 1868, en lui décernant la moitié du prix fondé par STEINER. L'illustre Auteur y a ajouté plus tard l'*Appendice* que nous publions ici. Nous profitons de cette occasion pour lui adresser nos remerciemens de ce qu'il a bien voulu choisir notre journal pour donner publicité à son excellent travail, qui est un admirable essai de géométrie moderne.

LES ÉDITEURS.

MACLAURIN, *Treatise of Algebra*, London, 1748, pag. 352.

JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, vol. xxvi, p. 172, vol. xlvi, p. 377. Voici la critique que fait JOACHIMSTHAL de la solution qui lui est propre, et de celle qu'il attribue à DE LA HIRE.

« On sait que chaque problème qui dépend d'une équation du quatrième degré, se résout par la règle et le compas, en supposant une seule section conique complètement décrite. C'est sur ce principe que repose la solution du problème en question, due à DE LA HIRE. Tandis que le géomètre grec qui a traité le premier cette question, APOLLONIUS de Perge, se sert, outre la conique donnée, d'une hyperbole équilatère, DE LA HIRE ne fait usage que d'une circonférence de cercle, dont les intersections avec la courbe ont, à un facteur près, les mêmes abscisses que les pieds des normales. Mais cette méthode offre plusieurs inconvénients qu'il est bon de signaler. En premier lieu, telle que DE LA HIRE l'a représentée, sa méthode n'est qu'un résultat de calcul, et ne se rattache à aucune proposition de géométrie; ensuite le choix de l'inconnue comporte nécessairement une ambiguïté, et, en dernier lieu, les formules qui déterminent la position et le rayon de la circonférence sont trop compliquées pour se prêter aisément aux constructions graphiques. On adressera peut-être, et à juste titre, ce dernier reproche également à la nouvelle solution qu'on va lire; et néanmoins je n'hésite pas à la publier; car, quoiqu'elle ne soit pas encore une solution définitive, les propositions si simples sur lesquelles elle repose, pourront servir de point de départ pour arriver à une solution purement géométrique du problème dont il s'agit. »

La solution, dont parle ici JOACHIMSTHAL, est due non pas à DE LA HIRE, mais à M. E. CATALAN. Il est vrai que M. CATALAN ne parle que d'une reproduction avec quelques simplifications de la solution ancienne (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, per MM. Terquem et Gerono, vol. vii, p. 332); mais il est parvenu à une solution qui est entièrement différente de celle de DE LA HIRE, et qui nous a paru plus élégante, et surtout plus naturelle. Nous n'avons pas cherché l'interprétation géométrique des formules analytiques un peu compliquées dont s'est servi DE LA HIRE; mais nous sommes parvenus à traiter par les méthodes de la géométrie pure la solution de M. CATALAN, aussi bien que celle de JOACHIMSTHAL. (Voir la note VIII.)

NOTE III, p. 118.

Soient $p_1 p_2, q_1 q_2$ deux couples de l'involution qui détermine une dyade donnée $\lambda_1 \lambda_2$; nous dirons que cette dyade est représentée par $[p_1 p_2, q_1 q_2]$. Soit encore $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ une représentation d'une seconde dyade $\mu_1 \mu_2$; et supposons que l'équation anharmonique

$$[p_1, p_2, q_1, q_2] = [x_1, x_2, y_1, y_2]$$

soit satisfaite. Cette équation entraîne nécessairement l'une ou l'autre des deux équations suivantes

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] &= [x_1, x_2, y_1, y_2, \mu_1, \mu_2], \\ [p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_2, \lambda_1] &= [x_1, x_2, y_1, y_2, \mu_1, \mu_2]; \end{aligned}$$

mais il importe d'observer que ces équations ne sauraient avoir lieu toutes les deux ensemble. Selon que la première ou la seconde équation est satisfaite, nous dirons que les éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$, ou bien les éléments imaginaires $\lambda_2 \lambda_1, \mu_1 \mu_2$, sont représentés homographiquement par les systèmes $[p_1 p_2, q_1 q_2], [x_1 x_2, y_1 y_2]$. D'après la définition que nous avons donnée de l'homologie des dyades, il est évident que lorsqu'on connaît l'homologie de deux dyades, on connaît en même temps deux représentations homographiques des éléments homologues de ces dyades. Et, réciproquement, il résulte de la solution du problème fondamental de l'article II, que l'on peut trouver linéairement le centre ou l'axe d'homologie de deux dyades de même espèce, dont les axes ou les centres ne sont pas coïncidents, lorsqu'on connaît deux représentations homographiques des éléments imaginaires qu'on veut regarder comme homologues dans ces deux dyades. De plus, on verra ci-après qu'en désignant par $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ trois dyades quelconques, on peut déterminer linéairement deux représentations homographiques de $b_1 b_2, c_1 c_2$, lorsqu'on connaît deux représentations homographiques de $a_1 a_2, b_1 b_2$, et deux représentations homographiques de $a_1 a_2, c_1 c_2$. D'après cela, on peut se servir des représentations homographiques pour définir l'homologie des dyades, en disant que l'homologie de deux dyades est donnée, lorsqu'on connaît une représentation homographique de ces dyades. Cette manière de définir l'homologie des dyades a le double avantage de ne pas exiger l'emploi de dyades auxiliaires, ni dans le cas de deux dyades dont les axes ou les centres sont coïncidents, ni dans le

cas de deux dyades d'espèce différente, et de se prêter facilement à la théorie des dyades de droites qui ne se rencontrent pas dans l'espace.

Ce que nous venons de dire se rattache immédiatement à la belle théorie des imaginaires, qui a formé l'objet principal des savantes recherches de l'auteur de la *Géométrie de Situation* (*). Nous croyons faire plaisir aux lecteurs de l'ouvrage de cet excellent géomètre, en ajoutant les observations suivantes, qui feront voir combien nous nous sommes peu éloignés de la route qu'il a tracée.

(1.) Étant donné deux représentations homographiques

$$[p_1 p_2, q_1 q_2], [x_1 x_2, y_1 y_2]$$

des éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$, et une autre représentation quelconque $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ de la première de ces deux dyades; on pourra déterminer linéairement les éléments $u_1 u_2, v_1 v_2$, qui satisfont à l'équation anharmonique

$$[x_1 x_2, y_1 y_2, u_1 u_2, v_1 v_2] = [p_1 p_2, q_1 q_2, r_1 r_2, s_1 s_2],$$

et on aura ainsi une nouvelle représentation $[u_1 u_2, v_1 v_2]$ des éléments $\mu_1 \mu_2$ qui sera homographique à la représentation $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ des éléments $\lambda_1 \lambda_2$. Soient donc $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ trois dyades quelconques données; $[A], [B]$ deux représentations homographiques des éléments $a_1 a_2, b_1 b_2$; $[A_1], [C_1]$ deux représentations homographiques des éléments $a_1 a_2, c_1 c_2$. On déterminera une représentation $[C]$ des éléments $c_1 c_2$ qui soit homographique à la représentation $[A]$ des éléments $a_1 a_2$; et on aura ainsi deux représentations homographiques $[B], [C]$, des éléments $b_1 b_2, c_1 c_2$.

(2.) Étant donné une représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$ d'une dyade $\lambda_1 \lambda_2$, et un troisième couple quelconque $r_1 r_2$ de l'involution qui détermine cette dyade, il existe toujours un quatrième couple de cette même involution, qui satisfait à l'équation anharmonique

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [r_1, r_2, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2].$$

On trouve linéairement ce quatrième couple en prenant pour $s_1 s_2$ les éléments conjugués à $p_2 p_1$ dans l'involution déterminée par $q_1 r_2, q_2 r_1$. On peut donc trouver une infinité de représentations des éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2$, homographiques à une représentation donnée.

(3.) Il convient d'attribuer un signe algébrique déterminé à chaque repré-

(*) STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856).

sentation d'une dyade; ainsi nous dirons que la représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$ de la dyade $\lambda_1 \lambda_2$ est positive ou négative, selon que le sens du mouvement continu indiqué par $p_1 q_1 p_2$ est positif ou négatif. Il s'ensuit de là que deux représentations homographiques d'une même dyade ont le même signe, ou des signes contraires, selon que les éléments imaginaires se correspondent directement ou réciproquement dans les deux représentations. En effet, en désignant par $[p_1 p_2, q_1 q_2]$, $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ deux représentations homographiques de la dyade $\lambda_1 \lambda_2$, on a, dans le premier de ces deux cas, l'équation anharmonique

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [r_1, r_2, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2];$$

d'où il s'ensuit que le sens indiqué par $p_1 q_1 p_2$ est le même que le sens indiquée par $r_1 s_1 r_2$, puisque deux éléments correspondants, qui parcourent deux divisions homographiques, dont les éléments doubles sont imaginaires, se mouvent toujours dans le même sens. Donc, en ce premier cas, les deux représentations sont de même signe; tandis que dans le second cas, on aura l'équation

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [r_1, r_2, s_1, s_2, \lambda_2, \lambda_1],$$

ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [s_1, s_2, r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2].$$

Cette équation implique que le sens indiqué par $p_1 q_1 p_2$ coïncide avec le sens indiqué par $s_1 r_1 s_2$; d'où l'on conclura que les deux sens indiqués par $p_1 q_1 p_2$ et $r_1 s_1 r_2$ sont opposés, c'est à dire, que les deux représentations $[p_1 p_2, q_1 q_2]$, $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ sont de signes contraires.

(4.) Etant donné deux systèmes géométriques, dont chacun consiste d'une série d'éléments simplement infinie, et dont l'un dépend linéairement de l'autre, à chacun des deux sens qu'on peut attribuer à la succession des éléments dans le premier, il correspondra un sens déterminé dans l'autre. C'est ainsi qu'en rattachant chacun des deux éléments d'une même dyade à l'un des deux sens opposés que l'on peut concevoir dans le système géométrique auquel cette dyade appartient, de manière à établir une distinction fictive entre les deux éléments de la dyade, on établit en même temps une distinction correspondante entre les deux éléments d'une dyade quelconque linéairement dérivée de la première; puisque les éléments homologues des deux dyades peuvent être censés appartenir aux sens correspondants dans les deux systèmes dont elles font partie.

Comme exemple très particulier de cette remarque générale, considérons deux dyades de points $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ ayant le même axe LM . Soient $[p_1 p_2, q_1 q_2], [x_1 x_2, y_1 y_2]$ deux représentations homographiques des éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$. Puisque ces deux représentations peuvent être de même signe ou de signes contraires, et puisque la correspondance des éléments imaginaires est différente dans les deux cas, on voit très clairement dans ce cas particulier, qu'en considérant les deux sens opposés dans lesquels un point peut décrire une droite, on arrive à distinguer *à priori*, non pas entre les deux éléments d'une même dyade (ce qui serait absurde), mais, entre les deux manières d'établir l'homologie de deux dyades. D'ailleurs on peut observer que, dans ce même cas particulier, il y a une autre distinction très marquée entre les deux manières d'établir l'homologie des dyades données. En effet, si les deux représentations homographiques données des éléments $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ sont de même signe, les points doubles de l'involution $(\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2)$ seront imaginaires, et les points doubles de l'involution $(\lambda_1 \mu_2, \lambda_2 \mu_1)$ seront réels, tandis que, dans le cas contraire, les points doubles de la première involution seront réels, et ceux de la seconde seront imaginaires. Pour démontrer cette assertion, prenons un point quelconque sur la circonférence d'une conique, et de ce point, comme centre de projection, projetons les points de la droite LM sur la courbe. Pour plus de simplicité, nous désignerons les projections de ces points par les mêmes lettres que les points eux-mêmes. Les dyades $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ considérées sur la conique, donnent lieu à deux centres d'homologie, dont l'un est intérieur, et l'autre extérieur à la courbe. Soit Ω le centre intérieur, et menons les cordes $x_1 \Omega \xi_1, y_2 \Omega \xi_2, y_1 \Omega \eta_1, y_2 \Omega \eta_2$; $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ sera une représentation de la dyade $\lambda_1 \lambda_2$, homographique à la représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$ de cette même dyade, et aussi à la représentation $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ de la dyade $\mu_1 \mu_2$; de plus, le sens de $\xi_1 \eta_1 \xi_2$ est le même que le sens de $x_1 y_1 x_2$, puisque Ω est un point intérieur. Donc la représentation $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ comporte le même signe que la représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$, ou le signe contraire, selon que les deux représentations $[x_1 x_2, y_1 y_2], [p_1 p_2, q_1 q_2]$ sont de même signe, ou de signes contraires. Par conséquent $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ et $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ sont deux représentations homographiques des éléments $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ dans le premier cas, et des éléments $\lambda_2 \lambda_1, \mu_1 \mu_2$ dans le second. Mais cela revient à dire que Ω est le point d'intersection des cordes imaginaires $\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2$ dans le premier cas, et des cordes $\lambda_1 \mu_2, \lambda_2 \mu_1$ dans le second. Et de là, en revenant des points de la conique à ceux de la droite, on conclut immédiatement la vérité de la proposition qu'il fallait démontrer.

NOTE IV, p. 119.

Les deux solutions que nous avons données de ce problème ne diffèrent pas essentiellement, puisque la droite, lieu des points d'intersection des couples de tangentes que l'on considère dans la première solution, est en même temps l'axe des deux divisions homographiques que l'on obtient en échangeant entre eux sur l'une des droites B, C , les deux points de chaque couple de l'involution qui détermine la dyade sur cette droite. La solution suivante, peu différente d'ailleurs des autres, nous paraît aussi simple qu'on peut le désirer.

En se servant des centres d'homologie donnés on obtient deux représentations homographiques $[\beta_1 \beta_2, \beta'_1 \beta'_2]$, $[\gamma_1 \gamma_2, \gamma'_1 \gamma'_2]$ des éléments imaginaires $b_1 b_2, c_1 c_2$; puis on détermine les axes des quatre systèmes homographiques que voici,

$$[\beta_1, \beta_2, \beta'_1, \beta'_2] = [\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma_1, \gamma_2]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \alpha'_1, \beta'_2] = [\gamma'_2, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma_1]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta'_1, \beta'_2] = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta'_1, \beta'_2] = [\gamma_2, \gamma_1, \gamma'_2, \gamma'_1]$$

Les deux premières de ces droites se croisent au point P ; les deux dernières au point P' . Si le premier ou le second système devient homologique, le centre d'homologie est le point P' ; pareillement, si le troisième ou le quatrième système devient homologique, le centre d'homologie est le point P .

On peut encore remarquer que si les dyades $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ appartiennent à une même section conique, les six systèmes de trois points, $P'QR, PQR', PQR, P'QR', PQR, P'QR'$, seront chacun en ligne droite.

NOTE V, p. 124.

Supposons seulement que l'axe d'homologie A de $a_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2$ soit donné. Faisons passer une conique réelle Σ par Π , et par la dyade de points déterminée par $a_1 a_2$, ou $\alpha_1 \alpha_2$, sur l'axe A . Soient $k_1 k_2, \kappa_1 \kappa_2$ les dyades de points déterminées sur Σ par les dyades données $b_1 b_2, \beta_1 \beta_2$. L'axe A passera par l'intersection des droites imaginaires conjuguées $k_1 \kappa_2, k_2 \kappa_1$; ce qui suffit pour faire voir qu'on peut distinguer linéairement entre les deux centres

d'homologie de $k_1 k_2, \kappa_1 \kappa_2$, et pourtant entre les deux axes d'homologie de $b_1 b_2, \beta_1 \beta_2$. La construction est entièrement linéaire, puisque pour déterminer les dyades $k_1 k_2, \kappa_1 \kappa_2$ il n'est pas nécessaire de tracer la conique Σ .

NOTE VI, p. 129.

La détermination de la dyade $\pi_1 \pi_2$ ne présente aucune difficulté théorique. Soit $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ une représentation donnée de la dyade $p_1 p_2$; σ une conique qui passe par cette dyade. D'un point quelconque réel de σ projetons sur cette conique l'involution déterminée par les coniques du faisceau $[c_1, c_2, d_1, d_2]$ sur l'axe de $p_1 p_2$. Soit π le pôle de l'involution qu'on aura ainsi sur la conique σ . Aux quatre rayons $\pi \cdot [x_1, x_2, y_1, y_2]$ il correspondra anharmoniquement quatre coniques du faisceau. Soient $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ les points de la conique auxiliaire C qui correspondent anharmoniquement à ces quatre coniques; $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ sera une représentation de la dyade $\pi_1 \pi_2$, et cette représentation sera homographique à la représentation donnée $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ de la dyade $p_1 p_2$.

NOTE VII, p. 135.

Toute conique du réseau circonscrit qui passe par Γ rencontre la droite Δ en deux points harmoniquement conjugués par rapport à la conique cherchée. De même, les deux tangentes menées du point Γ à une conique du réseau inscrit, qui est tangente à la droite Δ , sont deux droites conjuguées par rapport à cette même conique du réseau harmonique. On peut donc trouver très simplement l'involution que détermine cette conique, soit au point Γ , soit sur la droite Δ ; et, d'après ce que nous avons dit dans l'article précédent, cela suffit pour déterminer le système polaire de la courbe.

Les expressions 'ellipse *minima* circonscrite' 'ellipse *maxima* inscrite' dont nous nous sommes servis dans cet article, sont relatives au cas d'un triangle harmonique réel. Lorsque ce triangle est imaginaire, les coniques polaires du centre des distances moyennes, et de la droite à l'infini, sont toutes les deux des hyperboles.

NOTE VIII, p. 146.

Soient X, Y les projections orthogonales de P sur les axes $A_1 A_2, B_1 B_2$ respectivement; ST la tangente à Γ au point S . Menons la corde ss' perpendiculaire à $A_1 A_2$. D'après la définition de Γ , ST est le diamètre de Σ conjugué aux cordes perpendiculaires à SP . Donc ST est parallèle à $A_2 s$; de plus, puisque l'hyperbole Γ est équilatère, les droites bissectrices de l'angle CST sont parallèles aux asymptotes de la courbe; donc SC est parallèle à $A_2 s'$. On voit en même temps que SC est le diamètre de Σ conjugué aux cordes perpendiculaires à XY , puisque XY et SP font des angles égaux avec les axes de Σ . Mais la droite XY passe elle même par C , puisqu'elle est une des diagonales du quadrilatère $SP\alpha\beta$, inscrit à Γ . Donc C est le point d'intersection de XY avec le diamètre de Σ conjugué aux cordes perpendiculaires à XY , ou, si l'on veut, avec le diamètre parallèle à $A_2 s'$; et la polaire de C par rapport à Σ est la perpendiculaire abaissée du pôle de XY sur cette droite elle même. Ces déterminations nous seront utiles plus tard.

Puisque nous tenons à faire voir que la solution de JOACHIMSTHAL ne conduit pas à des opérations impraticables à cause de leur longueur, nous indiquerons ici la manière de les effectuer, qui nous paraît la plus simple. On supposera connus les axes et l'un des foyers H de la conique centrale Σ ; on prendra pour $A_1 A_2$ l'axe focal. En se servant d'un équerre, on menera la corde $A_1 s$ perpendiculaire à PS , la corde $A_2 p$ perpendiculaire à $A_1 s$, la corde ss' perpendiculaire à $A_1 A_2$; enfin, la normale et la tangente à Σ au point s (on sait que cela peut se faire très simplement avec l'équerre). Soit μ le point d'intersection de l'axe focal avec la normale; σ, η les projections orthogonales de S, H sur la tangente, Y la projection orthogonale de P sur l'axe conjugué, Y_1 le point de ce même axe pour lequel l'angle YHY_1 est droit; enfin, $A_1 p_1$ étant menée perpendiculaire à PY_1 , soit y le point d'intersection des cordes pp_1, sB , et θ la projection orthogonale de y sur ss' . Le centre ω du cercle de JOACHIMSTHAL sera le point d'intersection des droites $\theta\mu, S\sigma$; le rayon de ce cercle sera $\omega\eta$. On décrira le cercle, et on joindra les points d'intersection des deux courbes au point A_1 par des cordes $A_1 x$: les normales issues du point P seront perpendiculaires à ces cordes, et leurs pieds se trouveront sur les diamètres de Σ parallèles aux cordes $A_2 x$. D'après ce que nous avons dit, on vérifiera facilement les détails de cette construction, dans laquelle on n'aura besoin du compas qu'au moment où l'on veut tracer

le cercle Ω . En effet, puisque D se transforme en α , et C en β , les axes principaux de la conique transformée Σ' sont les droites qui correspondent au diamètre de Σ qui passe par C , et à la polaire de C . L'un de ces deux axes est ss' ; c'est celui qui correspond à SC ; l'autre est $y\theta$, puisque y correspond au point Y_1 , qui se trouve sur la polaire de C . Donc θ est le centre de Σ' ; et, puisque la perpendiculaire abaissée de θ sur sa polaire par rapport à Σ doit passer par ω , et aussi par μ , la construction du point ω se trouve justifiée.

On remarquera qu'en général, étant donné un point quelconque Z , pour en trouver le point correspondant dans la figure transformée, on mènera les cordes A_1p_1, A_2s_1 , dont la première est perpendiculaire à PZ , et la seconde est parallèle à SZ ; les cordes ss_1, pp_1 se croiseront au point z . Et, en effet, c'est ainsi que nous avons déterminé les points f et y , correspondant aux points F et Y_1 , dans les constructions précédentes.

La solution analytique du problème qui nous occupe, donnée il y a presque deux cents ans par DE LA HIRE, a été l'objet de recherches intéressantes par M. E. CATALAN (Nouvelles Annales de Mathématiques par MM. Terquem et Gerono, Vol. VII, p. 332 et 396, année 1848). Nous allons voir que la solution de M. CATALAN, aussi bien que celle de JOACHIMSTHAL, se déduit naturellement de la méthode dont nous nous sommes servis.

Soient $n_1n_2n_3n_4$ les pieds des normales abaissées de P sur Σ ; à ces quatre points M. CATALAN substitue quatre autres $n'_1n'_2n'_3n'_4$, qui sont les points d'intersection de Σ par une circonférence de cercle, et dont les abscisses, mesurées du centre de Σ sur l'un des deux axes, sont proportionnelles aux abscisses de $n_1n_2n_3n_4$ (*). Soient toujours A_1A_2, B_1B_2 les axes de Σ ; α, β les points à l'infini sur ces axes respectivement; en supposant que A_1A_2 soit l'axe des abscisses, on aura l'équation anharmonique

$$\beta \cdot [\alpha, S, n_1, n_2, n_3, n_4] = \beta \cdot [\alpha, S, n'_1, n'_2, n'_3, n'_4]. \quad (A)$$

Qu'on transforme la figure de manière qu'aux points n de la figure donnée

(*) Dans la solution plus compliquée de DE LA HIRE ce sont les ordonnées des points n' qu'on fait proportionnelles aux abscisses des points n . De plus, au lieu du centre de de la conique, on prend pour origine un point tel que les sommes des ordonnées des points n' , et des abscisses des points n , s'évanouissent séparément. On voit qu'il en doit résulter une construction géométrique entièrement différente de celle que nous allons déduire de l'analyse de M. CATALAN. D'ailleurs, nous avons reconnu que la solution de DE LA HIRE ne s'applique pas au cas où il y aurait quatre normales réelles; mais, malgré cet inconvénient, cette solution nous paraît mériter une étude plus approfondie.

correspondent les points n' de la nouvelle figure. Puisque les points $\beta, n_1, n_2, n_3, n_4$ appartiennent à la conique Γ , on conclut de l'équation (A), que β appartiendra à Γ' , la transformée de Γ . Or, Γ' ne peut être qu'une parabole, dont l'axe est parallèle à $B_1 B_2$. Car le faisceau (Γ', Σ) , dont les points n' forment la base, contient par hypothèse un cercle; donc $\alpha\beta$ sont les points doubles de l'involution que ce faisceau détermine sur la ligne droite à l'infini, et la conique du faisceau, qui passe par β , y touche cette droite. Cela posé, il s'ensuit de l'équation (A) que le point β de Γ' correspond au point α de Γ ; donc α se transforme en β , et l'asymptote $C\alpha$ devient la droite à l'infini $\alpha\beta$. Soient a, b les projections de C sur les axes $A_1 A_2, B_1 B_2$; α se transformant en β , b se transforme en α , puisque $\alpha b, \beta\alpha$ sont des points réciproques par rapport aux faisceaux $(\Sigma, \Gamma), (\Sigma, \Gamma')$, respectivement. De plus, d'après l'équation (A), le point S doit se transformer en un point S' situé sur βS ; donc $A_1 A_2$, ou $S\alpha$, se transforme en $S'\beta$, ou $B_1 B_2$. Soit Σ_1 la conique du faisceau (Σ, Γ) qui se transforme en Σ ; il faut que pour cette conique les droites $\alpha S, \alpha C$ soient des droites conjuguées. Cette condition détermine Σ_1 sans ambiguïté, puisque, des deux coniques du faisceau (Σ, Γ) qui y satisfont, l'une est Γ , qui ne se transforme pas en Σ . En désignant par $X_1 Y_1$ les points d'intersection des axes de Σ avec la polaire de C , soient c, x les points placés symétriquement à C, X_1 , par rapport à l'axe B_1, B_2 , y le point placé symétriquement à Y_1 par rapport à l'axe $A_1 A_2$. La conique du faisceau (Σ, Γ) pour laquelle C est le pôle de xy ne peut être autre que Σ_1 . Car la polaire de c par rapport à Γ est l'axe $A_1 A_2$, puisque Sc est tangent à Γ au point S ; et la polaire de c par rapport à Σ doit passer par x , à cause de la situation symétrique des points CX_1, cx ; donc c, x sont des points réciproques par rapport au faisceau (Σ, Γ) , et la conique de ce faisceau par rapport à laquelle C est pôle de xy , aura Cc , ou $C\alpha$, pour polaire de x ; c'est à dire que $\alpha S, \alpha C$ seront des droites conjuguées par rapport à cette conique. Il résulte de là que abx sera un triangle harmonique par rapport à Σ_1 , et que pour satisfaire à toutes les conditions du problème, il suffira de transformer Σ_1 en Σ , de manière que le triangle abx devienne le triangle $\beta\alpha S$. Soit (1°) Σ un ellipse; les involutions déterminées par le faisceau (Σ, Γ) sur les axes de Σ ont évidemment des points doubles imaginaires; donc toute conique du faisceau rencontre ces droites en deux points réels. Soient $\lambda_1 \lambda_2$ les points d'intersection de Σ_1 avec $A_1 A_2$; x sera le point milieu du segment $\lambda_1 \lambda_2$; mais S , qui est le centre de l'involution, se trouvera aussi sur ce même segment; donc les droites bS, bx seront

situées dans le même angle formé par les droites $b\lambda_1, b\lambda_2$, tangentes Σ_1 en λ_1, λ_2 . Mais l'axe bS rencontre Σ_1 en deux points réels; donc aussi $b\alpha$ rencontre Σ_1 en deux points réels ν_1, ν_2 . D'ailleurs, les points $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2$ sont quatre points harmoniques de Σ_1 ; donc en transformant homographiquement ν_1, ν_2 en A_1, A_2 , et λ_1, λ_2 en B_1, B_2 (ce qui peut se faire par une quelconque de quatre transformations différentes), on transformera Σ_1 en $\Sigma, \alpha b\alpha$ en $\beta\alpha S$, Γ en une parabole ayant son axe parallèle à $B_1 B_2$, et, enfin, les quatre points n en quatre points n' situés sur la circonférence d'un cercle et satisfaisant à l'équation (A). Quelque soit l'axe qu'on a choisi pour $A_1 A_2$, ce sera toujours la même conique Σ_1 qui se transformera en Σ ; puisque la définition que nous avons trouvée pour Σ_1 est symétrique par rapport aux deux axes. Et l'on peut ajouter que dans les quatre transformations, relatives à un même axe, ce sera toujours la même conique qui se transformera en un cercle, et que les quatre cercles résultants, ainsi que les quatre paraboles Γ' , seront placés symétriquement par rapport aux axes principaux de Σ . Si (2°) Σ est une hyperbole, on voit d'abord qu'il faudra prendre pour $A_1 A_2$ l'axe qui ne rencontre pas la courbe. Car si les sommets $A_1 A_2$ étaient réels, les points λ_1, λ_2 seraient réels, comme dans le cas de l'ellipse, et il faudrait transformer deux points réels λ_1, λ_2 en deux points imaginaires $B_1 B_2$. On doit donc supposer que les sommets $A_1 A_2$ sont imaginaires; en ce cas, on aura à transformer les points λ_1, λ_2 en deux points réels $B_1 B_2$, mais, pour que les points λ_1, λ_2 restent eux mêmes réels, il faudra que Sx^2 soit plus grand que $-SA^2$. Qu'on mène des perpendiculaires aux asymptotes de Σ par les points où ces droites rencontrent la tangente à l'un des sommets B_1, B_2 ; et qu'ensuite par les points d'intersection de ces perpendiculaires avec l'axe conjugué on mène des parallèles à l'axe focal. La condition ci-dessus revient à dire que le point P doit être compris entre les deux parallèles qu'on a tracées. D'ailleurs, cette limitation de la méthode de M. CATALAN résulte clairement des formules analytiques dont il l'a fait dépendre. Lorsque la condition de possibilité est satisfaite, les angles $\lambda_1 b\lambda_2, Sb\alpha$ empiètent l'un sur l'autre; mais l'axe bS rencontre la conique Σ_1 en deux points réels; donc $b\alpha$ ne la rencontre pas, et $b\alpha$ la coupe en deux points réels μ_1, μ_2 . En faisant correspondre λ_1, λ_2 à B_1, B_2 , et μ_1, μ_2 aux deux points à l'infini sur les asymptotes de Σ , on aura quatre transformations différentes, dont chacune pourra servir pour la solution du problème.

Lorsqu'on veut faire usage de cette méthode, on commencera par la détermination de C , et de la polaire de ce point par rapport à Σ ; on aura

ainsi les points a, b, c, x . Pour avoir les points $\lambda_1 \lambda_2$, on projetera du point B_1 sur l'axe $A_1 A_2$ les deux extrémités du diamètre de Σ conjugué à la corde $B_1 x$. De même, si Σ est une ellipse, on trouvera $\phi_1 \phi_2$, les deux points d'intersection de $B_1 B_2$ avec Σ_1 , en projetant du point A_1 sur $B_1 B_2$ les extrémités du diamètre parallèle à $A_1 b$. En faisant correspondre λ_1 à B_1 , λ_2 à B_2 , on prendra sur $B_1 B_2$ les points a', S' , qui satisfont à l'équation anharmonique $[\alpha, \lambda_1, \lambda_2, a, S] = [\beta, B_1, B_2, a', S']$, et l'on menera par S' une parallèle à $A_1 A_2$. Cette parallèle correspond à $B_1 B_2$; elle rencontre Σ en deux points réels $\phi'_1 \phi'_2$, correspondant à $\phi_1 \phi_2$. On fixera à volonté la correspondance de $\phi'_1 \phi'_2$, $\phi_1 \phi_2$, et on prendra le point β' qui satisfait à l'équation $[S, \phi_1, \phi_2, \beta] = [S', \phi'_1, \phi'_2, \beta']$, et qui, par conséquent, correspond à β . Le point C' , correspondant à C , est évidemment le point à l'infini sur la droite $a' \beta'$; donc D' , qui correspond à D , et qui est le point réciproque de C' par rapport au faisceau (Σ, Γ) , se trouve à l'intersection de $\beta' \beta$ avec le diamètre de Σ conjugué à $a' \beta'$. Du point D' abaissons sur $a' \beta'$ une perpendiculaire; soit ω le point d'intersection de cette perpendiculaire avec une droite $S\omega$, qui fait avec l'un des axes principaux le même angle que la perpendiculaire, mais de l'autre côté de cet axe. Le cercle, dont ω est le centre, et qui coupe orthogonalement le cercle dont $a' \beta'$ est le diamètre, appartient au faisceau transformé. C'est ce qu'on vérifie en observant que $cx, a\beta, CD$ sont des couples de points réciproques par rapport au faisceau (Σ, Γ) , et qu'en désignant par c' le point à l'infini harmoniquement conjugué à C' par rapport à $a\beta$, les points correspondants $c'S, a'\beta', C'D'$, sont également des couples de points réciproques par rapport au faisceau (Σ, Γ) .

Pour avoir le rapport des abscisses des points n' aux abscisses des points correspondants n , projetons P sur les deux axes. En désignant, comme nous avons fait plus haut, ces projections par X, Y , prenons Y' le point correspondant à Y ; le rapport cherché sera celui de $S'Y'$ à SX .

Avant de terminer cette longue note, nous indiquerons une troisième méthode, qui ne s'applique pas à l'hyperbole, mais qui conduit à une solution assez simple pour le cas de l'ellipse. Soient $a_1 a_2, b_1 b_2$ les diamètres conjugués égaux de l'ellipse Σ . Qu'on transforme la courbe en elle-même, de manière que, la ligne à l'infini restant la même, les axes $A_1 A_2, B_1 B_2$ deviennent les diamètres égaux $a_1 a_2, b_1 b_2$. C'est ce qu'on peut faire par quatre transformations différentes, en supposant, pour abrégier, qu'on échange entre eux les points à l'infini de la courbe. Mais quelle soit la transformation qu'on choisit, le faisceau, qui correspond au faisceau (Σ, Γ) , contiendra un

cercle, puisque les points doubles de l'involution que ce faisceau déterminera sur la ligne droite à l'infini, seront les points rectangulaires $\alpha\beta$. Soient donc a_1a_2, b_1b_2 les points qui correspondent à A_1A_2, B_1B_2 respectivement; et soit X un point donné de la courbe. On trouvera le point correspondant x en menant la corde Xx parallèle à A_1a_1 ; on aura ainsi le diamètre Sx correspondant au diamètre SX ; de plus, la droite qui joint deux points correspondants de ces diamètres sera parallèle à Xx ; donc on pourra trouver très facilement, dans l'une des deux figures, le point correspondant à un point donné de l'autre. Soient toujours a, b les projections orthogonales de C sur les axes A_1A_2, B_1B_2 respectivement, a', b' les points correspondants dans la nouvelle figure. Qu'on abaisse de a', b' des perpendiculaires sur b_1b_2, a_1a_2 respectivement; le point de concours de ces droites sera le centre ω du cercle Ω qu'on cherche. Avec le rayon Sa_1 , décrivons un cercle concentrique à Σ ; soit d_1d_2 le diamètre de ce cercle qui fait un angle droit avec $S\omega$; les points d_1, d_2 appartiendront à la circonférence de Ω . On tire cette dernière conclusion d'un théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général, mais qui vaut le peine d'être énoncé :

'Toute hyperbole, ayant ses asymptotes parallèles à Sa_1, Sb_1 , et passant par S , détermine par ses intersections avec Σ une circonférence de cercle, qui coupe orthogonalement le cercle imaginaire, dont S est le centre, et $-Sa_1^2$ le carré du rayon.'

On peut encore remarquer que la somme des angles excentriques de deux points correspondants x et X est égale à un multiple impair de $\frac{\pi}{4}$. Cela vérifie que les points correspondants aux pieds des normales appartiennent à une même circonférence.

NOTE IX, p. 150.

La théorie des correspondances (1), (2), (3), a été étudiée par M. BATTAGLINI, dans un excellent Mémoire ('*Sulle forme binarie dei primi quattro gradi, appartenenti ad una forma ternaria quadratica*,¹ Giornale di Matematiche, vol. v. p. 39), qui, malheureusement, nous était encore inconnu, lorsque nous écrivions l'article précédent. Cependant, nous placerons ici quelques remarques additionnelles, qui ne sont pas sans intérêt pour les constructions graphiques.

La théorie géométrique de la correspondance (2) peut être présentée de la manière suivante. Soient (A) et (B) deux systèmes corrélatifs dans le plan d'une conique donnée Σ ; et soient X et Y les coniques qui correspondent dans les systèmes A et B à la conique Σ , considérée comme appartenant aux systèmes B et A respectivement. Soit Θ la conique des pôles des deux systèmes corrélatifs, c'est à dire, la conique lieu des points qui se trouvent sur leurs droites corrélatives; de même soit Θ' la conique des polaires, ou la conique enveloppe des droites qui passent par leurs points corrélatifs. En considérant un point quelconque y de Σ comme appartenant au second système, la droite corrélative rencontrera Σ en deux points x , qui seront liés au point y , par une équation de la forme (2). D'après cela, on aura les théorèmes suivants qui donnent immédiatement la solution des problèmes biquadratiques dépendant de la correspondance (2).

(1.) Les points d'intersection de X et Σ sont les quatre points x pour lesquels il y a coïncidence des points y correspondants: et les quatre points de contact avec Σ des tangentes communes à Y et Σ sont les points y , qui sont devenus coïncidents. La corrélation des deux systèmes (A) et (B) fera connaître l'un des deux systèmes de quatre points lorsqu'on aura trouvé l'autre. Pareillement, les points d'intersection de Y et Σ , et les points de contact avec Σ des tangentes communes à X et Σ , sont respectivement les points y dont les correspondants coïncident, et les points coïncidents eux mêmes.

(2.) Les quatre points d'intersection de Θ et Σ sont des points de coïncidence d'un point x avec l'un des points correspondants y , et les tangentes menées à Θ' de l'un quelconque θ de ces quatre points (tangentes dont l'une est aussi tangente à X, et l'autre à Y), rencontrent la conique Σ en deux points, qui sont les points correspondants à θ , autres que θ lui-même.

On remarquera qu'une seule construction biquadratique suffit pour trouver, soit les points $x_1 x_2$, soit les points $y_1 y_2$, qui deviennent coïncidents, soit enfin les points qui correspondent à ces points coïncidents dans chacun des deux systèmes; puisque, ayant trouvé les points d'intersection de deux coniques, on n'a besoin que d'une construction quadratique pour trouver leurs tangentes communes. Mais, pour trouver les points x , qui coïncident avec un de leurs points correspondants y , il faut une construction biquadratique nouvelle.

Le problème linéaire 'Étant donné huit points x , et un point y correspondant à chacun de ces points, trouver la droite $y_1 y_2$ correspondante à un

point quelconque x' peut s'énoncer plus généralement de la manière suivante, 'Étant donné huit points dans l'une de deux figures corrélatives, et huit autres points situés respectivement sur les droites corrélatives des premiers points, déterminer la corrélation des deux figures.' Or, c'est de ce problème que dépend (ainsi que l'ont fait voir MM. SEYDEWITZ et SCHRÖTER) la construction de la surface du second ordre qui passe par neuf points donnés. On en trouvera la solution complète dans le Mémoire de M. SCHRÖTER (Journal de Crellé-Borchardt, vol. lxxii. p. 215).

Si l'équation (2) est symétrique, les coniques X et Y coïncident, de même que les coniques Θ et Θ' , et les deux systèmes (A) et (B) deviennent polaires réciproques par rapport à Θ ou Θ' . En ce cas particulier la solution du problème linéaire est tout-à-fait élémentaire.

En passant maintenant à la correspondance cubique, définie par l'équation (3), supposons que $yy'y''$ soient les trois points correspondants à un même point x , $YY'Y''$ le triangle des tangentes à Σ en ces trois points. L'axe d'homologie des triangles $yy'y''$, $YY'Y''$ enveloppera une section conique C_1 ; pareillement, le lieu du centre d'homologie de ces deux triangles sera une seconde conique C_2 , polaire réciproque de C_1 par rapport à Σ . Soit, de plus, σ la conique inscrite aux triangles $yy'y''$, Ω la conique par rapport à laquelle ces mêmes triangles sont harmoniques, de sorte que Ω est une des coniques réciproquantes de Σ et σ . Les trois coniques Ω , C_2 , Σ ont les mêmes points d'intersection; ces points sont en même temps les points de contact avec Σ des tangentes communes aux trois courbes σ , C_1 , Σ ; de plus, la tangente à Ω en un quelconque de ces points rencontre Σ , pour la seconde fois, en un des points d'intersection de Σ avec σ , et y est tangente à cette dernière conique. Les points de coïncidence de deux des points y , qui correspondent à un même point x , sont évidemment les points de contact avec Σ des tangents communes à Σ et σ ; d'où l'on voit que, pour trouver ces points, il suffit de connaître l'une quelconque des quatre coniques auxiliaires C_1 , C_2 , σ , Ω . Les axes d'homologie des triangles $yy'y''$ et $YY'Y''$, considérés comme des tangentes à C_1 , et les centres d'homologie de ces mêmes triangles, considérés comme des points de C_2 , correspondent anharmoniquement soit aux triangles $yy'y''$, soit aux points x ; cette observation servira pour déterminer les points x qui correspondent aux quatre triangles évanescents que nous venons de trouver. La détermination des points x , qui coïncident avec un des points correspondants y , se fait un peu différemment. Soient P , Q deux points quelconques de Σ , P' un point qui n'appartient

pas à cette conique. Les coniques du faisceau (P, P', y, y', y'') correspondront anharmoniquement aux points x ; par conséquent, le lieu géométrique des intersections des droites Qx et des coniques correspondantes (P, P', y, y', y'') sera une courbe cubique, qui passera par les points P et Q , et qui, en outre, rencontrera Σ en quatre points, qui sont ceux qu'on cherche. On les déterminera en se servant de la construction biquadratique indiquée par M. CHASLES.

Comme vérification des résultats précédents, nous ajouterons quelques unes des principales formules analytiques qui se rattachent à la théorie des correspondances (2) et (3). Soient p, q, r les coordonnées homogènes d'un point quelconque du plan que l'on considère; on prendra l'équation $pr - q^2 = 0$ pour l'équation de la conique Σ , et on représentera par $\theta_1^2, \theta_1\theta_2, \theta_2^2$ les coordonnées d'un point quelconque θ de cette conique. Les deux systèmes corrélatifs, dont dépend la correspondance (2), seront définis par l'équation

$$p_1(A_1p_2 + 2B_1q_2 + C_1r_2) + 2q_1(A_2p_2 + 2B_2q_2 + C_2r_2) + r_1(A_3p_2 + 2B_3q_2 + C_3r_2) = 0;$$

et en mettant dans cette équation les coordonnées du point θ , soit pour $p_1q_1r_1$, soit pour $p_2q_2r_2$, on aura l'équation, soit de la droite $\eta_1\eta_2$, soit de la droite $\xi_1\xi_2$. Donc l'équation de la conique X , enveloppe de $\xi_1\xi_2$, sera

$$(A_1p + 2A_2q + A_3r)(C_1p + 2C_2q + C_3r) = (B_1p + 2B_2q + B_3r)^2;$$

et, pareillement, l'équation de Y , enveloppe de $\eta_1\eta_2$, sera

$$(A_1p + 2B_1q + C_1r)(A_3p + 2B_3q + C_3r) = (A_2p + 2B_2q + C_2r)^2.$$

Enfin, on aura pour la conique des pôles l'équation

$$\Theta = A_1p^2 + 4B_2q^2 + C_3r^2 + 2(C_2 + B_3)qr + (A_3 + C_1)pr + 2(B_1 + A_2)pq = 0,$$

et pour la conique des polaires l'équation

$$\Theta' = 4\Delta\Theta - \Phi^2 = 0,$$

en désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

et par Φ la fonction linéaire

$$p[A_2C_1 - A_1C_2 - A_3B_1 + A_1B_3] + 2q[A_2B_3 - A_3B_2 - B_1C_2 + B_2C_1] \\ + r[B_3C_1 - B_1C_3 - A_3C_2 + A_2C_3].$$

Passons à la correspondance (3). Soit toujours $\Sigma = pr^3 - q^2 = 0$ l'équation de la conique Σ , et désignons par P, Q, R, S, T, U les déterminants du système

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2, \end{matrix}$$

pris dans leur ordre naturel, et par

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_{12}, & b_{12}, & c_{12}, \\ a_2, & b_2, & c_2, \end{matrix}$$

les neuf quantités

$$\begin{aligned} & A_1C_1 - B_1^2, A_1D_1 - B_1C_1, B_1D_1 - C_1^2, \\ & A_1C_2 - 2B_1B_2 + A_2C_1, A_1D_2 + A_2D_1 - B_1C_2 - B_2C_1, B_1D_2 - 2C_1C_2 + B_2D_1, \\ & A_2C_2 - B_2^2, A_2D_2 - B_2C_2, B_2D_2 - C_2^2. \end{aligned}$$

Soient, de plus,

$$\begin{matrix} \lambda_1^2, & \lambda_1\lambda_2, & \lambda_2^2 \\ \mu_1^2, & \mu_1\mu_2, & \mu_2^2, \end{matrix}$$

les coordonnées de deux des trois points y qui correspondent à un même point x . En éliminant x_1 et x_2 , et divisant par $3(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$, on aura l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & P\lambda_1^2\mu_1^2 + Q(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\lambda_1\mu_1 + \frac{1}{3}R(\lambda_1^2\mu_2^2 + \lambda_2^2\mu_1^2) \\ & + (3S + \frac{1}{3}R)\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 + T(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\lambda_2\mu_2 \\ & + U\lambda_2^2\mu_2^2 = 0, \end{aligned}$$

qui est celle d'une correspondance quadratique double. Cette correspondance est évidemment symétrique; elle est aussi triangulaire, puisque, la fonction

$$K = PU + RS - QT$$

étant identiquement zéro, la conique enveloppe de la droite qui joint les deux points λ correspondants à un point μ donné, c'est à dire la conique $\sigma = 4(\frac{1}{3}Rp + Tq + Ur)(Pp + Qq + \frac{1}{3}Rr) - \{Qp + (3S + \frac{1}{3}R)q + Tr\}^2 = 0$, ne diffère pas de la conique enveloppe de la droite qui joint le point μ à l'un ou l'autre des deux points correspondants λ ; en effet, on trouve pour l'équation de cette dernière conique $\sigma - 4K\Sigma = 0$.

Cela posé, la conique σ est la conique inscrite à tous les triangles du système; et

$$\Omega = Pp^2 + (3S + \frac{1}{3}K)q^2 + Ur^2 + 2Tqr + \frac{2}{3}Rpr + 2Qpq = 0$$

est l'équation de la conique par rapport à laquelle ces mêmes triangles sont des triangles harmoniques. L'équation

$$x_1^2(a_1y_1^2 + b_1y_1y_2 + c_1y_2^2) + x_2^2(a_2y_1^2 + b_2y_1y_2 + c_2y_2^2) + x_1x_2(a_{12}y_1^2 + b_{12}y_1y_2 + c_{12}y_2^2) = 0$$

exprime la correspondance doublement quadratique, mais non symétrique, qui a lieu entre un point donné x et les deux points covariants du triangle correspondant. Donc l'équation de la conique C_1 , enveloppe de la corde qui joint ces deux points, sera

$$C_1 = 4(a_1p + b_1q + c_1r)(a_2p + b_2q + c_2r) - (a_{12}p + b_{12}q + c_{12}r)^2 = 0;$$

et on aura l'expression suivante pour l'équation de la conique C_2 , polaire réciproque de C_1 par rapport à Σ ,

$$\begin{vmatrix} r, a_{12}, a_2 \\ -2q, b_{12}, b_2 \\ p, c_{12}, c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} r, a_{12}, a_1 \\ -2q, b_{12}, b_1 \\ p, c_{12}, c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r, a_1, a_2 \\ -2q, b_1, b_2 \\ p, c_1, c_2 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Chaque terme de cette dernière équation est divisible par le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_{12}, & b_{12}, & c_{12} \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix};$$

en supprimant ce facteur constant, on a l'expression plus simple:

$$C_2^i = 3\Omega + (R - 3S)\Sigma = 0.$$

Les fonctions D et $R - 3S$ sont très connues; l'évanescence de la première implique que les axes d'homologie des triangles $y y' y''$, $Y Y' Y''$ passent tous par un même point, et que le système contient un triangle dont les trois sommets se confondent en un seul; l'évanescence de la seconde exprime que deux triangles quelconques du système sont harmoniquement conjugués l'un à l'autre, et que, par conséquent, le système donné coïncide avec le système harmonique correspondant. (Voir le Mémoire de M. BATTAGLINI, p. 44-49.)

NOTE X, p. 156.

Si les sept points $1, \dots, 7$, appartiennent tous à une même conique, la détermination de la cubique $(9, \dots, 16)$ ne réussit pas. En effet, dans ce cas, le point biquadratiquement opposé au système $(1, \dots, 7, a)$ est le point a lui-même; ou, plus exactement, il n'y a aucun point biquadratiquement opposé à ce système, puisqu'il n'y a aucune courbe biquadratique passant par les treize points, et ayant $(1, \dots, 7, a)$ pour base de courbes cubiques génératrices. Il faudra donc, dans cette hypothèse particulière, éviter de faire usage de la cubique $(9, \dots, 16)$, ce qui sera toujours possible.

Si les dix points $1, \dots, 10$ appartiennent à une même cubique, la détermination de la cubique $(9, \dots, 16)$ devient illusoire, et doit être remplacée par une autre, puisque, dans ce cas, les trois systèmes de points $(p_8, 9, 10)$, $(p_9, 10, 8)$, $(p_{10}, 8, 9)$, sont respectivement en ligne droite; d'où il résulte que l'équation anharmonique

$$p_8 \cdot [x, 11, 9, 10] \times p_9 \cdot [x, 11, 10, 8] \times p_{10} \cdot [x, 11, 8, 9] = +1$$

devient identique quel que soit le point x , et ne peut servir à définir aucun lieu géométrique. La même chose arriverait si les droites $p_8 p_{10}$, $p_{10} p_8$, $p_8 p_9$ passaient par les points $8, 9, 10$ respectivement. Pour éviter cet inconvénient, on prendra arbitrairement les points $8, 9$, et on déterminera les points p_8, p_9 avant de choisir le point 10 . La droite $p_8 p_9$ peut bien passer par un des points $10, \dots, 13$, mais elle ne peut pas passer par deux de ces points α, β , puisqu'il s'ensuivrait de cette supposition que les neuf points $1, \dots, 7, \alpha, \beta$ forment la base d'un faisceau de courbes cubiques, ou bien que les onze points $1, \dots, 9, \alpha, \beta$ appartiennent à une même cubique. Il y aura donc au

moins trois des points 10, ... 13, qui ne se trouvent pas sur la droite $p_8 p_9$; de plus, de ces trois points il y aura au moins deux qui ne peuvent pas appartenir à la cubique (1, ... 9); on prendra à volonté l'un ou l'autre pour le point 10.

Il correspond une analyse très simple à la démonstration géométrique du théorème de cet article. Soient (a, b) , (a, b, c, d, e) , ... les fonctions algébriques qui, égalées à zéro, donnent les équations de la droite (a, b) , de la conique (a, b, c, d, e) , ...; et ainsi de suite. En désignant par λ une constante indéterminée, les courbes cubiques du faisceau

$$(1, \dots 8, 9) = \lambda(1, \dots 8, 10);$$

correspondent anharmoniquement aux droites

$$(p_8, 9) = \lambda(p_8, 10);$$

et puisque les fonctions $(P_8, 9)$, $(p_8, 9)$, ... qui entrent dans ces équations, peuvent être multipliées par des constantes quelconques, on peut faire en sorte que la droite $(p_8, 11)$ corresponde à la cubique $(P_8, 11)$. Cela posé,

$$(1, \dots 7, 8, 9)(p_8, 10) = (1, \dots 7, 8, 10)(p_8, 9) \quad (a)$$

sera l'équation d'une courbe biquadratique qui passe par le point p_8 et par les treize points donnés. Pareillement, les courbes biquadratiques

$$(1, \dots 7, 9, 10)(p_9, 8) = (1, \dots 7, 9, 8)(p_9, 10), \quad (b)$$

$$(1, \dots 7, 10, 8)(p_{10}, 9) = (1, \dots 7, 10, 9)(p_{10}, 8) \quad (c)$$

passeront par les mêmes treize points, et par les points p_9 , p_{10} , respectivement. En multipliant ces trois équations, membre à membre, et divisant par le produit

$$(1, \dots 7, 8, 9)(1, \dots 7, 9, 10)(1, \dots 7, 10, 8)$$

on aura l'équation cubique

$$(p_8, 10)(p_9, 8)(p_{10}, 9) = (p_8, 9)(p_9, 10)(p_{10}, 8). \quad (d)$$

Il résulte du choix que nous avons fait du point 10, que les deux membres de cette équation ne peuvent pas être identiques, à moins que le triangle $p_8 p_9 p_{10}$ ne coïncide avec le triangle 8, 9, 10. Mais, en supposant toujours que les sept points 1, ... 7 n'appartiennent pas tous à une même conique, on remarquera que, si cette coïncidence a lieu, les courbes biqua-

dratiques (a), (b), (c) doivent avoir des points doubles aux points 8, 9, 10 respectivement; c'est à dire, que les trois points cherchés coïncident avec ces mêmes points, et que toutes les courbes biquadratiques qui passent par les treize points ont en ces trois points des tangentes communes, dont on trouve facilement la direction, en se servant des courbes (a), (b), (c). En revenant donc au cas général, l'équation (d) sera l'équation d'une courbe cubique, qui passe évidemment par les six points 8, 9, 10, p_8, p_9, p_{10} et par les trois points d'intersection de $(p_8, 10), (p_{10}, 8), (p_8, 9); (p_{10}, 9), (p_9, 10)$. Mais cette courbe passe aussi par les points 11, ... 16. Soit ξ un de ces points; la chose est évidente, si ξ n'appartient à aucune des courbes cubiques

$$(1, \dots 7, 8, 9), (1, \dots 7, 9, 10), (1, \dots 7, 10, 8);$$

ensuite, si ξ appartient à une seulement de ces courbes, par exemple à la première, ξ sera le point d'intersection de $(p_9, 8)$ et $(p_8, 9)$, et ne cessera point d'appartenir à (d); enfin, si ξ appartient à la fois à deux des mêmes courbes cubiques (ce qui par hypothèse ne peut pas arriver, à moins que ξ ne soit un des trois points inconnus), ξ sera le neuvième point appartenant à une base cubique donnée, et pourra être déterminé linéairement, sans qu'il soit nécessaire de chercher la cubique (d).

Il est assez remarquable que la solution que nous avons donnée du problème de cet article, s'applique aussi à cet autre problème plus général:

'Étant donné $4n-3$ des $4n$ points d'intersection d'une courbe d'ordre n avec une courbe biquadratique, trouver les trois autres points.' On suppose $n > 4$.

Prenons $4n-8$ des $4n-3$ points donnés; ajoutons-y

$$\frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1 - (4n-8)$$

points choisis arbitrairement, et considérons l'ensemble des $\frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1$ points comme déterminant la base P_{4n-8} d'un faisceau de courbes d'ordre $n-1$. En considérant cette base par rapport aux cinq points $4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4, 4n-3$, on aura un point opposé p_{4n-8} , qui sera le centre d'un faisceau de droites correspondant anharmoniquement aux courbes du faisceau P_{4n-9} . Le lieu des intersections des lignes correspondantes des deux faisceaux sera une courbe de l'ordre n , qui passera par les $4n-3$

points donnés, et, par conséquent, par les trois points cherchés. En permutant cycliquement les points $4n-8$, $4n-7$, $4n-6$, (sans changer autrement la base des courbes de l'ordre $n-1$), on aura deux autres courbes de l'ordre n passant, comme la première, par les $4n$ points. De là en suivant, soit notre démonstration géométrique, soit l'analyse précédente, on conclura que la courbe cubique des neuf points $4n-8, \dots, 4n$ passe aussi par les points opposés p_{4n-8}, p_{4n-7} etc..., et par les points d'intersection tels que celui des droites $(p_{4n-8}, 4n-7)$ et $(p_{4n-7}, 4n-8)$. On voit donc que tout se réduit à la détermination des points opposés, détermination qui sera facile, lorsqu'on connaîtra les rapports anharmoniques des faisceaux

$$P_{4n-8} \cdot [4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4, 4n-3].$$

Or, il n'est pas douteux, qu'étant donné des points en nombre suffisant pour déterminer une courbe géométrique d'ordre n , on ne puisse trouver linéairement, soit la tangente à cette courbe en un point donné, soit la droite polaire d'un point donné par rapport à la courbe; mais, puisqu'il paraît qu'on n'a pas encore cherché la solution de ce problème général de géométrie linéaire, nous ferons voir qu'on peut s'en passer ici, en se servant d'une méthode particulière qui se présente naturellement. Considérons les points $1, \dots, 8$, comme déterminant la base A d'un faisceau de courbes cubiques. Soit (a) la conique qui satisfait à l'équation

$$(9, 10, 11, 12) = A \cdot [9, 10, 11, 12].$$

En prenant successivement différents points a de cette conique pour des points opposés à la base A , on aura un faisceau de courbes biquadratiques, correspondant anharmoniquement aux points a . Soit B la base du faisceau biquadratique; il est évident, qu'étant donné un point quelconque x , on pourra trouver linéairement le point a correspondant à la courbe (B, x) . Déterminons la conique (b) qui satisfait à l'équation

$$(13, 14, 15, 16) = B \cdot [13, 14, 15, 16].$$

Prenons un point quelconque b de (b) ; nous le considérons comme un point opposé à la base biquadratique B ; et nous aurons de la sorte un faisceau de courbes du cinquième ordre qui correspondront anharmoniquement aux points b . Soit C la base de ce nouveau faisceau; pour trouver linéairement le point b qui correspond à une courbe quelconque (C, x) du

faisceau, on détermine sur la conique (b) le point x' qui satisfait à l'équation anharmonique

$$[13, 14, 15, 16, x'] = B \cdot [13, 14, 15, 16, x];$$

le point b est le second point d'intersection de la conique par la droite xx' . Après avoir déterminé une troisième conique (c) , qui satisfait à l'équation

$$(17, 18, 19, 20) = C \cdot [17, 18, 19, 20],$$

on sera conduit à considérer une base D de courbes du sixième ordre; et, en continuant de la sorte, on arrivera enfin à une base M de courbes de l'ordre $n-1$; cette base comprendra tous les points $1, 2, 3, \dots, 4n-8$, puisque chaque base de la série ascendante comprend évidemment tous les points de la base précédente; de plus, les courbes du faisceau M correspondront anharmoniquement aux points d'une certaine conique (l) passant par les points $4n-11, 4n-10, 4n-9, 4n-8$; de sorte qu'étant donné un point quelconque x , on pourra trouver linéairement le point l de cette conique qui correspond à la courbe (M, x) . Enfin, on déterminera la conique (m) qui satisfait à l'équation

$$(4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4) = M \cdot (4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4),$$

et le point m'_{4n-3} de cette dernière conique qui correspond à la courbe $(M, 4n-3)$; le second point d'intersection de la conique (m) avec la droite $(4n-3, m'_{4n-3})$ sera le point p_{4n-8} , qu'il s'agissait de trouver.

On peut dire que cette construction est composée de transformations homographiques successives. On commence par déterminer la conique Γ qui satisfait à l'équation

$$[5, 6, 7, 8] = (1, 2, 3, 4) \cdot [5, 6, 7, 8].$$

Soit $\nu'[\nu=9, \dots, 4n-3]$ le point de cette conique qui corresponde anharmoniquement à la conique $(1, 2, 3, 4, \nu)$: le second point d'intersection de la droite (ν, ν') avec Γ est le point ω_ν de Γ qui correspond anharmoniquement à la cubique (A, ν) . On transforme homographiquement la figure de manière que les points $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}$ deviennent les points $9, 10, 11, 12$; la transformée de Γ sera (a) ; soit $a'_\nu[\nu=13, \dots, 4n-3]$ le point de cette dernière conique qui correspond au point ω_ν de la conique Γ ; le second point d'intersection de la droite (ν, a'_ν) avec (a) sera le point a_ν , qui correspond anharmoniquement à la courbe biquadratique (B, ν) . On transforme encore la

figure de manière que les points $a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$ deviennent les points 13, 14, 15, 16; on détermine la conique (b) correspondant à (a) , et le point b'_ν [$\nu=17 \dots 4n-3$], correspondant à a_ν ; on mène la droite (ν, b'_ν) , qui détermine le point b_ν , correspondant anharmoniquement à la courbe (C, ν) ; et en continuant cette série uniforme d'opérations linéaires on parvient enfin à déterminer le point m_{4n-3} de la conique (m) , qui n'est autre que le point opposé p_{4n-3} .

Sullo sviluppo del periodo immaginario, pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo.

(del prof. L. SCHLAEFLI, a Berna.)

Il sig. WEIERSTRASS nella sua *Theorie der Abelschen Functionen*, p. 76, ha dato lo sviluppo di cui qui si tratta; ma per la dimostrazione egli rimanda ad un capitolo seguente, il quale, per quanto io sappia, non è ancora venuto alla luce. Forse il processo più naturale per trovar questo sviluppo è quello che segue. Dinotando con $2iL$ il periodo immaginario che corrisponde al modulo k , si ha dapprima

$$L = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}};$$

facendo poi due intervalli, $0 < z < \frac{1}{\sqrt{k}}$ e $\frac{1}{\sqrt{k}} < z$, e mutando nel secondo intervallo la z in $\frac{1}{kz}$, si otterrà

$$\frac{1}{2}L = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} k^{2n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Sviluppando poi $z^{2n}(z^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ secondo le potenze discendenti della z ed integrando si avrà

$$\begin{aligned} * S_n &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{z^2+1}} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \left(\log \frac{2}{\sqrt{k}} - A_n \right) \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(-1)^\lambda}{2n-2\lambda} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\lambda-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2\lambda} k^{-n+\lambda} - \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{2\lambda-2n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\lambda-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2\lambda} k^{\lambda-n} \end{aligned}$$

dove la costante d'integrazione A_n deve determinarsi per mezzo della scala di relazione

$$2nS_n + (2n-1)S_{n-1} = \frac{\sqrt{1+k}}{k^n}, \text{ cioè per } A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2n(2n-1)},$$

e per mezzo della uguaglianza

$$S_0 = \log \frac{2}{\sqrt{k}} + \log \frac{\sqrt{1+k}+1}{2}, \text{ cioè per } A_0 = 0,$$

epperò è

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$$

Sostituito il valore di S_n nella ultima espressione per $\frac{1}{2}L$, vediamo che si elidono le due somme doppie provenienti dai due termini sommatorj della espressione per S_n , e che perciò si ha

$$L = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 \left(\log \frac{2}{\sqrt{k}} - A_n \right) k^{2n},$$

dove

$$A_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Per iscansar le somme doppie e la determinazione assai penosa di una costante d'integrazione, propongo il mezzo seguente. Mediante la formola Lagrangiana d'inversione od in altri modi, si può provare lo sviluppo

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} \right)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n-a}{n} x^n, \quad (A)$$

convergente se il valore assoluto di x è minore di $\frac{1}{4}$. Quindi sviluppando rispetto ad a , il paragone dei coefficienti della prima potenza di a somministra

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \log \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) x^n,$$

ossia, il che è lo stesso (conservando il significato di A_n)

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \log \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} = - \sum \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} A_n \alpha^n.$$

Siano ora f, h, j le tre funzioni ellittiche tratte dall'argomento x col modulo k , ed analogamente scrivansi le formole di trasformazione (del secondo ordine) dal modulo k ad un modulo minore k_1 come segue:

$$k_1 = \frac{1-l}{1+l}, \quad f_1 = (1+l) \frac{fh}{j}, \quad h_1 = \frac{k^2 - lf^2}{j}, \quad j_1 = \frac{k^2 + lf^2}{j}, \quad x_1 = (1+l)x,$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(1+l)K, \quad L_1 = (1+l)L.$$

Ciò ammesso, consideriamo l'integrale definito

$$S = \int_0^K \log \frac{(1+j)^2}{k} \cdot dx,$$

il quale, essendo una funzione di k , si cambi in S_1 quando k si trasforma in k_1 e prenda il valore M per $k=1$.

Cercando dapprima questo valore, se poniamo $f = \text{sen } \phi$, avremo

$$M = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + \cos \phi) \frac{d\phi}{\cos \phi} = A + B,$$

essendo

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \cdot \frac{d\phi}{\cos \phi}, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\text{sen}^2 \phi) \cdot \frac{d\phi}{\cos \phi}.$$

Ma ponendo $\text{tang } \frac{\phi}{2} = x$, il primo di questi ultimi integrali diventa

$$A = 4 \int_0^1 -\log x \cdot \frac{dx}{1-x^2},$$

e la sostituzione $\text{sen } \phi = x$ muta il secondo in

$$B = 2 \int_0^1 \log x \cdot \frac{dx}{1-x^2},$$

Dunque

$$B = -\frac{1}{2}A, \quad M = \frac{1}{2}A = 2 \int_0^1 -\log x \cdot \frac{dx}{1-x^2},$$

e ponendo $\frac{1}{x}$ invece di x e sommando le due espressioni,

$$M = \int_0^{\infty} \log x \cdot \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

Ma poichè lungo l'orizzonte l' $\int \log x \cdot \frac{dx}{x^2}$ è nullo, il trasporto del limite superiore dal levante fino al settentrione (*) è permesso, siccome anche l'accorciare la via d'integrazione. Mutando dunque x in ix , per il che $\log x$ diventa $\frac{i\pi}{2} + \log x$, otteniamo

$$M = \int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - i \log x \right) \frac{dx}{x^2 + 1} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Inoltre, ponendo $K - x$ in luogo di x , la espressione primitiva della f si cambia in

$$S = \int_0^K \log \frac{(j+l)^2}{kj^2} \cdot dx;$$

e sommando le due espressioni si ha

$$\begin{aligned} S &= \int_0^K \log \frac{(1+j)(j+l)}{kj} \cdot dx = \int_0^K \log \left[\sqrt{\frac{1+l}{1-l}} \left(1 + \frac{h^2 + lf^2}{j} \right) \right] \cdot dx \\ &= \frac{1}{1+l} \int_0^{2K_1} \log \frac{1+j_1}{\sqrt{k_1}} \cdot dx_1 = \frac{1}{1+l} \int_0^{K_1} \log \frac{(1+j)^2}{k_1} \cdot dx_1; \end{aligned}$$

epperò $S_1 = (1+l)S$, $\frac{S}{L} = \frac{S_1}{L_1}$. Ma invertendo la trasformazione e ripetendola si può andare fino là dove $k=1$, $S=M = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2$, $L = \frac{\pi}{2}$. Dunque finalmente si ha

$$S = \frac{\pi}{2} L.$$

(*) Vedi a pag. 109 del tomo I (serie 3^a) di questi Annali. Questa Memoria, speditaci dal ch. A. insieme colle altre inserite nei tomi I e II, non è stata stampata prima d'ora per un'omissione involontaria.

Ora egli è facile sviluppare rispetto al modulo k . Si ha dapprima

$$\frac{\pi}{2} L = K \log \frac{4}{k} + 2 \int_0^K \log \frac{1+j}{2} \cdot dx,$$

e poi ponendo $f = \text{sen } \phi$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} L &= K \log \frac{4}{k} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \phi}} \log \frac{1 + \sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \phi}}{2} \cdot d\phi \\ &= K \log \frac{4}{k} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} A_n k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} \phi \cdot d\phi, \text{ per la (A)}. \end{aligned}$$

Dunque

$$L = \frac{2K}{\pi} \log \frac{4}{k} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 A_n k^{2n}.$$

Applicando lo stesso processo all'integrale definito $\int_0^K -\log(kf^2) dx$ si trova

$$\frac{\pi}{2} L = K \log \frac{4}{k} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(2 \text{sen } \phi)}{\sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \phi}} d\phi.$$

Ma allora bisogna conoscere la espressione

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} \phi \cdot \log(2 \text{sen } \phi) \cdot d\phi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} A_n.$$

Il modo più facile di conseguire quest'espressione, se non si voglia ricorrere alle derivate della funzione gamma, sarà forse quello di stabilir dapprima una scala di relazione per S_n , integrando la uguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\text{sen}^{2n-1} \phi \cdot \cos \phi \cdot \log(2 \text{sen } \phi) \right) &= \left((2n-1) \text{sen}^{2n-2} \phi - 2n \text{sen}^{2n} \phi \right) \log(2 \text{sen } \phi) \\ &\quad + \text{sen}^{2n-2} \phi - \text{sen}^{2n} \phi \end{aligned}$$

da $\phi = 0$ fino a $\phi = \frac{\pi}{2}$, la quale scala sarebbe

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} S_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)} S_{n-1} + \frac{\frac{1}{2} \pi}{(2n-1)^{2n}},$$

e poi di determinare $S_0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2 \operatorname{sen} \phi) d\phi = 0$.

Ecco una raccolta di formole somiglianti:

$$\int_0^K -\log(kf^2) dx = \frac{\pi}{2} L, \quad \int_0^K \log \frac{l}{kh^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} L, \quad \int_0^K \log \frac{j^2}{l} dx = 0,$$

$$\int_0^K \log \frac{(1+j)^2}{k} \cdot dx = \frac{\pi}{2} L, \quad \int_0^K \log \frac{(j+l)^2}{kl} \cdot dx = \frac{\pi}{2} L,$$

$$\int_0^K \log \frac{k}{(1-j)^2} \cdot dx = \frac{3\pi}{2} L, \quad \int_0^K \log \frac{kl}{(j-l)^2} = \frac{3\pi}{2} L.$$

Della distribuzione elettrica sui conduttori isolati.

(Memoria del prof. P. VOLPICELLI, a Roma.)

§ 1.

In questa memoria dimostreremo prima elementarmente, che dando ad un conduttore isolato una carica elettrica, sempre la stessa, deve unica essere la sua distribuzione sul medesimo, cioè non mai diversa. Dimostreremo poi coll'analisi superiore questa medesima verità più generalmente, cioè per un sistema di corpi conduttori, ciascuno caricato di quella elettricità che si vuole, agenti l'uno sull'altro, in un mezzo isolante. Questa seconda nostra dimostrazione sarà diversa da quella che l'illustre geometra sig. LIOUVILLE ha pubblicato su tale argomento (*), e pure diversificherà dall'altra del sig. A. URBANSKI, che si legge nella sua opera: *Vorträge über höhere Physik*, Lemberg 1857, p. 115.

Prima di questi due scienziati, cioè nel 1839, il chiarissimo fisico italiano G. BELLI si occupò di questo argomento; però la sua dimostrazione non è generale, perchè limitata soltanto ai corpi « di superficie convessa in tutti i versi, e non avente nè angoli solidi, nè spigoli, nè variazioni repentine nella curvatura. » (*Memorie della Società italiana*, t. 22, p. 111-209.) La dimostrazione medesima è tuttavia molto ingegnosa, e l'autore si serve in essa, quasi unicamente, dell'analisi elementare. Il che non deve reputarsi a difetto; perchè molte volte le proprietà fisiche meglio si ravvisano e si manifestano col calcolo elementare, di quello che sia coll'analisi superiore.

(*) Vedi *Additions à la connaissance des temps*, pour l'an 1845. — Vedi anche *Problèmes de mécanique rationnelle* par le prof. JULLIEN, Paris 1855, t. 2, p. 334-340.

Deve qui osservarsi che nè il POISSON, nella sua celebre memoria *Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* (*); nè il MURPHY nella sua memoria *Elementary principles of the theories of electricity* (Cambridge 1833); nè il PLANA nella sua memoria *Sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices* (**), hanno preso a considerare la verità indicata.

Questo illustre geometra italiano, dopo avere dimostrato che il solo fatto sperimentale, consistente nel risiedere la carica elettrica tutta sulla superficie dei conduttori, basta per concludere, dover essere la ragione inversa del quadrato della distanza il carattere della forza repulsiva elettrica, conclude quanto segue: « *toutefois ce raisonnement ne prouve pas a priori que pour un corps conducteur de figure donnée et pour une masse donnée d'électricité, l'équilibre ne soit possible que d'une seule manière. Car on pourrait objecter que la condition exprimée par l'équation $V = \text{constante}$ pourrait avoir lieu en variant de plusieurs manières la figure de la surface intérieure de la couche. Nous ignorons si la démonstration de cette vérité physique a été trouvée pour un corps quelconque: mais il est certain que cette imperfection ne porte aucune atteinte à la conséquence que nous voulons tirer ici* » (**).

Si vede adunque che il PLANA ignorò la dimostrazione analitica del signor LIOUVILLE, ed anche quella sopra indicata del BELLI, sebbene confessi egli di conoscerne la memoria di questo dotto fisico e di apprezzarla molto (opera citata, pag. 333); inoltre si vede che riguardò egli soltanto come un fatto di esperienza, ottenuto per mezzo della bilancia di COULOMB, l'essere unica la elettrica distribuzione sopra un conduttore isolato.

Le due dimostrazioni, che qui daremo del fatto medesimo, coincideranno fra loro nelle prime parti, ma nelle seconde saranno essenzialmente variate l'una dall'altra. La prima dimostrazione, del tutto elementare, vale per un solo conduttore isolato, non soggetto ad induzione di sorta. E siccome il fatto di cui parliamo non è menzionato nei corsi di fisica, perciò potrà la dimostrazione medesima riempire in essi un vuoto.

(*) *Mém. de l'Institut Imp. de France, année 1811.*

(**) *Extrait des mémoires de l'Académie des sciences. Turin, année 1845 t. 7, série 2^e, pag. 332.*

(***) *Opera citata del PLANA, p. 332; lin. 1.*

§ 2.

Non si può ritenere che la influenza elettrica possa giungere nell'interno di un conduttore; infatti, se vi potesse giungere, allora un qualunque punto interno al medesimo dovrebbe ricevere dall'influenza stessa due distinte ma inseparabili azioni; la prima fisica, l'altra meccanica. Per l'azione fisica l'elettrico neutrale del punto interno viene decomposto; e per l'azione meccanica esso viene attratto: le quali azioni sono una conseguenza dell'altra, e si esercitano contemporaneamente. L'azione meccanica non ha risultante quando il corpo sia un involuppo limitato da due ellissoidi simili o da due sfere concentriche; ma in ogni altro caso non è dimostrato che questa risultante debba essere nulla (*). In quanto all'azione fisica, questa non potrà mai mancare di effetto, quando l'influenza elettrica giunga nell'interno del corpo conduttore. Se poi taluno volesse che per l'elettrico, anche nei casi diversi dall'ellissoide e dalla sfera, ora indicati, sia nulla realmente la risultante delle azioni meccaniche sopra un punto interno, al certo non potrà egli volere mai che nullo realmente sia l'effetto delle azioni fisiche sul punto stesso, per le quali dovrà il fluido neutro essere decomposto.

Per tanto, volendo che la influenza elettrica giunga realmente nell'interno dei conduttori, dovrà la omologa della inducente, divenuta libera, portarsi alla superficie dei medesimi, ed ivi aumentare la carica influente; perciò si aumenterà eziandio la induzione sul punto stesso, quindi nuova elettricità neutrale sarà nel medesimo decomposta; laonde avrà luogo un altro accrescimento della carica superficiale inducente, e così all'infinito, lo che conduce all'assurdo. Quindi è chiaro che se il corpo sia conduttore, non può ritenersi che l'azione dell'elettrico realmente giunga entro il corpo medesimo, senza incontrare l'indicato assurdo.

Per altro ciò non impedisce che, onde poter applicare il calcolo alla distribuzione dell'elettrico sui conduttori, possa immaginarsi che la influenza elettrica giunga nell'interno dei medesimi; però a condizione che ivi l'azione fisica decomponente sia nulla, ciò che rende nulla eziandio l'azione meccanica attraente. Questo ipotetico concetto, che pel primo ebbe POISSON (**),

(*) DUHAMEL, *Cours de mécanique*. Première partie. Paris 1845, p. 176-179.

(**) *Mémoire de l'Institut Imp. de France*, année 1811, p. 3, linea 12 salendo, e p. 4 sino alla linea 5.

permette l'applicazione dell'analisi matematica, già dal medesimo istituita sull'equilibrio della elettricità, senza contraddire al fatto naturale, e senza incontrare verun assurdo. Imperocchè il concetto medesimo vale quanto ammettere che la influenza elettrica non penetra nei conduttori, come trovasi realmente verificato.

§ 3.

Ciò premesso, pongasi per la prima dimostrazione, che una medesima carica elettrica possa in due diversi modi essere distribuita sopra un conduttore isolato. Ciascuno dei due strati elettrici, diversi l'uno dall'altro, e corrispondenti rispettivamente a queste due diverse distribuzioni, dovrà terminare alla superficie del conduttore isolato, sul quale hanno luogo, una dopo l'altra, le distribuzioni stesse. Inoltre questi strati elettrici dovranno terminare internamente in guisa che, se coesistessero sul conduttore, dovrebbero intersecarsi colle interne loro superficie. Poichè se così non fosse, già le due distribuzioni elettriche, supposte diverse fra loro, dovrebbero sovrapporsi, e formarne una sola, contro la ipotesi.

Per tanto sieno f, f_1 le ertezze diverse, relative ai due strati elettrici, per un qualsivoglia elemento della superficie del conduttore, le quali ertezze dovranno contarsi a partire dal punto medesimo, e perpendicolarmente alla superficie stessa. Le quantità f, f_1 si debbono considerare quali funzioni di due soltanto delle tre coordinate del punto indicato, e ciò per la coesistenza della equazione che rappresenta la superficie del conduttore.

L'equilibrio dell'elettrico richiede per unica condizione, che la risultante dell'azione fisica decomponente, di ognuna delle due supposte distribuzioni elettriche, si annulli per qualsivoglia punto interno del conduttore stesso. Questi due strati elettrici si debbono considerare come due sistemi di forze corrispondenti agli elementi superficiali del conduttore, le quali agiscono su ciascun punto interno al medesimo, però in guisa che la risultante loro sia nulla in tutto rispetto al punto stesso. Inoltre per un medesimo punto interno, ciascuna forza elementare del primo sistema deve coincidere in direzione con un'altra del secondo, perchè ambedue partono da uno stesso elemento della superficie del conduttore, per giungere al medesimo punto. Però queste due forze elementari sono tra loro diverse nella intensità, e debbono riguardarsi proporzionali rispettivamente alle corrispondenti ertezze,

relative ai due medesimi strati elettrici. Sottraendo l'una dall'altra le indicate due forze, per ogni elemento superficiale, otterremo un terzo sistema di forze, od un terzo strato elettrico; corrispondente alla differenza $f - f_1$, prodotta dal sopprimere la parte comune ai due primi strati, supposti per un momento coesistenti. La risultante di questo terzo strato elettrico sopra ogni punto interno del conduttore medesimo sarà pure in tutto nulla. In fatti, chiamando con $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ le proiezioni delle forze del primo sistema, corrispondente ad f , sopra uno dei tre assi coordinati, dovrà per l'equilibrio verificarsi la $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots = 0$. E se denotiamo similmente con $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ le proiezioni delle forze del secondo sistema, corrispondente ad f_1 , sul medesimo asse, dovremo, per lo stesso equilibrio, stabilire la $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots = 0$; quindi sottraendo sarà

$$(\phi_1 - \psi_1) + (\phi_2 - \psi_2) + (\phi_3 - \psi_3) + \dots = 0.$$

Altre due simili equazioni dovranno esistere per gli altri due assi coordinati; cosicchè dalla coesistenza di queste tre uguaglianze siegue immediatamente, che il terzo strato corrispondente ad $f - f_1$ dovrà esso pure soddisfare alla condizione di avere un effetto nullo totalmente sopra qualunque punto interno al conduttore elettrizzato.

Riflettiamo inoltre che la ertezza di questo terzo strato non può essere del medesimo segno in tutta la estensione dello strato medesimo, cioè dovrà essere parte positiva e parte negativa, e queste parti dovranno essere uguali fra loro. Infatti, poichè abbiamo veduto che i due supposti primi strati si debbono di necessità intersecare nell'interno del conduttore, perciò sarà chiaro che questa intersecazione limiterà due zone, in una delle quali sarà $f - f_1 > 0$, e nell'altra sarà $f - f_1 < 0$. Quindi si scorge che il terzo strato sarà positivo in una delle indicate due zone formanti lo strato medesimo, e nell'altra sarà negativo; cioè saranno due zone di elettricità eguali e contrarie fra loro.

§ 4.

Fin qui le due nostre dimostrazioni non differiscono l'una dall'altra; ma per continuare la prima elementare, osserviamo essere da tutti ammesso che un conduttore, caricato di elettrico, e privo tanto di elettromozione, quanto di qualsiasi circostante induzione, non può contenere ad un tempo

le due specie diverse di elettricità; vale a dire non è possibile che una parte della sua superficie contenga la elettricità positiva, e l'altra la negativa. Non vogliamo qui esporre quanto sarebbe assurdo voler opporsi a questo concetto fisico, confermato dalla sperienza; ma faremo soltanto riflettere, che il medesimo fu ammesso anche da illustri geometri, quando trattarono gli argomenti più difficili della dottrina elettrostatica. Infatti, Poisson si esprime come siegue: « Tant que l'on considère un seul corps électrisé ou plusieurs corps qui se touchent, de manière que le fluide électrique puisse passer librement d'un corps sur l'autre, on n'a jamais qu'un seul de deux fluides répandu sur les surfaces de tous ces corps, que je suppose toujours parfaitement conducteurs (*) ». Dunque anche Poisson ammette non essere possibile la coesistenza di elettricità contrarie fra loro e libere in un medesimo conduttore.

Per questo fatto adunque il terzo strato elettrico, corrispondente alla differenza $f - f_1$, non può affatto esistere, perchè la sua carica sarebbe composta di due contrarie elettricità, eguali fra loro e liberamente coesistenti sopra un conduttore. Ma non potendo esistere questo terzo strato, non potrà neppure ammettersi la diversa distribuzione fra i due primi strati, corrispondenti uno ad f , l'altro ad f_1 ; perciò questi due strati dovranno completamente sovrapporsi, e si ridurranno in uno solo. Dunque dovrà essere la distribuzione elettrica dello strato corrispondente ad f_1 uguale a quella dell'altro strato corrispondente ad f ; e perciò dovrà essere unica la distribuzione elettrica di una qualunque carica (sempre la medesima) sopra un conduttore, come volevamo dimostrare.

§ 5.

Passiamo in secondo luogo a dimostrare, per mezzo dell'analisi superiore dover essere unica la elettrica distribuzione sopra un conduttore, per quindi estendere questa medesima conclusione ad un qualunque numero di conduttori, ognuno dei quali possessa qualsivoglia carica elettrica, positiva o negativa. Non sarà in questa seconda dimostrazione invocato, come lo fu nella elementare precedente, il fatto fisicamente certo, che cioè non possono coesistere libere sul medesimo conduttore le due diverse specie di

(*) *Mém. de l'Institut Imp. de France*, année 1811, pag. 11.

elettricità. Inoltre, siccome i risultamenti cui giungeremo si trovano confermati dalla sperienza, così potremo esser certi che il raziocinio di questa dimostrazione analitica è giustamente condotto.

Assumiamo per base, che l'unica condizione necessaria e sufficiente dalla quale viene governata la distribuzione elettrostatica sulla superficie di un conduttore, consiste nell'essere costante il potenziale, V dello strato elettrico, per ogni punto dello strato medesimo. E qui ricordiamo che dicesi potenziale di una massa rispetto ad un punto la somma di tutti gli elementi dm di questa, divisi ciascuno per la sua distanza r dal punto stesso, che sarà detto punto del potenziale. Per tanto avremo la

$$V = \int \frac{dm}{r}, \quad (1)$$

nella quale i limiti dell'integrale debbono comprendere tutta la massa elettrica.

Nella precedente dimostrazione elementare si è concluso che la carica costituente il terzo strato, relativo ad $f-f_1$, dev'essere composta delle due contrarie elettricità, numericamente uguali fra loro. La esistenza di questo terzo strato non può negarsi, quando ammettasi che la distribuzione dei due primi sia diversa; e ciò non implica veruna ipotesi che alla elettricità possa riferirsi.

Chiamando dq il differenziale della esterna superficie dello strato elettrico, sarà fdq la massa di un elemento qualunque di esso, intendendo con f il prodotto di una ertezza variabile per una densità costante, che si è posta eguale alla unità. Per un punto interno (a, b, c) , il potenziale V del primo strato elettrico sarà espresso da

$$V' = \int \frac{fdq}{r}. \quad (2)$$

Similmente pel secondo strato, il potenziale sarà dato dalla

$$V'' = \int \frac{f_1 dq}{r}. \quad (3)$$

Essendo la ertezza variabile del terzo strato espressa da $f-f_1$, il suo potenziale V sarà dato mediante la

$$V = \int \frac{(f-f_1)}{r} dq. \quad (4)$$

In ognuno di questi integrali dovranno i limiti rimanere gli stessi; cioè dovranno comprendere tutta la superficie del conduttore isolato.

Sottraggasi ora la (3) dalla (2), ed avremo

$$V' - V'' = \int \frac{f dq}{r} - \int \frac{f_1 dq}{r} = \int \frac{f - f_1}{r} dq,$$

ovvero $V' - V'' = V$. Quindi, siccome per la ipotesi fatta i due primi strati, corrispondenti rispettivamente alle f, f_1 , hanno ciascuno il potenziale costante per ogni loro punto, così il potenziale V corrispondente al terzo strato dovrà essere costante pur esso per ogni suo punto. Ma la costanza del potenziale fu assunta per condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio del relativo strato elettrico: perciò rimane dimostrato che anche il terzo strato elettrico, corrispondente ad $f - f_1$, dev'essere in equilibrio. Tutti gli sviluppi seguenti riguardano il medesimo terzo strato, cui si riferisce il potenziale V ; e la sua particolarità di costituire necessariamente una carica elettrica in complesso nulla, cioè di due parti eguali e contrarie, sarà invocata verso il fine di questa dimostrazione.

§ 6.

Ora giova osservare che la funzione V , non ostante la sua definizione, può riguardarsi di natura puramente geometrica; e perciò del tutto indipendente dalle attrazioni e ripulsioni elettriche, come ancora dal propagarsi o no la influenza elettrica nell'interno dei conduttori. La funzione medesima gode la proprietà rimarchevole, di soddisfare alla

$$\frac{\partial V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0, \quad (5)$$

quando il punto (a, b, c) del potenziale V non formi parte della massa, cioè rimanga o fuori di essa, od in una sua cavità. Infatti, denotiamo con x, y, z le coordinate di un qualunque punto della massa, cui si riferisce il potenziale ed avremo

$$r = [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{\frac{1}{2}},$$

dalla quale facilmente si ottengono le

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} = \frac{2(x - a)^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial b^2} = \frac{2(y-b)^2 - (x-a)^2 - (z-c)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c^2} = \frac{2(z-c)^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

Tornando sulla (1), avremo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} \cdot dm,$$

dalla quale, introducendo in essa i tre precedenti valori, avremo le

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \int \frac{[2(x-a)^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2] dm}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \int \frac{[2(y-b)^2 - (x-a)^2 - (z-c)^2] dm}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \int \frac{[2(z-c)^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2] dm}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

La somma dei secondi membri di queste tre uguaglianze sarà composta di tre integrali, che debbono essere presi fra gli stessi limiti, cioè fra quelli che comprendono tutta la massa elettrica; quindi è chiaro che possono gli integrali medesimi ridursi ad uno. Però siccome la somma dei numeratori evidentemente si annulla, così discende che la somma dei primi membri dell'equazioni medesime dovrà essa pure divenire nulla. Non possiamo supporre che il denominatore $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ divenga nullo anche esso; poichè questo rappresenta la distanza fra il punto (a, b, c) del potenziale, e l'elemento qualunque (x, y, z) della massa elettrica. Poichè se il denominatore indicato si annullasse, il punto del potenziale si troverebbe collocato nella detta massa, e non fuori della medesima, od in una sua cavità, come abbiamo supposto. Da ciò dipende che niuno dei secondi membri ora considerati può ricevere la forma indeterminata; dobbiamo per tanto concludere che, riguardo ad una massa di qualsiasi forma, e di finite

dimensioni si ha sempre, per un punto (a, b, c) che non fa parte di essa, la equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0,$$

geometricamente vera, e indipendente perciò da qualunque ipotesi, come volevamo dimostrare.

Quindi trattandosi di un conduttore carico di elettricità, e di un punto fuori di esso, allora la (5) non ha solamente luogo per la massa totale dell'elettrico, formante lo strato superficiale del conduttore stesso; bensì anche per qualunque sua parte. Laonde la (5) vale anche per quella sola parte dell'elettrico medesimo, che vede il punto.

§ 7.

Proponiamoci ora di sviluppare il valore di

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2}$$

quando il punto (a, b, c) del potenziale faccia parte della massa, cui s'intende riferito il potenziale stesso. Per tanto immaginiamo nell'interno di questa massa, la densità della quale per ora è supposta costante, una sfera di raggio r' , col suo centro (α, β, γ) posto in guisa che la sfera medesima comprenda il punto (a, b, c) del potenziale V . Decomponiamo questo potenziale in due parti U, U' ; pongasi cioè $V = U + U'$, essendo U il potenziale relativo alla sola massa contenuta nella sfera, ed U' quello relativo al rimanente. In virtù della (5) avremo similmente la

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial c^2} = 0, \quad (6)$$

perchè il punto (a, b, c) non fa parte della massa cui si riferisce U' .

Prima però d'inoltrarci maggiormente nel calcolo, è necessario sviluppare alcune formule relative al potenziale di uno strato sferico di uniforme densità e di ertezza λ infinitesima, per un punto m , tanto esterno, quanto interno ad esso. Chiamando perciò con h il raggio di questo qualunque strato, ed essendo p la distanza del punto m dal centro del medesimo strato

sarà $p >$ ovvero $< h$ secondo che il punto si trovi esterno od interno allo strato sferico. Prendiamo per asse delle z la retta che a partire dal centro della sfera passa pel punto m . Ciò posto, decomponiamo la superficie sferica in zone con tante sezioni perpendicolari a questo asse: due qualunque di queste sezioni consecutive distano fra loro di dz ; quindi pel teorema relativo alla superficie della zona, la superficie di questa sarà espressa da $2\pi h dz$, ed il volume dell'elemento dello strato sarà

$$2\pi h \lambda dz. \quad (7)$$

Dicasi δ la densità della materia di cui si compone lo strato sferico, sarà δ la quantità di massa contenuta nella unità del suo volume; cosicchè la massa del suo elemento si esprimerà con $2\pi \delta h \lambda dz$. Qualunque punto di questo elemento trovasi distante dall'altro m del potenziale della quantità

$$\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz},$$

laonde il potenziale dell'elemento medesimo sarà

$$\frac{2\pi \delta h \lambda dz}{\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz}}.$$

Perciò denotando con V_1 il potenziale cercato di uno strato sferico, otterremo

$$V_1 = \int \frac{2\pi \delta h \lambda dz}{\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz}} = -\frac{2\pi \delta h \lambda}{p} \sqrt{p^2 + h^2 - 2pz} + C.$$

I limiti dell'integrale sono evidentemente $z = h$, $z = -h$, e ciò tanto se il punto si trovi fuori, quanto se dentro la sfera; quindi sarà in ogni caso

$$V_1 = -\frac{2\pi \delta h \lambda}{p} \left[\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz} \right]_{-h}^{+h}. \quad (8)$$

Da ora in poi deve bene distinguersi un caso dall'altro, dovendo la distanza $\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz}$ risultare sempre positiva. Laonde, siccome per un punto esterno all'involucro sferico abbiamo $p > h$, così nel caso medesimo dovremo avere

$$[\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz}]_h = p - h.$$

Inoltre siccome per un punto interno abbiamo $p < h$, così per questo caso dovrà essere

$$[\sqrt{p^2 + h^2 - 2pz}]_h = h - p.$$

Da ciò siegue che, introducendo i limiti nella (8), dovremo per un punto esterno, avere

$$V_1 = -\frac{2\pi h \delta \lambda}{p} [p - h - (p + h)] = \frac{4\pi h^2 \delta \lambda}{p},$$

e per un punto interno sarà

$$V'_1 = -\frac{2\pi h \delta \lambda}{p} [h - p - (p + h)] = 4\pi h \delta \lambda.$$

(9)

Trovato mediante la (9) il potenziale di un involucro sferico rispetto ad un punto esterno od interno; passiamo a determinare il potenziale V_2 di una sfera piena, relativo ad un punto esterno; ed il potenziale V'_2 di una sfera vuota, di ertezza finita, relativo ad un punto interno, cioè collocato nella sua cavità; cosicchè il potenziale U di una sfera piena relativo ad un punto che fa parte della medesima sarà espresso da $U = V_2 + V'_2$. Decomponiamo per ambedue questi casi la sfera in tanti strati sferici e concentrici, di raggio h variabile da uno strato all'altro, e di ertezza $dh = \lambda$. Il potenziale poi di una sfera piena, relativo ad un punto tanto esterno quanto interno alla medesima, si ottiene rispettivamente dalle (9), se in esse poniamo dh in vece di λ ; poichè sarà

$$dV_2 = \frac{4\pi \delta h^2 dh}{p}, \quad dV'_2 = 4\pi \delta h dh. \quad (10)$$

Dalla prima di queste avremo

$$V_2 = \frac{4\pi \delta}{p} \int_0^{h_1} h^2 dh = \frac{4}{3} \frac{\pi \delta h_1^3}{p}, \quad (11)$$

essendo h_2 il raggio della sfera piena. Dunque la (11) fornisce il potenziale di una sfera piena di raggio h_2 , di densità δ , relativo ad un punto ad essa esterno e avente la distanza p dal suo centro.

Se il punto si trovasse alla superficie della sfera, come occorre nel caso nostro, sarebbe $p = h_1$; quindi, per questo particolar caso, avremo

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi \delta h_2^2. \quad (12)$$

Pel secondo caso, cioè per un punto collocato nella cavità di una sfera vuota e di ertezza finita $h_1 - h_2$, essendo h_2 il raggio della cavità sferica, ed h_1 quello della esterna superficie, dalla seconda delle (10) abbiamo

$$V'_2 = 4\pi \delta \int_{h_2}^{h_1} h dh = 2\pi \delta (h_1^2 - h_2^2). \quad (13)$$

Questo è dunque il potenziale di un involucro sferico di altezza finita $h_1 - h_2$, relativo ad un punto collocato nella sua cavità. Risulta dalla (13) che il potenziale medesimo è indipendente dalla posizione del punto nell'interno della cavità sferica; perciò la (13) vale ancora quando il punto si trovasse nella interna superficie di essa, e ciò si riferisce al caso che ci proponemmo.

§ 8.

Dopo stabilitè le due formole (12), (13), passiamo a determinare il potenziale U di una sfera piena per un punto interno ad essa. Per tanto chiamando h_1 il raggio di questa sfera ed h_2 la distanza del punto del potenziale dal centro di essa, troveremo il valore di U con osservare che abbiamo evidentemente

$$U = V_2 + V'_2 = \frac{4}{3}\pi\delta h_2^2 + 2\pi\delta(h_1^2 - h_2^2) = 2\pi\delta(h_1^2 - \frac{1}{3}h_2^2), \quad (14)$$

ove δ esprime la densità, supposta costante, della sfera; quindi la (14) rappresenta il potenziale di una sfera piena, relativo ad un punto che fa parte di essa.

§ 9.

Ora potremo, come già ci proponemmo, determinare il valore del trinomio

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2},$$

riguardo ad una massa elettrica, ed al punto (a, b, c) che fa parte di essa, la quale viene supposta una sfera piena, di raggio r_1 . Per tanto il suo potenziale, relativo al punto medesimo, sarà dato dalla (14); quindi ponendo in essa

$$h_1 = r_1 \text{ ed } h_2 = \sqrt{[(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2]},$$

avremo

$$U = \pi\delta \left\{ 2r_1 - \frac{2}{3}[(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2] \right\},$$

essendo (a, b, c) il punto del potenziale, ed (α, β, γ) il centro della sfera.

Derivando questa equazione rispetto alle a, b, c avremo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = -\frac{4}{3}\pi\delta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} = -\frac{4}{3}\pi\delta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = -\frac{4}{3}\pi\delta,$$

quindi sommando si otterrà

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} = -4\pi\delta. \quad (15)$$

Dalla precedente $V = U + U'$ abbiamo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial a^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial b^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial c^2};$$

quindi sommando, e valendosi tanto della (6) quanto della (15), avremo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = -4\pi\delta. \quad (16)$$

Questa formula rappresenta una proprietà del potenziale V di una massa, relativamente al punto (a, b, c) che fa parte della medesima, la densità della quale fino ad ora fu supposta costante. Tale supposizione però è superflua: in fatti la (6) vale indipendentemente dalla distribuzione della massa. Per quello poi riguarda la (15), di cui ci siamo valse per giungere alla (16), essa vale tanto se la densità sia costante, quando se sia variabile, a condizione che in questo secondo caso ritengasi la sfera di raggio r_1 essere bastantemente piccola, da potersi riguardare costante la sua densità, lo che non altera punto il ragionamento che alla stessa (15) conduce. Da ciò siegue che la (16) vale ancora per qualunque massa di variabile densità, ed allora δ rappresenterebbe la densità del punto (a, b, c) qualunque. Se ora per la massa prendiamo lo strato elettrico di equilibrio, distribuito sopra un conduttore isolato, avremo immediatamente la (16) per un punto (a, b, c) di esso

§ 10.

Necessita ora, per giungere a dimostrare quanto ci proponemmo, svolgere il seguente integrale

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) V dx dy dz = \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy dx dz + \\
 & \qquad \qquad \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dz dy dx.
 \end{aligned} \right\} (17)$$

Mediante la integrazione per parti abbiamo

$$\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} V dx = V \frac{\partial V}{\partial x} - \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} V dx = \left[V \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (18)$$

Il primo termine del secondo membro di questa equazione deve ridursi a zero: in fatti, che il potenziale V di una massa, preso rispetto ad un punto infinitamente lontano, debba essere nullo, siegue immediatamente dal concetto del potenziale stesso: poichè ciascuno degli elementi suoi deve annullarsi per essere infinito il suo denominatore, cioè la distanza dell'elemento dal punto del potenziale. Ma $\frac{\partial V}{\partial x}$ non può ricevere un valore infinito per $x = \pm \infty$; poichè nel caso nostro il potenziale V è funzione continua della x , perciò la sua derivata $\frac{\partial V}{\partial x}$ non può divenire infinita. Dunque dovremo avere

$$\left[V \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

come sopra fu asserito. Introducendo questo valore nella (18) sarà

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} V dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx,$$

quindi avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dx dy dz.$$

Cangiando in questa equazione x in y , quindi anche x in z , otterremo le

altre due seguenti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy dx dz = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 dy dx dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dz dy dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 dz dy dx.$$

Sostituendo questi valori nella (17) avremo

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) V dx dy dz = \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Questa equazione deve considerarsi come una formula generale, di carattere puramente analitico, la quale potrebbe trovare utile applicazione nella dottrina degli integrali definiti. Qualunque poi sia la forma della funzione V , sempre la (19) sarà soddisfatta, e soltanto viene richiesto che la funzione medesima soddisfi a quelle condizioni generalmente richieste dalla teoria degli integrali definiti.

Essendo (x, y, z) nel calcolo precedente un punto che deve ricevere successivamente tutte le possibili posizioni nello spazio, si vede che il punto medesimo dovrà considerarsi tanto fuori, quanto dentro la massa che attrae. Perciò cangiando nella (5) le coordinate a, b, c del punto del potenziale nelle x, y, z , dovrà valere la

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (20)$$

per un punto che non fa parte della massa, cioè che può stare o fuori di essa od in una sua cavità. Similmente per un punto (x, y, z) che fa parte della massa, dovrà per la (16) valere la

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\delta. \quad (21)$$

Moltiplicando questa eguaglianza per $V dx dy dz$ otterremo la

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) V dx dy dz = -4\pi\delta V dx dy dz.$$

Integrando il primo membro di questa equazione fra i limiti ∞ e $-\infty$, si annulleranno per la (20) tutti quei termini che si riferiscono ai punti non compresi nella massa, restando soltanto quelli relativi a punti contenuti nella medesima; cioè quelli soltanto che si ottengono integrando il secondo membro fra i limiti che appartengono alla massa elettrica; ed avremo dunque la seguente uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) V dx dy dz = -4\pi \iiint \delta V dx dy dz. \quad (22)$$

I limiti dell'integrale triplo, costituente il secondo membro della (22), abbracciano soltanto lo strato elettrico, il quale può considerarsi come una superficie materiale di ertezza infinitesima, e di densità δ variabile da un punto all'altro. Questo secondo membro può concepirsi come rappresentante la massa di un corpo avente per densità variabile δV ; ma siccome il corpo stesso non è altro fuorchè una superficie materiale, così esprimendo con ds l'elemento della superficie stessa, potrà darsi all'integrale medesimo la forma

$$\int V \delta ds.$$

Riflettendo inoltre che, a motivo della ipotesi adottata in principio, il valore del potenziale V rimane costante per un punto collocato sulla superficie del corpo, si vede che il potenziale medesimo può collocarsi fuori del simbolo integrale del secondo membro della (22); perciò si avrà

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) V dx dy dz = -\pi V \int \delta ds = -4\pi Vc, \quad (23)$$

ove c denota la carica totale costituente lo strato elettrico. Questa equazione sarà chiara evidentemente, se riflettasi che δds rappresenta la quantità di elettrico dell'elemento superficiale ds . Combinando la (23) colla (19) avremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 4\pi Vc. \quad (24)$$

§ 11.

Abbiamo dimostrato in principio che la carica elettrica totale c del terzo strato elettrico, relativo ad $f - f_1$, quello cui si riferisce unicamente il V ,

dev'essere in complesso nulla; perciò la (24) si ridurrà nella

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0. \quad (25)$$

Avendo riguardo alla forma intrinsecamente positiva dell'elemento di questo integrale, come anche al secondo membro della (25), dovrà il trinomio compreso nella parentesi essere nullo; perciò dovranno verificarsi le

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

A queste si può soddisfare tanto ponendo $V = \text{cost.}$, quanto $V = 0$; ma il primo caso non è ammissibile, perchè la (25) include pure i punti esterni allo strato elettrico, pei quali, variando la posizione, deve anche variare V ; perciò questo non potrà essere costante: dunque avrà necessariamente luogo soltanto il secondo caso, cioè dovrà essere $V = 0$. Concludiamo pertanto che, dovendo il potenziale del terzo strato elettrico essere nullo, non potrà lo strato medesimo aver luogo, e per conseguenza non potranno aver neppure luogo le due supposte diverse distribuzioni elettriche di una medesima carica sul conduttore, corrispondenti rispettivamente alle f, f_1 , ma bensì una soltanto, come volevamo dimostrare.

§ 12.

Trattandosi ora di più conduttori, dei quali alcuni, o tutti, posseggono cariche proprie di elettricità, deve primieramente riconoscersi aver luogo in questo caso una induzione reciproca fra i diversi conduttori, per la quale tutti od alcuni di essi possederanno le due specie di elettricità fra loro contrarie, delle quali una sarà latente o dissimulata, e l'altra libera, come accade nel caso di un solo conduttore sottoposto alla influenza di un altro elettrizzato. Ma nella prima delle due precedenti dimostrazioni, essendosi ammesso come principio che il conduttore unico ivi considerato contenga una sola specie di elettrico, si vede che la dimostrazione medesima non può valere nel caso più generale di cui parliamo. Però è facile giungere alla conseguenza dell'unica distribuzione elettrica, nel caso di più conduttori, generalizzando il principio fondamentale della precedente dimostrazione. Poniamo pertanto che l'unica necessaria e sufficiente condizione, da cui viene

governata la distribuzione elettrica, sulla superficie di più conduttori, posti fra loro in presenza, consista nell'essere costante il potenziale della massa complessiva di elettrico del sistema, per qualunque suo punto. Però non si deve perdere di vista che il potenziale stesso dovrà essere in generale diverso da uno strato elettrico all'altro, ma costante per un medesimo strato. Dopo ciò supponiamo che nel sistema dei conduttori possano aver luogo due diverse distribuzioni elettriche di equilibrio, corrispondenti ad una medesima carica, la quale in ciascun conduttore dev'essere sempre la stessa, potendo variare dall'uno all'altro. Dicasi F_1 la densità elettrica in qualsiasi punto della superficie, per uno dei due strati elettrici di equilibrio, sopra uno qualunque degli indicati conduttori. Similmente dicasi F'_1 la densità elettrica di quel punto medesimo, per l'altro strato elettrico di equilibrio sul conduttore stesso. Le quantità F_1 , F'_1 debbono essere funzioni delle coordinate relative alla superficie di questo conduttore. Per un secondo conduttore le F_2 , F'_2 , pel terzo le F_3 , F'_3 , pel quarto la F_4 , F'_4 , ecc. significheranno le densità rispettivamente corrispondenti ad un qualunque punto comune ai due strati elettrici, equilibrati sulle superficie dei conduttori medesimi.

Dalla supposta esistenza degli indicati due strati elettrici di equilibrio, sopra un qualunque conduttore del sistema, nasce quella di un terzo strato elettrico, di equilibrio pur esso, in ognuno dei conduttori medesimi, e le densità per ciascuno di questi, e per un punto qualunque dei medesimi, corrisponderanno alle differenze seguenti:

$$F_1 - F'_1 = f_1, F_2 - F'_2 = f_2, F_3 - F'_3 = f_3, \dots, F_n - F'_n = f_n.$$

Abbiamo già fatto riflettere nella precedente dimostrazione, ove considerammo un solo conduttore, che la carica corrispondente al terzo strato elettrico si riduce complessivamente a zero. Ciò deve aver luogo anche nel caso generale di cui parliamo, per ognuno dei terzi strati, corrispondenti alle densità f_1, f_2, f_3, \dots . Questa conseguenza facilmente s'intende, riflettendo essere le due specie di elettricità contrarie, che si sviluppano in un qualunque conduttore per induzione, quantità eguali e contrarie fra loro. Infatti pel corpo n -esimo, il terzo strato elettrico, relativo alla $F_n - F'_n = f_n$, è chiaro che la carica corrispondente ad F_n sarà composta di tre parti, cioè della iniziale oltre le due contrarie fra loro ed eguali, sviluppate sul conduttore dalla induzione; ma queste ultime due cariche danno un risultamento complessivo nullo. Perciò la carica dello strato corrispondente ad F_n si

riduce numericamente alla sola carica iniziale del conduttore. Lo stesso deve dirsi dello strato elettrico corrispondente ad F'_n . Ma le cariche iniziali corrispondenti alle due distribuzioni, supposte diverse, sopra un medesimo conduttore sono fra loro eguali; dunque la carica del terzo strato corrispondente ad $F_n - F'_n = f_n$ dev'essere, per la prima dimostrazione, complessivamente nulla. Dobbiamo perciò concludere che la carica dei terzi strati elettrici, corrispondente alla somma $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$, dev'essere anch'essa complessivamente nulla.

Poichè abbiamo dimostrato, nel caso di un solo conduttore, che il terzo strato elettrico corrispondente ad f rappresenta uno strato di equilibrio, così potremo dimostrare nello stesso modo che il terzo strato elettrico del sistema, corrispondente ad $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$, è pur esso uno strato di equilibrio. Per tanto l'equazione

$$V' - V'' = V,$$

già dimostrata pel caso di un solo conduttore, avrà luogo egualmente nel presente di più conduttori. Però dobbiamo intendere che per l'attuale caso i simboli V' , V'' , V rappresentano rispettivamente i potenziali dei tre complessivi strati elettrici del sistema. Deve pure intendersi che nel caso presente i valori di questi simboli, mentre sono costanti per ciascun punto dello strato elettrico relativo ad un medesimo conduttore, debbono variare da un conduttore all'altro.

Ciò premesso possiamo ripetere per questo caso generale tutto il ragionamento già esposto per un solo conduttore, ove dimostrammo che unica dev'essere la distribuzione di una medesima carica sopra un conduttore; cosicchè giungeremo alla stessa conseguenza pel caso di cui ci occupiamo. Quindi avrà luogo anche in questo la (23), in cui la complessiva carica c deve riferirsi all'insieme dei terzi strati elettrici. E siccome fu dimostrato che questa carica è nulla, così dovrà esserlo anche pel caso presente; laonde si vede che le conclusioni dedotte dalla (23), pel caso di un sol conduttore, si dedurranno egualmente pel caso di più conduttori. Da ciò siegue adunque che anche quando abbiansi più conduttori, ognuno dei quali possiede una carica iniziale; sempre la distribuzione elettrica sarà in un solo modo possibile, cioè dovrà essere unica sui conduttori stessi, come volevamo dimostrare

Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra.

(del prof. ULISSE DINI, a Pisa.)

In una Memoria pubblicata nel vol. VII (1^a serie) degli *Annali di matematica*, il prof. BELTRAMI ha dimostrato che le sole superficie suscettibili di essere rappresentate sopra un piano, in modo che ad ogni punto di esse corrisponda un punto del piano, e alle geodetiche di esse corrispondano le rette del piano, sono le superficie di curvatura costante (positiva, nulla o negativa). Io ho preso a studiare una questione più generale (enunciata anche dal BELTRAMI in fine della Memoria citata); quella cioè di trovare le superficie che possono rappresentarsi l'una sull'altra in modo che ad ogni punto dell'una corrisponda un punto dell'altra, e alle geodetiche dell'una corrispondano le geodetiche dell'altra; ed ora espongo qui i risultati dei miei studii sopra questo problema, premettendo un teorema, che può essere utile anche in alcune questioni di meccanica, e che è relativo a certi sistemi di curve che esistono sopra alcune classi di superficie e che sono tali che, prese per linee coordinate u e v , riducono l'elemento lineare della superficie alla forma:

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

ove U e U_1 sono funzioni di u , e V e V_1 sono funzioni di v .

1. Incominciamo dallo stabilire, per brevità di linguaggio, alcune denominazioni.

Siano A e B due curve fisse su una superficie; diremo coniche geodetiche rispetto a queste curve A e B le curve della medesima su-

perficie tali che la somma o la differenza delle distanze geodetiche dei loro punti dalle curve A e B sia costante, intendendo che queste distanze siano considerate come positive quando sono prese da una parte determinata di queste curve A e B , e negative quando sono prese dall'altra parte; e di queste coniche diremo ellissi geodetiche quelle per le quali la somma delle dette distanze geodetiche è costante, e iperbole geodetiche quelle per le quali la differenza delle dette distanze è costante. Le curve A e B le diremo curve basi; e ad esse potremo evidentemente sostituire due qualunque delle curve C , C' che sono parallele geodeticamente alle stesse A e B ; e quando fra queste curve parallele ve ne sia una che si riduce a un punto, potremo riferirci a questo punto che chiameremo fuoco. Osservando poi che le ellissi geodetiche sono caratterizzate dalla somma costante dei raggi geodetici che vanno ad esse normalmente alle curve basi, chiameremo questa somma parametro ellittico; e, per una ragione analoga, chiameremo parametro iperbolico la differenza corrispondente nelle iperbole; e il valore di questi parametri dipenderà evidentemente dalle curve che si sono scelte per basi fra le C , C' (*).

2. Ciò premesso, il teorema di cui parlavamo disopra è il seguente:

Se su una superficie esiste un doppio sistema di linee che è formato da ellissi e iperbole geodetiche che hanno le stesse curve basi e che sono isoterme, prendendo queste linee per linee coordinate u e v , l'elemento lineare della superficie si ridurrà alla forma:

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2), \quad (1)$$

ove U e U_1 sono funzioni di u e, V e V_1 sono funzioni di v ; e viceversa: se le linee u e v sono ortogonali e isoterme e tali che, prese per coordinate, riducano l'elemento lineare della superficie alla forma (1), queste linee saranno ellissi e iperbole geodetiche

(*) Queste curve, nella ipotesi che esse avessero almeno un fuoco, furono considerate dapprima dal prof. BETTI, il quale trovò per esse alcuni dei teoremi che si hanno per le coniche ordinarie nel piano (*Ann. di Mat.*, 1^a serie, vol. III). Più tardi il sig. WEINGARTEN considerò queste curve nel modo più generale che sopra ho indicato (*G. di Crelle* tom. LXII), e dette una generalizzazione di uno dei teoremi del prof. BETTI dimostrando che le ellissi e iperbole geodetiche che hanno le stesse curve basi s'incontrano ad angolo retto. Questo teorema fu poi ritrovato anche dal prof. BELTRAMI nelle sue *Ricerche di analisi applicata alla geometria* pubblicate nel giornale di Napoli.

rispetto a due qualunque delle curve rappresentate dalle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{(U-h)U_1} du + \int \sqrt{(h-V)V_1} dv &= \text{cost}; \\ \int \sqrt{(U-h)U_1} du - \int \sqrt{(h-V)V_1} dv &= \text{cost}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ove le costanti del secondo membro sono arbitrarie, e h è una costante tale che $U-h$, e $h-V$ siano positivi almeno per la porzione di superficie che si considera. E i parametri ellittici e iperbolici delle stesse curve u e v saranno rispettivamente

$$2 \int \sqrt{(U-h)U_1} du - c - c', \quad \text{e} \quad 2 \int \sqrt{(h-V)V_1} dv - c + c',$$

se c e c' sono le costanti dei secondi membri delle equazioni (2) delle curve basi (*).

La prima parte di questo teorema, nel caso in cui le curve basi sono parallele geodeticamente fra loro, risulta subito da un teorema noto sui sistemi di geodetiche isoterme; e quindi basterà che io dimostri questa prima parte nel caso in cui le curve basi non sono parallele geodeticamente fra loro.

Per questo, incomincerò dal trovare, con un metodo dato già dal signor WEINGARTEN, la forma che prende l'elemento lineare di una superficie quando le linee sono ellissi e iperbole geodetiche che hanno le stesse curve basi non parallele geodeticamente fra loro.

Chiamiamo perciò p e q gli archi dei raggi geodetici contati a partire da queste curve basi. Le linee $p = \text{cost}$; $q = \text{cost}$; saranno due sistemi di curve parallele geodeticamente alle curve basi, e l'elemento lineare della superficie in queste coordinate p e q sarà della forma:

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2.$$

Ora se si chiamano t e t_1 i parametri dei raggi geodetici, si ha anche:

$$ds^2 = dp^2 + G_1 dt^2, \quad ds^2 = dq^2 + G_2 dt_1^2;$$

(*) Questo teorema, dando la natura delle curve u e v che prese per coordinate riducono l'elemento lineare della superficie alla forma (1), è notevole dal punto di vista della geometria, specialmente perchè è appunto quando l'elemento lineare della superficie ha la forma (1) che le equazioni delle geodetiche si sanno integrare, come mostrarono già i signori LIOUVILLE e BRIOSCHI. Esso è poi notevole anche dal punto di vista della meccanica, perchè quando un punto si muove sopra una superficie per la quale si ha la (1) soddisfacendo al principio delle forze vive, vi sono, come mostrò il sig. LIOUVILLE, dei moti pei quali le equazioni del movimento si possono integrare, e quindi il teorema in questione può servire a dare una interpretazione geometrica di questi moti.

quindi la espressione precedente di ds^2 deve ridursi a queste quando si prendano per coordinate p e t , o q e t_1 ; o, in altri termini, togliendovi dp^2 e dq^2 i resti devono essere quadrati perfetti di funzioni omogenee e lineari di dp e dq , e perciò si devono avere le due relazioni:

$$(E-1)G = (G-1)E = F^2,$$

le quali ci danno:

$$ds^2 = E(dp^2 + dq^2) + 2\sqrt{E(E-1)}dpdq, \quad (a)$$

per l'elemento lineare della superficie in coordinate p e q .

Ora, se si pone:

$$p + q = 2u, \quad p - q = 2v, \quad (b)$$

le linee $u = \text{cost}$; $v = \text{cost}$; saranno ellissi e iperbole geodetiche rispetto alle curve $p = \text{cost}$; $q = \text{cost}$; e prendendo queste linee u e v per coordinate, le curve basi e le loro parallele geodeticamente avranno per equazioni

$$u + v = \text{cost}; \quad u - v = \text{cost};$$

e per la formola precedente l'elemento lineare della superficie in coordinate u e v sarà dato dalla forma:

$$ds^2 = 2[E + \sqrt{E(E-1)}]du^2 + 2[E - \sqrt{E(E-1)}]dv^2, \quad (3)$$

che è quella che volevamo stabilire e che mostra che le linee u e v sono ortogonali (BETTI e WEINGARTEN); e ponendo, come fece il WEINGARTEN, $E = \frac{1}{\text{sen}^2 \omega}$, si trasformerebbe in quella notevole colla quale questo geometra potè trovare una classe completa di superficie nelle quali un raggio di curvatura è una funzione dell'altro (Mem. cit.)

Trovata questa formola, la prima parte del nostro teorema si dimostra colla massima facilità.

E infatti, per la condizione che le linee u e v siano anche isoterme, si dovrà avere:

$$\frac{E + \sqrt{E(E-1)}}{E - \sqrt{E(E-1)}} = \frac{U}{V},$$

ove U e V sono funzioni di u e v rispettivamente che possono supporre positive; e di qui si trarrà:

$$E(U - V) = \sqrt{E(E-1)}(U + V);$$

donde:

$$E = \frac{(U+V)^2}{4UV}, \quad \sqrt{E(E-1)} = \frac{U^2-V^2}{4UV};$$

e quindi per la (3) si avrà:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V} \right) (Udu^2 + Vdv^2); \tag{4}$$

e questa dimostra appunto la prima parte del teorema.

Per dimostrare ora anche la seconda parte, osserviamo prima in generale che quando un doppio sistema di linee ortogonali u e v di una superficie, prese per coordinate, riducono il quadrato ds^2 del suo elemento lineare alla forma (3), esse saranno ellissi e iperbole geodetiche che hanno le stesse curve basi $u+v = \text{cost}$; $u-v = \text{cost}$.

E infatti, se si fa una trasformazione di coordinate colle formole (b), il ds^2 si ridurrà alla forma (a), e questa dandoci:

$$ds^2 = dp^2 + (\sqrt{E}dq + \sqrt{E-1}dp)^2 = dq^2 + (\sqrt{E}dp + \sqrt{E-1}dq)^2,$$

ci mostra che se η e η_1 sono due fattori che rendono differenziali esatti le espressioni:

$$\sqrt{E}dq + \sqrt{E-1}dp, \quad \sqrt{E}dp + \sqrt{E-1}dq, \tag{c}$$

e se si chiamano t e t_1 i corrispondenti integrali, si ha:

$$ds^2 = dp^2 + \frac{dt^2}{\eta^2} = dq^2 + \frac{dt_1^2}{\eta_1^2};$$

e di qui risulta che le linee $t = \text{cost}$; e $t_1 = \text{cost}$; sono geodetiche normali alle curve p e q o $u+v = \text{cost}$; e $u-v = \text{cost}$; e i loro archi contati e partire dalle curve $p=0$, $q=0$ sono p e q , talchè la loro somma è costante e $= 2u$ lungo le linee u , e la loro differenza è costante e $= 2v$ lungo le linee v ; e questo mostra quanto si è detto di sopra, e mostra di più che i raggi geodetici che vanno normalmente alle curve basi $u+v = \text{cost}$; $u-v = \text{cost}$; sono le $t = \text{cost}$; e $t_1 = \text{cost}$; e perciò hanno in u e v le seguenti equazioni differenziali

$$\left. \begin{aligned} [E + \sqrt{E(E-1)}] du - [E - \sqrt{E(E-1)}] dv &= 0, \\ [E + \sqrt{E(E-1)}] du + [E + \sqrt{E(E-1)}] dv &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

che si ottengono uguagliando a zero le espressioni (c) e ponendovi per p e q i loro valori in u e v tratti dalle (a) e moltiplicando per \sqrt{E} .

Ciò posto, supponiamo che per una superficie si abbia:

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

e riteniamo che U , U_1 , e V_1 siano positivi e così $U - V$.

Questa forma di ds^2 potrà ridursi alla (4) e quindi alla (3), facendo un cambiamento di variabili colle formole $u_1 = \tau(u)$, $v_1 = \omega(v)$, ove τ e ω sono funzioni di u e v tali che si abbia:

$$\frac{U_1}{\tau'^2} = \frac{1}{U - h}, \quad \frac{V_1}{\omega'^2} = \frac{1}{h - V},$$

ossia;

$$\tau(u) = \int \sqrt{(U - h)U_1} du, \quad \omega(v) = \int \sqrt{(h - V)V_1} dv,$$

essendo h una costante tale che $U - h$ e $h - V$ siano positivi almeno entro le porzioni di superficie che si considera; quindi, per la osservazione generale precedente, le linee u_1 e v_1 , ossia le u e v , sono ellissi e iperbole geodetiche rispetto a due qualunque delle curve $u_1 + v_1 = \text{cost}$; $u_1 - v_1 = \text{cost}$; che sono rappresentate dalle due equazioni seguenti in u e v :

$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{(U - h)U_1} du + \int \sqrt{(h - V)V_1} dv &= \text{cost}; \\ \int \sqrt{(U - h)U_1} du - \int \sqrt{(h - V)V_1} dv &= \text{cost}; \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

e hanno evidentemente per parametri ellittici e iperbolici

$$2 \int \sqrt{(U - h)U_1} du - c - c', \quad \text{e} \quad 2 \int \sqrt{(U - h)U_1} du - c + c',$$

se c e c' sono le costanti dei secondi membri delle equazioni delle curve basi; e questo dimostra anche la seconda parte del teorema.

3. Osservazione I. A causa della costante h che compare nelle equazioni precedenti delle curve basi, si ha dunque che le linee u e v possono considerarsi come ellissi e iperbole geodetiche rispetto a più curve basi non parallele geodeticamente; e quando, per valori convenienti di h e delle costanti del secondo membro queste curve si riducano a punti, le linee u e v avranno dei fuochi. È facile poi di vedere che le equazioni precedenti (5') danno tutte le curve basi, non escluse quelle parallele geodeticamente l'una all'altra, quando esistono. Infatti, dalla dimostrazione della prima parte del teorema precedente risulta che le curve basi che non sono parallele geodeticamente l'una all'altra devono avere equazioni della forma:

$$\phi(u) + \psi(v) = \text{cost}, \quad \phi(u) - \psi(v) = \text{cost},$$

essendo ϕ e ψ funzioni tali che, prese per variabili coordinate in luogo delle u e v , riducano ds^2 alla forma (3); e siccome questo richiede che ϕ e ψ siano appunto le τ e ω precedenti, se ne conclude subito che le equazioni (5') danno tutte le curve basi non parallele geodeticamente l'una all'altra. Esse poi ci danno anche le curve basi parallele geodeticamente l'una all'altra (quando esistono), giacchè evidentemente questo caso non può presentarsi che quando le linee u o le v , p. es. le v sono geodetiche, e le basi parallele sono due qualunque delle linee u ; e si vede che queste linee vengono date anche dalle precedenti (5'), quando vi si suppone $h = V$, ciò che può farsi poichè ora V è come h una costante arbitraria.

Notiamo poi che, avendo riguardo alle equazioni (5), si vede che, colle attuali variabili u e v , le equazioni dei raggi geodetici che vanno normalmente alle curve basi (2) sono le seguenti;

$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{\frac{U_1}{U-h}} du - \int \sqrt{\frac{V_1}{h-V}} dv &= \text{cost}; \\ \int \sqrt{\frac{U_1}{U-h}} du + \int \sqrt{\frac{V_1}{h-V}} dv &= \text{cost}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

e le lunghezze di questi raggi geodetici compresi fra le curve basi (2) e il punto (u, v) sono i primi membri delle equazioni (2) delle curve basi diminuiti della costante del secondo membro.

II. È da notare che le equazioni (6), quando vi si lascia h arbitrario, sono appunto quelle che si trovano integrando le equazioni delle geodetiche delle superficie per le quali si ha la (1); e da questa osservazione si possono dedurre subito alcune proprietà dei varii sistemi di raggi geodetici delle linee u e v , e quindi anche delle curve basi corrispondenti.

III. È noto che se le linee di un sistema sono isoterme, quelle del sistema ortogonale sono pure isoterme; e se le linee di un sistema sono ellissi o iperbole geodetiche che hanno due curve basi A e B , quelle del sistema ortogonale sono iperbole o ellissi che hanno le stesse curve basi (teorema di WEINGARTEN dimostrato precedentemente); quindi si può dire che se un sistema di linee isoterme è formato da ellissi o iperbole geodetiche che hanno certe curve basi, il sistema ortogonale è formato da iperbole o ellissi che hanno le stesse curve basi; e per questo l'enunciato del teorema del § 2 potrebbe leggermente modificarsi.

4. Passiamo ora ad occuparci delle rappresentazioni di una superficie su

di un'altra fatte dietro il principio che ad un punto dell'una corrisponda un punto dell'altra, e alle geodetiche dell'una corrispondano le geodetiche dell'altra senza che si abbia uguaglianza o perfetta similitudine fra la figura rappresentata e la sua rappresentazione; e cerchiamo in quali casi esse sono possibili.

Chiamiamo perciò, per brevità di linguaggio, queste rappresentazioni rappresentazioni geodetiche, e supponiamo che S e S' siano due superficie che possano rappresentarsi l'una sull'altra geodeticamente. Come è noto, avendo escluso il caso della uguaglianza o della perfetta similitudine fra la figura rappresentata e la sua rappresentazione, non si avrà la similitudine neppure nelle parti infinitesime e gli angoli non saranno conservati nella rappresentazione; però, per un teorema del sig. TISSOT (*), esisterà ancora su S un doppio sistema di linee ortogonali (ed uno solo) che si manterranno tali anche nella rappresentazione su S' . Queste linee che diremo, col TISSOT, direzioni principali, le prenderemo per linee coordinate su S e S' (**); e allora, scegliendo i parametri u e v in modo che ai punti corrispondenti si abbia la stessa u e la stessa v , gli elementi lineari corrispondenti di S e S' saranno dati dalle formole:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

$$ds'^2 = E' du^2 + G' dv^2;$$

e si tratterà qui di vedere quali valori debbano avere E , G , E' e G' affinché alle geodetiche di S corrispondano le geodetiche di S' .

Per questo, ricordiamo che la equazione differenziale delle geodetiche di S è la seguente:

$$EG(du d^2v - dv d^2u) - \frac{1}{2}E \frac{dE}{dv} du^3 + \left(E \frac{dG}{du} - \frac{1}{2}G \frac{dE}{du} \right) du^2 dv - \left(G \frac{dE}{dv} - \frac{1}{2}E \frac{dG}{dv} \right) du dv^2 + \frac{1}{2}G \frac{dG}{du} dv^3 = 0;$$

(*) Vedi la mia Memoria: *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie* § 3. Atti della Società Italiana delle Scienze, serie III, tom. I, pag. II.

(**) Senza fare subito l'osservazione che quando si esclude la uguaglianza o la perfetta similitudine, non si ha neppure la similitudine nelle parti infinitesime, avremmo potuto dire di prendere per coordinate su S e S' le direzioni principali del TISSOT nel caso che non si abbia la similitudine nelle parti infinitesime, e uno degli infiniti doppi sistemi ortogonali corrispondenti di S e S' nel caso contrario. Allora i ragionamenti che seguono sarebbero rimasti gli stessi, e il risultato finale avrebbe mostrato che il secondo caso non può presentarsi senza che vi sia uguaglianza o perfetta similitudine.

e quella delle geodetiche di S' è:

$$E' G' (du d^2 v - dv d^2 u) - \frac{1}{2} E' \frac{dE'}{dv} du^3 + \left(E' \frac{dG'}{du} - \frac{1}{2} G' \frac{dE}{du} \right) du^2 dv - \\ - \left(G' \frac{dE'}{dv} - \frac{1}{2} E' \frac{dG'}{dv} \right) du dv^2 + \frac{1}{2} G' \frac{dG'}{du} dv^3 = 0;$$

e poichè le geodetiche di S devono avere per corrispondenti quelle di S' , e i valori di u e v nei punti corrispondenti sono gli stessi, queste due equazioni devono ridursi l'una all'altra; e perciò, indicando con λ una certa funzione positiva di u e v , dovremo avere le seguenti equazioni:

$$E' G' = \lambda E G, \tag{7}$$

$$E' \frac{dE'}{dv} = \lambda E \frac{dE}{dv}, \tag{8}$$

$$E' \frac{dG'}{du} - \frac{1}{2} G' \frac{dE'}{du} = \lambda \left(E \frac{dG}{du} - \frac{1}{2} G \frac{dE}{du} \right), \tag{9}$$

$$G' \frac{dE'}{dv} - \frac{1}{2} E' \frac{dG'}{dv} = \lambda \left(G \frac{dE}{dv} - \frac{1}{2} E \frac{dG}{dv} \right), \tag{10}$$

$$G' \frac{dG'}{du} = \lambda G \frac{dG}{du}; \tag{11}$$

e le cinque funzioni E , G , E' , G' , e λ dovranno soddisfare a queste cinque equazioni, talchè si vede subito di qui che il problema presenta una certa limitazione.

Ora, per determinare queste funzioni osserviamo che la (7) ci dà:

$$E \frac{dG'}{du} + G' \frac{dE'}{du} = \lambda E \frac{dG}{du} + \lambda G \frac{dE}{du} + E G \frac{d\lambda}{du};$$

e sottraendo da questa la (9) e avendo riguardo alla (7) stessa, si ottiene l'altra:

$$\frac{d \log E'}{du} = \frac{d \log E}{du} + \frac{2}{3} \frac{d \log \lambda}{du};$$

la quale ci dà, integrando:

$$E' = \lambda^{\frac{2}{3}} V E,$$

ove $\lambda^{\frac{2}{3}}$ è il valore reale di $\sqrt[3]{\lambda^2}$, e V è una funzione di v che, almeno nella porzione di superficie che si considera, è positiva.

Analogamente si avrà per le (7) e (10):

$$G' = \lambda^{\frac{2}{3}} UG,$$

ove U è una funzione positiva di u ; e quindi per la (7) sarà

$$\lambda^{\frac{1}{3}} UV = 1,$$

e perciò si avrà:

$$E' = \frac{E}{U^2 V}, \quad G' = \frac{G}{UV^2}, \quad \lambda = \frac{1}{U^3 V^3};$$

e così saranno soddisfatte le equazioni (7), (9) e (10), e resteranno da soddisfarsi la (8) e la (11) soltanto.

Ora, la (8) per le precedenti può scriversi:

$$(V - U) \frac{dE}{dv} = V' E;$$

e quindi, poichè escludiamo il caso di $U = V = \text{cost}$; che corrisponde ad una rappresentazione di S su S' uguale o perfettamente simile alla figura rappresentata, si avrà;

$$E = (U - V) U_1,$$

essendo U_1 una funzione di u dello stesso segno di $U - V$.

Analogamente, si avrà dalla (11):

$$G = (U - V) V_1,$$

ove V_1 è una funzione di v della stesso segno di $U - V$; e di qui (per il teorema del § 2 e per l'osservazione III del § 3) si può evidentemente concludere che, affinchè due superficie S e S' possano rappresentarsi geodeticamente l'una sull'altra, è necessario e sufficiente che esista su ciascuna di esse un doppio sistema ortogonale di ellissi e iperbole geodetiche isoterme, e queste linee siano tali che, prendendole per coordinate u e v sulle due superficie e scegliendo convenientemente i loro parametri u e v , gli elementi lineari ds e ds' delle medesime superficie vengano legati in modo che si abbia:

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right) \left(\frac{U_1}{U} du^2 + \frac{V_1}{V} dv^2\right);$$

e, quando queste condizioni siano soddisfatte, i punti corrispondenti delle due superficie saranno quelli che hanno la stessa u e la stessa v , e le direzioni principali saranno le stesse ellissi e iperbole geodetiche u e v .

5. Ciò posto, sia S una superficie su cui le linee ortogonali u e v sono ellissi e iperbole geodetiche isoterme, e pel suo elemento lineare si abbia:

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2), \quad (12)$$

ove U , U_1 e V_1 sono funzioni le due prime di u e la terza di v , che possiamo supporre positive entro la regione di superficie che si considera, e V è una funzione positiva o negativa di v , tale soltanto che $U - V$ sia positiva entro la stessa regione.

Indicando con a e b due costanti, la prima delle quali riterremo che non sia zero, si avrà anche:

$$ds^2 = \{ (aU + b - (aV + b)) \} \left(\frac{U_1}{a} du^2 + \frac{V_1}{a} dv^2 \right);$$

e quindi, quando $aU + b$ e $aV + b$ siano positivi, per le superficie S' sulle quali S può rappresentarsi geodeticamente, si dovrà avere:

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{aV + b} - \frac{1}{aU + b} \right) \left\{ \frac{U_1}{a(aU + b)} du^2 + \frac{V_1}{a(aV + b)} dv^2 \right\};$$

e di qui, osservando che il caso che dovremmo pure considerare in cui $aU + b$ e $aV + b$ sono negativi rientra in questo, si potrà evidentemente concludere che: data una superficie S per la quale si ha la (12), se s'indicano con a e b due costanti qualunque, tali soltanto che $aU + b$ e $aV + b$ siano positivi nella porzione di superficie S che si considera nella quale anche $U - V$ è positiva, e si suppone che a sia differente da zero, questa porzione di superficie S potrà rappresentarsi geodeticamente su tutte le superficie S' sulle quali esiste un doppio sistema ortogonale di ellissi e iperbole geodetiche isoterme che, prese per coordinate u e v , riducono l'elemento lineare della superficie alla forma:

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{aV + b} - \frac{1}{aU + b} \right) \left(\frac{U_1}{a(aU + b)} du^2 + \frac{V_1}{a(aV + b)} dv^2 \right); \quad (13)$$

e i punti corrispondenti saranno quelli che hanno la stessa u e la stessa v , e le direzioni principali saranno le coniche geodetiche u e v .

6. Le rappresentazioni geodetiche possono dunque farsi per tutte e sole

le superficie S sulle quali esiste un doppio sistema ortogonale di ellissi e iperbole geodetiche isoterme, scegliendo fra quelle di questa stessa classe, e nel modo ora indicato, le superficie S' sulle quali si fa la rappresentazione, e le linee principali sono sempre queste ellissi e iperbole geodetiche isoterme; e inoltre, una stessa porzione di superficie può rappresentarsi sopra infinite altre (non applicabili), a causa della grande indeterminazione che abbiamo nei valori delle costanti a e b .

È poi da notare che una superficie S , per la quale si ha la (12), non può rappresentarsi geodeticamente altro che sulle superficie S' , per le quali si ha la (13) (§ 4), e facendo corrispondere i punti che hanno la stessa u e la stessa v sulle due superficie, a meno che S non abbia più sistemi ortogonali di ellissi e iperbole geodetiche isoterme. In quest'ultimo caso soltanto si potranno fare di S anche altre rappresentazioni su altre superficie S'' che si troveranno come precedentemente; e quand'anche queste superficie S'' tornassero ad essere le stesse S' , le rappresentazioni attuali sarebbero distinte dalle prime, perchè per esse si avrebbero altre direzioni principali.

7. Diamo ora alcune conseguenze dei risultati che precedono.

1.° Calcolando colle formole note le curvatures geodetiche $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$, $\frac{1}{\rho'_u}$, $\frac{1}{\rho'_v}$ delle direzioni principali u e v sulle superficie (12) e (13), si trova che: $\frac{1}{\rho'_u} = (aV+b)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho'_v} = (aU+b)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\rho_v}$; e si conchiude di qui che: Nelle rappresentazioni geodetiche di una superficie (12) su un'altra (13), il rapporto delle curvatures geodetiche di due direzioni principali corrispondenti è costante lungo le direzioni principali dell'altro sistema.

2.° Dalle formole (12) e (13) si vede anche che i punti o le linee (quando esistono) lungo le quali si ha la similitudine nelle parti infinitesime sono quelle per le quali si ha $U = V$.

3.° Dalla forma nota dell'elemento lineare delle superficie a centro del second'ordine, quando le linee coordinate sono le linee di curvatura, risulta (§ 2) che queste linee sono ellissi e iperbole geodetiche isoterme, che possono, se si vuole, considerarsi come aventi dei fuochi o anche (per alcune

porzioni) come aventi per base certe curve. Quindi le superficie a centro del second' ordine (e così le applicabili su queste) possono rappresentarsi geodeticamente su altre superficie, e le direzioni principali su esse sono le linee di curvatura.

4.° Nelle superficie di rivoluzione i meridiani e i paralleli sono ellissi e iperbole geodetiche isoterme, quindi esse possono rappresentarsi geodeticamente su altre superficie pure di rivoluzione (o applicabili su queste), soddisfacendo altresì alla condizione che ai meridiani e ai paralleli dell'una vengano a corrispondere i meridiani e i paralleli delle altre, o, in altri termini, i meridiani e i paralleli siano le linee principali su queste superficie come sulla prima.

E se per la prima si ha:

$$ds^2 = du^2 + \phi(u)dv^2 = \phi(u) \left\{ \frac{du^2}{\phi(u)} + dv^2 \right\},$$

per quelle sulle quali la rappresentazione può farsi sarà:

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a\phi(u)+b} \right) \left\{ \frac{du^2}{a\phi(u)[a\phi(u)+b]} + \frac{dv^2}{ab} \right\},$$

ove b è una costante positiva e a una costante che non è zero ed è tale che $a\phi(u)+b$ sia positiva nella porzione di superficie che si considera.

5.° Il teorema del prof. BELTRAMI risulta pure facilmente da ciò che precede. Per ritrovarlo, infatti, basterà evidentemente dare ad U e V i valori pei quali la espressione seguente:

$$ds^2 = (U-V)(du^2 + dv^2) \tag{14}$$

di ds^2 appartiene al piano, e poi calcolare la curvatura delle superficie S' per le quali si ha:

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{aV+b} - \frac{1}{aU+b} \right) \left\{ \frac{du^2}{a(aU+b)} + \frac{dv^2}{a(aV+b)} \right\}, \tag{15}$$

ove a e b sono costanti tali che $aU+b$ e $aV+b$ siano, almeno in qualche parte, positivi insieme ad $U-V$, U essendo positivo.

Ora, queste funzioni U e V sono già state determinate dal signor LIOUVILLE nella Memoria *Sur quelques cas particuliers où les equations du mouvement d'un point materiel peuvent s'intégrer* (Journal de Liouville - *Annali di Matematica*, tomo III.

ville, 1846), e si riducono alle quattro forme seguenti:

- 1.^a $U=1, \quad V=0,$
- 2.^a $U=e^{2u}, \quad V=0,$
- 3.^a $U=u^2, \quad V=-v^2,$
- 4.^a $U=\alpha^2 \cos^2 hu, \quad V=\alpha^2 \cos^2 v, \quad (\alpha \text{ cost;}) \quad (*)$,

per le quali le variabili coordinate u e v (come avremo occasione di vedere anche applicando i risultati dei §§ 2 e 3) corrispondono rispettivamente 1.^o al sistema di coordinate cartesiane ortogonali; 2.^o al sistema di coordinate polari; 3.^o a quello delle coordinate paraboliche, formato di due serie di parabole che hanno lo stesso fuoco e lo stesso asse e sono volte in senso opposto, in modo da incontrarsi ad angolo retto; 4.^o a quello delle coordinate ellittiche (generali) formato da ellissi e iperbole omofocali.

Ora, calcolando la curvatura K delle superficie corrispondenti (15) colla formola:

$$K = \frac{1}{4(U-V)^3} \left\{ [U'^2(3aU - aV + 2b) - 2U''(U-V)(aU+b)](aV+b)^2 + \right. \\ \left. + [-V'^2(aU - 3aV - 2b) + 2V''(U-V)(aV+b)](aU+b)^2 \right\}$$

che si ottiene dalla formola generale della curvatura delle superficie applicata alla (15), si trova che: nel primo caso si ha, come è bene evidente, $K=0$; nel secondo $K=ab^2$; nel terzo $K=a^2b$; e nel quarto

$$K = ab(b + a\alpha^2);$$

(*) Volendo ritrovare qui queste forme di U e V , si osserverebbe che, calcolando la curvatura delle superficie (14), si trova che affinché sia nulla si deve avere:

$$UU'' - U'^2 + VV'' - V'^2 = VU'' + V''U$$

e perciò:

$$V'U''' + V'''U = 0,$$

e questa dà i seguenti casi di:

$$U' \text{ o } V' = 0, \quad U''' = V''' = 0, \quad \frac{U'''}{U'} = -\frac{V'''}{V'} = c,$$

essendo c una costante reale; e con queste, mandando via alcuni termini col sostituire alle variabili u e v le altre $\alpha'u + \beta$, e $\alpha'v + \beta'$ ove α , α' , β e β' sono costanti reali scelte convenientemente, si trova con facilità che il primo caso conduce alle due forme prima e seconda di U e V , il secondo conduce alla terza, e il terzo alla quarta.

e quindi si conchiude che le superficie corrispondenti (15) hanno tutte la curvatura costante (positiva, nulla o negativa), e questo costituisce appunto il teorema del prof. BELTRAMI.

8. Entriamo ora in maggiori dettagli sopra queste rappresentazioni geodetiche delle superficie di curvatura costante (positiva, nulla o negativa) sul piano, studiando partitamente i quattro casi precedenti.

1.° $U=1, V=0$. In questo caso $K=0$, e la superficie su cui si fa la rappresentazione del piano

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

è un altro piano (o una superficie sviluppabile). Le direzioni principali sui due piani sono rette ortogonali (che sono anche queste ellissi e iperbole geodetiche rispetto a due rette ugualmente inclinate su esse, una da una parte e l'altra dall'altra); e se si chiamano x e y le coordinate cartesiane ortogonali nel primo piano, x_1, y_1 quelle del secondo, e si suppone dapprima $x=u, y=v$, si trova facilmente che si ha la corrispondenza:

$$x_1 = ax + by + c, \quad y_1 = a'x + b'y + c',$$

ove a, b, c, a', b' e c' sono costanti tali che $ab + a'b' = 0$ e $a^2 + a'^2$ e $b^2 + b'^2$ non sono l'unità.

Queste formole non mutano di forma cangiando gli assi coordinati, e siamo evidentemente nel caso delle trasformazioni omografiche, nelle quali la retta all'infinito della prima figura ha per omologa la retta all'infinito della seconda (figure affini). Per essere poi in questo caso $\sqrt{E'G'} = g\sqrt{EG}$, con g costante, si ritrova la proprietà che ha questa trasformazione di conservare inalterati i rapporti delle aree; e, pei risultati precedenti, si vede anche che essa è la sola proiezione geodetica di una superficie su di un'altra nella quale questa proprietà si trova verificata.

2.° $U=e^{2u}, V=0$. In questo caso $K=ab^2$, e secondochè a è positiva o negativa, siamo nel caso delle superficie di curvatura costante positiva o negativa. Le direzioni principali sul piano sono le linee che costituiscono il sistema di coordinate polari; sulle superficie di curvatura costante positiva sono le linee che, nella deformazione della superficie, si trasformano nei meridiani e nei paralleli della sfera, e da questo si deduce facilmente che nel caso della sfera l'attuale proiezione è quella centrale di LAGRANGE. Sulle superficie di curvatura costante negativa poi le direzioni principali

sono tali che, colla deformazione della superficie, possono ridursi ai meridiani e ai paralleli delle superficie di rivoluzione, per le quali si ha:

$$ds^2 = dt^2 + \text{sen}^2 h \frac{t}{b\sqrt{a}} d\omega^2;$$

e perciò i meridiani e i paralleli delle altre due classi di superficie di rivoluzione di curvatura costante negativa (*) non costituiscono le direzioni principali quando si rappresentano geodeticamente sul piano. Esse però costituiscono le direzioni principali quando si considerano le loro rappresentazioni geodetiche su altre superficie di rivoluzione, che, per ciò che precede, può dirsi a priori che devono essere sferiche o di curvatura costante negativa e delle stesse classi, e che si trovano colla formola del § 7, 4.º

3.º $U = u^2$, $V = -v^2$. In questo caso $K = -a^2 b$, e poichè b non può ora essere negativo o nullo, le superficie corrispondenti (15) avranno la curvatura costante e negativa. Le direzioni principali sul piano sono due serie di parabole che hanno lo stesso fuoco e lo stesso asse e sono volte in sensi opposti, in modo da incontrarsi ad angolo retto, come si vede anche coll'applicare il teorema del § 2, il quale ci dice che per una delle curve basi può prendersi il punto ($u = 0$, $v = 0$), e per l'altra la curva $u^2 - v^2 = \text{cost}$; che è una retta, ecc.

Per avere ora anche le direzioni principali sulle superficie di curvatura costante negativa, osserveremo in generale che, siccome per le superficie (15) la costante h che entra nelle equazioni (2) delle curve basi deve essere positiva, possiamo indicarla con c^2 , e allora le equazioni di queste curve basi, per a positivo, sono comprese nella seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{1 - c^2(aV + b)}}{aV + b} dv \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{c^2(aU + b) - 1}}{aU + b} du = \text{cost}; \quad (16)$$

e per a negativo nell'altra:

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\sqrt{1 - c^2(aU + b)}}{aU + b} du \pm \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\sqrt{c^2(aV + b) - 1}}{aV + b} dv = \text{cost}; \quad (17)$$

e per queste, nel caso attuale di $U = u^2$, $V = -v^2$, supponendo $c^2 = \frac{1}{b}$ si

(*) Vedi la mia Memoria *Sulle superficie di curvatura costante*. Giorn. di Matem. di Napoli, 1865.

avrà, qualunque sia a :

$$\log(b - av^2) \pm \log(b + au^2) = \text{cost};$$

per la equazione delle curve basi; e di qui si vede che in ogni caso vi ha un fuoco ($u=0, v=0$) che è altresì il punto di similitudine nelle parti infinitesime, § 7, 2.º, e l'altra curva base è una delle curve parallele rappresentate dalla equazione

$$(b + au^2)(b - av^2) = \text{cost};$$

tanto per a positivo che per a negativo.

4.º $U = \alpha^2 \cos^2 hu, V = \alpha^2 \cos^2 v$. In questo caso $K = ab(b + a\alpha^2)$ e K può essere positivo, nullo o negativo. Le direzioni principali sul piano P sono ellissi e iperbole omofocali, come si vede anche applicando il teorema del § 2, il quale ci dà le seguenti curve basi:

$$\int \sqrt{\alpha^2 \cos^2 hu - c_1^2} du \pm \int \sqrt{c_1^2 - \alpha^2 \cos^2 v} dv = \text{cost};$$

che, quando si prenda $c_1^2 = \alpha^2$, e si suppongano zero le costanti dei secondi membri e quelle portate dalle integrazioni, vengono ad avere le seguenti equazioni:

$$a \cos hu \mp a \cos v = 0,$$

le quali, essendo soddisfatte rispettivamente soltanto da $u=0, v=0$, e $u=0, v=\pi$, ci mostrano che si hanno i due fuochi $F(u=0, v=0)$, $F'(u=0, v=\pi)$.

Inoltre per lo stesso teorema il parametro ellittico, o grand'asse, è $2\alpha \cos hu$, e l'iperbolico, o asse reale, è $2\alpha \cos v$, e la distanza focale è 2α , perchè ai due punti F e F' , $2\alpha \cos hu$, e $2\alpha \cos v$ sono in valore assoluto eguali a 2α ; e perciò prendendo un sistema di assi ortogonali Ox, Oy diretti secondo gli assi di queste coniche, e supponendo che l'asse x sia quello dei fuochi F, F' , le loro equazioni saranno le seguenti:

$$\frac{x^2}{\alpha^2 \cos^2 hu} + \frac{y^2}{\alpha^2 \sin^2 hu} = 1, \quad \frac{x^2}{\alpha^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{\alpha^2 \sin^2 v} = 1,$$

e si potrà prendere:

$$x = \alpha \cos v \cos hu, \quad y = \alpha \sin v \sin hu, \quad (18)$$

lasciando che u vada da $-\infty$ a ∞ e v da zero a π , con che ad ogni si-

stema di valori di u e v entro questi limiti corrisponderà un sol punto del piano, la curva $v = \frac{\pi}{2}$ sarà appunto l'asse y , la curva $u = 0$ sarà la porzione FF' dell'asse x , e la curva $v = 0$ sarà composta delle altre due porzioni indefinite $F\infty, F' - \infty$ di questo asse.

Passando ora alle superficie (15) corrispondenti a questo caso, quando a e b sono qualunque, dirò soltanto che dividendo, quando occorra, la rappresentazione in due parti onde i coefficienti di du^2 e dv^2 non divengano infinite nel campo che si considera, e prendendo nelle (16) e (17) le costanti dei secondi membri uguali allo zero e

$$c^2 = \frac{1}{b + a\alpha^2},$$

ciò che può farsi perchè $b + a\alpha^2$ non può essere nullo o negativo, si troverebbe che per le curve basi delle linee u e v possono prendersi ancora due punti (che sono altresì punti di similitudine nelle parti infinitesime); e quindi su queste superficie le direzioni principali sono ellissi e iperbole geodetiche omofocali, e nel caso della sfera sono le ordinarie ellissi e iperbole sferiche omofocali.

9. Studierò ora specialmente il caso di $K = 0$ che corrisponde a $b = 0$, con a positivo, giacchè non può essere nè $a = 0$, nè $b = -a\alpha^2$. In questo caso la superficie su cui si fa la rappresentazione del piano P è un altro piano P' , o una superficie sviluppabile; e quindi riferendoci al piano P' , e osservando che K è zero anche nel caso di $U = 1, V = 0$, e in questo caso abbiamo trovato le trasformazioni omografiche nelle quali la retta all'infinito della prima figura ha per corrispondente la retta all'infinito della seconda, si può dire che le attuali rappresentazioni geodetiche (che evidentemente sono differenti da queste) saranno le trasformazioni omografiche che nella seconda figura portano a distanza finita i punti che nella prima erano situati all'infinito, e che, per distinguerle dalle precedenti, le dirò con CHASLES trasformazioni omografiche generali.

10. Ora, per lo studio di questa trasformazione e per potere ritrovare effettivamente le formole di essa in coordinate cartesiane, è utile di studiare prima il piano P' quando si considera come definito dal suo elemento lineare:

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{\beta^2 \cos^2 v} - \frac{1}{\beta^2 \cos^2 hu} \right) \left(\frac{\alpha^2 du^2}{\beta^2 \cos^2 hu} + \frac{\alpha^2 dv^2}{\beta^2 \cos^2 v} \right),$$

ove α e β sono costanti reali (β colle notazioni che già avevamo essendo

$\frac{1}{a^2 \alpha}$), e si suppone che (come su P) u vada da $-\infty$ a ∞ e v da 0 a π , e ogni sistema di valori di u e v (entro questi limiti) determini un solo punto.

Per questo, osservando che i coefficienti di du^2 e dv^2 in ds'^2 divengono infiniti per $v = \frac{\pi}{2}$, considereremo separatamente la porzione del piano entro cui v va da 0 a $\frac{\pi}{2}$ da quella entro cui va da π a $\frac{\pi}{2}$, u andando sempre da $-\infty$ a ∞ ; e cominceremo dal considerare la prima porzione.

In questa porzione le curve basi (17) relative alle linee u e v , quando si prenda $c^2 = \frac{1}{\beta^2}$, sono le seguenti:

$$\frac{\alpha}{\beta^3 \cos v} + \frac{\alpha}{\beta^3 \cosh u} = \text{cost};$$

e quindi per una delle curve basi può prendersi il fuoco $f(u=0, v=0)$, e l'altra sarà una delle curve parallele rappresentate dalla equazione:

$$\frac{\alpha}{\beta^3 \cos v} + \frac{\alpha}{\beta^3 \cosh u} = c, \tag{20}$$

ove ritenendo che α e β siano positivi, c deve essere una costante positiva; e poichè queste curve, avendo la loro curvatura geodetica costante e $= \frac{1}{c}$, sono cerchi di raggio c (col centro f_1 fuori del campo che si considera), si conclude che le linee u e v sono coniche o porzioni di coniche omofocali (aventi uno dei fuochi f_1 fuori del nostro campo).

Ora, considerando il cerchio (20), l'arco σ delle rette normali ad esso, contato a partire da esso fino al punto $M(u, v)$ è (§ 3, I):

$$\sigma = \frac{\alpha}{\beta^3 \cos v} + \frac{\alpha}{\beta^3 \cosh u} - c;$$

e poichè tutti i cerchi concentrici (20) sono tanto più grandi quanto più c è grande, σ sarà positivo quando M è esterno al detto cerchio, e la distanza $f_1 M$ sarà:

$$f_1 M = \sigma + c = \frac{\alpha}{\beta^3 \cos v} + \frac{\alpha}{\beta^3 \cosh u}.$$

La lunghezza fM poi delle rette uscenti da f è (§ 3, I):

$$fM = \frac{\alpha}{\beta^3 \cos v} - \frac{\alpha}{\beta^3 \cosh u};$$

quindi sarà:

$$fM + f_1M = \frac{2\alpha}{\beta^3 \cos v}, \quad f_1M - fM = \frac{2\alpha}{\beta^3 \cosh u};$$

e perciò le linee v saranno ellissi e le u saranno iperbole; e, condotta la retta dei fuochi ff_1 (che è la normale al cerchio (20) passante per f) e prolungatala indefinitamente, la curva $u = 0$, che è geodetica, sarà la porzione indefinita di questa retta non compresa fra i fuochi, e la $v = 0$ (che è pure geodetica) sarà l'altra porzione (limitata) di ff_1 compresa nel campo che si considera; e la linea $u = \pm \infty$ sarà la retta oy_1 perpendicolare sul mezzo o di ff_1 e alla distanza $\frac{\alpha}{\beta^3}$ da f , e sarà perciò l'altro asse delle nostre coniche.

Ora, la parte superiore oy_1 di questo asse, e la parte $of\infty$ dell'asse dei fuochi (a destra, per esempio, di oy_1) determinano un quadrante indefinito del piano P' nel quale ad ogni punto corrisponde un solo valore per v compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, e uno per u , che, per la continuità, sarà unico e positivo se si fissa che in un dato punto di questo quadrante u sia positivo; e viceversa ad ogni valore positivo di u accoppiato con un valore fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ di v corrisponderà un punto e uno solo di questo quadrante, talchè in esso u prenderà tutti i valori positivi e v tutti i valori fra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Ora, le coniche u e v che colla loro intersezione determinano i punti di questo quadrante, determinano pure i punti degli altri quadranti; quindi, osservando che le curve corrispondenti ad u positivo sono le stesse di quelle corrispondenti ad u negativo, se si vuole che a sistemi differenti di valori di u e v corrispondano punti differenti, avendo già supposto che nel quadrante superiore u sia positivo, basterà fissare che le linee u per u positivo sono soltanto i semi-rami d'iperbole al disopra di of , e per u negativo sono i semi-rami inferiori, e allora i punti pei quali u è positivo saranno quelli del quadrante superiore, e nella parte superiore di oy_1 sarà $u = \infty$; e i punti pei quali u è negativo saranno quelli del quadrante inferiore, e sulla parte inferiore di oy_1 sarà $u = -\infty$; e così, pei

punti a destra di oy_1 , u andrà da $-\infty$ a ∞ , e v da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e ad ogni coppia di valori di u e v corrisponderà un punto solo e col variare con continuità di u e v varierà pure con continuità la posizione del punto, ad esclusione dei punti della porzione di retta of , lungo la quale u passa ad un valore positivo al corrispondente negativo col passare dal punto del quadrante superiore all'inferiore.

Analoghe considerazioni valgono per la porzione del piano P' in cui v va da π a $\frac{\pi}{2}$; e ora, supponendo che i punti di questa porzione siano a sinistra della retta analoga a oy_1 , e riunendo le due porzioni lungo queste rette, in modo che la porzione $u = -\infty$ della seconda retta venga sulla porzione $u = \infty$ della prima, e viceversa, si verrà a ricuoprire tutto il piano P' ; e a sinistra di oy_1 , v andrà da π a $\frac{\pi}{2}$ e u sarà negativo nel quadrante superiore e positivo nell'inferiore, e traversando l'asse oy_1 per andare da destra a sinistra, u al disopra di of passerà da ∞ a $-\infty$, e al disotto da $-\infty$ a ∞ . I fuochi poi delle curve u e v a sinistra di oy_1 (come si trova col metodo precedente) saranno gli stessi f, f_1 delle coniche a destra; e poichè il grand'asse delle ellissi a destra è $\frac{2\alpha}{\beta^3 \cos v}$, e quello delle ellissi a sinistra è $-\frac{2\alpha}{\beta^3 \cos v}$, evidentemente in uno stesso punto di oy_1 , v avrà due valori supplementari, e così in ogni punto di oy_1 vi saranno riuniti due valori tanto di u che di v , e in v si avrà una discontinuità che potrà togliersi quando si consideri oy_1 come formata di due rette distinte che si uniscono all'infinito, e una appartenente alla porzione a destra e l'altra alla porzione a sinistra, giacchè allora partendo da o sulla prima col valore zero di v si arriva all'infinito col valore $\frac{\pi}{2}$ di v , e entrando sulla retta a sinistra si va con continuità fino a π e allora si ritorna in o ; e dopo v va diminuendo e riprende il valore $\frac{\pi}{2}$ all'infinito dalla parte inferiore di oy_1 , e rientrando poi a destra si ritorna in o col valore zero. Lungo ff_1 poi si ha una discontinuità in u , e questa vien tolta quando ff_1 si consideri come formata di due rette che si riuniscono in f e f_1 (ove $u = 0$) ecc.

Dietro queste considerazioni, se si prendono per assi coordinati x_1, y_1 le rette oy_1, of , si troveranno senza difficoltà i valori di x_1, y_1 espressi per u e v .

Infatti, il grand'asse delle ellissi v a destra di oy_1 essendo $\frac{2x}{\beta^3 \cos v}$, e quello reale delle iperbole u essendo $\frac{2x}{\beta^3 \cos hu}$, e la distanza focale essendo $\frac{2x}{\beta^3}$, le equazioni delle stesse curve saranno le seguenti:

$$x_1^2 \cos^2 v + y_1^2 \cot^2 v = \frac{\alpha^2}{\beta^6}, \quad x_1^2 \cos^2 hu - y_1^2 \cot^2 hu = \frac{\alpha^2}{\beta^6},$$

e varranno anche per le curve a sinistra; e per questo le espressioni cercate di x_1 , e y_1 in funzione di u e v in tutto il piano P' saranno le seguenti:

$$x_1 = \frac{x}{\beta^3 \cos v \cosh u}, \quad y_1 = \frac{\alpha \tan v \tanh u}{\beta^3}. \quad (22)$$

Osservazione. Notiamo che avremmo potuto immaginare distribuiti in altro modo nel piano P' i punti corrispondenti ai varii sistemi di valori di u e v , come, per esempio, potevamo fare in modo che, restando nel quadrante superiore a destra di oy_1 i punti pei quali u è positivo, e v è compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, si avessero nel quadrante superiore a sinistra i punti pei quali u è negativo e v è ancora compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, ecc.; ma allora le formole (21) che abbiamo trovato non avrebbero servito per tutti i punti del piano P' , e nella rappresentazione di P su P' una stessa retta di P sarebbe stata rappresentata in parte sopra una retta di P' e in parte sopra un'altra retta, ecc.

11. Tornando ora allo studio della nostra rappresentazione geodetica del piano P sul piano P' , osserveremo che, per ciò che precede, le direzioni principali sui due piani sono ellissi e iperbole omofocali, e gli assi dei fuochi reali per le (18) e (21) sono rette corrispondenti, mentre l'asse dei fuochi immaginari su ciascun piano è la retta che corrisponde ai punti all'infinito dell'altro. E per le (18) e (21) la corrispondenza fra i punti dei due primi piani in coordinate cartesiane ortogonali è data dalle formole:

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^3 x}, \quad y_1 = \frac{\alpha y}{\beta^3 x}, \quad (22)$$

le quali, non ostante gli assi particolari che qui si hanno, contenendo due costanti arbitrarie α e β , sono appunto quelle delle trasformazioni omogra-

fiche generali, giacchè per ognuna di queste trasformazioni omografiche, se η e η_1 sono le rette della prima e della seconda figura che corrispondono rispettivamente ai punti all'infinito dell'altra, le rette perpendicolari ad η della prima figura vengono rappresentate nella seconda dalle rette divergenti da un punto di η , e quindi esiste una retta ξ perpendicolare a η che viene rappresentata da una retta ξ_1 perpendicolare a η_1 , e prendendo ξ e η , ξ_1 e η_1 per assi coordinati si hanno appunto le formole (22).

Inoltre osserviamo che i fuochi reali delle coniche u e v sulle due figure sono punti corrispondenti e sono quelli nei quali è conservata la similitudine nelle parti infinitesime § 7, 2°, e le loro ascisse per le coniche della prima figura sono uguali a $\pm\alpha$, e per quelle della seconda sono $\pm\frac{\alpha}{\beta^3}$. Le ordinate poi dei fuochi immaginari delle stesse coniche u e v per la prima figura sono $\pm\alpha\sqrt{-1}$, e per la seconda $\pm\frac{\alpha}{\beta^3}\sqrt{-1}$; e quindi, per le formole precedenti, i fuochi immaginari delle coniche u e v dell'una figura corrispondono ai punti all'infinito dell'altra per i quali $\frac{y}{x} = \sqrt{-1}$, cioè ai punti circolari all'infinito; e perciò riassumendo si può dire che: Nelle trasformazioni omografiche generali le linee ortogonali della prima figura che restano ortogonali nella seconda sono ellissi e iperbole omofocali che nella trasformazione si cangiano in iperbole e ellissi pure omofocali, e l'asse dei fuochi immaginari di queste coniche su ciascuna figura è la retta che corrisponde ai punti all'infinito dell'altra; mentre gli assi dei fuochi reali sono le rette perpendicolari all'altro asse che sono al tempo stesso rette corrispondenti. I fuochi reali poi nelle due figure sono punti corrispondenti, e sono quelli nei quali si ha la similitudine nelle parti infinitesime; invece i fuochi immaginari delle coniche dell'una figura sono i punti che corrispondono a quelli circolari all'infinito dell'altra; e se supponendo che gli assi y e y_1 siano quelli dei fuochi immaginari e x , x_1 quelli dei fuochi reali, le formole di trasformazione sono le seguenti:

$$x_1 = \frac{a}{x}, \quad y_1 = b \frac{y}{x} \quad (23)$$

la distanza focale delle coniche della prima figura è $\frac{a}{b}$, e quella

delle coniche della seconda figura è $2b$; e gli assi dei fuochi reali di due coniche corrispondenti delle due figure sono inversamente proporzionali e il loro prodotto costante è uguale al prodotto a delle distanze focali.

Inoltre, dall'essere a e b due costanti arbitrarie, si vede di qui che ogni sistema di ellissi e iperbole omofocali del piano, con una conveniente trasformazione omografica generale, può trasformarsi in qualunque altro sistema di iperbole e ellissi pure omofocali del piano; e se $2c$ e $2c'$ sono le distanze focali di questi due sistemi di coniche omofocali, prendendo gli assi coordinati come precedentemente, le formole della corrispondente trasformazione omografica sono le seguenti:

$$x_1 = \frac{cc'}{x}, \quad y_1 = c' \frac{y}{x}.$$

12. Adesso servendosi delle formole che si avrebbero da ciò che precede per gli elementi lineari corrispondenti di due figure omografiche, in coordinate u e v , e applicando le formole della teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra (*), quelle che danno la curvatura geodetica di una linea tracciata su una superficie ecc., potremmo trovare alcune proprietà delle trasformazioni omografiche, la relazione che lega i raggi di curvatura di due linee corrispondenti, ecc. Io non mi tratterò però a fare queste ricerche, e terminerò col dare una proprietà delle trasformazioni omografiche che risulta subito dalle formole (23).

Osservo che se nel piano P si considera il cerchio:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2;$$

per le (23), la curva corrispondente su P' sarà la conica:

$$(p^2 - r^2)x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}y_1^2 - \frac{2aq}{b^2}x_1y_1 - 2apx_1 + a^2 = 0;$$

e onde sia un cerchio bisognerà che si abbia: $q = 0$, $r^2 = p^2 - \frac{a^2}{b^2}$, e quindi $p^2 \geq \frac{a^2}{b^2}$; e poichè queste condizioni portano che il cerchio abbia il centro sull'asse delle x , e al di fuori dei fuochi delle coniche principali, e il suo raggio sia uguale al semi-asse minore della ellisse principale che passa pel

(*) Vedi mia Memoria citata al § 4.

detto centro, si conclude che: Nelle trasformazioni omografiche generali i soli cerchi dell'una figura che restano cerchi nell'altra figura sono quelli che hanno il centro sull'asse dei fuochi reali delle coniche principali e al di fuori di questi fuochi, e hanno il raggio uguale al semi-asse minore della ellisse principale che passa pel loro centro (*).

Pisa, ottobre 1869.

(*) Dopo la consegna del presente lavoro alla Direzione di questi Annali, il sig. SMITH ha pubblicato nei *Proceedings of the London Mathematical Society* una sua Memoria *On the focal properties of homographic figures*, nella quale egli ottiene per altra via quasi tutte le proprietà che ho date in questi ultimi paragrafi sulle rappresentazioni omografiche.

Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde.

(par M. MICHAEL ROBERTS, à Dublin.)

On sait, qu'en supposant qu'une relation de la forme $\alpha\beta = \gamma\delta$ subsiste entre les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

on a $A^2D = C^2$: en sorte qu'en posant $x = D^{\frac{1}{4}}x'$, cette équation se transforme dans

$$x'^4 + \frac{A}{D^{\frac{1}{4}}}x'^3 + \frac{B}{D^{\frac{1}{2}}}x'^2 + \frac{A}{D^{\frac{1}{4}}}x' + 1 = 0,$$

et dans cette dernière les termes placés à égale distance du premier et du dernier ont les mêmes coefficients. Remarquons aussi, qu'en désignant par R une fonction rationnelle de z , l'intégrale

$$\int \frac{Rdz}{\sqrt{e + fz^2 + gz^4 + fz^6 + ez^8}}$$

dépend des fonctions elliptiques. (Voir LACROIX, *Traité du Calcul*, t. II, pag. 69).

Cela posé, considérons le système des trois surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{I}$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \tag{II}$$

$$\frac{x^2}{v^2} - \frac{y^2}{b^2 - v^2} - \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1 \tag{III}$$

Les demi-axes de l'ellipsoïde (I) sont a , $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{a^2 - c^2}$, pris en ordre de grandeur, en sorte qu'on a $a > c > b$: et d'après la théorie de surfaces homofocales, $\mu \geq b$, $\mu \leq c$, $\nu \geq 0$, $\nu \leq b$.

On sait que les différentielles des arcs des courbes d'intersection des surfaces (I), (II) et des surfaces (I), (III), ou bien des lignes de courbure de la surface (I), ont respectivement les valeurs:

$$\sqrt{\frac{(a^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} d\nu, \quad \sqrt{\frac{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} d\mu,$$

et, en nous rappelant les théorèmes mentionnés au commencement de cet article, on voit que, si μ ou ν prend une des valeurs $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{bc}{a}$, alors les arcs des lignes correspondantes de courbure de l'ellipsoïde (I) dépendent des fonctions elliptiques. Mais, en ayant égard aux limites de la quantité μ , nous voyons que de ces valeurs la seule qu'on peut admettre est $\frac{ab}{c}$, qui doit encore satisfaire à la condition $c^2 - ab > 0$: en sorte que pour l'existence d'une ligne de courbure (μ) sur l'ellipsoïde (I), dont les arcs dépendent des fonctions elliptiques, il faut qu'on ait $c^2 - ab > 0$. (Le cas des sections principales est toujours excepté.) En admettant que cette relation subsiste, la ligne de courbure dont il s'agit se trouve situé sur l'hyperboloïde gauche

$$\frac{x^2}{a^2 b^2} + \frac{y^2}{b^2 (a^2 - c^2)} - \frac{z^2}{c^2 - a^2 b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Nous allons maintenant chercher l'expression de l'arc de la courbe d'intersection de l'ellipsoïde (I) et de cette dernière surface, et pour cela nous emploierons les notations dont j'ai fait usage dans mon Mémoire inséré dans ce Journal, tom. II, pag. 13. Posons donc $x = \frac{b}{a}$, $x' = \frac{b}{\mu}$, $x'' = \frac{b}{c}$: dans le cas actuel on a $x = x' x''$: et en mettant $\nu = b \sin \theta$, un point quelconque sur la courbe dont il s'agit est déterminé par l'angle θ . Soient aussi

$$\Delta(\theta) = \sqrt{(1 - x'^2 \sin^2 \theta)(1 - x''^2 \sin^2 \theta)(1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \theta)},$$

$$L(\theta) = \int \frac{d\theta}{\Delta(\theta)}, \quad M(\theta) = \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\Delta(\theta)}, \quad N(\theta) = \int \frac{\sin^4 \theta d\theta}{\Delta(\theta)},$$

l'origine de ces intégrales étant zéro.

Pour trouver l'expression de $L(\theta)$ par des fonctions elliptiques, nous posons $\sqrt{x'x''} \sin \theta = t$, ce qui donne

$$L(\theta) = \frac{1}{\sqrt{x'x''}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-pt^2+qt^4-pt^6+t^8}},$$

où

$$p = \frac{(1+x'^2)(1+x''^2)}{x'x''}, \quad q = \frac{2x'^2x''^2+(x'^2+x''^2)(1+x'^2x''^2)}{x'^2x''^2}.$$

Soit maintenant $t + \frac{1}{t} = u$, et parceque l'origine de l'intégrale $L(\theta)$ correspond à une valeur infinie de la quantité u , nous aurons

$$2t = u - \sqrt{u^2 - 4}, \quad \frac{2}{t} = u + \sqrt{u^2 - 4},$$

d'où l'on tire

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-pt^2+qt^4-pt^6+t^8}} = -\frac{1}{2} \int_{\infty}^u \frac{1}{\sqrt{u^4-(p+4)u^2+2+2p+q}} \left(\frac{u du}{\sqrt{u^2-4}} + du \right)$$

ou, en posant $u^2 - 4 = v^2$,

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-pt^2+qt^4-pt^6+t^8}} = -\frac{1}{2} \left\{ \int_{\infty}^u \frac{du}{\sqrt{u^4-(p+4)u^2+2+2p+q}} + \int_{\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{v^4-(p-4)v^2+2-2p+q}} \right\}.$$

Or, on a

$$u^4 - (p+4)u^2 + 2 + 2p + q = \left(u^2 - \frac{(1+x'x'')^2}{x'x''} \right) \left(u^2 - \frac{(x'+x'')^2}{x'x''} \right),$$

$$v^4 - (p-4)v^2 + 2 - 2p + q = \left(v^2 - \frac{(1-x'x'')^2}{x'x''} \right) \left(v^2 - \frac{(x'-x'')^2}{x'x''} \right),$$

et en posant

$$\frac{1}{u} = \frac{\sqrt{x'x''}}{1+x'x''} \sin \theta_1, \quad \frac{1}{v} = \frac{\sqrt{x'x''}}{1-x'x''} \sin \theta_2, \quad m_1 = \frac{x'+x''}{1+x'x''}, \quad m_2 = \frac{x'-x''}{1-x'x''},$$

on obtient

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-pt^2+qt^4-pt^6+t^8}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+x'x''} F(m_1, \theta_1) + \frac{1}{1-x'x''} F(m_2, \theta_2) \right\},$$

et

$$L(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{x'x''}} \left\{ \frac{1}{1+x'x''} F(m_1, \theta_1) + \frac{1}{1-x'x''} (F m_2, \theta_2) \right\}.$$

D'une manière semblable nous trouvons

$$M(\theta) = \frac{1}{(x'x'')^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-pt^2+qt^4-pt^6+t^8}}$$

et le second membre de cette dernière équation est égal à

$$\frac{1}{2(x'x'')^{\frac{3}{2}}} \left\{ \int_{\infty}^u \frac{du}{\sqrt{u^4-(p+4)u^2+2+2p+q}} - \int_{\infty}^v \frac{dv}{\sqrt{v^4-(p-4)v^2+2-2p+q}} \right\},$$

ce qui conduit à la suivante

$$M(\theta) = \frac{1}{2x'x''} \left\{ \frac{1}{1-x'x''} F(m_2, \theta_2) - \frac{1}{1+x'x''} F(m_1, \theta_1) \right\}.$$

On en déduit aussi

$$\begin{aligned} N(\theta) &= \frac{1}{(x'x'')^{\frac{5}{2}}} \int_{\infty}^t \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-pt^2+qt^4-pt^6+t^8}} = \\ &= \frac{1}{2(x'x'')^{\frac{5}{2}}} \left\{ \int_0^u \frac{(u^2-1)du}{\sqrt{u^4-(p+4)u^2+2+2p+q}} - \int_{\infty}^v \frac{(v^2+1)dv}{\sqrt{v^4-(p-4)v^2+2-2p+q}} \right\}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^u \frac{u^2 du}{\sqrt{u^4-(p+4)u^2+2+2p+q}} &= \\ &= \frac{1+x'x''}{\sqrt{x'x''}} \left\{ \cot \theta_1 \sqrt{1-m_1^2 \sin^2 \theta_1} + E(m_1, \theta_1) - F(m_1, \theta_1) \right\}, \\ \int_{\infty}^v \frac{v^2 dv}{\sqrt{v^4-(p-4)v^2+2-2p+q}} &= \\ &= \frac{1-x'x''}{\sqrt{x'x''}} \left\{ \cot \theta_2 \sqrt{1-m_2^2 \sin^2 \theta_2} + E(m_2, \theta_2) - F(m_2, \theta_2) \right\}, \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$N(\theta) = \frac{1}{2(x'x'')^3} \left\{ \begin{aligned} & (1+x'x'') [\cot \theta_1 \sqrt{1-m_1^2 \sin^2 \theta_1} + E(m_1, \theta_1)] - \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{1+x'x''+x'^2x''^2}{1+x'x''} F(m_1, \theta_1) \\ & - (1-x'x'') [\cot \theta_2 \sqrt{1-m_2^2 \sin^2 \theta_2} + E(m_2, \theta_2)] + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1-x'x''+x'^2x''^2}{1-x'x''} F(m_2, \theta_2) \end{aligned} \right\},$$

et en substituant les valeurs de $L(\theta)$, $M(\theta)$, $N(\theta)$ que nous venons de trouver dans l'expression pour l'arc d'une ligne de courbure (u) que j'ai donnée dans ce Journal, t. II, pag. 15, il résulte la formule suivante pour l'arc dont il s'agit

$$\frac{b}{2} \left\{ \frac{1+x'x''}{x'x''} G - \frac{1-x'x''}{x'x''} H + \frac{1-x'^2}{x'^2} K \right\},$$

où

$$\begin{aligned} G &= \cot \theta_1 \sqrt{1-m_1^2 \sin^2 \theta_1} + E(m_1, \theta_1), & H &= \cot \theta_2 \sqrt{1-m_2^2 \sin^2 \theta_2} + F(m_2, \theta_2), \\ K &= F(m_1, \theta_1) + F(m_2, \theta_2). \end{aligned}$$

Les angles θ_1 , θ_2 sont liés par la relation

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{1+x'x''}{1-x'x''}.$$

Nous avons déjà remarqué qu'un point quelconque de la ligne de courbure dont il s'agit est déterminé au moyen de l'angle θ ; or de cet angle proviennent encore deux amplitudes θ_1 , θ_2 , dont les expressions en θ sont les suivantes

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{(1+x'x'') \sin \theta}{1+x'x'' \sin^2 \theta}, & \cos \theta_1 &= \frac{\cos \theta \sqrt{1-x'^2 x''^2 \sin^2 \theta}}{1+x'x'' \sin^2 \theta}, \\ \sqrt{1-m_1^2 \sin^2 \theta_1} &= \frac{\sqrt{(1-x'^2 \sin^2 \theta)(1-x''^2 \sin^2 \theta)}}{1+x'x'' \sin^2 \theta}, \\ \sin \theta_2 &= \frac{(1-x'x'') \sin \theta}{1-x'x'' \sin^2 \theta}, & \cos \theta_2 &= \frac{\cos \theta \sqrt{1-x'^2 x''^2 \sin^2 \theta}}{1-x'x'' \sin^2 \theta}, \\ \sqrt{1-m_2^2 \sin^2 \theta_2} &= \frac{\sqrt{(1-x'^2 \sin^2 \theta)(1-x''^2 \sin^2 \theta)}}{1-x'x'' \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En nous reportant aux valeurs de $L(\theta)$, $M(\theta)$, $N(\theta)$, nous voyons que les équations simultanées

$$\left. \begin{aligned} L(\phi) + L(\psi) + L(\chi) - L(\sigma) - L(\tau) &= 0 \\ M(\phi) + M(\psi) + M(\chi) - M(\sigma) - M(\tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

peuvent être transformées dans les suivantes

$$\left. \begin{aligned} F(m_1, \phi_1) + F(m_1, \psi_1) + F(m_1, \chi_1) - F(m_1, \sigma_1) - F(m_1, \tau_1) &= 0 \\ F(m_2, \phi_2) + F(m_2, \psi_2) + F(m_2, \chi_2) - F(m_2, \sigma_2) - F(m_2, \tau_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dont chacune, indépendamment de l'autre, a une traduction algébrique. On tire facilement des formules connues pour l'addition des fonctions elliptiques

$$\operatorname{cotam}[F(m_1, \phi_1) + F(m_1, \psi_1)] = \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1 \sqrt{1 - m_1^2 \sin^2 \psi_1} - \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sqrt{1 - m_1^2 \sin^2 \phi_1}}{\sin^2 \phi_1 - \sin^2 \psi_1},$$

$$\operatorname{cotam}[F(m_2, \phi_2) + F(m_2, \psi_2)] = \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2 \sqrt{1 - m_2^2 \sin^2 \psi_2} - \sin \psi_2 \cos \psi_2 \sqrt{1 - m_2^2 \sin^2 \phi_2}}{\sin^2 \phi_2 - \sin^2 \psi_2},$$

et on déduit des équations (1)

$$\sin \phi_1 \sin \phi_2 = \frac{(1 - x'^2 x''^2) \sin^2 \phi}{1 - x'^2 x''^2 \sin^4 \phi}, \quad \cos \phi_1 \cos \phi_2 = \frac{\cos^2 \phi (1 - x'^2) x''^2 \sin^2 \phi}{1 - x'^2 x''^2 \sin^4 \phi},$$

$$\sqrt{(1 - m_1^2 \sin^2 \phi_1)(1 - m_2^2 \sin^2 \phi_2)} = \frac{(1 - x'^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \phi)}{1 - x'^2 x''^2 \sin^4 \phi},$$

$$\sin \phi_1 \cos \phi_1 = \frac{(1 + x' x'') \sin \phi \cos \phi \sqrt{1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \phi}}{(1 + x' x'' \sin^2 \phi)^2},$$

$$\sin \phi_2 \cos \phi_2 = \frac{(1 - x' x'') \sin \phi \cos \phi \sqrt{1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \phi}}{(1 - x' x'' \sin^2 \phi)^2},$$

$$\sqrt{(1 - m_1^2 \sin^2 \phi_1)(1 - m_2^2 \sin^2 \psi_2)} = \frac{\sqrt{(1 - x'^2 \sin^2 \phi)(1 - x''^2 \sin^2 \phi)(1 - x'^2 \sin^2 \psi)(1 - x''^2 \sin^2 \psi)}}{(1 + x' x'' \sin^2 \phi)(1 - x' x'' \sin^2 \psi)},$$

d'où, en posant

$$D = \frac{1 - x'^2 x''^2}{(1 - x'^2 x''^2 \sin^4 \phi)^2 (1 - x'^2 x''^2 \sin^4 \psi)^2},$$

on tire

$$\begin{aligned} & (\sin \phi_1 \cos \phi_1 \sqrt{1 - m_1^2 \sin^2 \psi_1} - \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sqrt{1 - m_1^2 \sin^2 \phi_1}) \\ & \times (\sin \phi_2 \cos \phi_2 \sqrt{1 - m_2^2 \sin^2 \psi_2} - \sin \phi_2 \cos \phi_2 \sqrt{1 - m_2^2 \sin^2 \phi_2}) = \end{aligned}$$

$$= D \left\{ \begin{aligned} & \sin^2 \phi \cos^2 \phi (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi) (1 - \chi'^2 \sin^2 \psi) (1 - \chi''^2 \sin^2 \psi) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^4 \psi) \\ & + \sin^2 \psi \cos^2 \psi (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \psi) (1 - \chi'^2 \sin^2 \phi) (1 - \chi''^2 \sin^2 \phi) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^4 \phi) \\ & - 2(1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi) \sin \phi \cos \phi \sin \psi \cos \psi \Delta(\phi) \Delta(\psi). \end{aligned} \right\}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^4 \phi) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^4 \psi) &= \\ &= (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \psi) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi) - \chi'^2 \chi''^2 \cos^2 \psi (\sin^2 \phi - \sin^2 \psi) \end{aligned}$$

en sorte que la précédente expression devient

$$D \left\{ \begin{aligned} & (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi) [\sin \phi \cos \phi \Delta(\psi) - \sin \psi \cos \psi \Delta(\phi)]^2 - \\ & - \chi'^2 \chi''^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi (\sin^2 \phi - \sin^2 \psi) [\sin^2 \phi (1 - \chi'^2 \sin^2 \psi) (1 - \chi''^2 \sin^2 \psi) - \\ & \quad - \sin^2 \psi (1 - \chi'^2 \sin^2 \phi) (1 - \chi''^2 \sin^2 \phi)] \end{aligned} \right\}$$

et après quelques réductions cette dernière peut s'écrire sous la forme

$$D (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi) \left\{ [\sin \phi \cos \phi \Delta(\psi) - \sin \psi \cos \psi \Delta(\phi)]^2 - \right. \\ \left. - \chi'^2 \chi''^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi (\sin^2 \phi - \sin^2 \psi)^2 \right\}.$$

Mais on trouve aussi

$$(\sin^2 \phi_1 - \sin^2 \psi_1) (\sin^2 \phi_2 - \sin^2 \psi_2) - \frac{((1 - \chi'^2 \chi''^2) (\sin^2 \phi - \sin^2 \psi) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi))}{(1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^4 \psi) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^4 \phi)},$$

d'où, en remettant pour D sa valeur, et en posant (selon la notation de mon Mémoire, tom. II de ce Journal, pag. 18),

$$\nabla(\phi, \psi) = \frac{\sin \phi \cos \phi \Delta(\psi) - \sin \psi \cos \psi \Delta(\phi)}{\sin^2 \phi \sin^2 \psi},$$

on déduit

$$\begin{aligned} \cotam [F(m_1, \phi_1) + F(m_1, \psi_1)] \times \cotam [F(m_2, \phi_2) + F(m_2, \psi_2)] &= \\ \frac{\overline{\nabla(\phi, \psi)} - \chi'^2 \chi''^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{(1 - \chi'^2 \chi''^2) (1 - \chi'^2 \chi''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi)}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\chi = \frac{\pi}{2}$, alors $\chi_1 = \chi_2 = \frac{\pi}{2}$, d'où résultent les équations (en nous rappelant (3))

$$\begin{aligned} \tanam [F(m_1, \phi_1) + F(m_1, \psi_1)] \times \tanam [F(m_1, \sigma_1) + F(m_1, \tau_1)] &= \\ = - \frac{1}{\sqrt{1 - m_1^2}} = - \frac{1 + \chi' \chi''}{\sqrt{(1 - \chi'^2)(1 - \chi''^2)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tanam [F(m_2, \phi_2) + F(m_2, \psi_2)] \times \tanam [F(m_2, \sigma_2) + F(m_2, \tau_2)] = \\ = -\frac{1}{\sqrt{1-m_2^2}} = -\frac{1-x'x''}{\sqrt{(1-x'^2)(1-x''^2)}} \end{aligned}$$

en sorte que pour $\chi = \frac{\pi}{2}$ et en supposant que le système (2) a lieu, nous obtenons l'équation suivante

$$\left\{ \frac{\overline{\nabla(\phi, \psi)} - x'^2 x''^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi} \right\} \left\{ \frac{\overline{\nabla(\sigma, \tau)} - x'^2 x''^2 \cos^2 \sigma \cos^2 \tau}{1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \right\} = (1 - x'^2)(1 - x''^2)(1 - x'^2 x''^2).$$

Cette équation que nous venons de tirer de la théorie des fonctions elliptiques, peut se déduire aussi des équations

$$\begin{aligned} \cos \sigma \cos \tau &= \cos \phi \cos \psi \cos \chi + \sin \phi \sin \psi \sin \chi \nabla(\sigma, \sigma), \\ \cos \phi \cos \psi &= \cos \sigma \cos \tau \cos \chi + \sin \sigma \sin \tau \sin \chi \nabla(\phi, \psi), \end{aligned}$$

que j'ai données, tom. II de ce Journal, page 18. En effet, en posant $\chi = \frac{\pi}{2}$ dans ces dernières, on a

$$\nabla(\phi, \psi) = \frac{\cos \phi \cos \psi}{\sin \sigma \sin \tau}, \quad \nabla(\sigma, \tau) = -\frac{\cos \sigma \cos \tau}{\sin \phi \sin \psi},$$

en sorte que nous trouvons

$$\left\{ \frac{\overline{\nabla(\phi, \psi)} - x'^2 x''^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi} \right\} \left\{ \frac{\overline{\nabla(\sigma, \tau)} - x'^2 x''^2 \cos^2 \sigma \cos^2 \tau}{1 - x'^2 x''^2 \sin^2 \sigma \sin^2 \tau} \right\} = \cot^2 \phi \cot^2 \psi \cot^2 \sigma \cot^2 \tau,$$

et il est facile de faire voir que la valeur de cette dernière quantité est $(1 - x'^2)(1 - x''^2)(1 - x'^2 x''^2)$. (Voir tom. II de ce Journal, page 17.)

La valeur de ν pour que l'arc de la ligne de courbure correspondante soit capable d'être exprimé par des fonctions elliptiques est $\frac{bc}{a}$, les valeurs $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ étant inadmissibles: et il existe toujours sur l'ellipsoïde (I) une ligne de courbure (ν) dont l'arc dépend des fonctions elliptiques, et qui est située sur l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2 c^2} - \frac{y^2}{b^2(a^2 - c^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2 - b^2)} = \frac{1}{a^2}.$$

La différentielle de l'arc dont il s'agit a pour expression

$$\sqrt{\frac{(a^2 - \mu^2)(a^2 \mu^2 - b^2 c^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} d\mu,$$

et, en mettant $\mu = t\sqrt{bc}$, $\frac{a^2}{bc} = \alpha$, $\frac{b}{c} = \beta$, elle devient

$$\frac{b\sqrt{bc}}{a} \sqrt{\frac{1 - \alpha\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \alpha^2}{1 - \beta\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \beta^2}} dt.$$

Soit maintenant $t + \frac{1}{t} = u$, ce qui donne

$$2t = u \pm \sqrt{u^2 - 4}.$$

Pour les points de l'arc dont il s'agit, situés entre le sommet O pour lequel $\mu = b$ et le point P pour lequel $\mu = \sqrt{bc}$, il faut prendre le signe inférieur: et pour les arcs comptés depuis ce dernier point jusqu'au sommet Q pour lequel $\mu = c$, le signe supérieur doit être employé. Par conséquent la longueur de l'arc compté depuis le sommet O jusqu'à un point quelconque T sur l'arc OP est exprimée par l'intégrale

$$\frac{1}{2} \sqrt{bc} \int_{\frac{c+b}{\sqrt{bc}}}^u \sqrt{\frac{\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 - u^2}{\left(\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2 - u^2}} \left(du - \frac{u du}{\sqrt{u^2 - 4}} \right)$$

et, en posant $v = \sqrt{u^2 - 4}$, $u = \left(\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) \sin \mathfrak{S}_1$, $v = \left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) \sin \mathfrak{S}_2$,

$$n_1 = \frac{a(c+b)}{a^2+bc}, \quad n_2 = \frac{a(c-b)}{a^2-bc},$$

nous trouvons, en adoptant la notation des fonctions elliptiques et en nous rappelant que pour $\mu = b$ on a $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{arc } OT = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2 - bc}{a} \left(E(n_2) - E(n_2, \mathfrak{S}_2) \right) - \frac{a^2 + bc}{a} \left(E(n_1) - E(n_1, \mathfrak{S}_1) \right) \right\}.$$

Pour trouver la longueur de l'arc OP , soit $\sin \lambda = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}$, et pour le point P nous avons $\mathfrak{S}_1 = \lambda$, $\mathfrak{S}_2 = 0$, en sorte qu'on a

$$\text{arc } OP = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2 - bc}{a} E(n_2) - \frac{a^2 + bc}{a} \left(E(n_1) - E(n_1, \lambda) \right) \right\}.$$

La longueur de l'arc compté du point P et terminé à un point quelconque T' entre P et le sommet Q , pour lequel $\mu=c$, a pour valeur

$$\frac{\sqrt{bc}}{2} \int_0^u \sqrt{\frac{\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 - u^2}{\left(\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2 - u^2}} \left(du + \frac{u du}{\sqrt{u^2 - 4}} \right),$$

d'où l'on déduit

$$\text{arc } P T' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2 + bc}{a} \left(E(n_1, \mathcal{S}_1) - E(n_1, \lambda) \right) + \frac{a^2 - bc}{a} E(n_2, \mathcal{S}_2) \right\}.$$

Pour le sommet Q on a $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \frac{\pi}{2}$, en sorte que nous tirons

$$\text{arc } P Q = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2 + bc}{a} \left(E(n_1) - E(n_1, \lambda) \right) + \frac{a^2 - bc}{a} E(n_2) \right\}.$$

En prenant la somme des arcs OP , PQ , nous obtenons pour le quart de la ligne de courbure, pour laquelle $\nu = \frac{bc}{a}$, la valeur $\frac{a^2 - bc}{a} E(n_2)$: ce qui conduit à la propriété remarquable que la circonférence de la ligne de courbure dont il s'agit est égale à la circonférence d'une ellipse plane dont le demi-axe grand est $\frac{a^2 - bc}{a}$, et dont l'excentricité est $\frac{a(c-b)}{a^2 - bc}$.

On déduit pour l'arc QT' l'expression suivante

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2 - bc}{a} \left(E(n_2) - E(n_2, \mathcal{S}_2) \right) + \frac{a^2 + bc}{a} \left(E(n_1) - E(n_1, \mathcal{S}_1) \right) \right\}.$$

Les angles \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 sont liés par la relation

$$\frac{\cos \mathcal{S}_1}{\cos \mathcal{S}_2} = \frac{c-b}{c+b}.$$

Soient V , V' deux points situés respectivement sur les arcs OP , PQ et soient μ , μ' le demi-axes focaux des hyperboloïdes gauches qui les déterminent: nous appelons points correspondans deux points pour lesquels on a $\mu\mu' = bc$: en vertu de cette relation on a $\frac{\mu}{\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{\mu'}$, en sorte que les angles \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 pour ces points ont les mêmes valeurs. Posons

$$\mu^2 = b^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi, \quad \mu'^2 = b^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi,$$

et pour les points correspondans on aura

$$\tan \phi \tan \psi = \frac{b}{c}.$$

Si V, V' sont deux points correspondans, on trouve

$$\text{arc } QV' + \text{arc } OV = \frac{a^2 - bc}{a} \left(E(n_2) - E(n_2, \mathcal{S}_2) \right)$$

$$\text{arc } QV' - \text{arc } OV = \frac{a^2 + bc}{a} \left(E(n_1) - E(n_1, \mathcal{S}_1) \right).$$

On trouve, en retranchant du quart OQ la somme des arcs OV, QV' , que l'arc VV' terminé par deux points correspondans est égal à $\frac{a^2 - bc}{a} E(n_2, \mathcal{S}_2)$, ou bien à l'arc d'une ellipse plane dont le demi-axe grand est $\frac{a^2 - bc}{a}$ et dont l'excentricité est $\frac{a(c-b)}{a^2 - bc}$.

Il est bon de remarquer que les demi-axes focaux des hyperboloïdes gauches qui passent par chaque point de la ligne de courbure de l'ellipsoïde (I) pour laquelle $\nu = \frac{bc}{a}$ sont égaux aux abscisses correspondantes dirigées suivant l'axe des x .

Dans la première partie de ce Mémoire j'ai démontré qu'en désignant par $a, \sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{a^2 - c^2}$ les demi-axes d'un ellipsoïde, si $c^2 > ab$, il existe une ligne de courbure située sur un hyperboloïde gauche homofocal dont les arcs s'expriment par des fonctions elliptiques. Je me propose maintenant de faire voir, sans supposer que les axes sont assujettis à remplir aucune condition, qu'une ligne de courbure de la même espèce se trouve sur l'ellipsoïde, laquelle jouit de la même propriété.

Pour cela je donnerai quelques formules préliminaires qui sont requises pour la démonstration du théorème que je viens d'énoncer.

Posons maintenant

$$\varepsilon_1 = \frac{f+g}{1+fg}, \quad \varepsilon_2 = \frac{f-g}{1-fg}, \quad \sin \theta_1 = \frac{(1-fg) \sin \theta}{1+fg \sin^2 \theta}, \quad \sin \theta_2 = \frac{(1-fg) \sin \theta}{1-fg \sin^2 \theta},$$

(les quantités f, g sont plus grandes que zéro, et inférieures à l'unité)

$$\Delta(f, g, fg, \theta) = \sqrt{(1 - f^2 \sin^2 \theta)(1 - g^2 \sin^2 \theta)(1 - f^2 g^2 \sin^2 \theta)};$$

on aura

$$\int \frac{d\theta}{\Delta(f, g, fg, \theta)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+fg} F(\epsilon_1, \theta_1) + \frac{1}{1-fg} F(\epsilon_2, \theta_2) \right\}, \quad (1)$$

$$\int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\Delta(f, g, fg, \theta)} = \frac{1}{2fg} \left\{ \frac{1}{1-fg} F(\epsilon_2, \theta_2) - \frac{1}{1+fg} F(\epsilon_1, \theta_1) \right\}, \quad (2)$$

$$\int \frac{\sin^2 \theta \tan^2 \theta d\theta}{\Delta(f, g, fg, \theta)} = \frac{1}{2(1-f^2)(1-g^2)} \left\{ \tan \theta_1 \sqrt{1 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta_1} - E(\epsilon_1, \theta_1) + \right. \\ \left. + \tan \theta_2 \sqrt{1 - \epsilon_2^2 \sin^2 \theta_2} - E(\epsilon_2, \theta_2) \right\} + \frac{1}{2fg} \left\{ \frac{1}{1+fg} F(\epsilon_1, \theta_1) - \frac{1}{1-fg} F(\epsilon_2, \theta_2) \right\}. \quad (3)$$

Posons dans les formules (1), (2), (3) $\sin \theta = \sqrt{-1} \tan \chi$,

et en mettant $f'^2 = 1 - f^2$, $g'^2 = 1 - g^2$, $\eta_1 = \frac{f'g'}{1+fg}$, $\eta_2 = \frac{f'g'}{1-fg}$,

$$\tan \chi_1 = \frac{(1+fg) \tan \chi}{1-fg \tan^2 \chi}, \quad \tan \chi_2 = \frac{(1-fg) \tan \chi}{1+fg \tan^2 \chi},$$

$$\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2}, \chi) =$$

$$\sqrt{(1 - f'^2 \sin^2 \chi)(1 - g'^2 \sin^2 \chi)(1 - f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2 \sin^2 \chi)},$$

nous tirons de ces substitutions

$$\int \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2}, \chi)} = \frac{1}{2fg} \left\{ F(\eta_1, \chi_1) - F(\eta_2, \chi_2) \right\}, \quad (4)$$

$$\int \frac{\sin^2 \chi d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2}, \chi)} = \frac{1}{2fg} \left\{ \frac{1}{1+fg} F(\eta_1, \chi_1) - \frac{1}{1-fg} F(\eta_2, \chi_2) \right\}, \quad (5)$$

$$\int \frac{\sin^4 \chi d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2}, \chi)} = \frac{1}{2f^2 g^2} \left\{ E(\eta_1, \chi_1) + E(\eta_2, \chi_2) \right\} \\ + \frac{1}{2fgf^2 g^2} \left\{ \frac{f^2 + g'^2 - 1 - fg}{1+fg} F(\eta_1, \chi_1) - \frac{f^2 + g'^2 - 1 + fg}{1-fg} F(\eta_2, \chi_2) \right\}. \quad (6)$$

Pour trouver les valeurs des trois intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \chi d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \chi d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)},$$

il faut remarquer qu'en posant $\tan \lambda = \frac{1}{\sqrt{fg}}$, l'angle χ_1 demeure positif depuis $\chi = 0$ à $\chi = \lambda$ et devient négatif depuis $\chi = \lambda$ à $\chi = \frac{\pi}{2}$. Soit aussi σ la valeur de χ_2 pour $\chi = \lambda$. Or nous avons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)} = \int_0^{\lambda} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)} +$$

$$+ \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)},$$

en sorte, qu'en ayant égard à la formule (4), nous trouvons

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)} = \frac{1}{2fg} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi_1}{\sqrt{1 - \eta_1^2 \sin^2 \chi_1}} - \int_0^{\sigma} \frac{d\chi_2}{\sqrt{1 - \eta_2^2 \sin^2 \chi_2}} \right\},$$

$$\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)} = \frac{-1}{2fg} \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\chi_1}{\sqrt{1 - \eta_1^2 \sin^2 \chi_1}} + \int_{\sigma}^0 \frac{d\chi_2}{\sqrt{1 - \eta_2^2 \sin^2 \chi_2}} \right\},$$

et par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)} = \frac{1}{fg} F(\eta_1).$$

D'une manière semblable nous tirons des formules (5), (6)

$$(2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \chi d\chi}{\Delta(f', g', \sqrt{f'^2 + g'^2} - f'^2 g'^2, \chi)} = \frac{1}{fg(1+fg)} F(\eta_1),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \chi d\chi}{\Delta(f, g', \sqrt{f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2}, \chi)} = \frac{1}{f g'^2} \left\{ E(\eta_1) + \frac{f'^2 + g'^2 - 1 - f g'}{f g (1 + f g)} F(\eta_1) \right\}$$

Considérons maintenant le système des trois surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (7)$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \quad (8)$$

$$\frac{x^2}{v^2} - \frac{y^2}{b^2 - v^2} - \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1. \quad (9)$$

Si nous mettons $f' = \frac{b}{a}$, $g' = \frac{b}{c}$, en tirant de l'équation

$$\frac{b^2}{\mu^2} = f'^2 + g'^2 - f'^2 g'^2$$

la valeur de μ , nous trouvons

$$\mu = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}.$$

En posant $v = b \sin \chi$ et en rappelant la formule que j'ai donnée pour l'arc d'une ligne de courbure (μ), tom. II de ce Journal, page 15, on déduit des équations (4), (5), (6) que les arcs de la ligne de courbure de l'ellipsoïde (7) qui se trouve sur l'hyperboloïde gauche dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2 c^2} + \frac{y^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2 - b^2)} = \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2},$$

dépendent des fonctions elliptiques.

En posant maintenant $\eta_1 = u^2$, $\eta_2 = v^2$, si l'on a

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2 v^2) = 0,$$

les quantités η_1 , η_2 sont liées par l'équation qui correspond à la transformation modulaire pour le nombre impair 3 (voir les *Fundamenta nova*, page 23). Dans ce cas nous trouvons

$$f' = \frac{g}{\sqrt{1 - g^2 g'^2}}$$

et cette équation conduit à la relation suivante entre les axes de l'ellipsoïde (7):

$$\frac{ab}{c} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}$$

et la ligne de courbure que je viens de discuter coïncidera avec la ligne de courbure (μ) que j'ai déjà indiquée dans la première partie de ce Mémoire, comme ayant ses arcs dépendants des fonctions elliptiques..

Collège de la Trinité à Dublin, avril 1869 et janvier 1870.



Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie.

Mémoire posthume de B. RIEMANN (), publié par R. DEDEKIND
et insérée dans le tome XIII des Mémoires de la Société Royale
des Sciences de Göttingue (1867).*

*Traduit de l'allemand
par Mr. J. HOÜEL, prof. à Bordeaux.*

Plan de cette étude.

On sait que la géométrie admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiômes. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être.

Depuis EUCLIDE jusqu'à LEGENDRE, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la géométrie, personne parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes n'est parvenu à éclaircir ce mystère. La raison en est que le concept général des grandeurs de dimensions multiples,

(*) Ce Mémoire a été lu par l'Auteur le 10 juin 1854 à l'occasion de ses épreuves d'admission à la faculté philosophique de Göttingue. Ainsi s'explique la forme de son exposition, où les recherches analytiques ne sont qu'indiquées. Je compte revenir plus tard sur ces recherches dans des Notes spéciales. — R. DEDEKIND.

comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis posé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Il ressortira de là qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet, n'est pas complètement déterminé; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'EUCLIDE a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires; il n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses. On peut donc étudier leur probabilité, qui est certainement très-considérable dans les limites de l'observation, et juger d'après cela du degré de sûreté de l'extension de ces faits en dehors de ces mêmes limites, tant dans le sens des immensurablement grands que dans celui des immensurablement petits.

I.

Concept d'une grandeur de n dimensions.

En essayant maintenant de traiter le premier de ces problèmes, relatif au développement du concept d'une grandeur de dimensions multiples, j'en crois d'autant plus obligé de solliciter l'indulgence des lecteurs, que je suis moins exercé dans les travaux philosophiques de cette nature, dont la difficulté réside plutôt dans la conception que dans la construction, et qu'à l'exception de quelques brèves indications données par M. GAUSS dans son second Mémoire sur les résidus biquadratiques, dans les *gelehrte Anzeigen* de Göttingue et dans son Mémoire de jubilé, et de quelques recherches philosophiques de HERBART, je n'ai pu m'aider d'aucun travail antérieur.

§ 1.

Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre d'une manière continue, ils forment une variété (*) continue ou une variété discrète; chacun en particulier de ces modes de détermination s'appelle dans le premier cas un point, dans le second un élément de cette variété. Les concepts dont les modes de détermination forment une variété discrète sont si fréquents que, étant donnés des objets quelconques, il se trouve toujours, du moins dans les langues cultivées, un concept qui les comprend (et les mathématiciens étaient par conséquent en droit, dans la théorie des grandeurs discrètes, de prendre pour point de départ la condition que les objets donnés soient considérés comme de même espèce). Au contraire les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue, sont si rares dans la vie ordinaire, que les lieux des objets sensibles et les couleurs sont à-peu-près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété de plusieurs dimensions. C'est seulement dans les hautes mathématiques que les occasions pour la formation et le développement de ces concepts deviennent plus fréquentes.

Une partie d'une variété, séparée du reste par une marque ou par une limite, s'appelle un quantum. La comparaison des quanta au point de vue de la quantité s'effectue, pour les grandeurs discrètes, au moyen du dénombrement; pour les grandeurs continues au moyen de la mesure. La mesure consiste dans une superposition des grandeurs à comparer; il faut donc, pour mesurer, avoir un moyen de transporter la grandeur qui sert d'étalon de mesure pour les autres. Si ce moyen manque, on ne pourra alors comparer entre elles deux grandeurs, que si l'une d'elles est une partie de l'autre, et encore dans ce cas ne pourra-t-on décider que la question du plus grand ou du plus petit, et non celle du rapport numérique. Les recherches auxquelles un tel cas peut donner lieu forment une branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations mé-

(*) *Varietas, Mannigfaltigkeit*. Voy. GAUSS, *Theoria res. biquad.* II, et *Anzeige zu derselben* (*Werke*, II, pages 110, 116 et 118). (Note du trad.)

triques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une variété. De telles recherches sont devenues nécessaires dans plusieurs parties des mathématiques, notamment pour l'étude des fonctions analytiques à plusieurs valeurs, et c'est surtout à cause de leur imperfection que le célèbre théorème d'ABEL, ainsi que les travaux de LAGRANGE, de PFAFF, de JACOBI sur la théorie générale des équations différentielles, sont restés si longtemps stériles. Dans cette branche générale de la théorie des grandeurs étendues, où l'on ne suppose rien de plus que ce qui est déjà renfermé dans le concept de ces grandeurs, il nous suffira, pour notre objet actuel, de porter notre étude sur deux points, relatifs, le premier à la génération du concept d'une variété de plusieurs dimensions, le second au moyen de ramener les déterminations de lieu dans une variété donnée à des déterminations de quantité, et c'est ce dernier point qui doit faire clairement ressortir le caractère essentiel d'une étendue de n dimensions.

§ 2.

Etant donné un concept dont les modes de détermination forment une variété continue, si l'on passe, suivant une manière déterminée, d'un mode de détermination à un autre, les modes de détermination parcourus formeront une variété étendue dans un seul sens, dont le caractère essentiel est que, dans cette variété, on ne peut, en partant d'un point, s'avancer d'une manière continue que dans deux directions, en avant et en arrière. Imaginons maintenant que cette variété se transporte à son tour sur une autre variété complètement distincte, et cela encore d'une manière déterminée, c'est-à-dire, tellement que chacun de ses points se transporte en un point déterminé de l'autre variété; l'ensemble des modes de détermination ainsi obtenus formera une variété de deux dimensions. On obtiendra semblablement une variété de trois dimensions, si l'on conçoit qu'une variété de deux dimensions se transporte d'une manière déterminée sur une autre complètement distincte, et il est aisé de voir comment on peut poursuivre cette construction. Si, au lieu de considérer le concept comme déterminable, on considère son objet comme variable, on pourra dé-

signer cette construction comme la composition d'une variabilité de $n + 1$ dimensions au moyen d'une variabilité de n dimensions et d'une variabilité d'une seule dimension.

§ 3.

Je vais maintenant montrer réciproquement comment une variabilité, dont le champ est donné peut se décomposer en une variabilité d'une dimension et une variabilité d'un nombre de dimensions moindre. Concevons, pour cela, une portion variable d'une variété d'une dimension, comptée à partir d'un point fixe, de façon que ses valeurs soient comparables entre elles; supposons que cette portion ait, pour chaque point de la variété donnée, une valeur déterminée, changeant avec ce point d'une manière continue; ou, en d'autres termes, imaginons, à l'intérieur de la variété donnée, une fonction continue du lieu, fonction qui ne soit pas constante le long d'une portion de cette variété. Tout système de points, pour lequel la fonction a une valeur constante, forme alors une variété continue d'un moindre nombre de dimensions que la variété donnée. Ces variétés, lorsqu'on fait varier la fonction, se transforment d'une manière continue les unes dans les autres; on pourra donc admettre que l'une d'entre elles engendre les autres, et cela pourra avoir lieu, généralement parlant, de telle façon que chaque point de l'une se transporte en un point déterminé de l'autre. Les cas d'exception, dont l'étude est importante, peuvent être ici laissés de côté. Par là, la détermination de lieu dans une variété donnée se ramène à une détermination de grandeur, et à une détermination de lieu dans une variété d'un moindre nombre de dimensions. Or il est aisé de faire voir que cette dernière variété a $n - 1$ dimensions, lorsque la variété donnée en a n . En répétant n fois ce procédé, la détermination de lieu dans une variété de n dimensions se trouvera donc ramenée à n déterminations de grandeur, et ainsi la détermination de lieu dans une variété donnée, quand cela est possible, se réduit à un nombre fini de déterminations de quantité. Toutefois il y a aussi des variétés dans lesquelles la détermination de lieu exige, non plus un nombre fini, mais soit une série infinie, soit une variété continue de déterminations de grandeur. Telles sont, par exemple, les variétés formées par les déterminations possibles d'une fonction dans une région donnée, par les formes possibles d'une figure de l'espace, etc.

II.

Rapports métriques dont est susceptible une variété de n dimensions, dans l'hypothèse où les lignes possèdent une longueur, indépendamment de leur position, et où toute ligne est ainsi mesurable par toute autre ligne.

Après avoir construit le concept d'une variété de n dimensions, et trouvé pour caractère essentiel d'une telle variété cette propriété que la détermination de lieu peut s'y ramener à n déterminations de grandeur, nous arrivons au second des problèmes posés plus haut, savoir à l'étude des rapports métriques dont une telle variété est susceptible, et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques. Ces rapports métriques ne peuvent être étudiés que dans des concepts de grandeur abstraits, et leur dépendance ne peut se représenter que par des formules. Dans certaines hypothèses, cependant, ils sont décomposables en rapports qui, pris séparément, sont susceptibles d'une représentation géométrique, et par là il devient possible d'exprimer géométriquement les résultats du calcul. Ainsi, pour arriver à un terrain solide, on ne peut, il est vrai, éviter dans les formules les considérations abstraites, mais du moins les résultats du calcul pourront ensuite être représentés sous forme géométrique. Les fondements de ces deux parties de la question sont établis dans le célèbre Mémoire de M. GAUSS : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

§ 1.

Les déterminations métriques exigent l'indépendance entre les grandeurs et le lieu, ce qui peut se réaliser de plusieurs manières. L'hypothèse qui s'offre d'abord, et que je développerai ici, est celle dans laquelle la longueur des lignes est indépendante de leur position, et où par suite chaque ligne est mesurable au moyen de chaque autre. La détermination de lieu étant ramenée à des déterminations de grandeurs, et la position d'un point dans la variété donnée à n dimensions étant, par suite, exprimée au moyen de n grandeurs variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, la détermination d'une ligne reviendra à ce que les quantités x soient données comme des fonctions d'une variable. Le problème consiste alors à établir une expression mathématique de

la longueur d'une ligne, et à cet effet il faut considérer les quantités x comme exprimables en unités. Je ne traiterai ce problème que sous certaines restrictions, et je me bornerai d'abord aux lignes dans lesquelles les rapports entre les accroissements dx des variables x correspondantes varient d'une manière continue. On peut alors concevoir les lignes décomposées en éléments, dans l'étendue desquels les rapports des quantités dx puissent être regardés comme constants, et le problème revient alors à établir pour chaque point une expression générale de l'élément linéaire ds partant de ce point, expression qui contiendra ainsi les quantités x et les quantités dx . J'admettrai, en second lieu, que la longueur de l'élément linéaire, abstraction faite des quantités du second ordre, reste invariable, lorsque tous les points de cet élément subissent un même déplacement infiniment petit, ce qui implique en même temps que, si toutes les quantités dx croissent dans un même rapport, l'élément linéaire varie également dans ce même rapport. Ces hypothèses admises, l'élément linéaire pourra être une fonction homogène quelconque du premier degré des quantités dx , qui restera invariable lorsqu'on changera les signes de toutes les quantités dx , et dans laquelle les constantes arbitraires seront des fonctions continues des quantités x . Pour trouver les cas les plus simples, je chercherai d'abord une expression pour les variétés de $n-1$ dimensions qui sont partout équidistantes de l'origine de l'élément linéaire; c'est-à-dire que je chercherai une fonction continue du lieu qui les distingue les unes des autres. Cette fonction devra ou croître ou décroître dans toutes les directions à partir de l'origine; j'admettrai qu'elle croisse dans toutes les directions, et qu'ainsi elle ait un minimum à l'origine. Il faut alors, si ses quotients différentiels du premier et du second ordre sont finis, que la différentielle du premier ordre s'annule, et que celle du second ordre ne devienne jamais négative; j'admettrai qu'elle reste toujours positive. Cette expression différentielle du second ordre reste donc constante, lorsque ds reste constant, et croit dans le rapport des carrés, lorsque les quantités dx et par suite aussi ds varient toutes ensemble dans un même rapport; elle est donc $= \text{const.} \times ds^2$, et par conséquent $ds =$ la racine carrée d'une fonction entière homogène du second degré, toujours positive, des quantités dx , dans laquelle les coefficients sont des fonctions continues des quantités x . Pour l'espace, si l'on exprime la position du point en coordonnées rectangulaires, on a $ds = \sqrt{\sum (dx)^2}$; l'espace est donc compris dans ce cas le plus simple de tous. Le cas le plus simple après celui-là comprendrait les variétés dans lesquelles l'élément linéaire serait

exprimé par la racine quatrième d'une expression différentielle du quatrième degré. L'étude de cette classe plus générale n'exigerait pas des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un temps assez considérable, et ne contribuerait pas beaucoup, relativement, à éclaircir la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement. Je me bornerai donc aux variétés dans lesquelles l'élément linéaire est exprimé par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Une telle expression peut être transformée en une autre semblable, en remplaçant les n variables indépendantes par des fonctions de n nouvelles variables indépendantes. Mais on ne pourra pas par ce moyen transformer une expression quelconque en une autre expression quelconque; car l'expression contient $n \frac{n+1}{2}$ coefficients, qui sont des fonctions arbitraires des variables indépendantes; or par l'introduction de nouvelles variables, on ne pourra satisfaire qu'à n relations, et par suite on ne pourra évaluer que n des coefficients à des quantités données. Les $n \frac{n-1}{2}$ coefficients restants sont alors complètement déterminés par la nature même de la variété qu'il s'agit de représenter, et ainsi la détermination de ses rapports métriques exige $n \frac{n-1}{2}$ fonctions du lieu. Les variétés dans lesquelles l'élément linéaire peut, comme dans le plan et dans l'espace, se ramener à la forme $\sqrt{\sum(dx)^2}$, ne forment donc qu'un cas particulier des variétés que nous étudions ici; elles méritent un nom spécial, et j'appellerai, en conséquence, les variétés dans lesquelles le carré de l'élément linéaire peut se ramener à une somme de carrés de différentielles complètes, variétés planes. Pour pouvoir maintenant passer en revue les diversités essentielles de toutes les variétés susceptibles d'être représentées sous la forme considérée, il est nécessaire de laisser de côté les diversités provenant du mode de représentation, et l'on y parvient en choisissant les grandeurs variables d'après un principe déterminé.

§ 2.

A cet effet, imaginons qu'à partir d'un point donné on ait construit le système des lignes de plus courte distance qui passent par ce point; la po-

sition d'un point indéterminé pourra être fixée alors au moyen de la direction initiale de la ligne de plus courte distance sur laquelle il se trouve, et de sa distance comptée sur cette ligne à partir de l'origine, et par conséquent elle pourra s'exprimer au moyen des rapports dx^0 des quantités dx sur cette ligne de plus courte distance, et au moyen de la longueur s de cette ligne. Introduisons maintenant, au lieu de dx^0 , des expressions linéaires $d\alpha$, formées avec ces quantités, et telles que la valeur initiale du carré de l'élément soit égale à la somme des carrés de ces expressions, de telle sorte que les variables indépendantes soient la grandeur s et les rapports des quantités $d\alpha$; et remplaçons enfin les $d\alpha$ par des quantités x_1, x_2, \dots, x_n qui leur soient proportionnelles, et dont la somme des carrés soit $=s^2$. Si l'on introduit ces grandeurs, alors, pour des valeurs infiniment petites des x , le carré de l'élément linéaire sera $=\sum dx^2$; le terme de l'ordre suivant dans ce carré sera égal à une fonction homogène du second degré des $n \frac{n-1}{2}$ grandeurs $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), (x_1 dx_3 - x_3 dx_1), \dots$, c'est-à-dire qu'il sera un infiniment petit du quatrième ordre; de telle sorte que l'on obtient une grandeur finie en divisant ce terme par le carré du triangle infiniment petit dont les sommets correspondent aux systèmes de valeurs $(0, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, x_3, \dots), (dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$ des variables. Ce terme conserve la même valeur, tant que les quantités x et dx sont contenues dans les mêmes formes linéaires binaires, ou tant que les deux lignes de plus courte distance, depuis les valeurs 0 jusqu'aux valeurs x et depuis les valeurs 0 jusqu'aux valeurs dx , restent dans le même élément superficiel, et il ne dépend, par conséquent, que du lieu et de la direction de cet élément. Ce terme est évidemment $=0$, lorsque la variété représentée est plane, c'est-à-dire, lorsque le carré de l'élément linéaire est réductible à $\sum dx^2$, et il peut, par conséquent, être considéré comme la mesure de la quantité dont la variété s'écarte de la planarité (*) en ce point et dans cette direction superficielle. En le multipliant par $-\frac{2}{3}$, il devient égal à la quantité que GAUSS a appelée la mesure de courbure d'une surface. Pour déterminer les rapports métriques d'une variété à n dimensions, susceptible d'une représentation sous la forme supposée, on a trouvé tout à l'heure que $n \frac{n-1}{2}$ fonctions du lieu sont nécessaires; si donc on donne en chaque

(*) *Ebenheit* dans l'original.

point la mesure de la courbure suivant $n \frac{n-1}{2}$ directions superficielles, on pourra déterminer par leur moyen les rapports métriques de la variété, pourvu seulement qu'entre ces valeurs il n'existe pas des relations identiques, relations qui effectivement n'existent pas en général. Les rapports métriques de ces variétés où l'élément linéaire est représenté par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré, peuvent ainsi s'exprimer d'une manière tout-à-fait indépendante du choix des grandeurs variables. On peut encore dans ce but suivre une marche toute semblable dans le cas des variétés où l'élément linéaire s'exprime moins simplement, par exemple, au moyen de la racine quatrième d'une expression différentielle du quatrième degré. Alors l'élément linéaire ne serait plus, en général, réductible à la forme de la racine carrée d'une somme de carrés d'expressions différentielles, et par conséquent, dans l'expression du carré de l'élément linéaire, l'écart de la planarité serait un infiniment petit du deuxième ordre, tandis que, dans les variétés considérées précédemment, cet écart était un infiniment petit du quatrième ordre. Cette propriété de ces dernières variétés peut bien être nommée planarité dans les parties infinitésimales. Mais la propriété de ces variétés la plus importante pour notre objet actuel, et la seule en vue de laquelle nous avons étudié ici ces variétés, est celle qui consiste en ce que les rapports des variétés de deux dimensions peuvent se représenter géométriquement par des surfaces, et que ceux des variétés d'un plus grand nombre de dimensions peuvent se ramener à ceux des surfaces qu'elles renferment. Cela demande encore une courte explication.

§ 3.

Dans la manière de concevoir les surfaces, aux rapports métriques intrinsèques, dans lesquels on n'a à considérer que les longueurs des chemins tracés sur ces surfaces, se mêle toujours l'idée de leur position relativement aux points placés en dehors d'elles. Mais on peut faire abstraction des rapports extérieurs, lorsqu'on fait subir à ces surfaces des changements tels que les longueurs des lignes qui y sont situées restent invariables, c'est-à-dire, lorsqu'on les suppose flexibles sans extension; et que l'on considère comme de même espèce toutes les surfaces ainsi obtenues. Ainsi,

par exemple, des surfaces cylindriques ou coniques quelconques seront regardées comme équivalentes à un plan, parce qu'elles peuvent s'y appliquer par simple flexion, leurs rapports métriques intrinsèques demeurant invariables, et toutes les propositions qui concernent ces rapports, c'est-à-dire toute la planimétrie, continuant à subsister. Elles sont, au contraire, essentiellement non-équivalentes à la sphère, qui ne peut pas se transformer sans extension en un plan. D'après la recherche précédente, les relations métriques intrinsèques, dans une grandeur à deux dimensions, lorsque l'élément linéaire peut s'exprimer par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré, comme cela arrive dans les surfaces, sont caractérisées en chaque point par la mesure de courbure. On peut donner à cette quantité, dans le cas des surfaces, une interprétation sensible aux yeux, en établissant qu'elle est le produit des deux courbures de la surface au point considéré, ou encore, que son produit par un triangle infiniment petit formé de lignes de plus courte distance est égal à la moitié de l'excès de la somme des angles de ce triangle, évalués en parties du rayon, sur deux angles droits. La première définition supposerait ce théorème, que le produit des deux rayons de courbure reste invariable, lorsque la surface subit une simple flexion; la seconde supposerait que, pour le même lieu, l'excès de la somme des angles d'un triangle infiniment petit sur deux angles droits est proportionnel à l'aire du triangle. Pour donner une représentation saisissable à la mesure de courbure d'une variété de n dimensions en un point donné et suivant une direction superficielle donnée passant par ce point, il faut partir de ce qu'une ligne de plus courte distance, partant d'un point, est complètement déterminée, quand on donne sa direction initiale. D'après cela, on obtient une surface déterminée, en prolongeant suivant des lignes de plus courte distance toutes les directions initiales partant du point donné et situées sur l'élément superficiel donné, et cette surface a, au point donné, une mesure de courbure déterminée, qui est en même temps la mesure de courbure de la variété de n dimensions au point donné et suivant la direction superficielle donnée.

§ 4.

Avant de passer aux applications à l'espace, il faut encore présenter quelques considérations sur les variétés planes en général; c'est-à-dire

sur les variétés dans lesquelles le carré de l'élément linéaire peut être représenté par une somme de carrés de différentielles complètes.

Dans une variété plane de n dimensions, la mesure de courbure en chaque point et dans chaque direction est nulle; or, d'après la discussion précédente, il suffit, pour déterminer les rapports métriques, de savoir qu'en chaque point elle est nulle suivant $n \frac{n-1}{2}$ directions superficielles, dont les mesures de courbure sont indépendantes entre elles. Les variétés dont la mesure de courbure est partout $= 0$, peuvent être considérées comme un cas particulier des variétés dont la mesure de courbure est partout constante. Le caractère commun de ces variétés dont la mesure de courbure est constante peut aussi s'exprimer en disant que les figures peuvent s'y mouvoir sans subir d'extension. Car il est évident que les figures ne pourraient y être susceptibles de translations et de rotations arbitraires, si la mesure de courbure n'était la même en chaque point et dans toutes les directions. Mais d'autre part les rapports métriques de la variété sont complètement déterminés par la mesure de courbure; donc les rapports métriques autour d'un point et dans toutes les directions sont exactement les mêmes qu'autour d'un autre point, et par suite on peut à partir de ce point exécuter les mêmes constructions, d'où il s'ensuit que dans les variétés où la mesure de courbure est constante, on peut donner aux figures une position arbitraire quelconque. Les rapports métriques de ces variétés dépendent seulement de la valeur de la mesure de courbure, et quant à la représentation analytique, nous remarquerons que, si l'on désigne cette valeur par α , on pourra donner à l'expression de l'élément linéaire la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2}.$$

§ 5.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple géométrique, considérons les surfaces de mesure de courbure constante. Il est aisé de voir que les surfaces dont la mesure de courbure est constante et positive peuvent toujours s'appliquer sur une sphère dont le rayon est égal à l'unité divisée par

la racine carrée de la mesure de courbure; mais, pour embrasser d'un coup d'œil la variété toute entière de ces surfaces, donnons à une d'elles la forme d'une sphère, et aux autres la forme de surfaces de révolution la touchant suivant l'équateur. Les surfaces de plus grande mesure de courbure que cette sphère toucheront alors la sphère intérieurement, et prendront une forme semblable à la partie extérieure d'une surface annulaire, la plus éloignée de l'axe de cette surface. Elles seraient applicables sur des zones de sphères de rayon moindre, mais recouvriraient ces zones plus d'une fois. Les surfaces de moindre mesure de courbure positive s'obtiendront en découpant sur des surfaces sphériques de plus grand rayon un fuseau limité par deux demi-grands cercles, et unissant entre elles les lignes de section. La surface de mesure de courbure nulle sera une surface cylindrique ayant pour base l'équateur; les surfaces de mesure de courbure négative toucheront ce cylindre extérieurement, et auront une forme semblable à celle de la partie intérieure d'une surface annulaire, tournée vers l'axe. Si l'on considère ces surfaces comme le lieu où peut se mouvoir un segment superficiel, de même que l'espace est le lieu où se meuvent les corps, le segment superficiel sera mobile sans extension dans toutes ces surfaces. Les surfaces à mesure de courbure positive pourront toujours recevoir une forme telle, que les segments superficiels puissent, de plus, s'y mouvoir sans flexion, et cette forme sera celle d'une sphère; mais cela ne se peut plus dans le cas de la mesure de courbure négative. Outre cette propriété des segments superficiels d'être indépendants du lieu, la surface de mesure de courbure nulle possède encore la propriété que la direction est indépendante du lieu, propriété qui n'existe pas chez les autres surfaces.

III.

Application à l'espace.

§ 1.

Après cette étude sur la détermination des rapports métriques d'une grandeur de n dimensions, on peut maintenant indiquer les conditions suffisantes et nécessaires pour la détermination des rapports métriques de l'espace, lorsqu'on admet comme hypothèses que les lignes sont indépendantes de

leur position, et que l'élément linéaire est exprimable par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré, c'est-à-dire que l'espace est une grandeur plane dans ses parties infinitésimales.

Elles peuvent d'abord s'exprimer en demandant que la mesure de courbure en chaque point soit nulle suivant trois directions superficielles, et par suite les rapports métriques de l'espace sont déterminés, si la somme des angles d'un triangle est partout égale à deux droits.

Si l'on suppose, en second lieu, comme EUCLIDE, une existence indépendante de la position, non seulement pour les lignes, mais encore pour les corps, il s'ensuit de là que la mesure de courbure est partout constante, et alors la somme des angles est déterminée dans tous les triangles, lorsqu'elle l'est dans un seul.

Enfin l'on pourrait encore, en troisième lieu, au lieu d'admettre que la longueur des lignes est indépendante du lieu et de la direction, supposer que leur longueur et leur direction sont indépendantes du lieu. D'après ce point de vue, les changements de lieu ou les différences de lieu sont des grandeurs complexes, exprimables au moyen de trois unités indépendantes.

§ 2.

Dans le cours des considérations que nous venons de présenter, nous avons d'abord séparé les rapports d'étendue ou de région des rapports métriques, et nous avons trouvé que, pour les mêmes rapports d'étendue, on pourrait concevoir différents rapports métriques; nous avons ensuite cherché les systèmes de déterminations métriques simples, au moyen desquels les rapports métriques de l'espace sont complètement déterminés, et dont toutes les propositions concernant ces rapports sont des conséquences nécessaires. Il nous reste maintenant à examiner comment, à quel degré et avec quelle extension ces hypothèses sont confirmées par l'expérience. A ce point de vue, il existe entre les simples rapports d'étendue et les rapports métriques cette différence essentielle, que dans les premiers, où les cas possibles forment une variété discrète, les résultats de l'expérience ne sont, à la vérité, jamais complètement certains, mais ne sont pas inexacts; tandis que, dans le seconds où les cas possibles forment une variété continue, toute détermination de l'expérience reste toujours inexacte, quelque grande que puisse être la probabilité de son exactitude approchée. Cette circonstance

devient importante lorsqu'il s'agit d'étendre ces déterminations empiriques au delà des limites de l'observation dans l'immensurablement grand ou dans l'immensurablement petit; car les seconds rapports peuvent évidemment devenir de plus en plus inexacts, dès que l'on sort des limites de l'observation, tandis qu'il n'en est pas de même des premiers.

Lorsqu'on étend les constructions de l'espace à l'immensurablement grand, il faut faire la distinction entre l'illimité et l'infini; le premier appartient aux rapports d'étendue, le second aux rapports métriques. Que l'espace soit une variété illimitée de trois dimensions, c'est-là une hypothèse qui s'applique dans toutes nos conceptions du monde extérieur, qui nous sert à compléter à chaque instant le domaine de nos perceptions effectives et à construire les lieux possibles d'un objet cherché, et qui se trouve constamment vérifiée dans toutes ces applications. La propriété de l'espace d'être illimité possède donc une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience. Mais l'infinité de l'espace n'en est en aucune manière la conséquence; au contraire, si l'on suppose les corps indépendants du lieu, et qu'ainsi l'on attribue à l'espace une mesure de courbure constante, l'espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive, si petite qu'elle fût. En prolongeant suivant des lignes de plus courte distance les directions initiales situées dans un élément superficiel, on obtiendrait une surface illimitée de mesure de courbure constante, c'est-à-dire une surface qui, dans une variété plane de trois dimensions, prendrait la forme d'une surface sphérique, et qui serait par conséquent finie.

§ 3.

Les questions sur l'immensurablement grand sont des questions inutiles pour l'explication de la nature. Mais il en est autrement des questions sur l'immensurablement petit. C'est sur l'exactitude avec laquelle nous suivons les phénomènes dans l'infiniment petit, que repose essentiellement notre connaissance de leurs rapports de causalité. Les progrès des derniers siècles dans la connaissance de la nature mécanique dépendent presque seulement de l'exactitude de la construction qui est devenue possible grâce à l'invention de l'analyse de l'infini, et aux principes simples découverts par ARCHIMÈDE, par GALILÉE et par NEWTON et dont se sert la physique mo-

derne. Mais dans les sciences naturelles, où les principes simples manquent encore pour de telles constructions, on cherche à reconnaître le rapport de causalité en suivant les phénomènes dans l'étendue très-petite, aussi loin que le permet le microscope. Les questions sur les rapports métriques de l'espace dans l'immensurablement petit ne sont donc pas des questions superflues.

Si l'on suppose que les corps existent indépendamment du lieu, la mesure de courbure est partout constante, et il résulte alors des mesures astronomiques qu'elle ne peut être différente de zéro; dans tous les cas, il faudrait que sa valeur réciproque fût une surface en présence de laquelle la portée de nos télescopes serait comme nulle. Mais si cette indépendance entre les corps et le lieu n'existe pas, alors des rapports métriques reconnus dans le grand on ne peut rien conclure pour ceux de l'infiniment petit; alors la mesure de courbure de chaque point peut avoir suivant trois directions une valeur arbitraire, pourvu que la courbure totale de toute portion mesurable de l'espace ne diffère pas sensiblement de zéro; il peut s'introduire des rapports encore plus compliqués, lorsqu'on ne suppose plus que l'élément linéaire puisse être représenté par la racine carré d'une expression différentielle du second degré. Or il semble que les concepts empiriques, sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept du corps solide et celui du rayon lumineux, cessent de subsister dans l'infiniment petit. Il est donc très-légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la Géométrie, et c'est ce qu'il faudrait effectivement admettre, du moment où l'on obtiendrait par là une explication plus simple des phénomènes.

La question de la validité des hypothèses de la Géométrie dans l'infiniment petit est liée avec la question du principe intime des rapports métriques dans l'espace. Dans cette dernière question, que l'on peut bien encore regarder comme appartenant à la doctrine de l'espace, on trouve l'application de la remarque précédente, que, dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que, dans une variété continue, ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondée l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui.

La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que NEWTON a

prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels.

Ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la Physique, où l'objet auquel est destiné ce travail ne nous permet pas de pénétrer aujourd'hui.

SOMMAIRE.

Plan de cette étude	page 309
I. Concept d'une grandeur de n dimensions (*).	» 310
§ 1. Variétés continues et discrètes. Les parties déterminées d'une variété sont dites des quanta. Division de la doctrine des grandeurs continues en	
1.° Doctrine des simples rapports d'étendue, dans laquelle on ne suppose pas que les grandeurs soient indépendantes du lieu;	
2.° Doctrine des rapports métriques, dans laquelle cette indépendance doit être supposée.	» 311
§ 2. Génération du concept d'une variété d'une, de deux, . . . de n dimensions »	312
§ 3. Réduction de la détermination de lieu, dans une variété donnée, à des déterminations de quantités. Caractère essentiel d'une variété de n dimensions. »	313
II. Rapports métriques dont une variété de n dimensions est susceptible (**), dans l'hypothèse où les lignes possèdent une longueur indépendamment de leur position, et où toute ligne est ainsi mesurable par toute autre ligne.	» 314

(*) L'article I est en même temps une préparation à des recherches sur l'analyse de situation.

(**) L'étude sur les mesures métriques possibles dans une variété de n dimensions est très-incomplète, bien qu'elle soit suffisante pour l'objet actuel.

§ 1. Expression de l'élément linéaire. On considère comme planes les variétés dans lesquelles l'élément linéaire est exprimable par la racine carrée d'une somme de carrés de différentielles complètes.	page 314
§ 2. Étude des variétés de n dimensions, dans lesquelles l'élément linéaire peut être représenté par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Mesure de leur écart de la planarité (mesure de courbure) en un point donné et suivant une direction superficielle donnée. Pour la détermination de leurs rapports métriques, il est (sous certaines restrictions) nécessaire et suffisant que l'on donne arbitrairement en chaque point la mesure de courbure suivant $n \frac{n-1}{2}$ directions superficielles	" 316
§ 3. Explication géométrique.	" 318
§ 4. Les variétés planes (dans lesquelles la mesure de courbure est partout = 0) peuvent être considérées comme un cas particulier des variétés dont la mesure de courbure est constante. Celles-ci peuvent encore être définies par la propriété que les grandeurs de n dimensions y sont indépendantes du lieu (mobilité de ces grandeurs sans extension)	" 319
§ 5. Surfaces de mesure de courbure constante	" 320
III. Application à l'espace.	" 321
§ 1. Systèmes de faits suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace, tels que la géométrie les suppose	" <i>ibid.</i>
§ 2. Jusqu'à quel degré est probable la légitimité de ces déterminations empiriques, lorsqu'on sort des limites de l'observation pour entrer dans l'immensurablement grand?	" 322
§ 3. Jusqu'à quel degré est elle probable pour l'immensurablement petit? Lien de cette question avec l'explication des phénomènes naturels (*)	" 323

(*) Le § 3 de l'art. III a besoin d'être encore remanié et développé.

Sur une intégrale double définie.

(par M. WILLIAM ROBERTS, à Dublin.)

Voici l'intégrale dont il s'agit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \{ \cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \beta \sin^2 \theta \sin^2 \phi \} \sin \theta d\theta d\phi.$$

En désignant par U sa valeur et en mettant $\cos \theta = x$, il est évident que

$$U = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \{ (\sin^2 \alpha \cos^2 \phi + \sin^2 \beta \sin^2 \phi) x^2 + \cos^2 \alpha \cos^2 \phi + \cos^2 \beta \sin^2 \phi \} dx d\phi.$$

L'intégration par rapport à x s'effectue tout de suite, en se rappelant que

$$\int \log(A + Bx^2) dx = x \log(A + Bx^2) - 2x + 2A \int \frac{dx}{A + Bx^2},$$

ce qui nous donnera pour U l'expression suivante :

$$U = -\pi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan t}{t} d\phi,$$

en posant, pour abrégé,

$$t^2 = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \phi + \sin^2 \beta \sin^2 \phi}{\cos^2 \alpha \cos^2 \phi + \cos^2 \beta \sin^2 \phi}.$$

Afin de trouver la valeur de l'intégrale, à laquelle nous avons réduit, comme on le voit, la détermination de U , il sera bon de considérer l'intégrale plus générale

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan mt}{t} d\phi.$$

Dès qu'on aura obtenu cette dernière intégrale, il est évident qu'on en déduira l'évaluation de U , en y faisant $m=1$.

On aura donc, en se rappelant la valeur de t ,

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \beta \sin^2 \varphi) d\varphi}{(\cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha) \cos^2 \varphi + (\cos^2 \beta + m^2 \sin^2 \beta) \sin^2 \varphi}.$$

Mais on s'aperçoit sans difficulté que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P \cos^2 \varphi + Q \sin^2 \varphi}{R \cos^2 \varphi + S \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2(R-S)} \left\{ P - Q + \frac{QR - PS}{\sqrt{RS}} \right\},$$

en sorte qu'en posant

$$R = \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha, \quad S = \cos^2 \beta + m^2 \sin^2 \beta,$$

on a

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{1-m^2} - \frac{1}{(1-m^2)\sqrt{RS}} + \frac{1}{\sqrt{RS}} \right\}.$$

Maintenant prenons un nouvel angle ψ tel que

$$m = \cot \alpha \tan \psi,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} \int \frac{dm}{1-m^2} &= \frac{1}{2} \log \frac{\tan \alpha + \tan \psi}{\tan \alpha - \tan \psi}, \\ \int \frac{dm}{(1-m^2)\sqrt{RS}} &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} \int \frac{d\psi}{(1 - \operatorname{cosec}^2 \alpha \sin^2 \psi) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha}\right) \sin^2 \psi}} \\ &\quad + \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha}\right) \sin^2 \psi}}, \\ \int \frac{dm}{\sqrt{RS}} &= \frac{1}{\sin \alpha \cos \beta} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha}\right) \sin^2 \psi}}. \end{aligned}$$

Pour nous conformer à la notation ordinaire des intégrales elliptiques de la première et de la troisième espèce, qui figurent dans les expressions qu'on

vient d'obtenir (on suppose, bien entendu, que $\alpha > \beta$), nous écrivons

$$k^2 = 1 - \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha}, \quad n = -\operatorname{cosec}^2 \alpha,$$

et nous aurons

$$V = \frac{\pi \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \beta} \left\{ F(k, \psi) - \Pi(n, k, \psi) \right\} + \frac{\pi}{4} \log \left\{ \frac{\tan \alpha + \tan \psi}{\tan \alpha - \tan \psi} \right\}.$$

Pour en déduire la valeur de l'intégrale double définie, que nous nous étions proposé de déterminer, il faut supposer que $\psi = \alpha$. Notre expression devient ainsi compliquée des quantités infinies. Pour nous en débarrasser, il sera nécessaire de recourir à la formule de réduction des fonctions elliptiques de troisième espèce, dont le paramètre est à la fois négatif et plus grand que l'unité. Cette formule (voir LÉGENDRÉ, *Traité des Fonctions Elliptiques*, tom. 1, pag. 70) donne

$$\begin{aligned} \Pi(-k^2 \sin^2 \alpha, k, \psi) + \Pi(-\operatorname{cosec}^2 \alpha, k, \psi) - F(k, \psi) = \\ \frac{\tan^2 \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha} \log \left\{ \frac{\sqrt{\tan^2 \alpha \cos^2 \psi + \tan^2 \beta \sin^2 \psi} + \cos \alpha \sec \beta \tan \psi}{\sqrt{\tan^2 \alpha \cos^2 \psi + \tan^2 \beta \sin^2 \psi} - \cos \alpha \sec \beta \tan \psi} \right\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(mt)}{t} d\varphi,$$

dans laquelle

$$t = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \beta \sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \beta \sin^2 \varphi}},$$

a pour valeur la quantité suivante:

$$\frac{\pi \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \beta} \Pi(-k^2 \sin^2 \alpha, k, \psi) + \frac{\pi}{4} \log \left\{ \frac{(1+m) \left(1 - \frac{m \sqrt{\cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\cos^2 \beta + m^2 \sin^2 \beta}} \right)}{(1-m) \left(1 + \frac{m \sqrt{\cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\cos^2 \beta + m^2 \sin^2 \beta}} \right)} \right\},$$

où, je le répète,

$$k^2 = 1 - \frac{\tan^2 \beta}{\tan^2 \alpha}, \quad \tan \psi = m \tan \alpha.$$

Quand $m = 1$, la partie logarithmique s'annule, et nous aurons pour la so-

lution de notre problème l'équation que voici :

$$U = \frac{\pi \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} \Pi(-k^2 \sin^2 \alpha, k, \alpha) - \pi,$$

où il faut observer que l'angle du paramètre de la fonction elliptique est égal à l'amplitude.

Il est intéressant de remarquer qu'en nous servant de considérations de géométrie, on aurait pu réduire notre intégrale double à des produits d'intégrales simples. En effet, soit un ellipsoïde ayant pour demi-axes 1, $\cos \beta$, $\cos \alpha$. En désignant par p la perpendiculaire abaissée du centre sur un plan tangent quelconque, et par θ, ϕ les angles qui déterminent la position de p , il est évident que l'intégrale double définie, dont il s'agit, sera identique avec

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log p \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Soient, comme de coutume, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point quelconque sur l'ellipsoïde; l'on sait que, dans des intégrales doubles, $\sin \theta \, d\theta \, d\phi$ se remplace par l'expression

$$\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta (\mu^2 - \nu^2) \, d\mu \, d\nu}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\mu^2 - \sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha - \mu^2)} (1 - \nu^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sin^2 \beta - \nu^2)(\sin^2 \alpha - \nu^2)}},$$

tandis que

$$p^2 = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{(1 - \mu^2)(1 - \nu^2)}.$$

Par conséquent on voit que par cette méthode, l'intégrale U se trouve transformée dans un autre, où les variables sont séparées. Sa valeur qu'on obtient ainsi dépendra des fonctions elliptiques complètes des deux premières espèces, ainsi que des transcendentes de la forme suivante, savoir

$$\int_{\sin \beta}^{\sin \alpha} \frac{\log(1 - \mu^2) \mu^2 \, d\mu}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\mu^2 - \sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha - \mu^2)}}, \int_{\sin \beta}^{\sin \alpha} \frac{\log(1 - \mu^2) \, d\mu}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\mu^2 - \sin^2 \beta)(\sin^2 \alpha - \mu^2)}},$$

$$\int_0^{\sin \beta} \frac{\log(1 - \nu^2) \nu^2 \, d\nu}{(1 - \nu^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sin^2 \beta - \nu^2)(\sin^2 \alpha - \nu^2)}}, \int_0^{\sin \beta} \frac{\log(1 - \nu^2) \, d\nu}{(1 - \nu^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(\sin^2 \beta - \nu^2)(\sin^2 \alpha - \nu^2)}}.$$

Collège de la Trinité, le 9 avril 1869.

Sopra alcuni teoremi aritmetici. (*)

(del prof. P. TARDY, a Genova.)

Ci proponiamo in questa Nota di dimostrare cinque teoremi enunciati da EISENSTEIN nel tomo XXVII del giornale di Crelle (p. 281), dei quali non sappiamo che siasi pubblicata alcuna dimostrazione, sebbene SCHAAR (**), e GENOCCHI (***) abbiano assegnato qualche formola analoga.

Le radici dell'equazione binomia

$$x^n - 1 = 0$$

sono date dall'espressione

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

dove k prende tutti i valori da 0 fino a $n-1$ inclusivamente. È noto che la somma delle potenze di ordine p di queste radici è $=n$ se $\frac{p}{n}$ è intero, ed è $=0$ nel caso contrario. Ma pel teorema di MOIVRE, e per dovere annullarsi la parte immaginaria, la suddetta somma è espressa da

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos \frac{2kp\pi}{n},$$

(*) Questa Nota era scritta e consegnata da parecchi mesi alla Direzione degli Annali quando il prof. TARDY ci ha avvertito essergli per caso venuta sott'occhio la Memoria del signor STERN: *Ueber einige Eigenschaften der Function $E\alpha$* , inserita nel t. 59 del giornale di Crelle-Borchardt: nella quale sono dimostrati i teoremi di EISENSTEIN. Nonpertanto abbiamo creduto poter pubblicare la Nota del nostro chiarissimo amico, a cagione della maggiore semplicità del metodo da lui seguito. — LA DIREZIONE.

(**) *Mémoire sur une formule d'analyse*. Acad. R. de Belgique. T. XXIII.

(***) *Note sur la théorie des résidus quadratiques*. Ib. T. XXV. Di questa importante Memoria del prof. GENOCCHI citeremo particolarmente la formola (19) corrispondente al 2.º teorema di EISENSTEIN e la (35) analoga al teorema 3.º

e quindi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos \frac{2kp\pi}{n} \quad (1)$$

sarà l'unità o zero secondo che p è o no divisibile per n .

Da qui risulta che ponendo successivamente

$$p = 1, = 2, = 3, = \dots, = m$$

e sommando, si avrà il massimo intero contenuto nella frazione $\frac{m}{n}$, che

suole denotarsi col simbolo $E\left(\frac{m}{n}\right)$; sarà cioè

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=m} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos \frac{2kp\pi}{n}. \quad (2)$$

Effettuando prima la somma rispetto a p si ha

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{p=m} \cos \frac{2kp\pi}{n} &= \frac{\sin \frac{mk\pi}{n} \cos \frac{(m+1)k\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2mk\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n} - \left(\sin \frac{mk\pi}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{2mk\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{2mk\pi}{n} - 1 \right\}, \end{aligned}$$

e sostituendo nella (2)

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left\{ \sin \frac{2mk\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{2mk\pi}{n} \right\}.$$

Riteniamo ora che n non divida m , la somma $\sum_{k=0}^{k=n-1} \cos \frac{2mk\pi}{n}$ sarà nulla; osserviamo inoltre che il prodotto $\sin \frac{2mk\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n}$ si presenta per $k=0$ sotto la forma $\frac{0}{0}$ e con la nota regola si trova $= 2m$; avremo perciò

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin \frac{2mk\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n}, \quad (3)$$

che è la formola del 1.º teorema di EISENSTEIN.

Se nella (2) si fosse sommato prima riguardo a k , si sarebbe ottenuto

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{p=m} \sin 2p\pi \cotg \frac{p\pi}{n}, \quad (4)$$

la quale sussiste per m ed n qualunque, ed è evidente di per sè stessa, giacchè ciascun termine della somma si annulla se $\frac{p}{n}$ non è intero, e diviene $\frac{0}{0} = 2n$ nel caso contrario.

Una facile applicazione della proprietà dell'espressione (4) si può fare alla ricerca del massimo comun divisore di due numeri dati. Siano m ed n due interi qualunque, e sia λ il loro massimo comun divisore, in modo che

$$m = a\lambda, \quad n = b\lambda$$

con a e b primi tra loro. Ponendo nella (4), in luogo di p , hm , e facendo successivamente

$$h=1, \quad =2, \quad =\dots, \quad =b, \quad =\dots=2b, \quad =\dots=\lambda b (=n),$$

è chiaro che si avrà l'unità quante volte h è un multiplo di b , e zero in caso diverso; sarà dunque

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \cos \frac{2hkm\pi}{n}, \quad (5)$$

ed eseguendo la somma rispetto ad h si può ridurre alla forma

$$\lambda = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin 2km\pi \cotg \frac{km\pi}{n}, \quad (6)$$

sotto la quale l'uguaglianza è manifesta come per la (4).

Sottraendo dalla frazione $\frac{m}{n}$ il massimo intero $E\left(\frac{m}{n}\right)$ dato dalla (3), e moltiplicando per n si ha il residuo minimo di m pel modulo n , che sarà perciò

$$\frac{1}{2} \left\{ n - \sum_{k=1}^{k=n-1} \sin \frac{2mk\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n} \right\},$$

giusta il teorema 2.^o di EISENSTEIN.

Supponiamo adesso m ed n impari e primi tra loro, potremo allora mettere nella (3) in luogo di m successivamente

$$m, 2m, 3m, \dots, \frac{n-1}{n},$$

e sommando otterremo

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{hm}{n}\right) &= \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{hm}{n} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2n} \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{2hkm\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n} \\ &= \frac{n^2-1}{8} \cdot \frac{m}{n} - \frac{n-1}{4} + \frac{1}{2n} \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{2hkm\pi}{n} \cotg \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Ora si ha

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{2hkm\pi}{n} = \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1) \frac{mk\pi}{n} \sin \frac{1}{2}(n+1) \frac{mk\pi}{n}}{\sin \frac{mk\pi}{n}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos mk\pi - \cos \frac{mk\pi}{n}}{\sin \frac{mk\pi}{n}},$$

quindi

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{hm}{n}\right) = \frac{n^2-1}{8} \frac{m}{n} - \frac{n-1}{4} - \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos mk\pi - \cos \frac{mk\pi}{n}}{\sin \frac{mk\pi}{n}} \cotg \frac{k\pi}{n}. \quad (7)$$

Dividiamo la sommatoria nel secondo membro in due, una relativa ai valori pari $2q$ di k , e l'altra ai valori impari $2r-1$; ambedue vanno prese da 1 sino a $\frac{1}{2}(n-1)$, e perciò

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos mk\pi - \cos \frac{mk\pi}{n}}{\sin \frac{mk\pi}{n}} &= \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{1 - \cos \frac{2qm\pi}{n}}{\sin \frac{2qm\pi}{n}} \cotg \frac{2q\pi}{n} \\ &\quad - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{1 + \cos \frac{(2r-1)m\pi}{n}}{\sin \frac{(2r-1)m\pi}{n}} \cotg \frac{(2r-1)\pi}{n}, \end{aligned}$$

ossia per facili riduzioni

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\cos m k \pi - \cos \frac{m k \pi}{n}}{\sin \frac{m k \pi}{n}} = \sum_{q=1}^{q=\frac{1}{2}(n-1)} \operatorname{tg} \frac{q m \pi}{n} \operatorname{cotg} \frac{2 k \pi}{n} -$$

$$- \sum_{r=1}^{r=\frac{1}{2}(n-1)} \operatorname{cotg} \frac{(2r-1)m\pi}{2n} \operatorname{cotg} \frac{(2r-1)\pi}{n}.$$

La seconda somma è uguale e di segno contrario alla prima; infatti ad un termine della prima corrisponde sempre un termine uguale ed opposto della seconda. Per convincersene basta porre nella seconda somma

$$r = \frac{n-1}{2} - q + 1 = \frac{n+1}{2} - q,$$

ed osservare che

$$\operatorname{cotg} \frac{(2r-1)m\pi}{2n} \operatorname{cotg} \frac{(2r-1)\pi}{n}$$

diviene

$$\operatorname{cotg} \frac{(n-2q)m\pi}{2n} \operatorname{cotg} \frac{(n-2q)\pi}{n},$$

ossia

$$- \operatorname{tg} \frac{q m \pi}{n} \operatorname{cotg} \frac{2 q \pi}{n};$$

avremo dunque

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\cos m k \pi - \cos \frac{m k \pi}{n}}{\sin \frac{m k \pi}{n}} \operatorname{cot} \frac{k \pi}{n} = 2 \sum_{q=1}^{q=\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\operatorname{tg} \frac{q m \pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{2 q \pi}{n}},$$

e pertanto la (7) si trasformerà nella

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{hm}{n}\right) = \frac{n^2-1}{8} \frac{m}{n} - \frac{n-1}{4} - \frac{1}{n2} \sum_{q=1}^{q=\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\operatorname{tg} \frac{q m \pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{2 q \pi}{n}}, \quad (8)$$

che costituisce il teorema 3.°

Sia p un numero primo, a un numero impari non divisibile per p , e indichiamo col noto simbolo $\left(\frac{a}{p}\right)$, introdotto da LEGENDRE, il resto della divisione

di $a^{\frac{p-1}{2}}$ per p , cioè l'unità positiva o negativa secondo che a è residuo quadratico o non residuo relativamente al modulo p .

GAUSS (*) ha fatto vedere, nella sua terza dimostrazione della celebre legge di reciprocità di LEGENDRE, che si ha

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu,$$

ove

$$\mu \equiv \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(p-1)} E\left(\frac{ha}{p}\right) \pmod{2},$$

e perciò per la (8) si può prendere

$$\mu = \frac{1}{2p} \left\{ \frac{(a-2)p^2 + 2p - a}{4} - \sum_{q=1}^{q=\frac{1}{2}(p-1)} \frac{\operatorname{tg} \frac{qa\pi}{p}}{\operatorname{tg} \frac{2q\pi}{p}} \right\},$$

che è appunto il teorema 4.°

Il 5.° è un caso particolare di un teorema più generale dato dallo stesso GAUSS nella Memoria sopra citata (**).

Sia x una quantità positiva non intera, e dei suoi multipli

$$2x, 3x, \dots \text{ sino ad } rx$$

nessuno sia intero. Poniamo

$$E(rx) = h,$$

ed è facile concludere che tra i multipli della quantità inversa

$$\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \frac{3}{x}, \dots \text{ sino ad } \frac{h}{x}$$

non si trova un intero.

GAUSS ha mostrato che si ha

$$\left. \begin{aligned} & E(x) + E(2x) + \dots + E(rx) \\ & + E\left(\frac{1}{x}\right) + E\left(\frac{2}{x}\right) + \dots + E\left(\frac{h}{x}\right) \end{aligned} \right\} = rh.$$

(*) *Theorematis arithmetici demonstratio nova. — Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliaciones novae* (Werke, t. 2).

(**) Ib. p. 7.

Prendiamo ora due numeri m ed n primi tra loro e tutti e due $\equiv 1 \pmod{\mu}$, e per fissare le idee sia n il più piccolo; è evidente che nessuno dei multipli

$$\frac{n}{m}, \frac{2n}{m}, \frac{3n}{m}, \dots \text{ sino a } \frac{\frac{m-1}{\mu}n}{m},$$

sarà intero, ed inoltre che $\frac{\frac{m-1}{\mu}n}{m} = \frac{n}{\mu} - \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{\mu}$ è compreso tra $\frac{n-1}{\mu}$ ed $\frac{n}{\mu}$, e perciò

$$E\left(\frac{\frac{m-1}{\mu}n}{m}\right) = \frac{n-1}{\mu}.$$

Possiamo quindi nell'equazione superiore porre $x = \frac{n}{m}$ e prendere $r = \frac{m-1}{\mu}$, onde sarà $h = \frac{n-1}{\mu}$, ed allora verrà

$$\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{\mu}} E\left(\frac{kn}{m}\right) + \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{\mu}} E\left(\frac{hm}{n}\right) = \frac{(n-1)(m-1)}{\mu^2} \quad (9)$$

nella quale equazione consiste il teorema 5.º

Facciamo

$$F(m, n) = \sum_{q=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\operatorname{tg} \frac{qm\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{2q\pi}{n}}$$

e caviamo dalla (8)

$$F(m, n) = \frac{n^2-1}{4}m - \frac{n(n-1)}{2} - 2n \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} E\left(\frac{hm}{n}\right),$$

allo stesso modo si avrà

$$F(n, m) = \frac{m^2-1}{4}n - \frac{m(m-1)}{2} - 2m \sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} E\left(\frac{hn}{m}\right).$$

Moltiplicando la prima per m e la seconda per n , e sommando conseguiremo

$$mF(m, n) + nF(n, m) = \frac{m^2 n^2}{2} - \frac{m^2}{4} - \frac{n^2}{4} + mn - \frac{mn(m+n)}{2} - \\ - 2mn \left\{ \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{hm}{n}\right) E + \sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(m-1)} E \left(\frac{hn}{m}\right) \right\};$$

ma essendo m ed n impari e primi tra loro, si può fare nella (9) $\mu = 2$, e quindi la quantità dentro parentesi nel secondo membro è $= \frac{(n-1)(m-1)}{4}$, e perciò verrà

$$mF(m, n) + nF(n, m) = -\frac{1}{4}(m-n)^2.$$

È questa un'altra proposizione enunciata dallo stesso EISENSTEIN (Giornale di Crelle tom. XXVII, p. 282), ove però per un errore di stampa si legge $-\frac{1}{2}(m-n)^2$ invece di $-\frac{1}{4}(m-n)^2$.

Genova, dicembre 1869.

FINE DEL TOMO III.° (SERIE II.ª)