Ecole Polytechnique. 1ère Conférence d'analyse.

1ère Division.

1886-87.

M. Poincaré.

Série de Fourier.

$$f(x) = A_0 + \Sigma A_n \cos nx + \Sigma B_n \sin nx.$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx, \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Soit à développer la fonction x; comme elle est impaire, il n'y aura que des sinus dans le développement. L'intégrale indéfinie de $x \sin nx$ est:

$$-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}$$

On a donc:

$$B_n = -2\frac{(-1)^n}{n}$$

d'où:

(1) $$x = -2\Sigma(-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

Développons maintenant x^2; pour cela, intégrons la formule précédente et multiplions par 2; il vient:

$$x^2 = 4\Sigma(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + A_0$$

Pour déterminer A_0, nous nous servirons de la formule de Fourier qui donne

(2) $$x^2 = 4\Sigma(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\pi^2}{3}$$

Développons maintenant x^3; pour cela intégrons encore et multiplions par 3; la constante d'intégration est nulle parce que la fonction est impaire; on trouve:

(3) $$x^3 = 12\Sigma(-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} + \pi^2 x.$$

Pour avoir le développement de x^4, intégrons et multiplions par 4; il vient:

$$x^4 - 2\pi^2 x^2 = -48\Sigma(-1)^n \frac{\cos nx}{n^4} + A_0$$

pour avoir A_0, appliquons la formule de Fourier:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(x^4 - 2\pi^2 x^2)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{3}\right] = -\frac{7\pi^4}{15}.$$

d'où enfin:

$$(4)\quad x^4 - 2\pi^2 x^2 + \frac{7x^4}{15} = -48\,\Sigma(-1)^n \frac{\cos nx}{n^4}$$

Faisons maintenant successivement: dans la formule (1) $x = \frac{\pi}{2}$, dans la formule (2) $x = 0$, puis $x = \pi$; dans la formule (3) $x = \frac{\pi}{2}$, dans la formule (4) $x = 0$, puis $x = \pi$; nous trouverons:

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots \\ \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots\dots \\ \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\dots \\ \frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots\dots \\ \frac{7\pi^4}{15.48} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots\dots \\ \frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\dots \end{array} \right.$$

Les deuxième et troisième formules ne sont pas réellement distinctes, de même que les cinquième et sixième.

Developpons maintenant une fonction qui soit égale à $-\pi$ entre $-\pi$ et 0 et à $+\pi$ entre 0 et π. Cette fonction étant impaire, son développement ne contiendra que des sinus. On trouve d'ailleurs:

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\,\pi\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi \sin nx\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin nx\,dx$$

d'où: $B_n = 0$ ou $\frac{+4}{n}$ selon que n est pair ou impair.

On a donc:

$$(6)\qquad \pm\pi = +4\,\Sigma\,\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

Cherchons maintenant une fonction qui soit égale à $-\pi x$ entre $-\pi$ et 0, et à $+\pi x$ entre 0 et π. Il vient en intégrant la formule précédente

$$\pm\pi x = -4\,\Sigma\,\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + A_0$$

Pour trouver A_0, nous appliquerons la formule de Fourier qui donne:

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{\pi^2}{2}$$

On a donc:

$$(7) \qquad \pm \pi x = -4\sum \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{2}$$

Pour avoir le développement de $\pm \pi x^2$, intégrons et multiplions par 2; il vient:

$$(8) \qquad \pm \pi x^2 = -8\sum \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} + \pi^2 x$$

En faisant $x = \frac{\pi}{2}$ dans les formules (6) et (8) on retrouve la 1ère et la 4e des formules (5). En faisant $x=0$, dans la formule (7) on trouve:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\cdots$$

qu'il serait aisé de déduire des formules (5).

Valeur approchée de $\dfrac{\Gamma(x+h)}{\Gamma(x)}$ x très-grand, h fini.

On a trouvé

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

d'où:

$$\Gamma(n) = n^n e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

On a donc:

$$\frac{\Gamma(x+h)}{\Gamma(x)} = \frac{(x+h)^{x+h}}{x^x}e^{-h}\sqrt{\frac{x}{x+h}}$$

Le second membre peut encore s'écrire

$$\left(\frac{x+h}{x}\right)^{x+h} x^h e^{-h}\sqrt{\frac{x}{x+h}}$$

ou

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^x x^h e^{-h}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{h-\frac{1}{2}}$$

comme x est très-grand,

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^x = e^h \qquad \frac{x+h}{x} = 1$$

Il reste donc:

$$\frac{\Gamma(x+h)}{\Gamma(x)} = x^h$$

Expression de $\Gamma(x+1)$ en produit infini.
x fini.
On a si n est entier:

$$\Gamma(x+n+1) = \Gamma(x+1)\times(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)$$

$$\Gamma(n+1) = 1.2.\cdots\cdots\cdots n$$

d'où:

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)} = \Gamma(x+1)(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

Mais on a d'autre part, si n est très-grand

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)} = (n+1)^x = n^x\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \cdots\cdots$$

ce qui peut être égalé à n^x puisque $\frac{n+1}{n}$ est égal à 1 pour n très-grand.

Il reste donc finalement

$$\Gamma(x+1) = \lim (\text{pour } n=\infty) \text{ de } \frac{n^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

d'où:

$$(9)\quad \log\Gamma(x+1) = x\log n - \log\left(1+\frac{x}{1}\right) - \log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \cdots\cdots - \log.\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

Développement de $\log\Gamma(x+1)$
Soit:

$$\log.\Gamma(x+1) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots\cdots\cdots$$

En developpant le second membre de l'égalité (9) on trouve

$$x\log n - x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right) + \frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$-\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}\right) + \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^4}\right) + \cdots$$

En égalant les deux developpements, on trouve que A_1 est la limite de

$$\log.n - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

pour n infini pendant que A_2, A_3, A_4 etc sont les sommes des Séries infinies.

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2},\quad -\frac{1}{3}\sum\frac{1}{n^3},\quad \frac{1}{4}\sum\frac{1}{n^4},\ \ldots\ldots$$

D'autre on a:

$$\log.\Gamma(1-x) = -A_1x + A_2x^2 - A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots\ldots$$

d'où: $\log\left[\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\right] = 2A_2x^2 + 2A_4x^4 + \ldots\ldots$

Mais:

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{x\pi}{\sin x\pi}$$

d'où:

$$\log\frac{x\pi}{\sin x\pi} = 2A_2x^2 + 2A_4x^4 + \ldots\ldots$$

Mais la formule de Mac Laurin donne aisément:

$$\log.\frac{x\pi}{\sin x\pi} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^4}{180} + \ldots\ldots$$

En égalant les deux développements, on trouve:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum\frac{1}{n^2},\quad \frac{\pi^4}{90} = \sum\frac{1}{n^4}\ldots\ldots$$

Ce sont les formules (5).

Propriétés de l'expression:

$$F(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)}\ldots n^{nx}$$

Si l'on change x en $x+\frac{1}{n}$, le numérateur devient:

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma(x+1)$$

il est donc multiplié par x.

Le dénominateur $\Gamma(nx)$ est multiplié par nx.

Quant au facteur n^{nx}, il devient n^{nx+1} et il est multiplié par n.

Donc:

$$F\left(x+\frac{1}{n}\right) = F(x)$$

$F(x)$ est donc une fonction périodique.

Faisons tendre x vers l'infini.

Nous avons, si x est très-grand:

$$\Gamma\left(x+\frac{i}{n}\right) = \Gamma(x)\,x^{\frac{i}{n}}$$

Il vient donc: $F(x) = \dfrac{\left[\Gamma(x)n^x\right]^n}{\Gamma(nx)}\,x^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots\ldots+\frac{n-1}{n}}$

ou encore en remplaçant les Γ par leurs valeurs approchées:

$$F(x) = \frac{\left[x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, n^x\right]^n}{(nx)^{nx} e^{-nx}\sqrt{\frac{2\pi}{nx}}}\, x^{\frac{n-1}{2}}$$

ou enfin:

$$F(x) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$$

On a donc lorsque x tend vers l'infini:

$$\lim. F(x) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$$

Mais une fonction périodique de x qui tend vers une limite finie et déterminée quand x tend vers l'infini est une constante.

Donc $F(x)$ est une constante et est égale à

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}.$$

École Polytechnique.
1ère Division
1886-87

2e conférence d'analyse.

Mr. Poincaré.

Nous appellerons fonction Θ d'ordre p une fonction entière de u jouissant des deux propriétés suivantes:

$$\Theta(u+\omega) = \Theta(u), \quad \Theta(u+\omega') = e^{-pu+h}.\Theta(u)$$

Nous pourrons toujours supposer

$$\omega = 2i\pi$$

car si cela n'était pas, on n'aurait qu'à changer de variable en multipliant par $\frac{2i\pi}{\omega}$. Alors, Θ est une fonction de e^u qui n'a d'autre point singulier que $u=0$. Donc, en vertu du théorème de Laurent, nous pourrons écrire:

$$\Theta(u) = \Sigma A_m e^{mu}$$

m variant de $-\infty$ à $+\infty$. La seconde solution s'écrira:

$$\Sigma A_m e^{mu-pu+h} = \Sigma A_m e^{mu+m\omega'}$$

Le second membre peut s'écrire:

$$\Sigma A_{m+p} e^{mu+pu+(m+p)\omega'}$$

en changeant m en $m+p$; si nous identifions, il vient:

$$A_{m+p} = A_m e^{h-(m+p)\omega'}$$

Cette relation de récurrence, montre que l'on pourra calculer tous les coëfficients A_m quand on connaîtra

$$A_0, A_1, A_2 \ldots, A_{p-1}$$

Donc toutes les fonctions Θ d'ordre p qui ont même multiplicateur e^{-pu+h} s'expriment linéairement à l'aide de p d'entre elles.

Il est aisé de former des fonctions Θ d'ordre p ayant tel multiplicateur que l'on veut. Considérons en effet la fonction

$$\Theta_3\left(u+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \Theta_4(u).$$

qui s'annule pour $u=0$; c'est une fonction Θ de 1er Ordre qui a pour multiplicateur

$$(-1)e^{-u}$$

Envisageons maintenant le produit

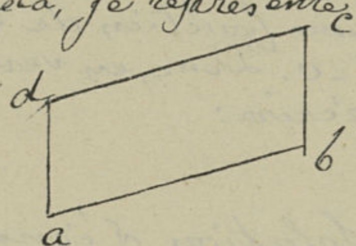
$$\Theta_4(u-a_1)\,\Theta_4(u-a_2)\,\dots\,\Theta_4(u-a_p)$$

Ce sera une fonction Θ d'ordre p qui aura pour multiplicateur e^{-pu+h} où

$$h = i\pi + a_1 + a_2 + \dots + a_p.$$

Je dis maintenant que toute fonction Θ d'ordre p peut être mise sous la forme d'un pareil produit, à un facteur constant près.

Je dis d'abord que la fonction $\Theta(u)$ aura p zéros à l'intérieur du parallélogramme des périodes. Pour cela, je représente ce parallélogramme dont les quatre sommets ont pour valeurs:



$a=0,\ b=\omega,\ c=\omega+\omega',\ d=\omega$

et j'en prends l'intégrale:

$$\int \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\,du$$

le long de ce parallélogramme, comme $\Theta(u+\omega)=\Theta(u)$, les intégrales prises le long des côtés bc et da se détruiront. D'autre part, on a:

$$\frac{\Theta'(u+\omega')}{\Theta(u+\omega')} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - p$$

On en conclut que

$$\int_{ab} + \int_{cd} = \int_{ab} - \int_{dc} = +\int_{ab} p\,du = p\omega = 2pi\pi$$

l'intégrale cherchée est donc $2pi\pi$. C.Q.F.D.

Cherchons maintenant la somme des zéros. Il faut pour cela prendre l'intégrale

$$\int \frac{u\,\Theta'(u)}{\Theta(u)}\,du$$

le long du parallélogramme ; elle sera égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des zéros ; nous trouvons ainsi :

$$\int_{bc}+\int_{da}=\int_{ad}u\,\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\,du=2i\pi\Big[\log.\ \Theta(\omega')-\log.\ \Theta(0)\Big]$$

$$\log.\ \Theta(u+\omega')=\log.\ \Theta(u)-pu+h$$

Il reste donc :

$$\int_{ab}+\int_{cd}=\int_{ab}\left[u\,\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}-(u+\omega')\,\frac{\Theta'(u+\omega')}{\Theta(u+\omega')}\right]du.$$

$$=\int_{ab}\left[(u+\omega')\left[\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}-\frac{\Theta'(u+\omega')}{\Theta(u+\omega')}\right]du+\omega'\int_{ab}\frac{\Theta'}{\Theta}\,du\right.$$

La seconde intégrale est nulle ; la première donne :

$$\int_{ab}p(u+\omega')\,du=\int_0^{\omega}p(u+\omega')\,du=p\,\frac{\omega^2}{2}+p\,\omega.\omega'$$

Si l'on observe que $\omega=2i\pi$, l'intégrale cherchée est égale à

$$2i\pi\,(h+pi\pi+p\omega')$$

Donc la somme des zéros est à un multiple près des périodes

$$h+pi\pi.$$

Il en résulte que si

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$$

sont les zéros de $\Theta(u)$, le produit

$$\Theta_1(u-a_1)\,\Theta_1(u-a_2)\ldots\Theta_1(u-a_p)$$

aura mêmes zéros et même multiplications que $\Theta(u)$. Le rapport

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta_1(u-a_1)\,\Theta_1(u-a_2)\ldots\Theta_1(u-a_p)}$$

sera donc une fonction doublement périodique qui n'aura pas d'infinis ; ce sera donc une constante.

qui n'aura pas d'infinis ; ce sera donc une constante.
Soit maintenant.

$$\frac{x}{\Theta_4(u-a_1)\Theta_4(u-a_2)\Theta_4(u-a_3)} = \frac{y}{\Theta_4(u-b_1)\Theta_4(u-b_2)\Theta_4(u-b_3)} = \frac{z}{\Theta_4(u-c_1)\Theta_4(u-c_2)\Theta_4(u-c_3)}$$

Je suppose

$$a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3 = c_1+c_2+c_3 = 0.$$

En éliminant u entre ces deux équations, on obtiendra l'équation d'une courbe algébrique en coordonnées homogènes x, y et z. Je dis que cette courbe est du 3e degré. En effet, coupons par une droite quelconque

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Remplaçons dans cette équation x, y et z par les quantités proportionnelles sont en dénominateurs dans les équations (1). Le premier membre deviendra une fonction Θ d'ordre (3) qui aura 3 zéros distincts. La droite coupe donc la courbe en 3 points.

On peut d'ailleurs démontrer que toute courbe du 3e degré est susceptible de ce mode de représentation.

Coupons cette courbe par une courbe algébrique quelconque d'ordre m. Si nous remplaçons dans l'équation de cette courbe en coordonnées homogènes, x, y et z par les dénominateurs des équations (1), le 1er membre deviendra une fonction Θ d'ordre $3m$ qui aura pour multiplicateur

$$(-1)^{3m} e^{-3mu}$$

Cette fonction aura donc $3m$ zéros distincts dont la somme sera nulle. En conséquence, les arguments elliptiques des $3m$ points d'intersection auront pour somme 0.

Par exemple, pour que trois points d'une courbe du 3e ordre soient en ligne droite, pour que six points soient sur une même conique, pour que neuf points soient sur une infinité de courbes du 3e ordre, il faut et il suffit que la somme des arguments elliptiques soit nulle, à un multiple près des périodes.

Mener des tangentes à la courbe par un point M de cette courbe. Soit α l'argument du point M, β celui du point de contact. Alors $\alpha + 2\beta$ devra être égal à une période ; on aura donc

$$\beta = -\frac{\alpha}{2} + \frac{m\omega}{2} + \frac{m'\omega'}{2}$$

Nous pourrons faire : $m = 0, 1$; $m' = 0, 1$.

Il y donc quatre tangentes et les arguments des points de contact sont :

$$\beta_1 = -\frac{\alpha}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2}, \quad \beta_3 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2}, \quad \beta_4 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}.$$

Comme on a : $$2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \omega + \omega'$$

La conique qui passe par les 4 points de contact et par le point M est tangente à la courbe au point M.

Points d'inflexion. Les trois points de rencontre d'une tangente d'inflexion, avec la courbe se confondent en un seul. Si α en est l'argument, 3α doit être une période ; donc :

$$\alpha = \frac{m\omega}{3} + \frac{m'\omega'}{3}$$

On peut donner à m et m' les valeurs 0, 1 et 2 ; cela fait donc 9 points d'inflexion.

Joignons deux points d'inflexion d'argument α et β par une droite. Cette droite coupera la courbe en un 3e point d'argument $-(\alpha+\beta)$. Or α est le tiers d'une période de même que β ; il en sera donc de même de $-(\alpha+\beta)$.

Le 3e point est donc un point d'inflexion.

Tangentes menées par un point d'inflexion. Soit par exemple à mener une tangente par le point d'argument 0 ; on doit, On doit avoir pour les coordonnées du point de contact:

$$\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2} \text{ et } \frac{\omega+\omega'}{2}$$

Les quatre tangentes se réduisent donc à 3 parce que l'une d'elles ~~et~~ se confond avec la tangente d'inflexion. La somme des arguments est égale à $\omega+\omega'$, c'est à dire à une période. Les 3 points de contact sont donc en ligne droite.

On trouverait le même résultat pour les tangentes menées par les huit autres points d'inflexion; on verrait que les arguments sont égaux au 6^e d'une période. Soit en effet α l'argument du point d'inflexion, β celui du point de contact de la tangente menée par ce point. La somme $(2\beta+\alpha)$ et par conséquent $6\beta+3\alpha$ devra être une période. Or 3α est une période; donc il en sera de même de 6β.

Il y a en tout 27 pareils points de contact. Comme l'argument d'un de ces points est le 6^e d'une période, on peut faire passer par ce point une conique dont les 6 points d'intersection se confondent en un seul et qui ait par conséquent avec la courbe un contact du 5^e ordre.

En adjoignant à ces 27 points les 9 points d'inflexion, on a en tout 36 points dont l'argument est le 6^e d'une période. Si par deux de ces 36 points, on fait passer une droite, le 3^e point d'intersection de cette droite avec la courbe est encore un des 36 points. Si par cinq des 36 points on fait passer une conique, le 6^e point d'intersection de cette conique avec la courbe est encore un des 36 points.

Coniques triplement tangentes.

Si α, β et γ sont les arguments des trois points de contact, la somme $\alpha+\beta+\gamma$ est une demi-période. Les coniques simplement tangentes se répartissent en trois systèmes, selon que cette somme est égale à $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, ou $\frac{\omega+\omega'}{2}$.

Si deux coniques triplement tangentes appartiennent au même système, les six points de contact sont sur une même conique.

Si trois coniques triplement tangentes, appartiennent à trois systèmes différents, les neuf points de contact sont sur une infinité de courbes du 3^e ordre.

Coniques doublement osculatrices.

Si α et β sont les coordonnées des deux points d'osculation, $\alpha+\beta$ sera le tiers d'une période. Si donc on joint ces deux points d'osculation, la droite ainsi obtenue va passer par un point d'inflexion.

Avant de terminer, je veux indiquer comment on peut démontrer qu'une courbe quelconque du 3e ordre est susceptible du mode de représentation dont nous venons de nous occuper.

Soit

$$F(x,y)=0$$

l'équation de la courbe considérée en coordonnées ordinaires. Posons:

$$u=\int\frac{dx}{F'(y)}.$$

et prenons cette intégrale à partir d'un point d'inflexion.

Alors u sera l'argument elliptique du point x, y; on verrait sans peine que cette intégrale se ramène à une intégrale elliptique de 1ère Espèce. Il suffit pour cela de prendre pour origine un des points de la courbe et de poser

$$y=t.x.$$