

Geométrie infinitésimale.

Etude géométrique des courbes et des surfaces.

1) Les leçons qui composent cette partie du Cours ont pour objet l'étude géométrique des courbes et des surfaces et plus spécialement l'étude de certaines propriétés communes à toutes les courbes et à toutes les surfaces et qui sont dues à la continuité qu'on suppose exister dans leur mode de génération.

Cette étude, on le conçoit, nécessite par sa nature même une définition préalable de la continuité en géométrie et nous sommes amenés ainsi à parler des infiniment petits à expliquer la façon dont ils s'introduisent dans les raisonnements géométriques et à établir les principes de la géométrie infinitésimale dont nous ferons un usage continu dans la suite.

Mais avant d'aborder cette étude des infiniment petits géométriques, il n'est pas inutile, croyons nous, de rappeler brièvement les considérations analogues déjà développées dans le Cours d'Analyse au sujet des quantités algébriques.

2) Idees innées : Classification des sciences exactes.

Toutes les sciences exactes reposent sur un certain nombre d'idées fondamentales qu'on ne saurait définir et qu'on a désignées sous le nom d'idées innées (Descartes) ou de catégories (Kant).

Elles sont l'idée de nombre conduisant à la notion d'une échelle de croissance et de décroissance unique ; l'idée d'espace

comportant la notion intuitive des trois dimensions et celle du point géométrique ; l'idée de temps, enfin l'idée de matière entendue dans l'acceptation qui lui est donnée en mécanique rationnelle et sans faire appel à aucune conception métaphysique.

L'arithmétique et l'algèbre sont sous des formes différentes les sciences du nombre ; l'algèbre par l'emploi de symboles établit des relations qui doivent être vérifiées quels que soient les nombres que ces symboles représentent.

La géométrie est la science de l'espace.

La notion du déplacement résulte de la combinaison de l'idée de temps avec l'idée d'espace. Un point se déplace lorsqu'il occupe des positions différentes dans l'espace à des époques différentes dans le temps. On dit alors que le point est mobile et sa position variable.

On donne plus spécialement le nom de mouvement ou déplacement lorsqu'on tient compte dans son étude du temps écoulé entre chaque position du point ou des points mobiles, autrement dit de la rapidité avec laquelle les changements de position s'effectuent.

La mécanique est la science du mouvement en général.

Elle en étudie les causes appelées forces. La Cinématique est la partie de la mécanique qui traite spécialement du mouvement sans en considérer les causes et sans que l'on soit forcé par conséquent d'attribuer le caractère matériel aux points qui se déplacent, mais en tenant compte de sa rapidité caractérisée par les quantités auxquelles on a donné les noms de vitesse et d'accélération de divers ordres.

On a donné le nom de géométrie cinématique à la partie de la cinématique qui traite des déplacements, abstraction faite de leur rapidité. Les résultats auxquels conduit la géométrie cinématique sont donc caractérisés par ce fait qu'ils sont indépendants du temps et de nature purement géométrique.

3 Application de l'arithmétique et de l'algèbre aux autres sciences exactes.

L'idée abstraite de nombre peut s'appliquer à des quantités concrètes, numériquement comparables entre elles, c'est-à-dire variant à la façon des grandeurs numériques suivant une échelle de croissance ou de décroissance unique.

Les opérations arithmétiques et algébriques s'étendent à ces quantités sans difficulté aucune ; par exemple on peut ajouter 2 à 3, mais on peut aussi ajouter 2 mètres à 3 mètres, 2 minutes à 3 minutes, etc.

C'est ainsi que les règles du calcul algébrique sont applicables aux expressions renfermant des durées, c'est-à-dire des intervalles de temps, telles qu'on a à les considérer en mécanique, et aussi aux figures géométriques à la condition de déterminer leurs éléments au moyen de grandeurs numériquement comparables entre elles, comme les longueurs portées sur des axes de coordonnées par exemple, ou des angles dont les côtés sont situés dans un même plan. De là les systèmes de coordonnées et les méthodes de la géométrie analytique (4).

(4) Définition de la continuité pour les grandeurs numériquement comparables entre elles.

Une grandeur numérique est dite varier d'une façon continue si elle ne passe d'une valeur de l'échelle de ses variations à une autre sans passer une fois au moins par toutes les valeurs intermédiaires.

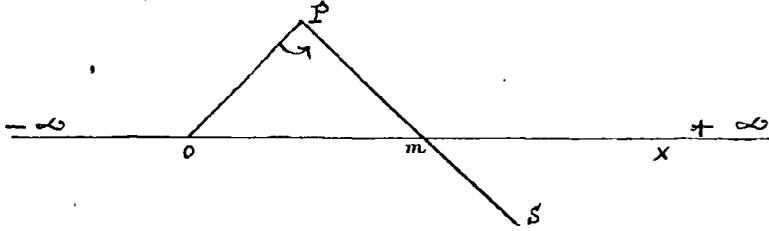
Cette continuité n'exclut pas toutefois le passage de $\pm \infty$ à $\mp \infty$.

Ainsi si une sécante mobile PS tournant constamment dans

(4) C'est ici le lieu de mentionner une méthode géométrique intéressante et d'une nature toute spéciale, le calcul géométrique, à laquelle on a été conduit par une interprétation du calcul des quantités imaginaires en Analyse, mais qui peut être présentée en dehors de toute considération d'imaginaires, comme une algébrisation de certaines constructions géométriques de même que l'algèbre ordinaire est une algébrisation des opérations de l'algèbre élémentaire.

Cette méthode permet en effet d'opérer par des procédés entièrement analogues à ceux de l'algèbre sur des grandeurs qui ne sont pas numériquement comparables entre elles, telles que longueurs portées dans des directions différentes et pour lesquelles on doit tenir compte de ces différences de direction ou angles situés dans des plans différents et pour lesquels on doit tenir compte également de la différence d'orientation de ces plans.

Le même sens autour de P détache sur une droite fixe OX un segment Om , on devra considérer ce segment comme variant d'une manière continue lorsque l'angle de la sécante avec la direction fixe PO passera d'une façon continue également, et cela, bien qu'il passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand la sécante devient parallèle à la droite fixe.



§. Limites : Quantités infiniment petites.

On dit qu'une grandeur variable a tend vers une limite A lorsqu'on peut assigner une époque à partir de laquelle sa différence avec A est et reste constamment plus petite qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra.

On peut remarquer que si deux grandeurs a et b varient simultanément, ont respectivement pour limites A et B , les sommes $a \pm b$, le produit ab et le quotient $\frac{a}{b}$ auront pour limites $A \pm B$, AB et $\frac{A}{B}$.

Si la limite a d'une quantité A est zéro, la quantité est dite infiniment petite : une quantité infiniment petite est donc, par sa définition même, une quantité variable.

Si une quantité a a pour limite A la différence $a - A$ est un infiniment petit.

Si, une quantité a variant d'une façon continue a pour valeur finale A , on peut dire en général qu'elle tend vers A ou que sa différence avec A est infiniment petite.

Imaginons en effet les variations de la quantité a figurées sur l'échelle des grandeurs OE . Quelles que soient les fluctuations que puisse subir la grandeur OA avant d'atteindre sa valeur finale OA ,



parmi ses écarts maximum successifs de part et d'autre de A , il en existera nécessairement un dernier a' à partir duquel a se rapprochera constamment de A . Si donc on porte sur $A a'$ une longueur AE aussi petite que l'on voudra, en se transportant de a' en A , le point mobile a devra, à cause de la continuité de son déplacement, passer par la position E et à partir de l'époque correspondante, son écart avec A restera toujours inférieur à E . On peut donc dire que a tend vers A , conformément à la définition qui a été donnée de l'expression tendre vers une limite.

G. Fonctions.

Une grandeur numérique qui dépend d'une autre grandeur numérique de telle manière qu'à une valeur attribuée à la seconde correspondent une ou plusieurs valeurs déterminées de la première est dite fonction de cette seconde grandeur.

La fonction est dite continue si la première grandeur varie d'une façon continue lorsqu'on fait varier d'une façon continue la seconde.

Supposons par exemple que y soit une fonction continue de x et qu'à une valeur x_1 attribuée à x corresponde une détermination y_1 de y . Lorsque x tendra vers x_1 , si une des valeurs de y tendra vers y_1 de sorte que pour cette valeur de y la différence $y - y_1$ sera infiniment petite en même temps que la différence $x - x_1$.

H. Différents ordres d'infiniment petits.

Si plusieurs quantités $y z u v \dots$ sont fonctions continues d'une même quantité x et si l'on fait tendre x vers une limite x_1 , $y z u v \dots$ ou plus exactement certaines déterminations de ces lettres tendront vers des limites $y_1 z_1 u_1 v_1 \dots$ qui seront des déterminations de ces fonctions correspondant à la valeur x_1 de x .

Si certaines de ces limites sont nulles, les fonctions correspondantes sont infiniment petites, et il en sera ainsi en tous cas des différences entre les déterminations $YZUV$ ----- et leurs limites y, z, u, v , -----

Les infiniment petits qui se présentent ainsi dans une même question sont dits de même ordre lorsque leur rapport tend vers une limite finie.

Un infiniment petit spécial E étant pris comme terme de comparaison ou l'étalon dans la question considérée, un autre infiniment petit E_p est dit d'ordre p s'il est du même ordre que E^p .

Le produit de deux infiniment petits d'ordre p et q est donc un infiniment petit d'ordre $p+q$.

L'accroissement infiniment petit ou différentiel d'une fonction est en général du même ordre que l'accroissement infiniment petit correspondant de la variable, mais il devient d'ordre supérieur au premier lorsque la fonction passe par une valeur maximum ou minimum.

Il devient également d'ordre supérieur si la fonction, par l'effet d'un facteur infiniment petit, mais indépendant de la variable, devient elle-même infiniment petite pour toutes les valeurs attribuées à la variable.

§ Rôle des infiniment petits en Analyse et principe fondamental de leur calcul.

Les infiniment petits étant par définition même des quantités évanouissantes, c'est-à-dire variables et tendant vers Zéro, leur considération n'a d'intérêt que si elle conduit à la détermination de quantités finies.

Or ceci peut avoir lieu de deux manières, soit qu'on prenne les infiniment petits à l'état de rapports (nous venons de le voir précisément à propos de la définition des infiniment petits de même ordre), soit qu'on les considère à l'état de sommes et en nombre indéfiniment croissants.

De quelque façon d'ailleurs qu'on ait à les considérer à l'état de rapports ou à l'état de sommes - comme c'est toujours en vue d'une limite à déterminer qu'on les considère on peut sans

inconvenient simplifier les expressions qui les renferment pourvu que la limite cherchée ne s'en trouve pas modifiée.

C'est ainsi qu'une somme d'infiniment petits telle que

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ -----}$$

figurant dans les expressions qu'on veut calculer peut toujours être réduite aux infiniment petits de l'ordre le moins élevé qu'elle renferme, ou comme l'on dit, à sa valeur principale qui sera par exemple

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

si ces deux infiniment petits étant d'un ordre donné les autres infiniment petits $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \text{ -----}$ sont d'ordres plus élevés que ε_0 et ε_1 .

Par cette simplification, l'exactitude des expressions considérées se trouve altérée il est vrai, mais cette altération disparaît dans le résultat final du calcul.

2. Application des considérations précédentes à la géométrie : Géométrie infinitésimale.

Cette notion des quantités infiniment petites et ce principe de simplification applicable à leur calcul peuvent être étendus aux objets que la géométrie étudie et qui sont des figures de l'espace comportant des longueurs, des directions, des aires, des volumes.

De même qu'une grandeur numérique peut dépendre de paramètres dont elle est fonction par une liaison comportant un certain nombre d'opérations algébriques à effectuer, de même les éléments d'une figure géométrique peuvent se déduire par des constructions connues de certaines données géométriques.

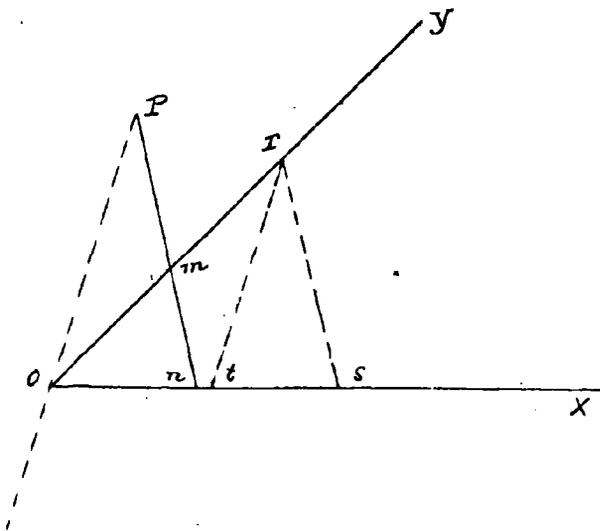
Si ces données se modifient la figure qui en résulte se déforme et les différents éléments qui la composent varient généralement à la fois en situation et en grandeur. On dit que cette variation est continue si à une variation arbitraire mais continue attribuée aux grandeurs numériquement comparables qui définissent les données correspondent des variations continues également dans les grandeurs numériquement comparables qui définissent les éléments de la figure résultante. Ces grandeurs numériquement comparables

sont, comme nous l'avons expliqué, de la nature de celles qu'on désigne sous le nom de coordonnées en géométrie analytique, de sorte que la continuité dans la variation des éléments d'une figure consiste en ce que les coordonnées de ses éléments sont des fonctions continues ⁽¹⁾ des coordonnées déterminant la figure.

Si l'on fait tendre les données vers certaines positions, certaines grandeurs, et certaines directions limites, les positions, les grandeurs et les directions des éléments composant la figure résultante tendent généralement vers certaines déterminations limites, c'est-à-dire qu'à partir d'une époque que l'on peut fixer, elles ne diffèrent de ces limites que par des différences qui sont et restent plus petites qu'une quantité donnée aussi petite qu'on voudra.

Un angle qui mesure la différence de deux directions, une longueur qui mesure la distance de deux points peuvent tendre ainsi vers zéro; on dit alors que cet angle, que cette longueur sont infinitement petits.

10) Ces infinitement petits comme ceux de l'algèbre peuvent être d'ailleurs de divers ordres.



Considérons par exemple un angle fixe XOY et une sécante menée par un point fixe P et rencontrant en m et n les côtés de l'angle. Si la sécante tourne autour de P, le triangle OIms est une figure variable dont les côtés deviennent infinitement petits lorsque la sécante tend vers la position PO. Or il est facile de reconnaître que les côtés Om, mn et In de ce triangle sont des infinitement petits de même ordre.

Menons en effet par un point I de OY une parallèle IS à la sécante Imn. On aura

(1) Cette continuité pour être complète doit s'étendre aux dérivées successives de ces fonctions.

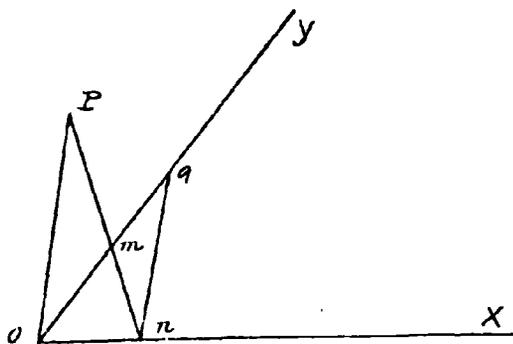
$$\frac{Om}{mn} = \frac{Or}{rS} \quad \frac{On}{mn} = \frac{oS}{rS}$$

et comme ces égalités ne cessent pas d'avoir lieu quelle que soit la direction de la sécante, elles auront lieu encore lorsque cette sécante tendra vers la position PO , et l'on aura rt étant la parallèle à PO menée par r .

$$\lim \frac{om}{mn} = \frac{or}{rt} \quad \lim \frac{on}{mn} = \frac{ot}{rt}$$

ce qui prouve, comme nous l'avions annoncé que les infiniment petits om , on et mn sont bien du même ordre.

Complétons actuellement la figure en menant par n une parallèle nq à PO .



La longueur nq sera elle aussi infiniment petite et l'on aura dans les triangles semblables OPm qnm

$$\frac{nq}{om} = \frac{mn}{mP}$$

Mais le rapport $\frac{mn}{mP}$ tend évidemment vers zéro lorsque la sécante tend vers la position PO . Donc le segment nq est

infiniment petit par rapport à b infiniment petit om , il est donc d'ordre supérieur.

Cherchons quel est cet ordre. Pour cela remarquons que la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{nq}{om^2} = \frac{mn}{om} \frac{1}{mP}$$

or le rapport $\frac{mn}{om}$ et le segment mP ayant respectivement pour limites $\frac{rt}{or}$ et OP , on doit avoir $\frac{mn}{om} = \frac{rt}{or} + \varepsilon$

et $mP = OP + \varepsilon'$, en désignant par ε et ε' deux infiniment petits.

On a donc

$$\frac{nq}{om^2} = \left(\frac{rt}{or} + \varepsilon \right) \frac{1}{OP + \varepsilon'}$$

et en négligeant ε et ε' d'après le principe fondamental

$$\lim \frac{mq}{om^2} = \frac{r\delta}{OT, OP}$$

Le segment mq est donc du second ordre si l'on prend Om comme infiniment petit principal.

On peut observer que dans le triangle mng l'angle en n est infiniment petit. En général, et c'est là un résultat dont nous aurons fréquemment à faire usage, si dans un triangle ABC l'un des angles, l'angle A par exemple est infiniment petit, et si les deux autres conservent des valeurs finies, la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

fait voir que le côté a doit être infiniment petit par rapport aux côtés b et c .

Si le triangle est infinitésimal, c'est-à-dire si ses côtés sont tous infiniment petits ⁽¹⁾, le côté a sera d'ordre supérieur aux côtés b et c qui seront eux des infiniment petits de même ordre. En effet

$$\lim \frac{b}{c} = \lim \frac{\sin B}{\sin C} = \text{une valeur finie.}$$

$$\lim \frac{a}{b} = \lim \frac{\sin A}{\sin B} = \text{Zéro.}$$

(1) La considération des infiniment petits dans les figures géométriques variables peut conduire d'ailleurs comme il a été précédemment expliqué à propos des infiniment petits algébriques, à la détermination d'éléments finis tels que positions de points, de droites ou de plans, grandeurs de segments, d'angles, d'arcs ou de volumes. Les infiniment petits qui conduisent à ces déterminations, disparaissent du résultat final, et l'on peut encore ici, en étendant à ces considérations nouvelles le principe énoncé plus haut pour les quantités numériques, remplacer les infiniment petits exacts par des infiniment petits différents ou en d'autres termes, substituer à la figure variable que l'on considère une

(1) Si dans un triangle deux côtés sont infiniment petits, le troisième côté est infiniment petit également puisqu'il est plus petit que la somme des deux autres.

figure altérée, pourvu que cette altération n'influe pas sur le résultat à obtenir.

Opérer ainsi c'est faire de la géométrie infinitésimale. Elle est puissante, mais qui doit être maniée avec une prudence toute particulière, la géométrie infinitésimale, participe aux merveilleux avantages de l'analyse infinitésimale, mais elle exige pour être appliquée avec rigueur une grande attention et des précautions très-déliées qui tiennent à ce que les infiniment petits à considérer se déduisent les uns des autres non par des calculs mais par des constructions géométriques et sont de natures très-diverses et par conséquent plus difficilement comparables entre eux.

Ainsi dans une figure infiniment peu déformée, les angles, les longueurs, les arcs varient généralement à la fois et leurs variations sont souvent d'ordres très-différents de sorte qu'il est assez malaisé de reconnaître ce que l'on peut négliger, ou en d'autres termes l'altération que l'on peut légitimement faire subir à la figure sans altérer le résultat que l'on a en vue.

Cette rigueur dans l'application du principe des infiniment petits aux figures géométriques, peut être généralement obtenue, mais aux prix de raisonnements longs et compliqués dont nous donnerons quelques exemples dans la suite, mais dont on se dispense assez souvent, soit qu'on laisse au lecteur le soin de les faire, soit que, rassuré par la démonstration analytique connue, on juge inutile de justifier minutieusement une démonstration de géométrie infinitésimale qui a toujours l'avantage de faire mieux voir aux esprits géométriques, de leur rendre plus saisissable en quelque sorte la façon dont les choses se passent et la manière dont les éléments des figures se rattachent les uns aux autres.

Enfin cet emploi même des figures, qui caractérise les démonstrations vraiment géométriques et qui, à de certains points de vue, offre de si grands avantages, n'est pas non plus sans présenter quelques dangers car notre esprit se laisse aller facilement à généraliser les raisonnements déduits d'une disposition particulière d'une figure et qui cesseraient d'être applicables pour une disposition différente.

Nous chercherons autant que possible dans les leçons qui vont suivre à donner aux raisonnements de géométrie infinitésimale que nous aurons à présenter, la rigueur absolue qu'ils comportent, mais en restreignant cependant notre étude des courbes et des surfaces aux cas généraux et dans entrer dans la discussion de toutes les singularités que l'on peut imaginer et qui ne se rencontrent que dans des cas tout à fait exceptionnels.

Etude des lignes et des surfaces.

12) La considération des lignes et des surfaces vous est déjà bien familière et nous n'avons cessé de nous en servir dans les leçons qui précèdent. Il est nécessaire cependant avant d'aborder l'étude spéciale que nous avons en vue, de revenir sur leur définition pour y introduire les notions de continuité et d'infiniment petits dont nous aurons à faire désormais un constant usage. C'est à ces définitions ainsi précisées que nous rattacherons ensuite toutes les propriétés des lignes et des surfaces, en commençant par les plus élémentaires d'entre elles; et pour celles-ci les raisonnements doivent être faits à d'autant plus de soin et d'attention que les résultats à établir nous étant déjà très-familiers nous sommes plus enclins par là, même à leur attribuer le caractère de l'évidence.

Nous supposons d'ailleurs la ligne droite et le plan, le cercle et la sphère, le cylindre et le cône de révolution déjà connus par les définitions qu'on en donne dans la géométrie élémentaire et qui ne nécessitent aucune considération d'infiniment petits.

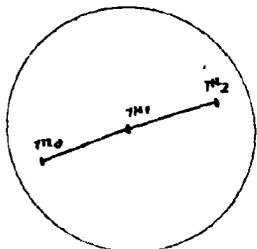
Etude des lignes

Généralités.

13) Définition des lignes.

Une ligne est une succession continue de points, c'est-à-dire une suite de points telle que les coordonnées qui définissent leurs positions varient d'une façon continue lorsqu'un paramètre arbitraire K dont elles dépendent varie lui-même d'une façon continue. En d'autres termes nous supposons que ces coordonnées sont des fonctions du paramètre K qui sont continues ainsi que leurs dérivées.

Il résulte de là que si à partir d'une valeur K_1 de ce paramètre correspondant à une position m_1 du point, on attribue à K un même accroissement infiniment petit dK ou dK positif ou négatif, on obtient deux points m_0 et m_2 infiniment voisins de m_1 , et que les directions $m_0 m_1$ et $m_1 m_2$ font entre elles un angle infiniment petit.⁽¹⁾



Si donc du point m_1 , comme centre on décrit une sphère avec un rayon aussi petit que l'on voudra, les points m_0 et m_2 traverseront cette sphère en venant se confondre avec le point m_1 : cette sphère renfermera donc en général deux points m_0 et m_2 de la ligne considérée et les droites $m_0 m_1$ et $m_1 m_2$ feront entre elles un angle qui sera infiniment petit en même temps que le rayon de la sphère.

14) Lignes considérées comme lieux géométriques.

Une ligne peut être définie par une propriété géométrique appartenant à tous ses points. La ligne se présente ainsi comme lieu géométrique.

Par exemple le cercle est, dans le plan, le lieu géométrique des points dont la distance à un point donné est égale à une longueur donnée, l'ellipse est le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux points donnés est égale à une longueur donnée, etc, etc.

Si la propriété géométrique donnée établit entre les coordonnées du point des relations qui ne laissent que l'une de ces coordonnées arbitraires, celle-ci pourra jouer le rôle du paramètre K dont il a été précédemment question.

15) Lignes considérées comme trajectoires.

L'idée de continuité qui s'attache nécessairement pour notre

(1) L'élément géométrique formé par les points m_0, m_1 se transforme en effet dans l'élément géométrique m_1, m_2 par une variation infiniment petite dK attribuée au paramètre K dont il dépend.

esprit au déplacement d'un même point matériel peut servir à faire encore mieux concevoir la continuité de la ligne telle que nous l'avons définie.

Ainsi nous pouvons imaginer la ligne comme lieu des positions successives d'un point qui se déplace dans l'espace : elle se présente à ce point de vue comme trajectoire d'un point mobile qui la décrit.

Ce mode de description, il est vrai, n'est pas toujours applicable à la totalité d'une ligne définie comme lieu géométrique, car cette ligne peut se composer de plusieurs portions continues mais séparées par des espaces où il n'existe aucun point du lieu ; on dit alors que la ligne est formée de plusieurs branches. Mais chacune de ces branches peut être prise séparément comme trajectoire d'un point et l'étude des propriétés de continuité que nous avons spécialement en vue s'appliquant à la considération de points infiniment voisins qui appartiennent toujours à une même branche, l'objection que nous venons d'indiquer peut être écartée en conséquence.

La ligne étant ainsi considérée comme trajectoire d'un point mobile, le temps joue le rôle du paramètre H dont nous avons parlé tout à l'heure. Les points m_0 et m_2 , situés sur la sphère infiniment petite de centre m_1 , sont alors deux positions occupées par le point mobile m avant d'arriver dans la position m_1 , et après l'avoir dépassée, ou si l'on préfère, le point par lequel le point mobile m pénètre dans la sphère pour atteindre la position m_1 , et le point par lequel il en ressort. La branche de courbe à laquelle appartient le point m_1 , se trouve ainsi divisée par ce point en deux demi-branches, l'arc $m_0 m_1$, parcouru avant d'atteindre la position m_1 , l'arc $m_1 m_2$, parcouru après l'avoir dépassée.

Toute ligne qui n'est pas une droite est une ligne courbe ou simplement une courbe.

Une courbe est dite plane lorsque tous ses points sont situés dans un même plan.

Étude spéciale des courbes planes.

16. Courbes planes considérées comme limites de polygones infinitésimaux inscrits : Définition de la longueur d'un arc de courbe.

Si l'on prend sur une courbe plane une succession de points infiniment voisins (ce qui est toujours possible d'après la définition de la continuité de la courbe telle qu'elle vient d'être donnée) on forme ainsi un polygone infinitésimal, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés sont infiniment petits, et ce polygone est inscrit dans la courbe considérée, c'est-à-dire que tous ses sommets sont situés sur la courbe.

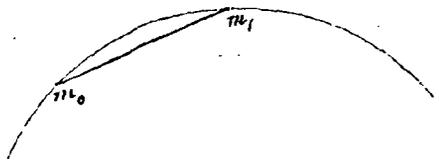
Ce polygone sert à définir la longueur d'un arc de la courbe.
La longueur d'un arc compris entre deux points a et b situés

à distance finie l'un de l'autre est en effet par définition même la limite du contour d'un polygone infinitésimal inscrit dans l'arc ab .

Cette définition n'est acceptable d'ailleurs que si l'on démontre - ce qui peut se faire sans difficulté géométriquement ou analytiquement -

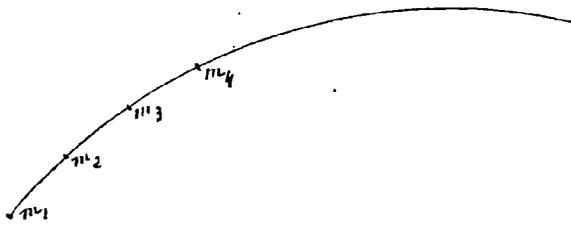
que la limite en question est indépendante de la façon dont est tracé le polygone, pourvu bien entendu que l'on multiplie ses sommets de manière à ce que tous ses côtés soient infiniment petits.

On démontre également par la géométrie ou par le calcul que la différence entre un arc infiniment petit $m_0 m_1$ et sa corde est un infiniment petit du troisième ordre. Si l'on prend cette corde comme infiniment petit principal, ainsi que nous le ferons généralement dans la suite de cette étude.



17. Éléments géométriques caractérisant la forme de la courbe au voisinage de l'un de ses points.

En dehors de la définition de l'arc à laquelle elle vient de nous conduire, la considération du polygone infinitésimal inscrit dans une courbe nous sera très utile pour l'étude de la courbe au voisinage de l'un de ses points. En effet ce polygone, comme nous le verrons, peut être substitué à la courbe pour la détermination de certains éléments géométriques finis qui caractérisent la forme ou si l'on veut l'allure de la courbe auprès du point considéré M_1 . Cette forme dépend, on le conçoit de la façon dont se déplace le point mobile aux instants qui précèdent ou qui suivent immédiatement celui de son passage en M_1 , c'est-à-dire de la disposition des sommets consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe au voisinage de M_1



et par suite de la continuité il sera généralement indifférent de tracer ce polygone sur l'une ou l'autre des demi-branches situées de part et d'autre du point considéré.

Les sommets tels que M_1 , M_2 , M_3 , ... de ce polygone sont souvent désignés sous le nom de points consécutifs de la

courbe et nous donnerons aux éléments finis que nous nous proposons de déterminer et qui seront des directions ou des longueurs le nom d'éléments caractéristiques de la courbe.

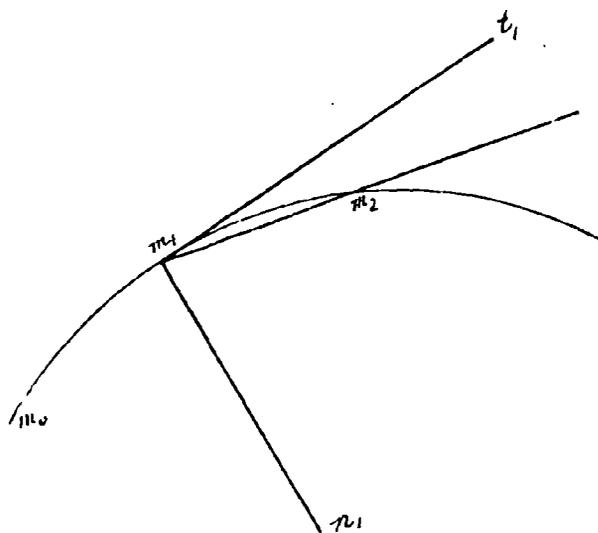
Ces éléments caractéristiques seront dits du premier, du second, du troisième ordre, etc. Selon que leur détermination nécessitera la considération de deux, trois, quatre points consécutifs.

Nous supposons en outre que la loi de continuité régle aussi la description des polygones infinitésimaux inscrits dans la courbe, ou en d'autres termes que la longueur d'un côté de ces polygones est une fonction continue infiniment petite de la position du point de la courbe à partir duquel ce côté est tracé.

Cette longueur ne subira donc qu'une variation d'ordre supérieur au premier quand le point recevra un déplacement du premier ordre comme cela a lieu lorsqu'on passe d'un sommet du polygone infinitésimal au sommet suivant.

Éléments caractéristiques du premier ordre ; tangente ; normale

18) Joignons le point m_1 à un point infiniment voisin m_2 de supposons que le point m_1 , demeurant fixe, le point m_2 se rapproche indéfiniment de lui en restant constamment sur la courbe. La sécante $m_1 m_2$ qui est parfaitement déterminée pour chaque position du point m_2 , tendra vers une position limite $m_1 t_1$ qui est dite la tangente à la courbe au point m_1 . Cette position limite d'après une remarque précédente, sera la même soit qu'on considère la demi-branche $m_1 m_2$, soit qu'on lui substitue la demi-branche $m_1 m_0$.



Cependant si l'on attribue à cette direction un sens déterminé - partant de m_1 et allant vers

m_2 ou m_0 - le sens de sens inverse lorsqu'on passe de la première détermination à la seconde.

La perpendiculaire $m_1 n_1$ à la tangente menée par le point m_1 est la normale en m_1 à la courbe, et le point m_1 qui est le point de contact de la tangente est le piéd de la normale.

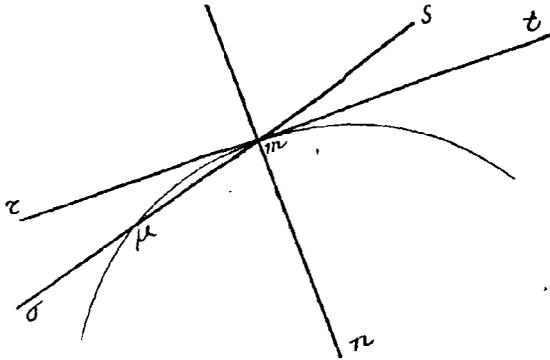
On voit que la tangente en m_1 est la direction limite des côtés $m_0 m_1$ et $m_1 m_2$ d'un polygone infinitésimal dont le sommet m_1 reste fixe. La direction de cette tangente, en lui attribuant un sens déterminé est la direction du déplacement du point mobile dérivant la courbe lorsqu'il passe en m_1 .

19) Remarques.

1^o Position de la courbe par rapport à sa tangente et à sa normale.

Les deux demi-branches de la courbe que sépare un point m sont situées en général d'un même côté de la tangente en ce point

et de part et d'autre de la normale. En effet si l'on joint le point m à un point μ auquel on fait parcourir d'un mouvement continu



l'arc de la courbe sur lequel le point m se trouve, à cause de la continuité, la sécante $m\mu$ ou TS tournera constamment dans le même sens autour du point m et le point μ se déplacera constamment dans le même sens sur cette droite. Et lorsque le point μ vient à passer en m , la sécante coïncide avec la tangente mt et les

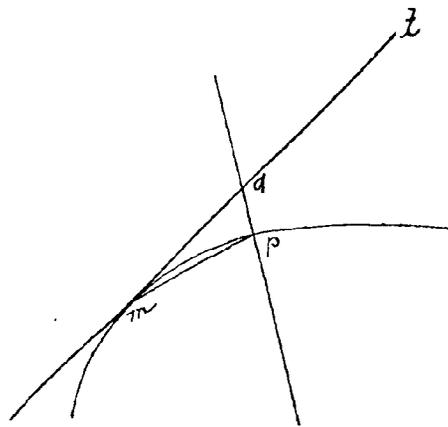
deux moitiés mT et mS de TS passent respectivement de l'autre côté des deux demi-tangentes $m\tau$ et mt . Mais au même instant le point μ passe de la demi-sécante mT sur la demi-sécante mS de sorte qu'il reste en définitive du même côté de la tangente.

Au contraire à ce moment, il doit traverser la normale mn puisque mT et mS sont et restent respectivement de part et d'autre de cette droite.

On distingue les deux régions dans lesquelles la courbe divise le plan en disant qu'elle tourne sa convexité vers l'une (celle où se trouve la tangente) et sa concavité vers l'autre.

2° Sécante rencontrant une courbe et sa tangente en des points infiniment voisins du point de contact.

Si par un point p de la courbe infiniment voisin de m on mène une sécante quelconque, mais de direction différente de celle de la tangente, le segment pq de cette sécante compris entre la courbe



et la tangente en m sera infiniment petit d'ordre supérieur au premier en supposant la distance mp du premier ordre.

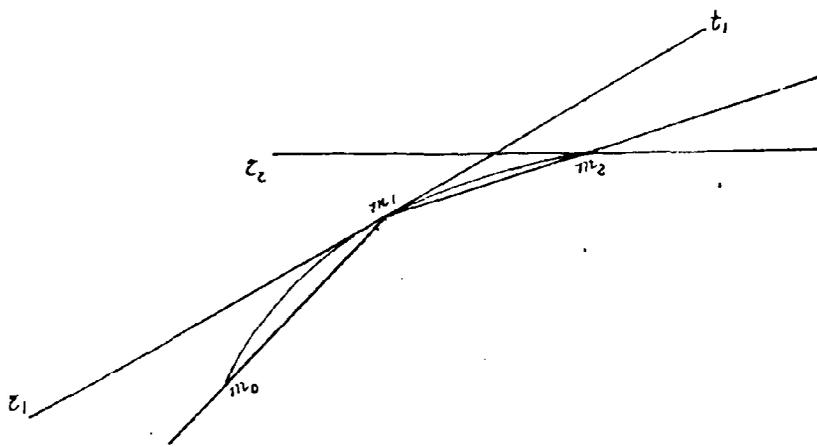
En effet dans le triangle infinitésimal mpq dont les angles p et q

ont des grandeurs finies par hypothèse, le côté pq est opposé à l'angle pmq qui est infiniment petit d'après la définition même de la tangente.

Et réciproquement, si une droite menée par m détache sur la sécante à partir de p un segment pq d'ordre supérieur à celui de mp ou de mq , l'angle pmq est infiniment petit, c'est-à-dire que mq est la direction limite de la sécante mp , ou en d'autres termes, la tangente en m à la courbe.

3° Point de rencontre de deux tangentes en des points infiniment voisins.

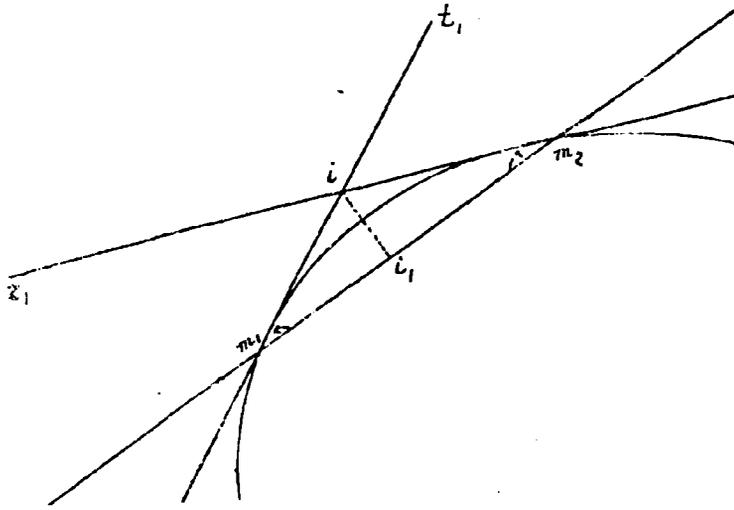
Nous avons vu que la branche de la courbe passant par un point m_1 pouvait être considérée comme divisée par ce point en deux demi-branches. De même la tangente peut être regardée comme divisée par son point de contact m_1 en deux demi-droites m_1t_1 et m_1t_2 obtenues comme limites de sécantes issues de m_1 et tournant autour de ce point tandis que leurs points de rencontre respectifs m_0 et m_2 avec la courbe se rapprochent indéfiniment de m_1 .



Les déplacements des points m_0 et m_2 s'effectuent alors en sens inverse sur la courbe, les sécantes m_0m_1 et m_2m_1 doivent tourner en sens inverse pour venir s'appliquer sur les demi-tangentes m_1t_1 et m_1t_2 . Au contraire si laissant m_2 fixe on déplace m_1 sur la courbe jusqu'à l'amener en m_2 , à cause de la continuité la sécante m_1m_2 devrait tourner pour

venir s'appliquer sur m_2t_2 dans le même sens que m_0m_1 lorsque, par le déplacement de m_0 , cette sécante vient s'appliquer sur m_1t_1 . Donc en définitive les demi-tangentes m_1t_1 et m_1t_2 qui font respectivement avec m_1m_2 et m_2m_1 des angles infiniment petits et de sens contraires sont situées d'un même côté de la corde. Elles doivent par conséquent se rencontrer et leur point d'intersection i ne peut se projeter orthogonalement sur la corde qu'en un point i' intermédiaire entre m_1 et m_2 .

Par suite également la distance ii , de leur point d'intersection à la corde est un infiniment petit du deuxième ordre m_1, m_2 ,



étant du premier.

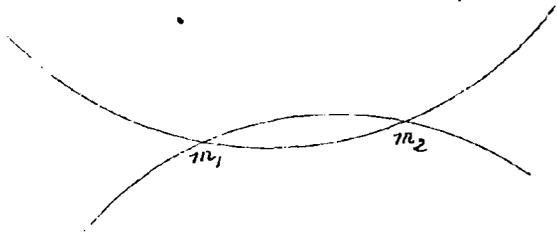
Enfin lorsque les points m_1 et m_2 se rapprochant de plus en plus finiront par se confondre, le point i doit nécessairement se confondre avec eux.

On peut remarquer encore que le contour m_1, i, m_2 ne diffère de la corde m_1, m_2 et par suite aussi de l'arc correspondant que par des infiniment petits

du troisième ordre, la distance m_1, m_2 étant toujours supposée du premier.⁽¹⁾

20. Contact de deux courbes planes.

Soient deux courbes planes situées dans un même plan et supposons que par la manière dont ces courbes sont déterminées nous reconnaissons qu'elles ont deux points communs m_1, m_2 . Supposons que par une déformation de la figure le point m_2 se rapproche indéfiniment du point m_1 . Les deux courbes à la limite auront en m_1 même tangente et même normale; elles seront tangentes



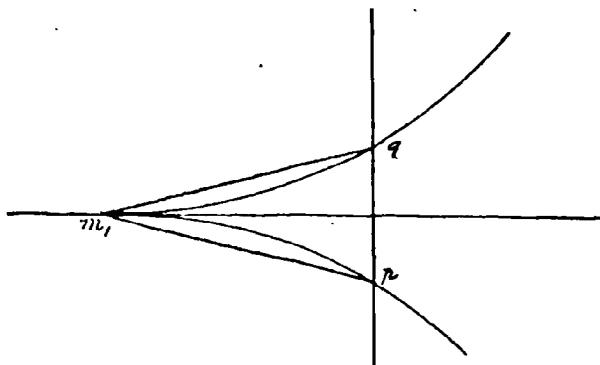
entre elles ou si l'on préfère elles se raccorderont en m_1 .

Si l'on coupe le système de deux courbes tangentes entre elles en un point m_1 par une sécante quelconque, infiniment voisine de m_1 ,

(1) Car :

$$m_1 i + m_2 i = \text{corde } m_1, m_2 = m_1 i (1 - \cos \delta) + m_2 i (1 - \cos \delta') \quad \delta \text{ et } \delta' \text{ étant des angles infiniment petits.}$$

et dont la direction fasse un angle fini avec la tangente commune aux deux courbes, le segment pq compris entre les deux points d'in-



tersection est du deuxième ordre par rapport aux distances $m_1 p$ et $m_1 q$.

En effet dans le triangle infinitésimal $p m_1 q$ l'angle en m_1 est infiniment petit, puisque les côtés $m_1 p$ et $m_1 q$ ont par hypothèse même limite, tandis que les deux autres angles conservent des valeurs finies.

Et réciproquement si une sécante rencontre deux courbes en des points p et q infiniment voisins d'un point m_1 commun à ces courbes et si le segment pq est du deuxième ordre lorsque $m_1 p$ et $m_1 q$ sont du premier, on peut en conclure que les deux courbes se raccordent au point m_1 .

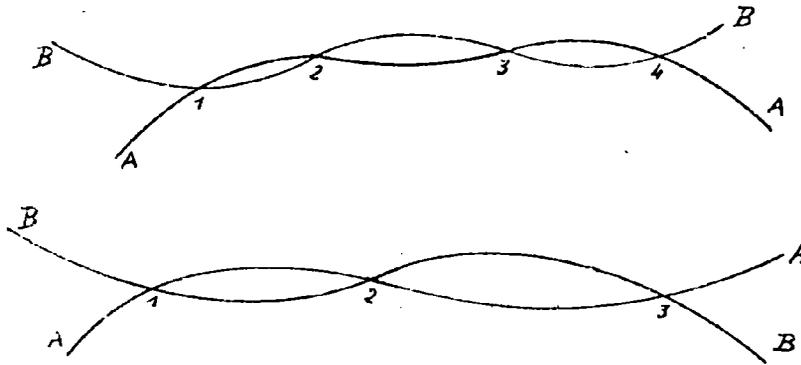
21) Contacts d'ordres supérieurs : courbes osculatrices et surosculatrices.

La définition du contact de deux courbes peut être aisément généralisée. Supposons en effet que les deux courbes aient n points communs $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ et que tous ces points deviennent infiniment voisins; on dira que les deux courbes limites ont ensemble un contact du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre, de sorte que le contact simple que nous avions d'abord défini sera un contact du premier ordre seulement.

On voit alors que dans le cas d'un contact du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre les points m_1, m_2, \dots, m_n peuvent être considérés comme les sommets consécutifs de deux polygones infinitésimaux inscrits à la fois dans les deux courbes. (1)

(1) Il importe de remarquer que dans le cas actuel les polygones deviennent infinitésimaux par l'effet même d'une déformation des courbes qui tendent vers des formes limites en même temps que les côtés des polygones deviennent infiniment petits. Précédemment au contraire c'était sur une courbe invariable que le polygone infinitésimal était supposé tracé. Mais cette simultanéité de variation ne change rien on le conçoit aux propriétés finales auxquelles la considération des polygones infinitésimaux peut conduire.

Il importe de remarquer dès à présent que si deux courbes se coupent en n points elles se traversent finalement ou ne se traversent pas selon que n

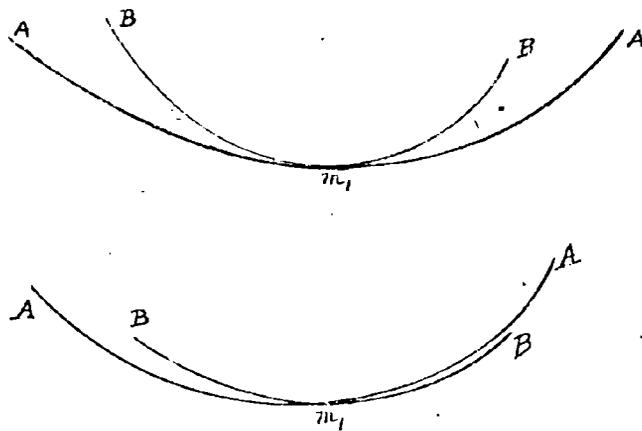


est impair ou pair.

Ainsi pour un observateur cheminant le long de la courbe A et ayant la courbe B à sa gauche par exemple avant le premier point de rencontre, la courbe B se retrouvera après le

dernier point de rencontre à sa gauche si n est pair, à sa droite si n est impair.

Cette disposition, indépendante du plus ou moins d'écartement qui sépare les points d'intersection entre eux devra subsister encore dans le cas limite du contact.



On peut donc dire que deux courbes qui ont en m_1 un contact d'ordre n se traversent ou ne se traversent pas selon que le contact est d'ordre pair ou impair.

Si une courbe plane de nature donnée C dépend de n paramètres on pourra la déterminer en la faisant passer par n points consécutifs pris sur une courbe A à partir d'un point m_1 .

À la limite la courbe C ainsi obtenue sera dite osculatrice en m_1 à la courbe A. Elle aura avec cette courbe le contact d'ordre le plus élevé généralement possible. (1)

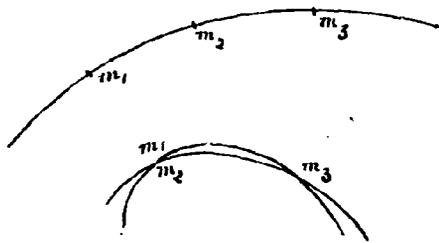
(1) bien que cette définition de l'osculatrice semble préférable nous devons ajouter pour éviter toute confusion qu'en désigne souvent sous le nom de courbe osculatrice d'une courbe donnée une courbe ayant avec cette dernière un contact du 2^e ordre, c'est-à-dire même cercle osculateur.

Si la courbe C pouvait avoir exceptionnellement un contact d'ordre plus élevé avec la courbe A , elle serait dite surosculatrice à cette courbe.

C'est ainsi qu'un cercle sera dit osculateur à une courbe lorsqu'il aura avec cette courbe trois points consécutifs communs, autrement dit un contact du second ordre. Ce cercle traversera la courbe.

Une parabole osculatrice aurait avec la courbe un contact du troisième ordre : le contact serait du quatrième ordre en général pour une conique osculatrice.

La façon dont les points infiniment voisins du point considéré se rapprochent de ce point reste d'ailleurs indéterminée, et nous admettons sans le démontrer que le résultat final en est indépendant. C'est ainsi que pour le cercle osculateur limite d'un cercle



passant par trois points consécutifs m_1, m_2, m_3 , on pourra faire tendre d'abord m_2 vers m_1 , jusqu'à le faire confondre avec lui. On aura alors un cercle tangent en m_1 et passant par le point infiniment voisin m_3 et la limite de ce cercle lorsque

m_3 viendra à son tour se confondre avec m_1 , sera le cercle osculateur en m_1 à la courbe.

22. Séries de courbes : enveloppes et enveloppées.

Lorsqu'une courbe dépend d'un paramètre arbitraire α , à chaque valeur attribuée à ce paramètre correspond une courbe particulière, l'ensemble de ces courbes en nombre infini constitue une série de courbes, et, à cause de la continuité qu'on suppose à deux valeurs infiniment peu différentes du paramètre correspondent deux courbes infiniment peu différentes de la série.

Soient C_1 et C_2 deux courbes ainsi déterminées par des valeurs α_1 et $\alpha_1 + \varepsilon = \alpha_2$ du paramètre et supposons que ces courbes aient un point commun que nous désignerons par C_1 .

Considérons la figure formée par le système des deux courbes C_1 et C_2 . Cette figure dépend des valeurs α_1 et ε et si, laissant

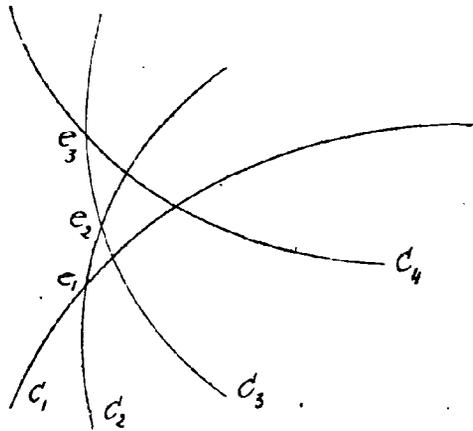
δ constant, nous attribuons à α_1 un accroissement précisément égal à δ la courbe C_1 se changera dans la courbe C_2 et la courbe C_2 deviendra la courbe C_3 correspondant dans la série à la valeur

$$\alpha_2 + \delta = \alpha_3$$

du paramètre.

Mais cette variation infiniment petite du paramètre α_1 la figure $C_1 C_2$ a dû se déformer infiniment peu en général et par suite le point e_1 a dû se transporter en un point e_2 infiniment voisin.

Si nous continuons à opérer de la même manière, la figure $C_2 C_3$ deviendra la figure



$C_3 C_4$, le point e_2 viendra en e_3 et ainsi de suite, et la succession de ces points infiniment voisins e_1, e_2, e_3, \dots formera un polygone infinitésimal, c'est-à-dire à la limite une courbe continue.

Cette courbe est dite l'enveloppe des courbes de la série et l'on voit immédiatement que l'enveloppe est tangente à toutes les courbes C qui sont dites ses enveloppées, puisqu'elle a avec chacune d'elles deux points infiniment voisins communs.

Remarque. — A chaque point d'intersection des deux courbes C_1 et C_2 primitivement considérées correspondra évidemment une branche de l'enveloppe.

Par contre si les courbes de la série ne se rencontrent pas, il n'y aurait pas d'enveloppe. Exemples : cercles concentriques - ellipses homofocales, etc. -----

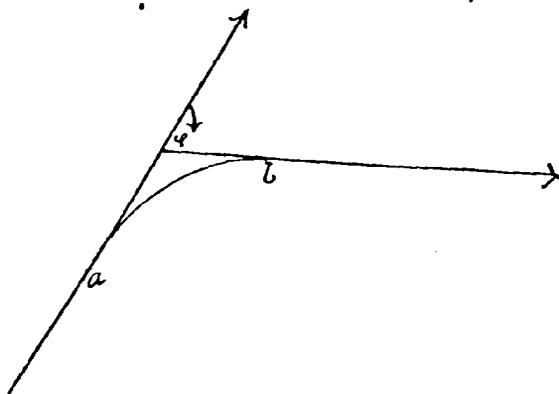
Éléments caractéristiques du deuxième ordre. Courbure.

23. Revenons maintenant à l'étude générale d'une courbe plane en l'un de ses points pour déterminer les éléments géométriques finis qui peuvent se déduire de la position de trois points consécutifs à partir du point considéré.

Nous avons vu qu'en chaque point d'une courbe plane la direction de la courbe, ou plus exactement la direction du déplacement

d'un point mobile décrivant la courbe était caractérisé par la tangente en attribuant à cette tangente un sens déterminé par celui du déplacement.

Cette direction change à chaque instant lorsqu'on se déplace sur la courbe ; en d'autres termes et pour employer une image familière, on tourne à mesure qu'on avance sur la courbe et c'est ce qui fait que la ligne est courbe et non pas droite. Plus ce changement de direction est rapide, plus en a le sentiment de la courbure de la ligne.



à dire à la longueur s de l'arc ab s'appelle sa courbure moyenne.

Pour préciser cette notion naturelle et lui donner une forme mathématique, considérons un arc ab de la courbe et les deux tangentes en a et en b dirigées dans le sens supposé du déplacement.

L'angle φ , positif ou négatif que font entre elles ces deux directions, est dit la courbure totale

de l'arc ab et le rapport de cet angle au chemin parcouru, c'est-

à dire à la longueur s de l'arc ab s'appelle sa courbure moyenne.

Si nous appliquons ces définitions à un arc infiniment petit pris à partir du point m_1 de la courbe, la courbure totale deviendra

la courbure différentielle ε qu'on nomme aussi angle de contingence et la courbure moyenne sera le rapport

$$\frac{\varepsilon}{ds}$$

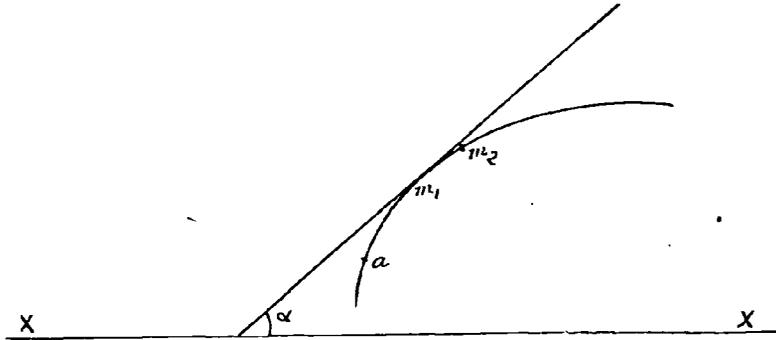
de deux infiniment petits qui sont généralement de même ordre car ce sont les accroissements infiniment petits correspondants

de deux grandeurs qui sont fonctions l'une de l'autre.

L'angle de contingence en effet est la différentielle de l'angle α que fait la tangente à la courbe avec une direction fixe XX' ,

26.

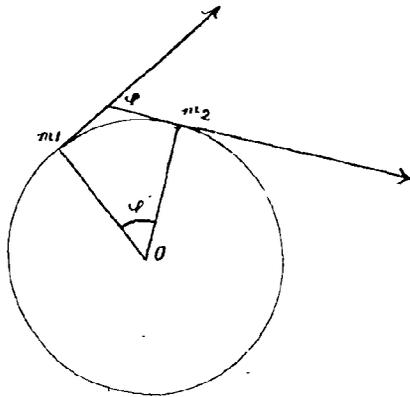
-lorsque le point de contact se déplace de m_1 en m_2 et l'arc ds est la différentielle pour ce même déplacement de l'arc de la courbe



S compte à partir d'une origine fixe A sur la courbe. Or comme nous l'avons fait voir, α est fonction de S , par conséquent leurs différentielles sont en général de même ordre et le rapport $\frac{ds}{ds}$ tend vers une limite finie qu'on nomme la courbure de la courbe au point m_1 .

242 Cercle de courbure : rayon de courbure.

La courbure ainsi définie et égale à $\lim_{arc\ m_1, m_2} \frac{\text{angle } \alpha}{arc\ m_1, m_2}$ varie généralement d'un point à un autre d'une courbe, mais il y a une courbe pour laquelle ce rapport est invariable, c'est le cercle dans lequel on a constamment aussi bien pour un arc fini que pour un arc infiniment petit



$$\frac{\alpha}{arc\ m_1, m_2} = \frac{1}{R}$$

La courbure d'un cercle est donc constante et égale en valeur absolue à l'inverse de son rayon. Et par suite on peut toujours déterminer le rayon d'un cercle de manière à ce que ce cercle

ait une courbure donnée quelconque, depuis la courbure nulle qui est celle d'un cercle de rayon infini, c'est-à-dire d'une droite, jusqu'à la courbure infinie qui est celle d'un cercle de rayon nul, c'est-à-dire d'un cercle évanouissant se réduisant à un point.

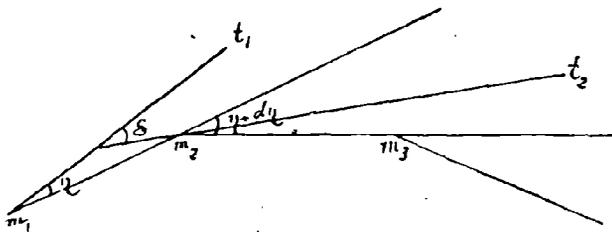
On est donc naturellement conduit pour étudier la courbure

variable d'une courbure à comparer cette courbure en chaque point de la courbe à celle d'un cercle ayant même courbure.

Ce cercle est dit cercle de courbure et son rayon qui est le rayon de courbure de la courbe sera l'élément caractéristique du second ordre que nous cherchons actuellement à déterminer.

25, Détermination de la courbure d'une courbe au moyen des éléments d'un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe.

Considérons le polygone infinitésimal m_1, m_2, m_3 inscrit dans la courbe à partir du point m_1 . Le côté m_1, m_2 fait un angle infiniment petit η avec la tangente en m_1 , qui est la position limite quand m_2 se rapproche indéfiniment de m_1 , resté fixe. De même le côté m_2, m_3 fait un angle infiniment petit η' avec la tangente en m_2 qui serait sa limite si m_3 restait fixe, m_2 se rapprochant indéfiniment de lui. Mais le point m_3 est infiniment voisin du point m_1 , donc à cause de la continuité admise dans la description du polygone l'angle η' ne doit différer de η que d'une quantité $d\eta$ infiniment petite d'ordre supérieur et comme d'après



le principe fondamental du calcul des infiniment petits cette différence $d\eta$ peut être négligée, l'angle des deux côtés consécutifs m_1, m_2 et m_2, m_3 du polygone peut être considéré comme égal à l'angle de contingence relatif à l'arc m_1, m_2 de la courbe.

D'autre part cet arc infinitésimal m_1, m_2 peut être également remplacé, en supprimant les infiniment petits d'ordre supérieur par la corde m_1, m_2 elle-même.

La courbure de la courbe au point m_1 peut donc s'exprimer par la limite du rapport

$$\frac{\text{angle } (m_1 m_2, m_2 m_3)}{\text{côté } m_1 m_2}$$

26) Identité du cercle osculateur avec le cercle de courbure.

L'identité du cercle osculateur en un point m_1 d'une courbe avec son cercle de courbure au même point résulte immédiatement de l'expression précédente. En effet le cercle osculateur étant la limite d'un cercle passant par les trois points consécutifs m_1, m_2, m_3 , la courbure de ce cercle s'exprime comme celle de la courbe par la limite de la même expression

$$\frac{\text{angle } (m_1, m_2, m_2, m_3)}{\text{côté } m_1, m_2}$$

Le centre du cercle osculateur d'une courbe est appelé pour cette raison centre de courbure

de la courbe. Le point μ , étant la position limite du centre d'un cercle qui est tangent à la courbe en m_1 et qui passe par un point infiniment voisin m_3 , est toujours situé par rapport à la tangente du même côté que la branche de courbe infiniment voisine m_1 , c'est-à-dire du côté de la concavité de la courbe.

Le raisonnement que nous venons de faire pour le cercle osculateur s'applique d'ailleurs identiquement à toute courbe ayant avec la courbe donnée un contact supérieur au premier.

Toutes ces courbes ont donc même courbure et même centre de courbure en leur point de contact.

27) Détermination du rayon de courbure au moyen d'une autre expression infinitésimale.

Puisque le cercle de courbure est identique avec le cercle osculateur et qu'il peut être obtenu comme limite d'un cercle tangent à la courbe en m_1 et passant par un point infiniment voisin m_3 de cette courbe, si l'on abaisse de m_3 des perpendiculaires $m_3 p$ et $m_3 q$ sur la tangente $m_1 t_1$ et sur la normale $m_1 n_1$ à la courbe, on aura dans le cercle

$$\overline{m_1 q} \times \overline{n_1 q} = \overline{m_3 q}^2$$

ou en désignant par ρ le rayon du cercle

$$\overline{m_1 q} (2\rho - \overline{m_1 q}) = \overline{m_3 q}^2$$

et en négligeant l'infiniment petit $\overline{m_1 q}$ à côté de 2ρ

$$\rho = \frac{\overline{m_3 q}^2}{2\overline{m_1 q}} = \frac{\overline{m_1 p}^2}{2\overline{m_3 p}}$$

Le rayon de courbure sera la limite de cette expression.

D'ailleurs le segment $m_1 p$, projection sur la tangente de la corde $m_1 m_3$ qui fait avec cette tangente un angle infiniment petit, ne diffère de cette corde que par un infiniment petit

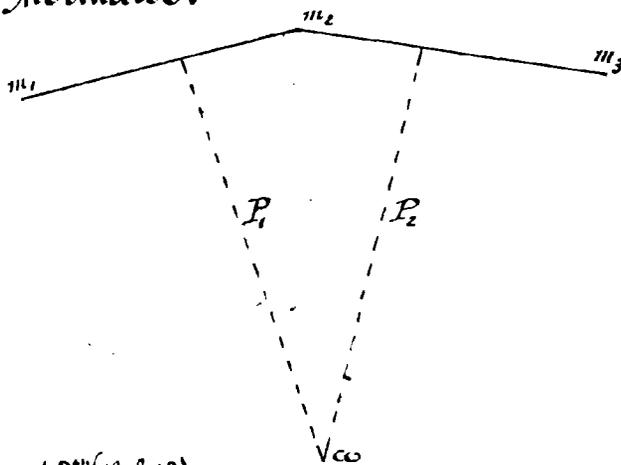
négligeable et l'on peut encore écrire la valeur du rayon de courbure

$$R = \lim \frac{\overline{m_1 m_3}^2}{2\overline{m_3 p}}$$

Ainsi le rayon de courbure en un point M_1 est la limite du rapport du carré de la distance qui sépare ce point d'un point infiniment voisin de la courbe divisé par le double de la distance de ce dernier point à la tangente en M_1 à la courbe.

Ces expressions du rayon de courbure nous seront très souvent utiles dans la suite.

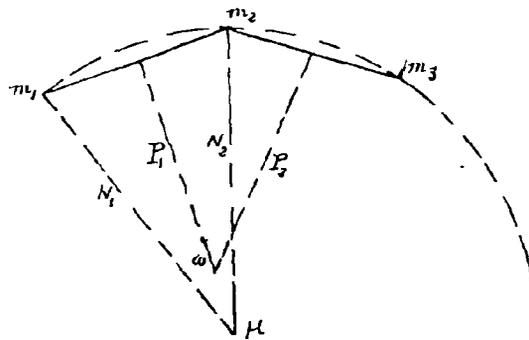
28) Le lieu des centres de courbure d'une courbe est l'enveloppe de ses normales.



Considérons trois points consécutifs m_1, m_2, m_3 de la courbe. Les perpendiculaires P_1 et P_2 aux segments $m_1 m_2$ et $m_2 m_3$ en leurs milieux se rencontrent en un point C qui est le centre du cercle des trois points m_1, m_2, m_3 et dont la

La position limite lorsque m_2 et m_3 se rapprochent indéfiniment de m_1 est le centre du cercle osculateur de la courbe donnée au point m_1 ou autrement son centre de courbure.

Au contraire si nous faisons tendre m_2 vers m_1 , supposé fixe, la droite P_1 a pour limite la normale N_1 en m_1 , si nous faisons tendre m_3 vers m_2 , supposé fixe, la droite P_2 a pour limite la normale N_2 en m_2 et les deux droites N_1 et N_2 qui sont deux normales infiniment voisines à la courbe se coupent en un point μ



dont la position limite lorsque m_2 se rapproche indéfiniment de m_1 est un point de l'enveloppe de la série des normales.

Nous voulons faire voir que les points ω et μ ont même position limite.

Pour le démontrer nous pouvons raisonner de la façon suivante :

Considérons le cercle C passant par les trois points m_1, m_2, m_3 ce cercle traversant la courbe A en ces trois points, la courbure de l'arc sera extérieure au cercle entre m_1, m_2 et intérieure au cercle

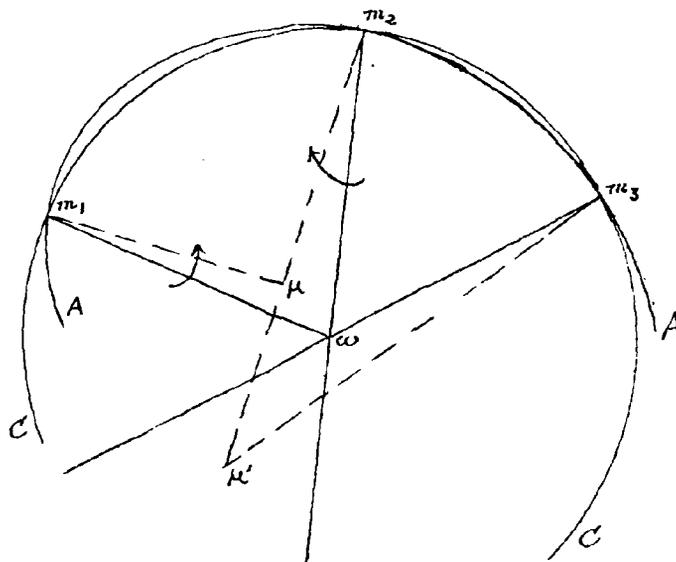
entre m_2, m_3 ou inversement.

Plaçons nous dans le premier cas pour fixer les idées.

La courbe A sortant du cercle en m_1 , sa direction, lorsqu'on la suit de m_1 vers m_2 , fera en m_1 un angle de sens déterminé, positif par exemple, avec celle du cercle, et par conséquent la normale m_1, μ à la courbe fera

le même angle positif avec la normale m_1, ω au cercle.

Au point m_2 au contraire la courbe pénétrant dans le cercle la



disposition sera inverse de la précédente.

Et par suite, les angles en question étant infiniment petits, le point μ sera nécessairement situé dans le secteur $m_1 \omega m_2$.

Appliquons à l'arc $m_2 m_3$ des considérations analogues et nous reconnaitrons que le point μ' , intersection des normales en m_2 et m_3 , ne peut être situé dans le secteur $m_2 \omega m_3$, et qu'il doit se trouver dans l'angle opposé par le sommet à $m_2 \omega m_3$, puisque, par raison de continuité, il doit être du même côté que μ par rapport à la courbe.

Mais les points μ et μ' ont pour limite le même point de l'enveloppe des normales lorsque m_2 et m_3 viennent se confondre avec m_1 et d'après la position de ces points ceci ne peut avoir lieu que si cette limite coïncide avec celle du point ω lui-même.

29. Développées et Développantes - Equation de courbure d'une courbe.

La courbe qui se déduit ainsi d'une courbe donnée comme enveloppe de ses normales en est dite la développée.

Elle est le lieu de ses centres de courbure.

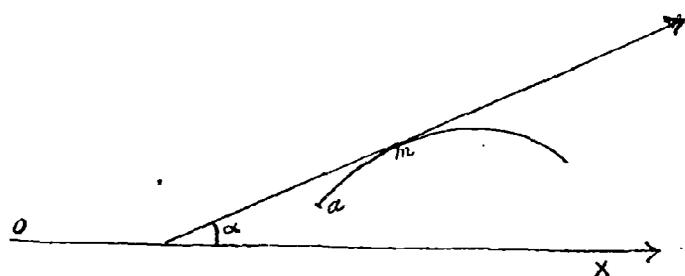
La courbe donnée est par contre une développante de cette courbe: nous venons plus loin la raison de ces dénominations spéciales.

Nous avons expliqué comment lorsqu'on se déplace dans un sens déterminé sur une courbe plane, la direction du déplacement caractérisée par l'angle α que fait cette direction avec une direction fixe Ox varie avec le chemin parcouru sur la courbe, mesuré par la longueur d'arc am ou S comptée à partir d'une origine fixe a .

On conçoit donc qu'il doit exister entre ces deux grandeurs une liaison telle que

$$\alpha = \varphi(S)$$

Cette relation doit pouvoir se déduire de la connaissance de la courbe et réciproquement si cette relation est connue, la description de la courbe en résulte puisque le déplacement du point qui



la dérivée est déterminé à partir de chacune de ses positions.

Cette équation caractéristique d'une courbe donnée est dite son équation de courbure. Mais il importe de remarquer que si elle détermine la forme de la courbe, elle ne fait pas connaître sa situation dans le plan, puisqu'on peut la tracer en prenant comme point de départ un point quelconque. On doit observer également que si l'on augmente α ou S d'une constante arbitraire, l'équation ne cesse pas de représenter la même courbe, car cela revient simplement à changer la direction Ox qui sert d'origine aux angles ou la position du point a de la courbe à partir duquel on compte les arcs.

La courbure ρ en un point d'une courbe étant la limite du rapport $\frac{d\alpha}{ds}$, sa valeur se déduit immédiatement de l'équation de courbure de la courbe : elle est égale à la dérivée $\varphi'(S)$.

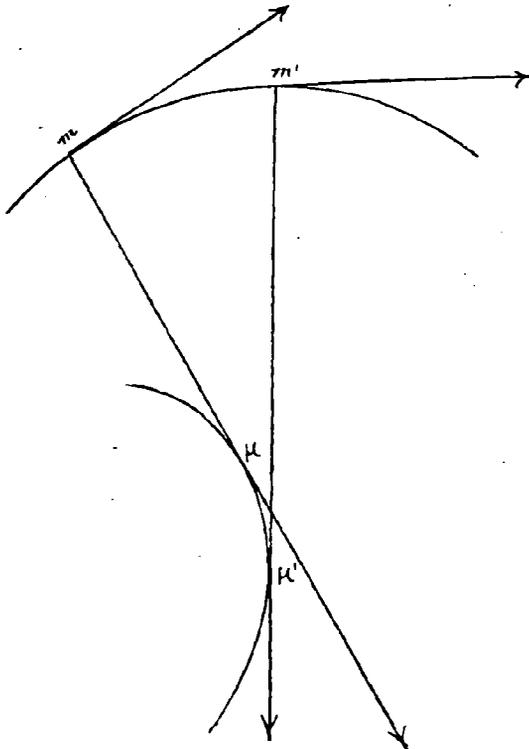
Si d'autre part on résout l'équation de courbure par rapport à S de façon à la mettre sous la forme

$$S = f(\alpha)$$

le rayon de courbure, limite de $\frac{ds}{d\alpha}$ aura pour expression

$$R = f'(\alpha)$$

30. Relation entre les équations de courbure d'une courbe et de sa développée.

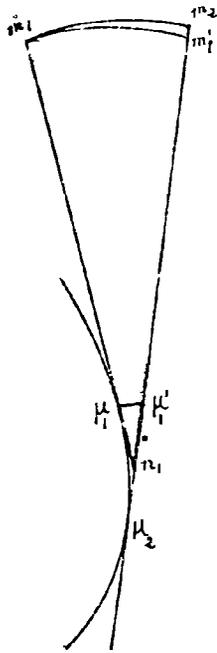


On peut remarquer d'abord que si l'on se déplace simultanément d'arcs correspondants finis ou infiniment petits mm' et $\mu\mu'$ sur la courbe et sur sa développée la courbure totale est la même et a le même signe pour les deux courbes : cette remarque s'applique en particulier aux angles de contingence.

Considérons les deux normales infiniment voisines en m , et en m' , à la courbe donnée

C et soient n_1 leur point d'intersection, μ_1 et μ_2 les centres de courbure correspondants à chacune d'elles.

La figure $\mu_1 n_1 \mu_2$ est formée par deux tangentes à la développée aux points consécutifs μ_1 et μ_2 de cette courbe et nous avons vu que le contour $\mu_1 n_1 \mu_2$ pouvait être pris en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, comme égal à l'arc $\mu_1 \mu_2$. Du point n_1



comme centre de circonscription deux arcs de cercle avec $n_1 \mu_1$ et $n_1 \mu_2$ comme rayons; ces arcs de cercle rencontrent en μ_1' et μ_2' la normale $m_2 n_1$.

Le cercle $m_1 m_1'$ étant tangent à la courbe en m_1 , la longueur $m_2 m_1'$ est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier on peut donc dire en négligeant cette longueur que la différence dR des rayons de courbure en m_1 et en m_2 est égale à $\mu_2 \mu_1'$ c'est-à-dire à

$$\overline{\mu_2 n_1} + \overline{n_1 \mu_1}$$

ou à l'arc $d\sigma$ de développée

La relation

$$dR = d\sigma$$

applicable d'une façon continue, conduit d'ailleurs pour un arc fini à la relation

$$R - R_0 = \sigma - \sigma_0$$

ou

$$R = \sigma + \text{constante.}$$

L'équation de courbure de la courbe donnée étant mise sous la forme

$$S = f(\alpha)$$

on aura donc

$$\sigma = f'(\alpha) + \text{constante}$$

et comme l'angle que fait la tangente à la développée avec la direction Ox diffère de l'angle α par un angle droit et que l'addition de constantes quelconques aux angles ou aux arcs ne change pas comme on l'a vu la nature de la courbe que représente une équation de courbure

on pourra considérer la développée comme déterminée par l'équation

$$S = f'(\alpha)$$

qui s'obtient en remplaçant la fonction $f(\alpha)$ relative à la courbe par sa dérivée.

31) Développées successives d'une courbe plane.

Une courbe donnée n'admet qu'une seule développée mais cette développée admet à son tour une développée, lieu de ses centres de courbure, ou enveloppe de ses normales, et ainsi de suite. On voit ainsi qu'on peut déduire d'une courbe donnée une succession d'autres courbes qui sont dites ses développées successives.

Ces courbes présentent entre elles des liaisons remarquables qui se traduisent analytiquement par ce fait que leurs équations de courbure se déduisent les unes des autres par des dérivations successives. Leur détermination dépend d'ailleurs de la considération d'un nombre croissant de points consécutifs sur la courbe donnée. Ainsi la considération des trois points m_1, m_2, m_3 , conduit à la détermination du point μ , de la développée et de sa tangente, autrement dit elle équivaut à la connaissance de deux points consécutifs de cette dernière courbe. Quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 équivaudront à trois points de la développée première, à deux points de la développée seconde et ainsi de suite.

Réciproquement étant donnée une courbe dont l'équation de courbure est mise sous la forme

$$(1) \quad S = f(\alpha)$$

en prenant la fonction primitive $F(\alpha)$ de $f(\alpha)$ on forme l'équation

$$(2) \quad S' = F(\alpha)$$

d'une courbe qui admet la première comme développée.

L'addition d'une constante arbitraire à $F(\alpha)$ ne changerait pas la nature de cette dernière courbe, mais au contraire si l'on introduit une constante K dans le second membre de l'équation (1) ce qui ne change pas la nature de la courbe qu'elle représente et déplace simplement sur elle l'origine à des arcs, la développante devient

$$(2') \quad S' = F(\alpha) + K\alpha$$

et à chaque valeur de K correspond une courbe différente.

On reconnaît ainsi qu'une courbe donnée peut admettre une infinité de développantes mais la liaison qui existe entre ces différentes courbes s'expliquera beaucoup plus simplement par des considérations de géométrie cinématique que nous développerons plus loin. Nous remettons donc à cette leçon prochaine ce qui nous reste à dire au sujet de ces courbes.

Points singuliers et points remarquables des courbes planes.

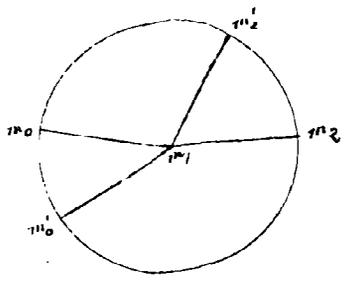
32) Revenons à la définition que nous avons donnée de la continuité d'une ligne. Comme conséquence de cette définition nous avons vu que si d'un point M_1 d'une courbe plane comme centre on décrit un cercle avec un rayon infiniment petit, ce cercle devrait en général rencontrer la courbe en deux points M_0 et M_2 déterminant avec M_1 deux directions $M_0 M_1$ et $M_1 M_2$ infiniment peu différentes.

Toutes les fois qu'il n'en est pas ainsi ou que la disposition des points consécutifs de la courbe présente au voisinage du point M_1 quelque particularité spéciale, ce point est un point singulier, ou un point remarquable de la courbe. La désignation de point singulier est plus spécialement réservée aux points pour lesquels l'analyse conduit à une indétermination de la tangente, indétermination qui se traduit par l'existence de plusieurs tangentes en ce même point.

Nous nous bornerons à l'examen des cas les plus simples.

33) Points doubles : points isolés : point de rebroussement.

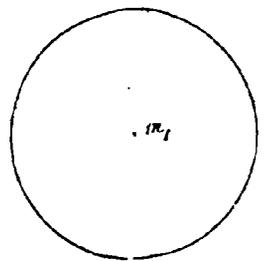
1^o Si le cercle infiniment petit rencontre la courbe en quatre points $M_0 M_2, M_0' M_2'$ et si les directions $M_0 M_1$ et $M_1 M_2$ d'une part, $M_0' M_1$ et $M_1 M_2'$ d'autre part font entre elles des angles infiniment petits, on a deux branches de courbe qui se croisent en M_1 et chacune de ces branches admet en M_1 une tangente distincte. Ce point qui est un



point singulier, reçoit le nom de point double.

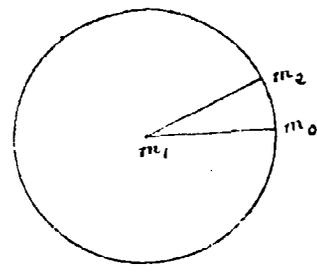
On conçoit d'ailleurs qu'il puisse exister des points multiples où se croiseraient de la même façon trois, quatre branches distinctes de la même courbe.

2° Si le cercle ne rencontre pas la courbe on a un point isolé.



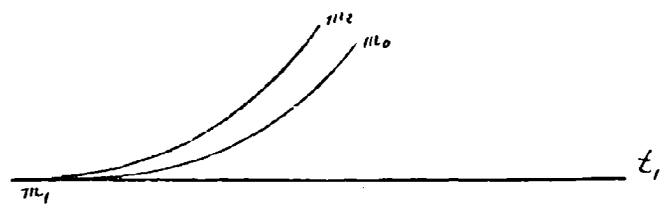
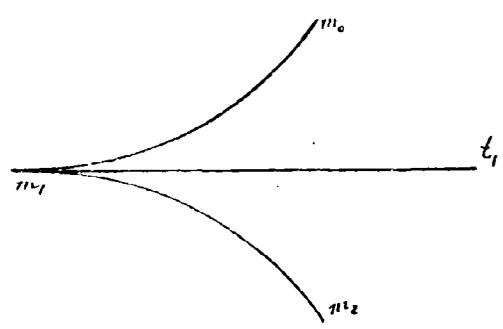
Mais on peut rattacher analytiquement ce cas au précédent en considérant le point comme intersection de deux branches imaginaires ; le point isolé est donc encore un point multiple.

3° Si les deux points m_0, m_1 sont infiniment voisins sur le cercle, ce qui revient à dire que les directions m_0, m_1 et m_1, m_2 font entre elles un angle de 180° le point m_1 est un point de rebroussement.



Au point de vue de la génération de la courbe nous devons considérer le point mobile qui la décrit comme arrivant en m_1 suivant la direction m_0, m_1 et s'en éloignant suivant la direction m_1, m_2 . La direction du déplacement varie donc brusquement de 180° ce qui est bien le caractère du rebroussement dans le sens usuel attribué à ce mot.

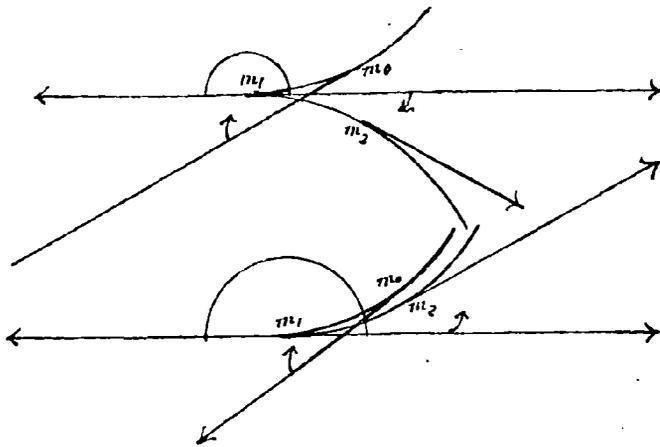
Le rebroussement se distingue d'ailleurs en rebroussement



de première espèce et rebroussement de seconde espèce selon que les deux demi-branches m_0, m_1 et m_1, m_2 sont situées de part et d'autre ou du même côté de leur tangente commune m_1, t_1 .

34) Caractères distinctifs des rebroussements de première et de seconde espèce.

On peut observer d'abord que dans le rebroussement de première espèce, la direction du déplacement du point décrivant la courbe continue à tourner dans le même sens avant comme après le passage au point m_1 , où elle subit un changement brusque de 180° .



Dans le rebroussement de seconde espèce au contraire après le changement brusque de 180° la rotation de la direction du déplacement change de sens.

Au point de vue de la courbe et de la développée, les points de rebroussement donnent lieu à quelques remarques intéressantes qui se rattachent directement à l'observation que nous

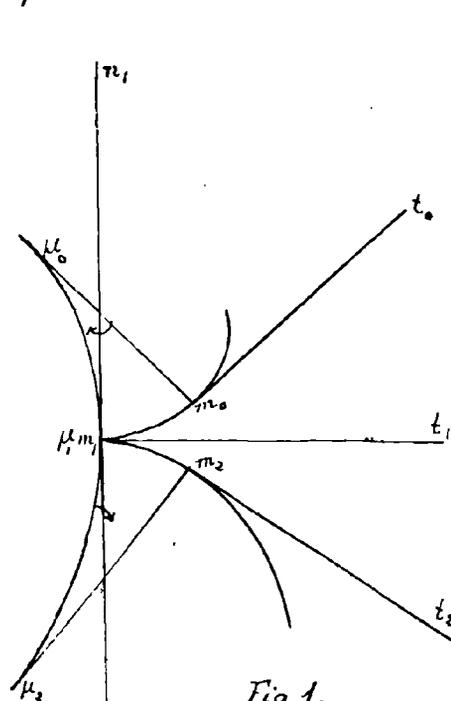


Fig. 1.

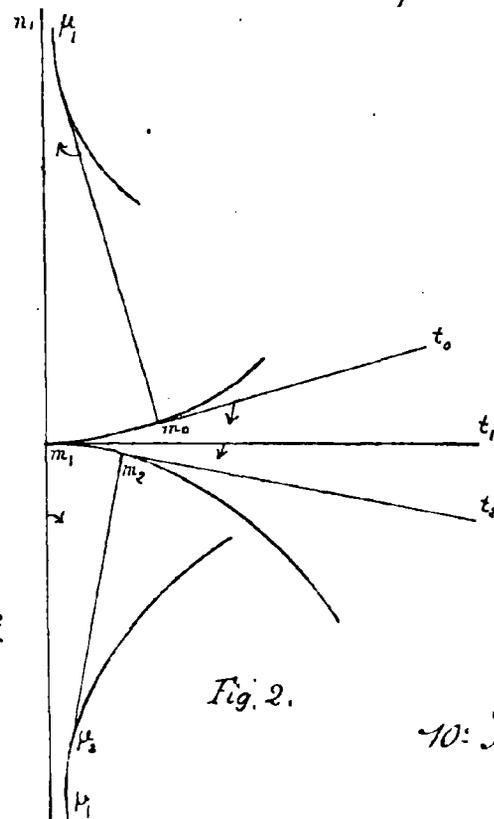


Fig. 2.

Geométrie. 1^{re} 80^{me} (1908.09)

10: J^{les}

venons de faire.

Dans le cas du rebroussement de première espèce, le centre μ , doit se trouver d'un côté ou de l'autre de la tangente m, t , selon qu'on s'obtient par la considération de l'une ou l'autre des demi-branches m_0, m_1 , ou m, m_2 .

Pour qu'il y ait continuité dans la description de la développée, il faut donc que les deux demi-branches μ_0, μ_1 , et μ, μ_2 , de celle-ci, se rejoignent sur la normale m, n , au point m , ou à l'infini; ce qui revient à dire que le rayon de courbure de la courbe donnée est nul ou infini au point m . La développée est tangente à m, n , en m , on admet m, n , pour asymptote (fig. 1 et fig. 2).

Pour les rebroussements de seconde espèce, les choses se passent différemment. En effet le centre de courbure μ , restant du même côté de la tangente m, t , quelle que soit la demi-branche de la courbe que l'on considère, ce point peut occuper une position quelconque sur la normale.

Mais les arcs μ_0, μ_1 et μ, μ_2 de la développée devant se courber comme ceux de la courbe elle-même dans des sens différents; cette courbe devra nécessairement présenter au voisinage du point μ , l'une

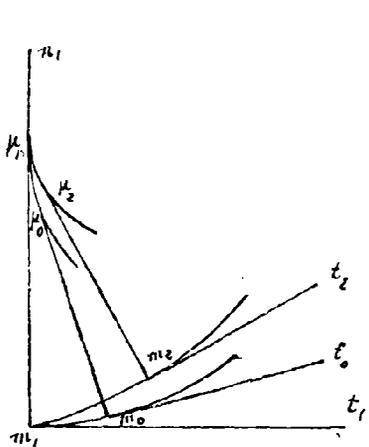


Fig. 3.

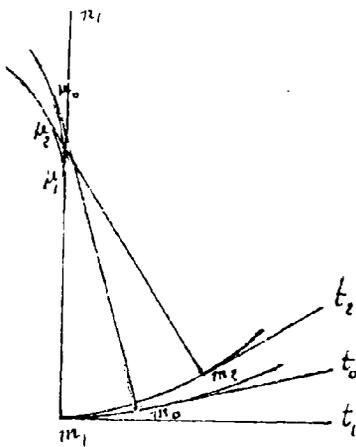


Fig. 4.

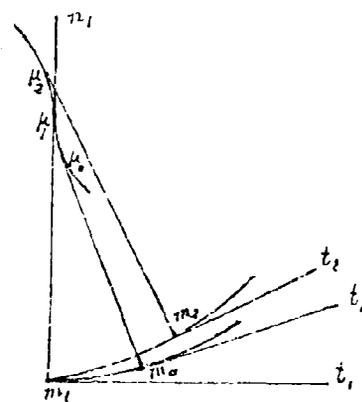


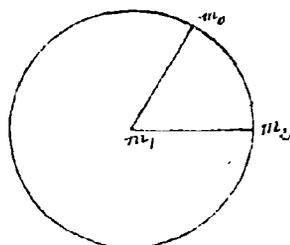
Fig. 5.

des trois dispositions indiquées sur les figures ci-dessus (3, 4, et 5). Les dispositions des figures 3 et 4 sont celles d'un rebroussement de seconde espèce. Quant à la disposition de la figure 5 elle est celle que nous retrouverons plus loin pour les points d'inflexion.

Dans cette dernière figure, le rayon de courbure allant visiblement en croissant ou en décroissant selon qu'on se transporte en m_2 ou en m_0 sur la développée, la demi-branche de la courbe qui se courbe le moins (m_1, m_2 dans le cas de la figure) correspond évidemment à la demi-branche de développée qui donne les rayons de courbure les plus grands pour la courbure.

35, Points anguleux : points d'arrêt.

On appelle points anguleux des points pour lesquels les directions des demi-branches m_0, m_1 et m_1, m_2 font entre elles un angle fini différent de 180° .



Il y a alors discontinuité dans la variation de la direction du déplacement sur la courbe et les deux demi-branches ne peuvent se raccorder comme elles le font aux points de rebroussement puis que le changement de direction diffère de 180° .

Si le cercle infiniment petit décrit de m_1 comme centre ne rencontre la courbe qu'en un seul point, il n'existe plus qu'une demi-branche de courbe à partir de m_1 et ce point est dit point d'arrêt : il y a alors discontinuité dans la description de la courbe.

Les points d'arrêt et les points anguleux ne se rencontrent que dans les courbes transcendentes.

36, Points d'inflexion.

On dit en général qu'une courbe présente une inflexion en l'un de ses points lorsqu'en ce point la direction du déplacement du point décrivant la courbe après avoir tourné dans un certain sens commence à tourner en sens inverse.

Nous avons déjà fait observer qu'il en était ainsi dans le rebroussement de seconde espèce, mais dans ce cas le changement

De sens de la rotation étant accompagné d'une rotation brusque de 180° , la courbe ne présente pas les apparences de l'inflexion.

Écartons donc ce cas particulier et supposons qu'au point considéré l'angle α que fait la direction de la courbe varie d'une façon continue avec l'arc, c'est-à-dire de quantités infiniment petites quand on se déplace d'arcs infiniment petits sur la courbe. Dans ce cas α passe par un maximum ou un minimum, ce qui exige que la dérivée de α par rapport à l'arc change de signe et s'annule par conséquent si elle conserve une valeur finie. L'accroissement infiniment petit de α étant alors d'ordre supérieur par rapport à l'accroissement correspondant des de l'arc, la courbure est nulle et le rayon de courbure infini, ce qui prouve que le cercle passant par trois points consécutifs a pour limite une droite ou que deux côtés consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit dans la

courbe peuvent être considérés comme en ligne droite en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier⁽¹⁾.

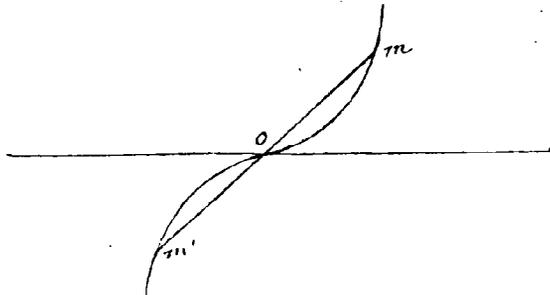
Mais les choses peuvent se passer différemment si le chemin parcouru sur la courbe peut devenir infiniment petit par

rapport à l'angle de contingence S , autrement dit, si la direction du déplacement peut tourner d'un angle fini pour un déplacement infiniment petit sur la courbe.

Alors la dérivée de α par rapport à S devient infinie et la



(1) Ceci a lieu par exemple toutes les fois qu'une courbe qui admet un centre passe par ce centre. En effet puisqu'à tout point m^2 la courbe correspond un point m^1 symétrique de m^2 par rapport au centre O , les trois points



m^0 m^1 sont en ligne droite, et comme cela ne cesse pas d'être vrai lorsque m^2 se rapproche indéfiniment de O , on a finalement trois points infiniment voisins en ligne droite,

c'est-à-dire un cercle osculateur de rayon infini.

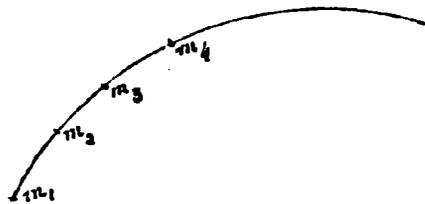
courbure change de signe en passant par l'infini au lieu de passer par Zéro. Nous distinguons les points d'inflexion ainsi caractérisés des points d'inflexion ordinaires en les désignant sous le nom de points d'inflexion de seconde espèce. Nous donnerons un exemple de point d'inflexion de seconde espèce quand nous reviendrons sur la génération des développantes dans nos études de géométrie cinématique.

Aux points d'inflexion la convexité et la concavité changent de côté par rapport à la direction de la courbe.

37. Sommets.

On appelle sommets les points d'une courbe pour lesquels la courbure passe par un maximum ou un minimum.

Je dis que si quatre points consécutifs à partir d'un point m_1 peuvent être choisis de manière à appartenir à un même cercle, le point m_1 est un sommet.



En effet le rayon ρ_1 du cercle m_1, m_2, m_3 ayant pour limite le rayon de courbure en m_1 lorsque m_2 et m_3 viennent de confondre avec m_1 resté fixe, on a en désignant par R_1 ce rayon de courbure et par η_1 un infiniment petit

$$R_1 = \rho_1 + \eta_1$$

De même le rayon ρ_2 du cercle m_2, m_3, m_4 ayant pour limite le rayon de courbure en m_2 , lorsque m_3 et m_4 viennent de confondre avec m_2 resté fixe, on a :

$$R_2 = \rho_2 + \eta_2$$

Mais la figure m_2, m_3, m_4 pouvant résulter d'une déformation infiniment petite de la figure m_1, m_2, m_3 , on aura par raison de continuité

$$\eta_2 = \eta_1 + d\eta_1$$

$d\eta_1$ étant un infiniment petit au moins du deuxième ordre.

Donc si $\rho_2 = \rho_1$ comme nous l'avons supposé

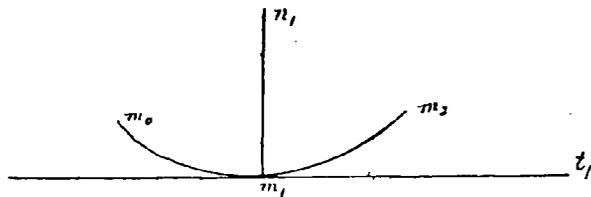
$$R_2 = R_1 + d\eta_1$$

autrement dit, le rayon de courbure ne varie que d'une quantité infinitésimale du second ordre, lorsqu'on se déplace sur la courbe d'un arc de premier ordre, ce qui prouve qu'en général le rayon de courbure passe par un maximum ou un minimum en ce point.

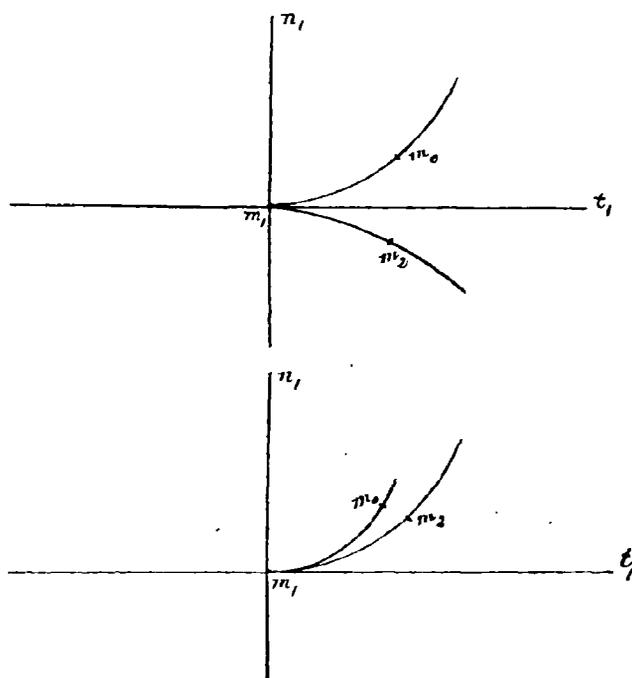
Le cercle osculateur en ces points a un contact du troisième ordre avec la courbe et lui est duosculateur en conséquence. La développée doit présenter au point correspondant un rebroussement de première espèce; comme nous le reconnaitrons facilement plus loin par la géométrie cinématique.

38. Remarques sur la disposition caractéristique des points m_0 et m_2 infiniment voisins de m_1 aux points singuliers et remarquables.

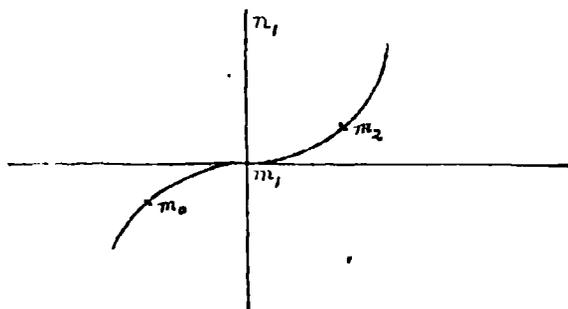
Nous avons vu qu'en un point ordinaire, les points m_0 et m_2 doivent être situés de part et d'autre de la normale et du même côté de la tangente.



En un point de rebroussement de première espèce, les points m_0 et m_2 sont situés d'un même côté de la normale et de part et d'autre de la tangente.



En un point de rebroussement de seconde espèce les points m_0 et m_2 sont d'un même côté de la normale et d'un même côté de la tangente.

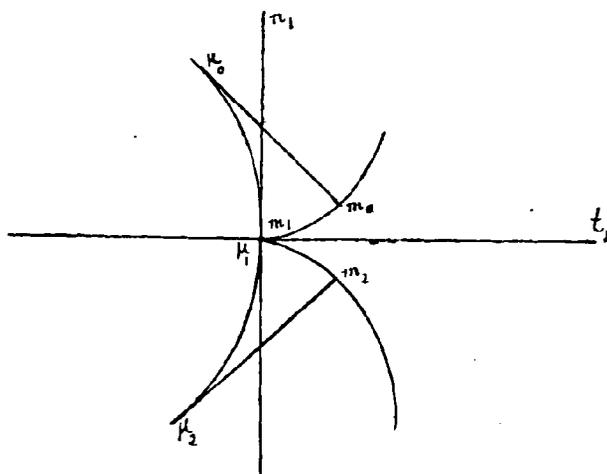


En un point d'inflexion, de première ou de seconde espèce, les points m_0 et m_2 sont de part et d'autre de la normale et de part et d'autre de la tangente.

Ces dispositions, caractéristiques de ces diverses natures de points, permettent souvent de les reconnaître.

Supposons par exemple qu'une courbe ait son rayon de courbure nul en l'un de ses points m_1 ; elle devra par cela même rencontrer en ce point sa développée, mais comme elle doit se trouver dans la région du plan balayée par les tangentes à cette développée et qu'elle ne peut pénétrer en conséquence dans la concavité de cette

courbe, elle ne franchira pas sa propre normale $m_1 n_1$, qui est la tangente à cette développée (en supposant bien entendu que sa développée ne présente aucune singularité au point m_1).



D'autre part, les centres de courbure h_0 et h_2 devant se trouver de part et d'autre de la normale $h_1 n_1$ à la développée, c'est-à-dire de la tangente à la développante, les deux arcs $m_1 m_0$ et $m_1 m_2$

de cette développante seront nécessairement situés de part et d'autre de la tangente et l'on reconnaît ainsi la disposition caractéristique d'un rebroussement de première espèce.

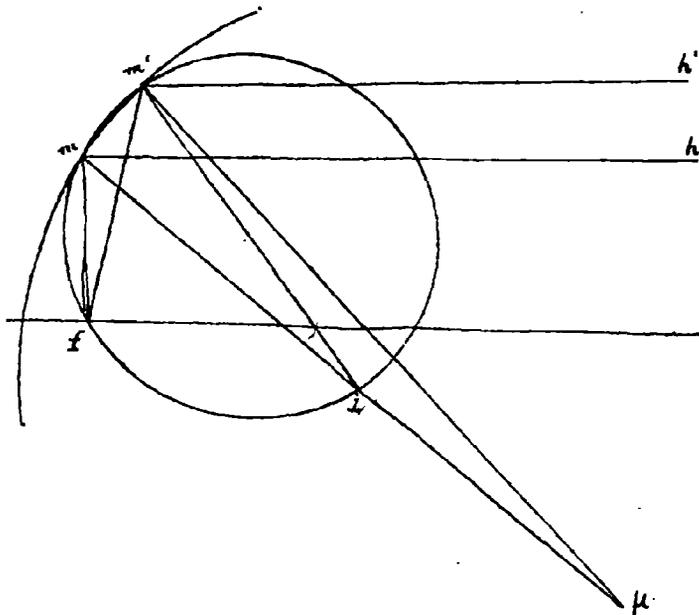
33, Application à la détermination des éléments caractéristiques de quelques courbes planes.

L'étude générale que nous venons de faire des courbes planes permet déjà de déterminer dans bien des cas les éléments caractéristiques d'une courbe donnée sans qu'on soit obligé de recourir aux considérations de déplacements que nous développerons dans les prochaines leçons en exposant les principes de la géométrie cinématique.

Nous ne nous arrêterons pas à la détermination des tangentes et des normales, ces problèmes ayant été traités déjà dans les cours élémentaires, mais nous donnerons quelques exemples relatifs aux courbes.

Rayon de courbure d'une parabole en l'un de ses points.

Soient m et m' deux points quelconques de la parabole, $m\mu$ et $m'\mu$ les normales en ces points et μ leur point d'intersection.

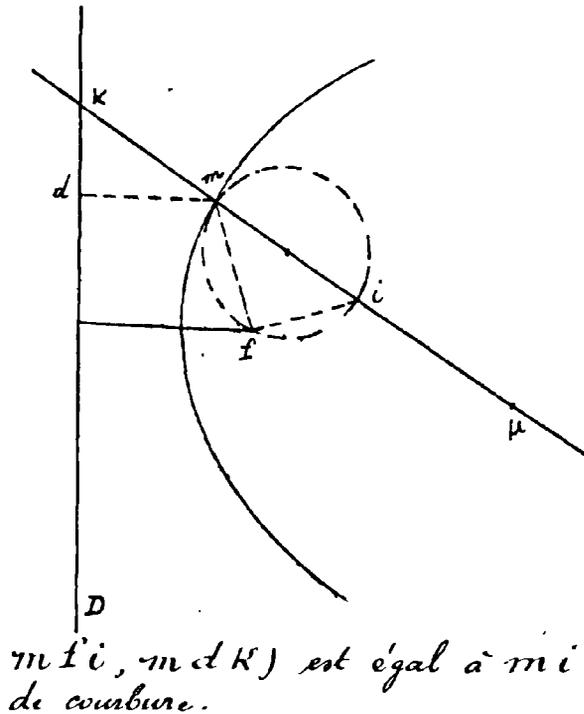


Tracons le cercle qui passe par m , m' et le foyer F de la courbe et soit i son point de rencontre avec $m\mu$.

Joignons Im , Im' et $i\mu$ et menons les diamètres mh et $m'h'$ de la parabole. Les normales étant d'après la propriété bien connue de la courbe bissectrices des angles hmi et $h'm'i$, l'angle mIm' des rayons vecteurs est double de l'angle en μ des deux normales et par suite de l'égalité des angles mIm' , $mi\mu$ le triangle $mi\mu$ est isocèle.

Supposons maintenant que le point m' se rapproche indéfiniment de m :

le cercle deviendra tangent à la parabole en m et la propriété précédente subsistant toujours, le point i aura pour position limite le milieu de la distance de m à la position limite de μ . Mais cette distance $m\mu$ est à la limite le rayon de courbure de la courbe puisqu'à la limite le point μ est le point de contact de la normale $m\mu$ avec son enveloppe.



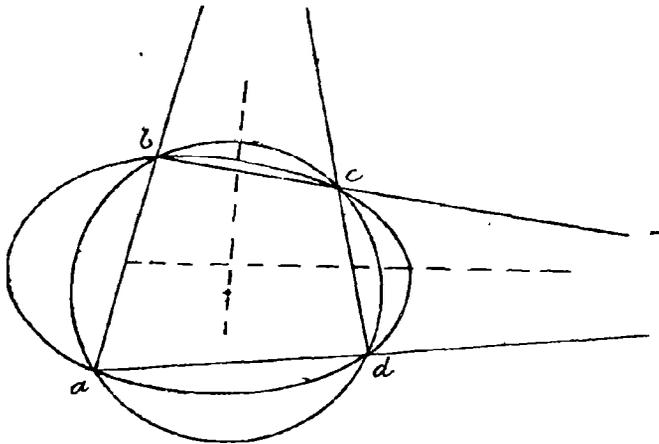
On voit donc que pour avoir le rayon de courbure de la parabole en l'un de ses points, il suffit de mener par le foyer une perpendiculaire au rayon vecteur fm , cette droite rencontre la normale en un point i et le double de mi est le rayon de courbure.

On peut remarquer encore que si l'on prolonge la normale jusqu'à sa rencontre en k avec la directrice, le segment mk (à cause des triangles rectangles égaux

mi , mk) est égal à mi , c'est-à-dire à la moitié du rayon de courbure.

Rayon de courbure des sections coniques.

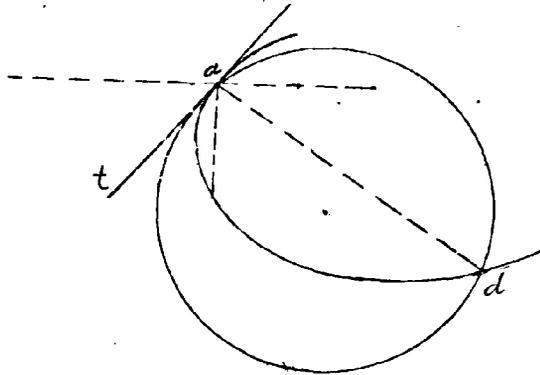
On sait par un théorème dû à Bobillier que dans le quadri-



latère formé par les quatre points d'intersection d'une conique et d'un cercle, les bissectrices des angles que font les côtés opposés sont parallèles aux axes de la conique.

Appliquons ce théorème général au cas particulier où les deux points b et c deviennent infiniment voisins de a : le cercle deviendra à la limite le cercle oscula-

teur en a à la conique: le côté bc se confondra avec la tangente at au point a , et la droite ad deviendra la droite joignant le point a à celui des points d'intersection de la conique et du cercle osculateur qui n'est pas confondu avec a .



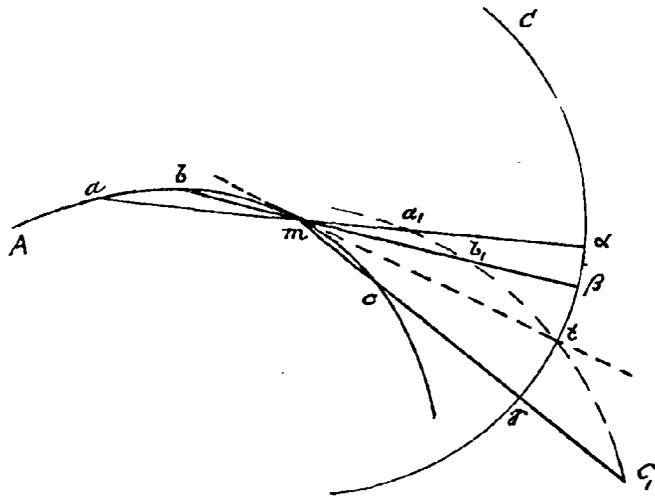
Cette corde ad et la tangente

at forment donc un angle qui a pour bissectrices les directions des axes de la conique ce qui permet de construire facilement la corde ad et son second point d'intersection avec la courbe. Le cercle osculateur se trouvera dès lors déterminé.

40. Courbes d'erreur.

On rencontre souvent dans les applications pratiques des courbes dont on ne connaît pas la définition géométrique ou qui résultent d'un tracé graphique ne répondant à aucune définition précise. On donne à ces courbes le nom de courbes graphiques et pour obtenir leurs tangentes ou leurs rayons de courbure on a recours à ce qu'on appelle des courbes d'erreur. Supposons qu'il s'agisse par exemple de déterminer la tangente à une courbe graphique A , en un point m .

Ayant tracé de m comme centre un arc de cercle C , on



joindra le point m à une série de points voisins a, b, c situés de part et d'autre de ce point sur la courbe graphique, puis à partir des points α, β, γ où ces sécantes rencontrent l'arc de cercle, on portera sur ces droites les longueurs $\alpha a_1, \beta b_1, \gamma c_1$ égales aux segments ma, mb, mc dans le même sens

que ces segments eux-mêmes. On joindra ces points a_1, b_1, c_1 par un trait continu, et cette courbe qui est la courbe d'erreur coupera le cercle C en un point t qui joint à m déterminera la tangente en ce point avec une exactitude plus grande que celle qu'on aurait obtenue par le tracé à simple vue de cette tangente.

Geométrie cinématique plane.

(41) Nous avons déjà vu que la considération du déplacement était de nature à éclairer dans bien des cas les notions de géométrie proprement dite. C'est ainsi que pour mieux faire comprendre la génération d'une courbe, nous avons fait appel dans les leçons qui précèdent à la considération d'un point mobile dont la courbe en question serait la trajectoire.

Cette considération du déplacement peut être fort utile en général pour toutes les recherches de géométrie pure et pour celles de géométrie infinitésimale en particulier, et comme nous aurons à y revenir fréquemment dans la suite, nous consacrerons quelques leçons à une étude spéciale de ces déplacements, autrement dit à l'exposé des théories fondamentales de la géométrie cinématique.

La géométrie cinématique nous l'avons déjà dit, se distingue de la cinématique mécanique, en ce qu'elle envisage des déplacements et non des mouvements, en ce qu'elle ne tient aucun compte par conséquent de la rapidité avec laquelle les changements de position s'effectuent. La notion du temps à laquelle elle fait appel, disparaît ainsi des résultats qui ont un caractère purement géométrique, de telle sorte que le temps peut être assimilé à un paramètre quelconque duquel dépendait la position des points.

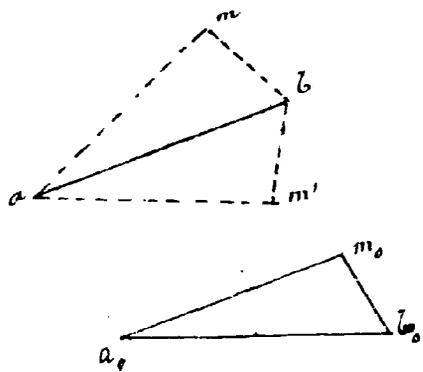
Nous étudierons d'abord la géométrie cinématique plane, c'est-à-dire les déplacements d'une figure plane et plus spécialement d'une figure plane de forme invariable, mobile sur son plan. Nous reprendrons ensuite cette étude de la géométrie cinématique pour l'étendre aux déplacements quelconques dans l'espace.

Etude du déplacement d'une figure plane de forme invariable mobile sur son plan.

42) Nombre de conditions nécessaires pour fixer sur un plan la position d'une figure plane de forme donnée.

Une figure plane de forme donnée⁽¹⁾ est définie par la position de ses points a et b .

Effectivement, la position attribuée au point a étant arbitrairement choisie, le point b ne peut se déplacer que sur un cercle de centre a et lorsqu'on fixe sa position sur ce cercle, celle d'un point quelconque m se trouve déterminée par la connaissance de la position m_0 que ce point occupait primitivement par rapport à a, b , avant le déplacement de la figure.



Il est visible en effet qu'un triangle égal à $a_0 b_0 m_0$ peut être construit de deux façons sur $a b$, mais que de ces

triangles $a m b$, $a m' b$ ainsi obtenus et symétriquement placés par rapport à ab , un seul, le triangle $a m b$, convient à la question, car le triangle $a_0 m_0 b_0$ ne pourrait être amené sur $a m' b$ que par retournement ce qui est contraire aux hypothèses admises, les points mobiles ne devant pas sortir du plan qui les renferme.

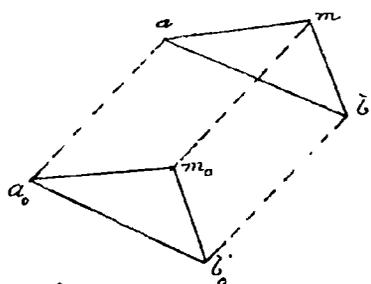
43) Déplacements d'ensemble : translation et rotation.

Nous donnons le nom de déplacements d'ensemble aux déplacements compatibles avec l'invariabilité d'une figure.

⁽¹⁾ à laquelle on peut toujours rattacher par la pensée un point quelconque en plan qu'on supposera invariablement lié à la figure et entraîné avec elle ; par cette extension on est conduit à considérer le déplacement comme entraînant un plan tout entier mobile sur un plan fixe.

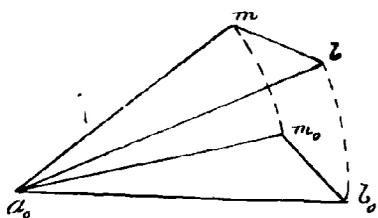
Nous commencerons par préciser la définition de deux déplacements d'ensemble liés simples et dont la considération vous est déjà familière.

Supposons que l'on donne à a_0 et b_0 des déplacements $a_0 a$ et $b_0 b$ égaux et parallèles : un point quelconque m_0 prendra un déplacement $m_0 m$ égal et parallèle aux déplacements des deux premiers points : les déplacements de tous les points de la figure seront donc égaux et parallèles.



Un pareil déplacement s'appelle une translation.

Supposons en second lieu qu'un point de la figure le point a_0 par exemple, reste immobile, et que le point b_0 vienne dans une position b sur le cercle de centre a_0 et de rayon $a_0 b_0$ sur lequel il est astreint à se mouvoir. Un point quelconque m_0 viendra en m sur le cercle de rayon $a_0 m_0$ et l'angle $m a_0 m_0$ dont il aura tourné autour de a_0 sera le même que l'angle $b a_0 b_0$.



Tous les points de la figure tourneront donc d'un même angle autour du point fixe et c'est aussi de ce même angle

que tourneront toutes les droites de la figure.

Un déplacement de cette nature s'appelle une rotation.

Remarquons que si le point a_0 s'éloignait à l'infini, les déplacements de tous les points deviendraient à la limite égaux et parallèles, et le déplacement serait une translation.

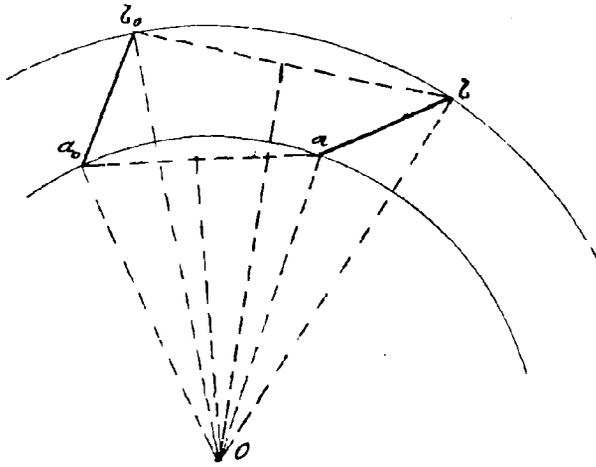
La translation peut donc être considérée comme un cas particulier de la rotation.

44) Déplacement d'ensemble le plus général. Centre de rotation.

Supposons enfin que la figure plane subisse un déplacement quelconque sur son plan. Nous allons démontrer que ce déplacement

peut toujours être obtenu par une simple rotation.

Considérons deux points a_0 et b_0 de la figure mobile et soient a et b leurs nouvelles positions.



joignons $a_0 a$ et $b_0 b$ et élevons des perpendiculaires sur ces droites en leurs milieux.

Ces perpendiculaires se coupent en un point O et comme

$$Oa = Oa_0$$

$$Ob = Ob_0$$

par construction, et que

$$ab = a_0 b_0$$

à cause de l'invariabilité de la figure, les triangles

$$a_0 b_0 O, a b O$$

sont égaux et par suite les angles

$$a_0 O a, b_0 O b$$

qui s'obtiennent en ajoutant aux angles égaux $a_0 O b_0, a O b$

des triangles précédents, le même angle $b_0 O a$ sont aussi égaux.

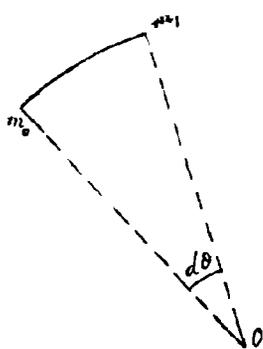
On voit donc que par une rotation d'un angle $a_0 O a$ autour du point O , on amène les points a_0 et b_0 et avec eux les autres points de la figure dans leur position finale.

Il importe de remarquer d'ailleurs que le déplacement réel de la figure entre ses positions extrêmes a pu s'effectuer d'une façon très-différente : les points ont pu suivre des chemins beaucoup plus compliqués : nous avons démontré seulement qu'on pouvait les amener de la première position dans la seconde par une simple rotation.

45. Déplacement infiniment petit : Centre instantané de rotation.

Le résultat auquel nous sommes parvenus s'applique à un déplacement quelconque. Appliquons-le à un déplacement infiniment petit. Le centre dont nous venons de démontrer l'existence sera dit alors centre instantané^{de rotation} de la figure ; l'angle

Dont tourneront tous les points autour de ce centre sera un angle infinitésimal $d\theta$ qui représentera la rotation infiniment petite de la figure, et la trajectoire d'un point quelconque M_0 ayant alors deux points infiniment voisins M_0 et M_1 , communs avec un cercle de centre O sera tangente à ce cercle.



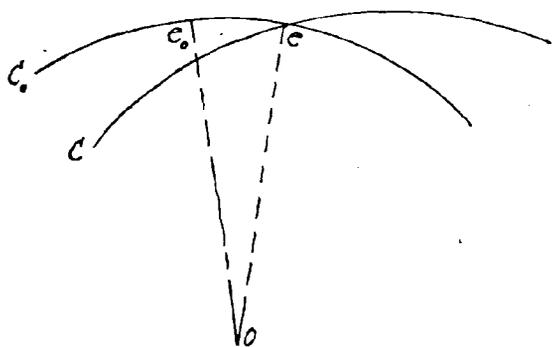
La normale à cette trajectoire passera donc au point O .

Ainsi nous arrivons à ce résultat important :

Les normales aux trajectoires des différents points d'une figure plane invariable mobile dans son plan passent à un instant donné par un même point du plan qui est à cet instant le centre instantané de rotation de la figure.

On peut ajouter en outre que les déplacements infiniment petits des divers points sont proportionnels à leurs distances au point O .

Considérons actuellement une courbe faisant partie de la figure mobile. La succession de ses positions formera une série de courbes dont on peut se proposer de chercher l'enveloppe.



Soient donc les deux positions C_0 et C de la courbe correspondant au déplacement infiniment petit précédemment considéré, et supposons que ces deux courbes se coupent en un point e qui sera à la limite un point de l'enveloppe cherchée.

Ce point considéré comme point de C occupait sur C_0 avant le déplacement une certaine position e_0 : e_0 et e sont donc deux positions infiniment voisines de sa trajectoire qui par conséquent est tangente

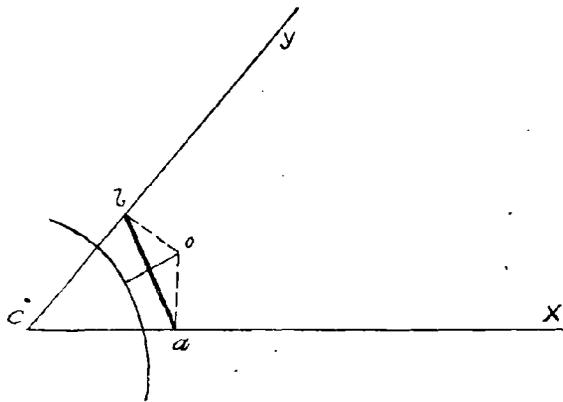
en E à C_0 , et comme la normale à cette trajectoire passe en O on voit que la normale à la courbe mobile au point où elle touche son enveloppe passe au centre instantané de rotation.

Ainsi les normales aux courbes mobiles aux points où elles touchent leurs enveloppes passent toutes à un instant donné par le point du plan qui est à cet instant le centre instantané de la figure.

46. Ces résultats très-simples ont une grande importance et donnent déjà lieu à de nombreuses applications. Nous en indiquerons immédiatement quelques unes.

Normale à l'ellipse.

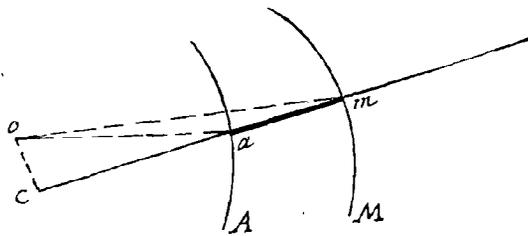
On sait que si les extrémités a et b d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites fixes CX , CY , un point invariablement lié aux points a



et b décrit une ellipse de centre C . La détermination du centre instantané de rotation O se fait immédiatement au moyen des normales aux droites, trajectoires des points a et b . En joignant le point O au point M on a la normale à l'ellipse.

Conchoïde.

La conchoïde d'une courbe A relativement à un point fixe C est le lieu des points m obtenus en menant par C une sécante quelconque qui rencontre en a la courbe A et portant à partir de a une longueur constante am sur cette sécante.



Le centre instantané de la

Figure invariable formée par le segment am s'obtient très-facilement par la normale à la courbe A trajectoire du point a et par la perpendiculaire en C à la sécante puisque cette droite touche en C son enveloppe qui est ce point C lui-même.

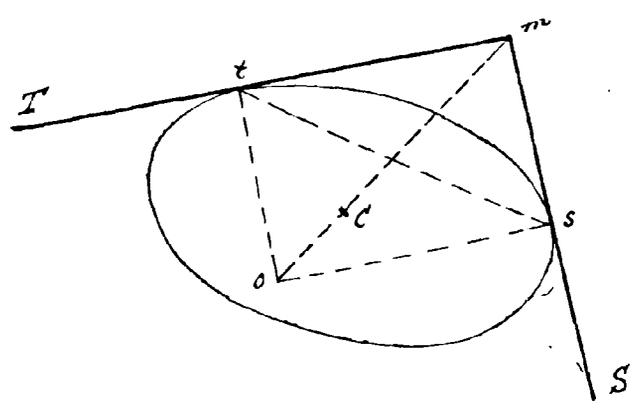
En joignant le centre instantané O au point m on a la normale à la conchoïde.

Cercle orthoptique de l'ellipse.

Cherchons le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse.

Considérons la figure invariable formée par les deux côtés mS et mT de l'angle droit. Son centre instantané O s'obtient immédiatement par les normales à l'ellipse aux points de contact; c'est

le point O sommet opposé à m dans le rectangle $mtOS$.



La normale au lieu du point m est donc la diagonale mO de ce rectangle. Elle rencontre donc l'autre diagonale en son milieu et passe par conséquent constamment par le centre C de l'ellipse. La courbe lieu du point m a donc un rayon de courbure constant; c'est un

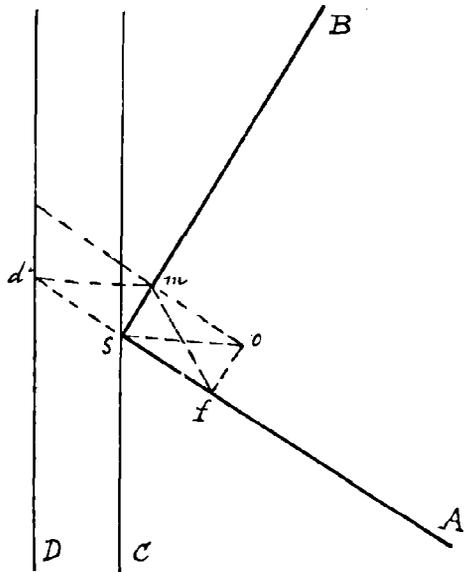
cercle de centre C auquel on a donné le nom de cercle orthoptique de l'ellipse.

La même démonstration s'applique sans difficulté aux cas de l'hyperbole et de la parabole: pour la parabole les droites m_0 étant parallèles le cercle devient une droite qui est la directrice de la courbe.

Enveloppe du second côté d'un angle droit ASB dont un côté passe par un point fixe F et dont le sommet S se déplace sur une droite C .

Le centre instantané est le point O intersection de la perpendiculaire

à la trajectoire C et S et de la perpendiculaire à SF au point F où cette droite touche son enveloppe qui se réduit au point I .
Le point de contact de SB avec son enveloppe est donc le pied de la perpendiculaire OM abaissée de O sur cette droite.



Pour nous rendre compte de la nature du lieu décrit par le point m , prolongeons IS d'une longueur Sd égale à IS .

Le lieu du point d est une droite D parallèle à C et la figure $dSOM$ est un parallélogramme puisque Sd est égal et parallèle à OM . On a donc

$$md = OS$$

et OS étant égal à mf comme diagonale d'un

même rectangle, le point m équidistant de F et de D décrit une parabole dont F est le foyer et D la directrice.

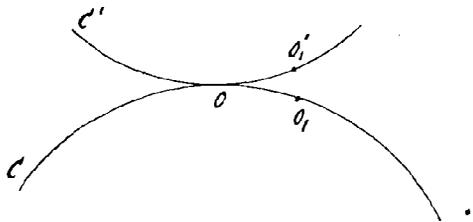
47, Déplacement continu d'une figure plane de forme invariable anobile sur son plan. Définition précise du roulement et du glissement d'une courbe sur une courbe fixe.

Cherchons maintenant à nous rendre compte de la nature du déplacement continu de la figure plane invariable dont nous venons d'étudier le déplacement infiniment petit, ou, comme l'on dit souvent en mécanique, élémentaire.

Et comme ce déplacement se ramène ainsi que nous allons le faire voir au roulement d'une courbe plane mobile sur une courbe plane fixe, nous commencerons par définir avec précision ce que l'on doit entendre par roulement et glissement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.

Lorsque deux courbes, l'une fixe C , l'autre mobile C' restent constamment tangentes entre elles, on dit que la courbe C' roule

Sans glisser sur la courbe C si le point de contact O se déplace simultanément de longueurs d'arcs OO_1 , OO_1' égales sur les deux courbes.



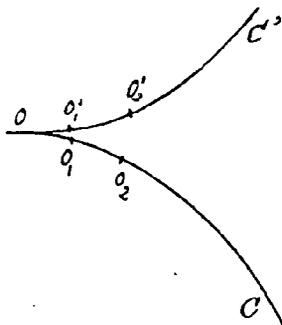
Si cette condition n'est pas remplie il y a glissement, et ce glissement se mesure par la différence des arcs OO_1 et OO_1' .

Si le point de contact reste immobile sur la courbe C' , il y a glissement sans roulement.

Le roulement sans glissement et le glissement sans roulement sont dits roulement simple et glissement simple.

Cela posé nous pouvons considérer :

1° La série des points du plan fixe qui deviendront successivement centres instantanés de rotation pour une succession d'époques infiniment peu différentes, ces points OO_1 , OO_2 , ... sont les points consécutifs d'une courbe fixe C .



2° la série des points invariablement liés à la figure mobile qui viennent en coïncidence avec les précédents

au moment où ceux-ci seront centres instantanés de rotation.

Ces points OO_1' , OO_2' ... formeront une seconde courbe C' invariable de forme comme la première, mais mobile avec le plan mobile auquel elle appartient.

Les deux courbes C et C' sont tangentes entre elles, et le déplacement de la courbe mobile C' est un roulement simple sur la courbe C .

En effet d'après la définition même qui vient d'être donnée, le point O_1' doit venir en coïncidence avec le point O_1 par un déplacement infiniment petit de la figure. Mais ce déplacement peut être obtenu par une rotation infiniment petite autour du centre instantané O_1 , donc OO_1' doit être égal à OO_1 et l'angle $O_1'OO_1$ doit être l'angle infiniment petit $d\theta$ de la rotation élémentaire. Dès lors, les tangentes

à C et à C' au point O , étant les limites des sécantes OO_1 et OO_1' , ces tangentes doivent coïncider et comme les cordes infiniment petites OO_1 et OO_1' sont égales, les arcs correspondants des deux courbes ne peuvent différer que de quantités négligeables par rapport à la longueur même de ces arcs.

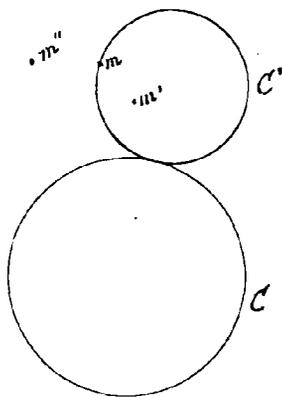
Les conditions du roulement simple se trouvent donc ainsi satisfaites.

Pour ce motif la courbe fixe C a reçu le nom de base du roulement et la courbe mobile C' celui de courbe roulante.

Le roulement de la seconde de ces courbes sur la première donne une image très-simple du déplacement continu le plus général d'une figure plane de forme invariable mobile sur son plan.

48) Cas particulier du mouvement épicycloïdal ou cycloïdal.

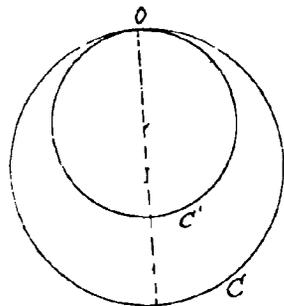
Si la base du roulement et la courbe roulante sont des cercles, les trajectoires des points mobiles sont des épicycloïdes.⁽¹⁾



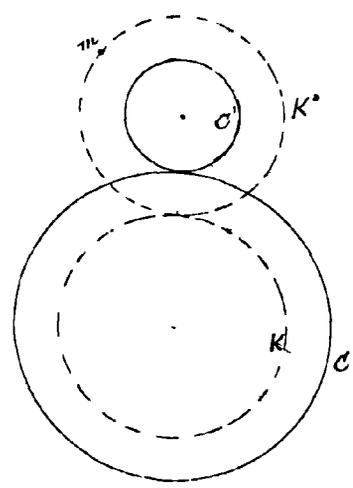
Si le point mobile est situé sur le cercle mobile lui-même, on a l'épicycloïde ordinaire. L'épicycloïde est allongée ou raccourcie si le point est situé extérieurement ou intérieurement au cercle.

L'épicycloïde devient la cycloïde quand le cercle, base du roulement devient une droite.

Dans le cas de l'épicycloïde allongée ou raccourcie, si l'on considère le cercle K' concentrique au cercle C' et passant par le point dérivant m , il est évident que ce cercle a pour enveloppe (partielle) un cercle K concentrique au cercle C , et il est très-facile de



(1) On donne quelquefois le nom d'hypocycloïde à l'épicycloïde lorsque les deux cercles C et C' ont leurs centres d'un même côté de leur point de contact.



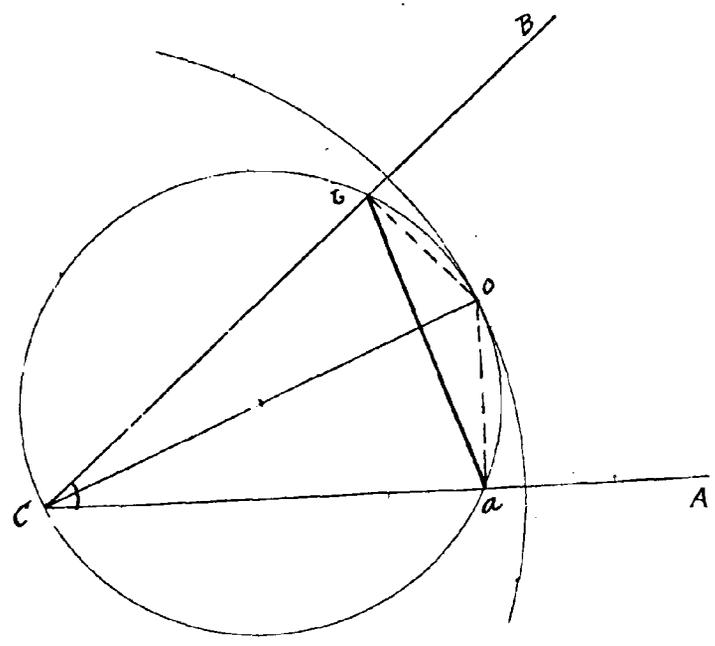
de reconnaître que le déplacement du cercle K' est un roulement accompagné de glissement sur le cercle K , le roulement et le glissement étant dans un rapport de grandeur constant. Toutes les épicycloïdes peuvent être obtenues par un déplacement de cette nature.

49) Recherche des courbes du roulement dans quelques cas particuliers.

Lorsque le déplacement de la figure plane se trouve déterminé par certaines conditions géométriques imposées à certains de ses points, on peut se proposer de rechercher la base du roulement et la courbe roulante. Le problème on le conçoit en raison de la diversité possible des conditions données, n'est pas susceptible d'une solution générale.

Mais les deux exemples que nous allons donner suffisent pour faire voir de quelle manière on peut le résoudre.

a) Déplacement elliptique.



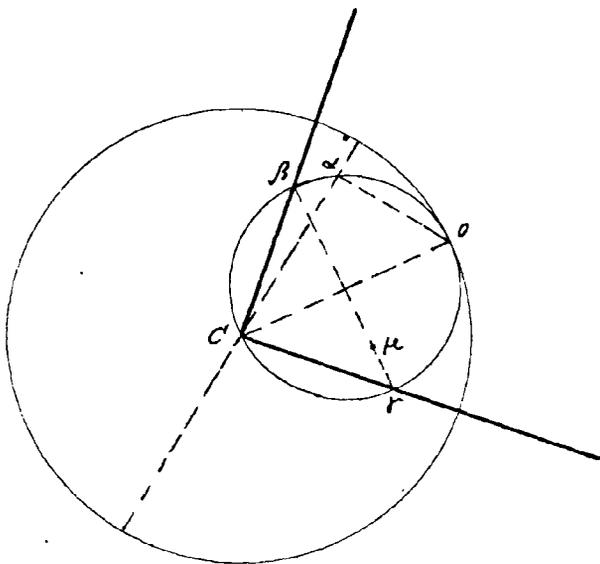
Supposons par exemple que deux points a et b du plan mobile découvrent deux droites CA, CB du plan fixe. Nous avons vu déjà que le centre instantané O était à l'intersection des perpendiculaires aO et bO aux deux droites CA et CB. L'angle aOb étant constant comme supplément de l'angle en C, le point O se trouve constamment sur

le cercle capable de l'angle $(\pi - C)$ décrit sur ab . Ce cercle, invariable de grandeur et entraîné avec ab est donc la courbe roulante.

Quant à la base du roulement, lieu du point O dans le plan fixe, il est facile de voir qu'elle n'est autre que le cercle de centre c décrit avec CO comme rayon, car la longueur CO diamètre du cercle roulant est évidemment invariable.

On voit ainsi que le mouvement étudié peut être obtenu par le roulement d'un cercle dans un cercle de rayon double.

Dans ce mouvement tout point α du petit cercle décrit un diamètre du grand cercle.



En effet la normale à sa trajectoire étant $O\alpha$, son déplacement est constamment dirigé suivant le rayon αC .

Un point μ quelconque décrit une ellipse facile à déterminer ; en effet en menant par ce point le diamètre $\beta\gamma$ du petit cercle, on reconnaît immédiatement que les diamètres $C\beta$, $C\gamma$ du grand cercle, trajectoires des points β et γ , sont les axes de cette ellipse en

direction et que $\mu\beta$, $\mu\gamma$ sont leurs grandeurs.

Il est à remarquer que les diamètres, trajectoires des points du petit cercle doivent être considérés comme des ellipses infiniment aplatiées.

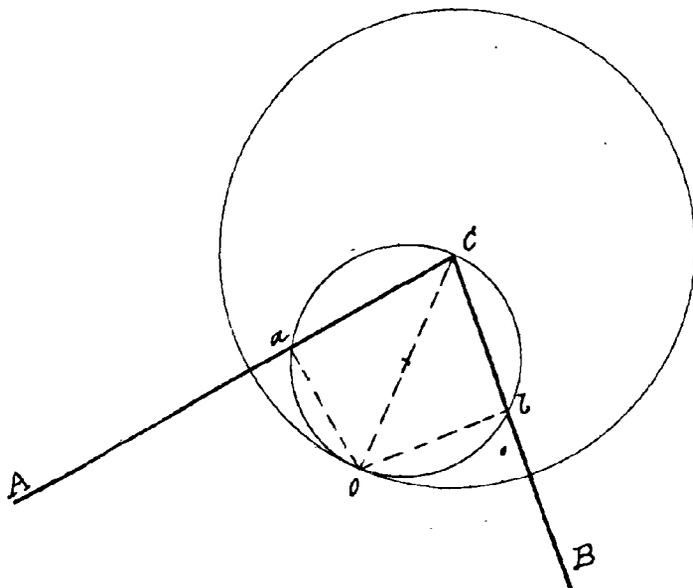
On peut donc dire que dans le déplacement étudié tout point décrit une ellipse, et l'ellipse se présente ainsi comme une variété d'épicéboïde.

6) Déplacement réciproque du précédent

Supposons, comme second exemple, que deux droites CA et CB du plan mobile soient assujetties à passer par deux points fixes a et b . Le déplacement ainsi défini peut être considéré

comme réciproque du précédent. En effet les mêmes données s'y appliquent, seulement dans le cas actuel, c'est le système des deux droites CA et CB qui se déplace tandis que les deux points a et b restent fixes.

La détermination des courbes du roulement se fait encore très-simplement : les perpendiculaires ao et bo aux deux droites CA et CB aux points où elles touchent leurs enveloppes - qui sont les deux

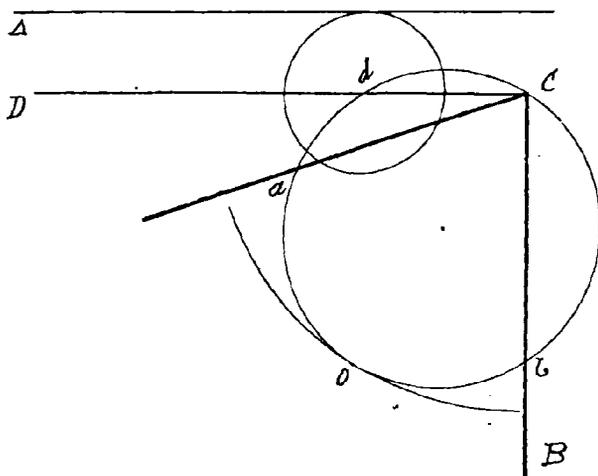


points fixes - déterminent le centre instantané de rotation O , et les lieux géométriques de ce point sont le cercle décrit sur CO comme diamètre dans la figure fixe et le cercle décrit du point C comme centre avec CO pour rayon dans la figure mobile.

Les courbes du roulement sont donc, comme dans le cas précédent, deux circonférences, dont les rayons sont dans le rapport de un à deux ; mais actuellement c'est le grand cercle qui roule et c'est le petit cercle intérieur au grand

cercle qui est base du roulement.

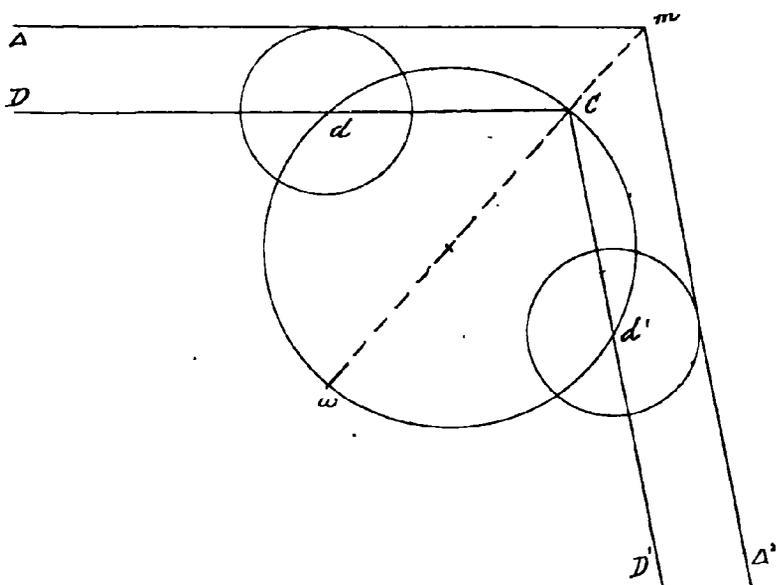
Le point C décrit évidemment ce petit cercle.



Une droite CD de direction quelconque, menée par C dans la figure mobile rencontre le petit cercle en un point d qui est fixe parce que l'angle dca est constant.

Par suite toute droite Δ enveloppe une circonférence dont le centre est le point d'intersection du cercle base du roulement avec la parallèle CD à Δ menée par C .

Un point m quelconque entraîné dans le mouvement peut donc être considéré - et d'une infinité de manières - comme le sommet d'un angle de grandeur constante dont les côtés glissent sur deux cercles. Il suffit pour cela



de mener par m deux droites quelconques Δ et Δ' ; ces deux droites entraînées dans le déplacement envelopperont deux cercles de centres d et d' .

Il est facile de reconnaître dans le lieu géométrique ainsi déterminé la conchoïde d'un cercle relativement à l'un de ses points, c'est-à-dire un limaçon de Pascal.

Joignons en effet le point m au point c ; cette droite étant invariablement liée à la figure mobile, son prolongement ira couper le cercle en un point w

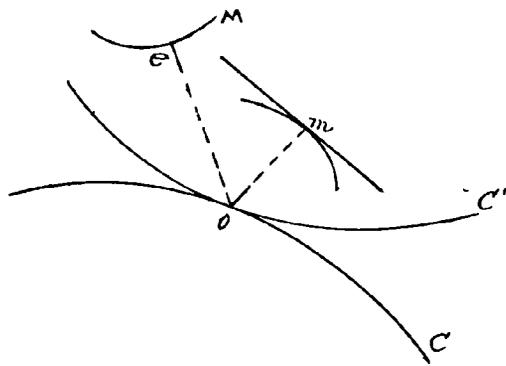
fixe sur ce cercle, et comme la longueur mc , distance de deux points de la figure mobile, est invariable, le lieu du point m pourra s'obtenir en menant par un point w d'un cercle fixe C une sécante quelconque et prolongeant cette sécante à partir du second point c où elle rencontre le cercle d'une longueur constante cm .

Tous les points du plan mobile décrivent donc des limaçons de Pascal.

50. Détermination des trajectoires des points mobiles et des enveloppes des courbes mobiles lorsque les courbes du roulement sont connues.

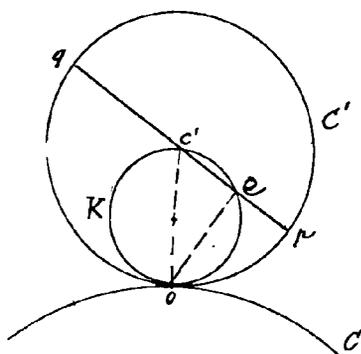
1° Tangentes aux trajectoires des points mobiles : points où les courbes mobiles touchent leurs enveloppes.

Pour avoir la normale et par suite la tangente à la trajectoire d'un point mobile m , il suffit d'après ce qui a été démontré, de joindre ce point au centre instantané O qui est à l'instant considéré le point de contact des courbes du roulement.



Pour avoir le point de contact d'une courbe mobile M avec son enveloppe, il suffit de mener par ce même point O une normale OE à la courbe mobile.

Cette construction par points de l'enveloppe peut suffire dans certains cas pour en déterminer la nature.



Considérons par exemple un cercle mobile C' roulant sur un cercle fixe C et cherchons l'enveloppe d'un diamètre pq du cercle mobile.

Le point de l'enveloppe pour une position donnée des deux cercles sera le point E pied de la perpendiculaire abaissée du centre instantané O sur le diamètre du cercle mobile. Ce point appartient donc au petit cercle K décrit sur OE comme diamètre, c'est-à-dire à un cercle de grandeur invariable, et

de plus les arcs OE, Op des deux cercles K et C' sont égaux.

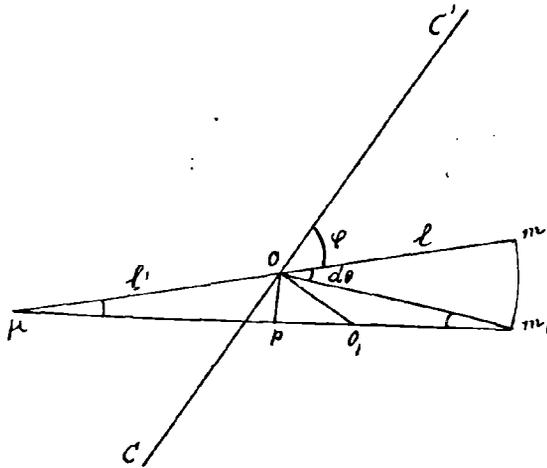
Supposons que pendant que le cercle C' roule sur le cercle C nous faisons rouler également le cercle K sur ce même cercle de manière à ce que les points de contact de C' et de K avec C restent constamment en coïncidence. Les points mobiles E et p entraînés respectivement avec les cercles qui les portent ne cessent pas d'être en ligne droite avec le centre C' , parce que les arcs OE et Op diminués ou augmentés d'une même longueur par suite des déplacements égaux du point O sur les deux cercles ne cessent pas d'être égaux entre eux. Donc le point E ne cessera pas d'être le point de contact du diamètre pq avec son enveloppe et par suite cette enveloppe sera l'épicycloïde décrite par le point E du cercle K roulant sur le cercle C .

51, 2^o Courbure des trajectoires des points et des enveloppes des courbes mobiles.

a) Courbure des trajectoires des points mobiles.

Soit O le centre instantané, O_1 une position infiniment voisine de ce centre sur la base. Par la rotation infiniment petite qui fait tourner toute la figure de l'angle $d\theta$ autour de O , un point m vient en m_1 et $O_1 m_1$ est la nouvelle normale à sa trajectoire. La position limite du point μ intersection de $O_1 m_1$ et de $O m$, est donc le centre de courbure de cette trajectoire.

Pour déterminer cette position limite, désignons par l et l' les longueurs $O m$ et $O \mu$ et par φ l'angle que fait $O m$ avec la normale $O C'$ à la base.



On a dans le triangle $O m_1 \mu$
 $d\theta = \mu + \tilde{m}_1$,

D'autre part si l'on abaisse $O p$ perpendiculaire sur $m_1 \mu$ le triangle $O p m_1$ donne en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur

$$O O_1 \cos \varphi = l \sin \tilde{m}_1 = l' \sin \mu \quad (1)$$

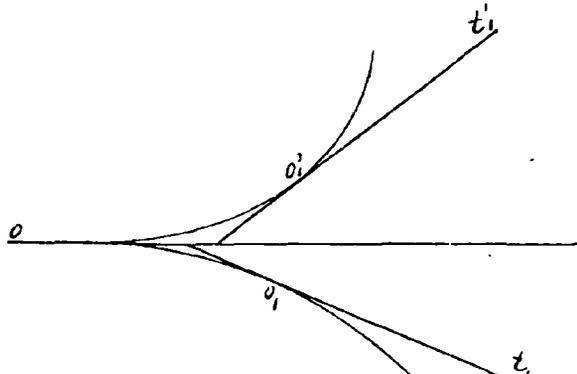
ou bien encore, comme les angles \tilde{m}_1 et μ sont infiniment petits

$$O O_1 \cos \varphi = l \tilde{m}_1 = l' \tilde{\mu}$$

En portant les valeurs de \tilde{m}_1 et de $\tilde{\mu}$ tirées de ces relations dans celle que nous avons précédemment écrite, on trouve

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{d\theta}{O O_1 \cos \varphi}$$

Or $d\theta$ est l'angle élémentaire dont tourne toute la figure quand le centre instantané se transporte de O en O_1 ,



(1) Car $O p$ est perpendiculaire à μm_1 qui fait un angle infiniment petit avec $O m$ et $O O_1$ a pour direction limite la tangente à la base, perpendiculaire à $O C'$. L'angle $p O O_1$ est donc égal à φ en négligeant les infiniment petits à côté de la grandeur finie.

sur la base. C'est donc aussi l'angle dont tourne la tangente $O_1 t_1$ à la courbe roulante pour venir s'appliquer sur la tangente $O, t,$ à la base.

En d'autres termes comme l'indique clairement la figure d θ est la somme algébrique des angles de contingence de la base et de la courbe roulante pour un même déplacement ds sur ces deux courbes. On a donc en désignant par R et R' les rayons de courbure de ces courbes

$$d\theta = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'}$$

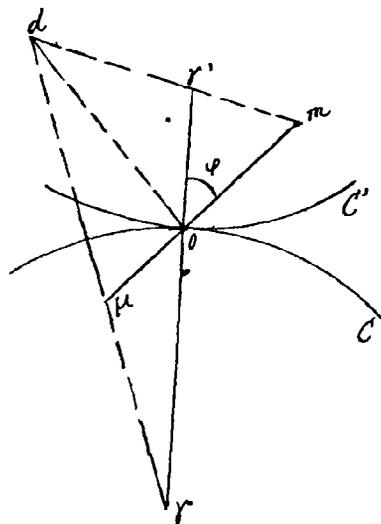
et la formule précédente devient, en remarquant que OO_1 ne diffère de ds que par des infiniment petits négligeables

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Elle détermine la position du centre de courbure sur la normale à la trajectoire du point m .

52. Construction de Savary.

La relation que nous venons d'établir se traduit géométriquement par la construction suivante qui porte le nom de Savary bien qu'elle soit réellement due à Euler.



Soient r et r' les centres de courbure de la base C et de la courbe roulante C' .

Menons en O la perpendiculaire Od à la normale Om et joignons mr' .

Ces deux droites se coupent au point d et rd coupe la normale au point

μ qui est le centre de courbure cherché.

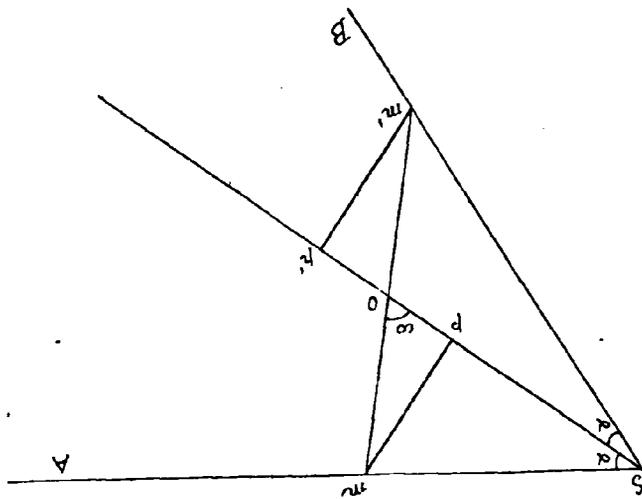
Cette construction est facile à justifier en s'appuyant sur

le lemme suivant.

Lorsqu'une sécante mm' pivote autour du point O dans un angle fixe ASB , la quantité

$$\left(\frac{1}{Om} + \frac{1}{Om'} \right) \frac{1}{\sin \omega}$$

où ω désigne l'angle SOm , a la même valeur pour toute position de la sécante.



En effet on a :

$$\text{Er. } Smo + \text{Er. } Sm'o = \text{Er. } Smm'$$

c'est-à-dire en désignant par α et α' les angles OSm , OSm' , et en abaissant de m et m' les perpendiculaires mp $m'p'$ sur SO

$$SO(mp + m'p') = Sm \cdot Sm' \cdot \sin(\alpha + \alpha')$$

ou bien encore

$$SO(mp + m'p') = \frac{mp \cdot m'p' \cdot \sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha \sin \alpha'}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{mp} + \frac{1}{m'p'} = \frac{\sin(\alpha + \alpha')}{SO \sin \alpha \sin \alpha'} = \text{constante}$$

et en remarquant que mp et $m'p'$ sont respectivement égaux aux produits de Om et Om' par $\sin \omega$

cette relation fournit la démonstration du lemme (1).

Appliquons ce lemme à la figure précédente en considérant l'angle $m d r$ et les sécantes $pe om$, $r o r'$ menées par le point O dans cet angle et nous trouverons la relation

$$\frac{1}{Ope} + \frac{1}{Om} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

qui est bien celle du paragraphe précédent.

(1) pour donner à la relation

$$\left(\frac{1}{Om} + \frac{1}{Om'} \right) \frac{1}{\sin \omega} = \text{constante}$$

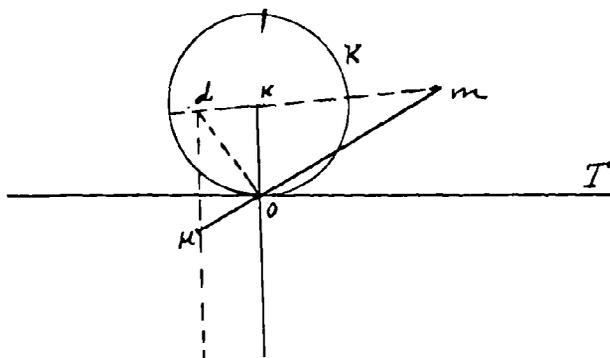
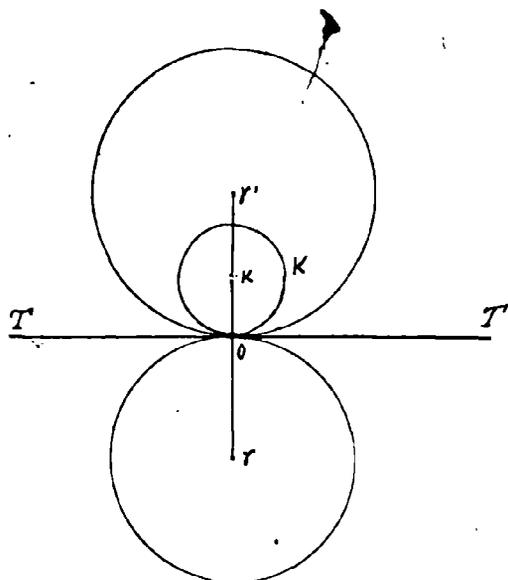
toute la généralité on n'a qu'à tenir compte des signes dans la démonstration.

53, Conséquences de la relation et de la construction précé-
dentes : cercle de roulement, circonférence des inflexions.

L'examen de la relation

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

précédemment établie, fait voir que, pour la détermination de la courbure des trajectoires, la connaissance de la courbure des courbes C et C' est suffisante. On peut donc pour cette recherche substituer dans l'inconvénient aux courbes C et C' leurs cercles osculateurs en O , ce qui revient à remplacer le mouvement réel par un mouvement épicycloïdal.



On peut même substituer aux deux cercles de courbure deux autres cercles tangents aux premiers en O pourvu que la quantité

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

conserve la même valeur.

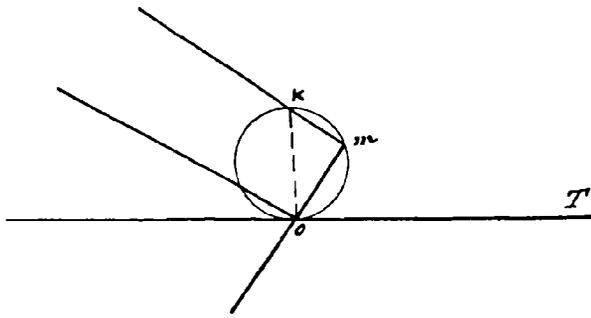
Si l'on remplace le cercle fixe par un cercle de rayon infini, c'est-à-dire par une droite OT , l'autre cercle devra avoir un rayon ρ défini par la relation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

Le cercle K ainsi déterminé a reçu le nom de cercle de roulement.

La construction de Savary appliquée à ce cercle K et à la droite OT se simplifie comme l'indique la figure.

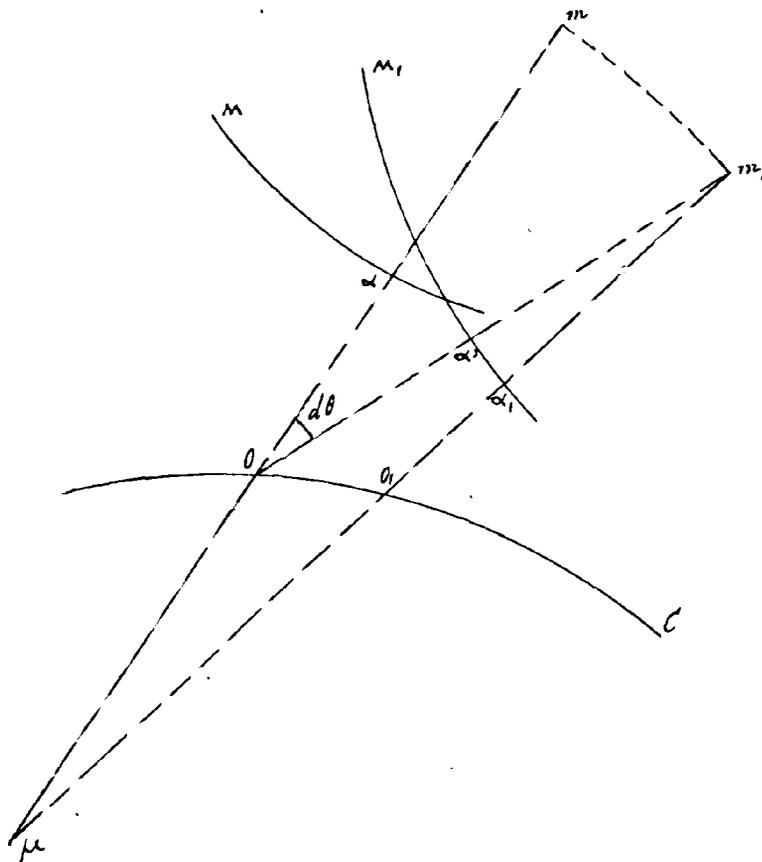
Remarquons encore que, d'après cette construction, le cercle



décrit sur OK comme diamètre est le lieu des points dont les trajectoires présentent à l'instant considéré un rayon de courbure infini. Cette circonférence a reçu pour ce motif le nom caractéristique de circonférence des inflexions.

54, b. Courbure des enveloppes des courbes mobiles.

Soient M et M_1 deux positions consécutives d'une courbe mobile. O et O_1 les deux positions correspondantes du centre instantané sur la base.



Les perpendiculaires Oa et O_1a_1 abainées de O et O_1 sur les courbes M et M_1 sont deux normales consécutives à l'enveloppe de la courbe M , leur intersection μ a donc pour position limite le centre de courbure de cette courbe.

Or la courbe M a été amenée de sa position M_1 par une rotation d'angle $d\theta$ autour de O_1 .

Dans cette rotation la normale Oa est venue en Oa' sans cesser d'être normale à la courbe mobile : Oa' et O_1a_1 qui sont deux normales infiniment voisines de la courbe M_1 se coupent donc en un point m_1

qui est à la limite le centre de courbure de cette courbe situé sur la normale Oa' . Ce point considéré comme point mobile entraîné

Dans le déplacement était en m sur Ox avant la rotation et l'on voit par l'inspection de la figure que la position limite du point μ est précisément le centre de courbure de la trajectoire du point m .

Ainsi le problème de la courbure des enveloppes se ramène au problème déjà résolu de la courbure des trajectoires.

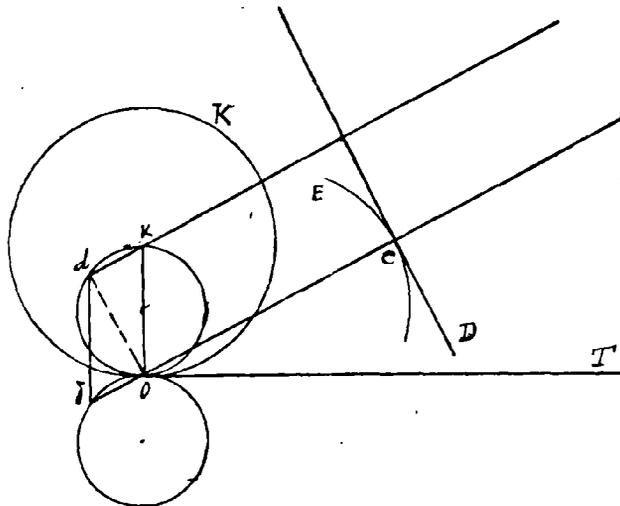
On conclut immédiatement de ce résultat que des courbes ayant même développée ont pour enveloppes des courbes ayant également même développée.

Examinons le cas particulier d'une droite mobile D .

Soit E sa courbe enveloppe. Pour déterminer la courbure de cette

enveloppe, nous aurons à chercher d'après ce qui vient d'être dit, le centre de courbure de la trajectoire d'un point situé à l'infini dans la direction perpendiculaire à D .

Appliquons la construction de Savary simplifiée par l'emploi du cercle de roulement et nous reconnaitrons que le centre cherché δ a pour lieu géométrique la circonférence symétrique de celle des inflexions par rapport à la base OT du roulement.



§5. Evaluation du glissement d'une courbe mobile sur son enveloppe.

En général lorsqu'une courbe M entraînée dans le mouvement, enveloppe une courbe N , elle roule et glisse simultanément sur son enveloppe.

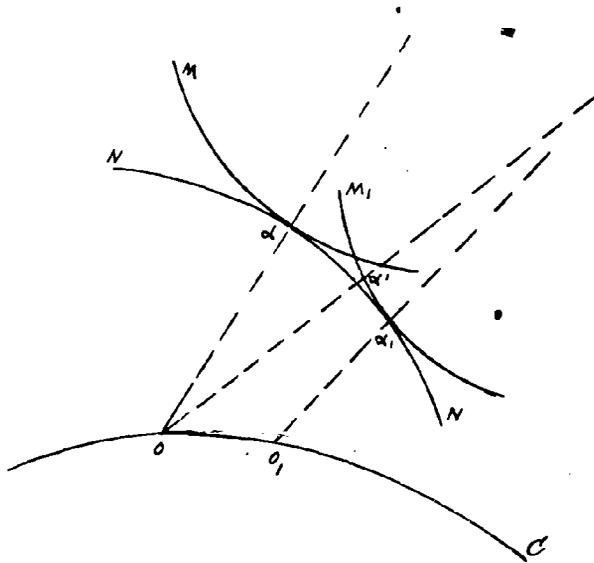
L'évaluation de ce glissement est utile dans l'étude de plusieurs questions pratiques; elle est d'ailleurs facile à faire.

Reportons nous en effet à la première figure du paragraphe précédent.

Le point de contact α de la courbe mobile avec son enveloppe en se transportant en α_1 décrit l'arc $\alpha\alpha_1$, sur la courbe mobile et

l'arc α , sur son enveloppe N . La différence entre ces deux arcs mesure le glissement élémentaire.

Mais en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, on peut remplacer ces deux arcs par leurs cordes, et comme les



directions de ces cordes font des angles infiniment petits avec leur direction limite commune qui est perpendiculaire à $O\alpha$ et que la corde $\alpha\alpha'$ du déplacement du point α fait également un angle infiniment petit avec cette direction on peut confondre ces longueurs elles mêmes avec leurs projections sur leur direction limite, et écrire

$$\alpha\alpha_1 - \alpha'\alpha_1 = \alpha\alpha' = \overline{O\alpha} \cdot d\theta$$

Telle est l'expression du glissement élémentaire; on voit que le glissement ne serait nul que si le point α coïncidait avec le centre instantané, et comme ceci ne peut avoir lieu d'une façon continue que si la courbe M coïncide avec la courbe roulante C' , on en conclut que la courbe roulante est la seule courbe de la figure mobile qui pendant le déplacement roule sans glisser sur son enveloppe.

56. Applications. a) Déplacement épicycloïdal.

La théorie précédente donne la construction immédiate du centre de courbure d'une épicycloïde quelconque (en particulier de l'ellipse).

Il est d'ailleurs facile de démontrer que la développée d'une épicycloïde ordinaire est toujours une épicycloïde semblable.

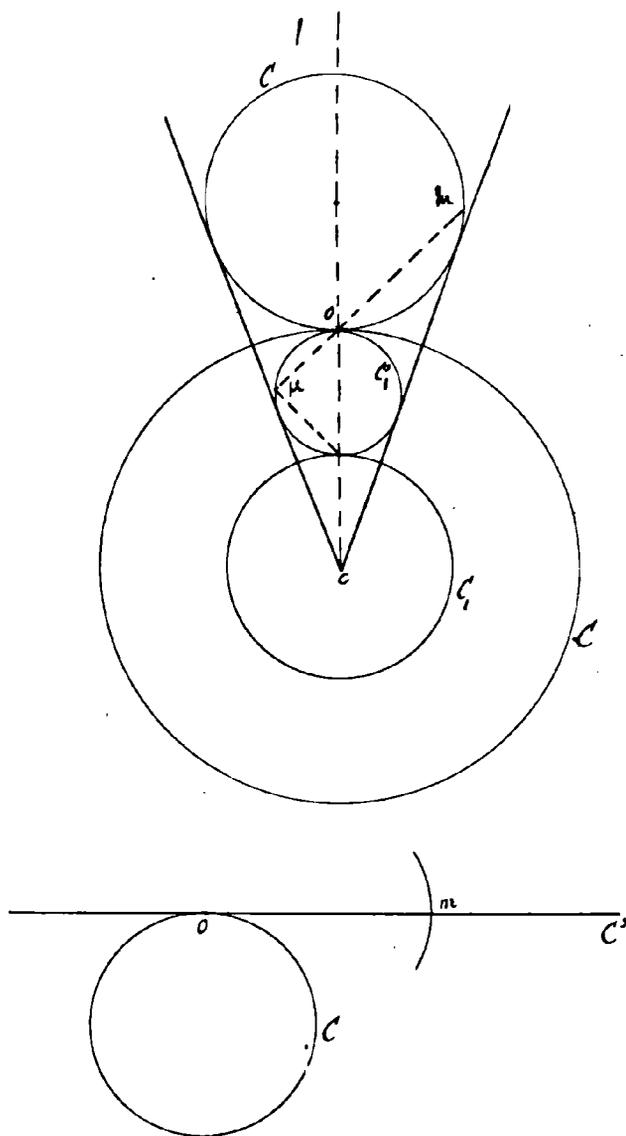
En effet du centre c du cercle fixe C menons les tangentes au cercle roulant C' , puis dans l'angle de ces tangentes inscrivons le cercle C_1 tangent au cercle C et situé par rapport à ce dernier du côté opposé au cercle C' .

Enfin traçons le cercle C_2 concentrique au cercle C et tangent

comme lui au cercle C_1' .

Si nous supposons que les cercles C' et C_1' roulent respectivement sur les cercles C et C_1 en s'accompagnant dans leur roulement de manière à ce que leurs centres restent toujours en ligne droite avec le

point O , et si nous considérons sur ces cercles roulants deux points m et μ en ligne droite avec le point O , il est aisé de voir que pendant le roulement, les points m , μ et O resteront constamment en ligne droite. Mais la droite MO est la normale à l'épicycloïde du point m , tandis que la droite μO est la tangente à l'épicycloïde du point μ et comme ces épicycloïdes sont évidemment semblables, le théorème se trouve ainsi démontré.



Dans le cas particulier de la cycloïde, la développée devient une cycloïde égale.

Dans le cas où le cercle roulant C' devient une droite, la courbe décrite par l'un de ses points est une développante du cercle, puisque ses normales MO sont tangentes au cercle C .

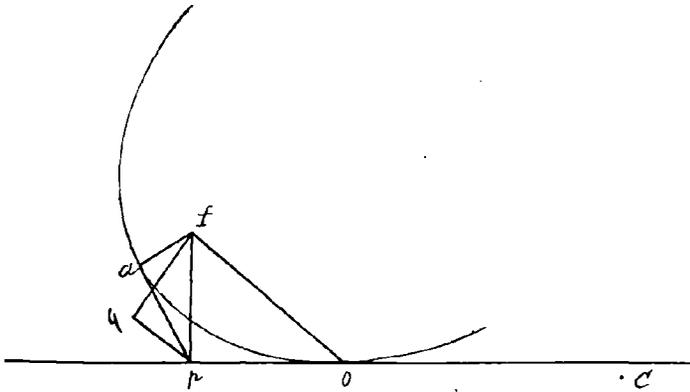
Le cercle doit être considéré dans ce cas, comme limite d'épicycloïde (cercle de rayon fini roulant sur un cercle de rayon nul).

B. Chaînette.

La chaînette peut être définie comme lieu du foyer d'une parabole qui roule sur une droite fixe.

En partant de cette définition cinématique, on retrouve aisément la propriété caractéristique et bien connue de la courbe.

Menons en effet la normale OI et la tangente Iq à la trajectoire du point I ; abaissons ensuite de I la perpendiculaire Ip sur la droite OC base du roulement et du pied p de cette



droite la perpendiculaire pq sur la tangente. Le point p d'après une propriété connue de la parabole appartient à la tangente au sommet a de la courbe.

D'ailleurs la tangente pO à la parabole étant également inclinée sur le rayon vecteur IO et sur la direction de l'axe, les angles IOp , Ipa sont égaux. Mais les angles IOp , pIq sont aussi égaux comme ayant leurs côtés rectangulaires; l'égalité des angles Ipa , pIq , comme par suite celle des triangles

rectangles Ipa , pIq se trouve ainsi démontrée, et l'on a

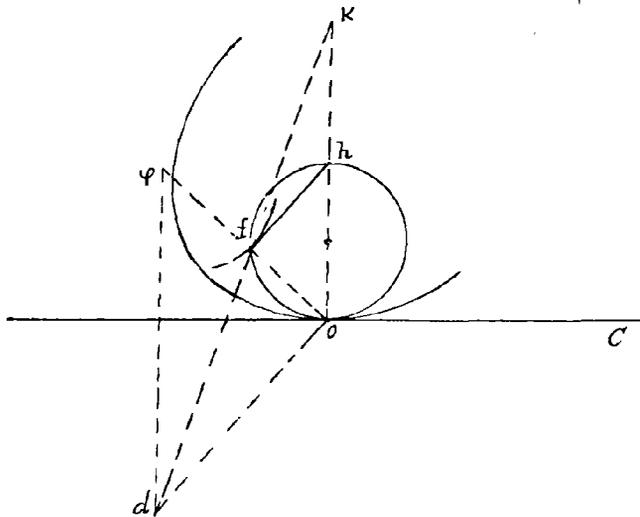
$$pq = Ia = \text{constante}$$

Cette définition de la chaînette permet de retrouver également la construction connue de son centre de courbure. Nous avons vu

en effet que le cercle OIk tangent à la parabole en O et passant par son foyer avait pour diamètre le demi-rayon de courbure de la courbe.

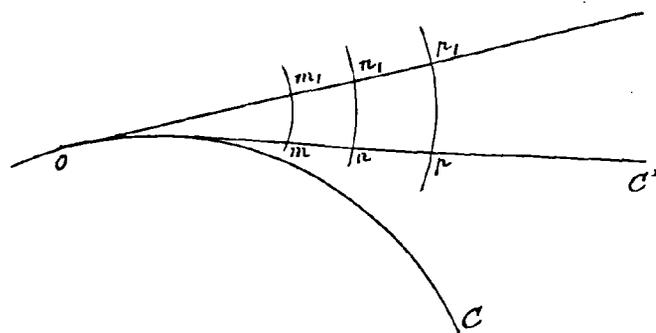
Le cercle de roulement a donc son centre K tel que $OK = 2Oh$; et la construction de Savary appliquée à ce cercle pour le point I décrivant la chaînette conduit au point φ tel que $I\varphi = IO$ à cause des parallèles Od et hI ; OK et $d\varphi$ qui donnent

$$\frac{I\varphi}{IO} = \frac{Id}{IK} = \frac{Oh}{hK} = 1$$



57, C Génération des développantes d'une courbe par le roulement d'une tangente mobile sur cette courbe considérée comme base.

Supposons que la tangente C' roule sans glisser sur la courbe C et considérons divers points m, n, p, \dots de cette droite. Ces points décrivent des trajectoires qui auront la droite C' pour

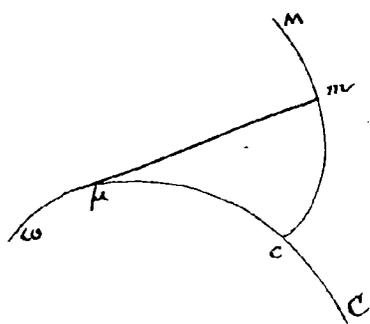


normale et dont C sera par conséquent la développée.

Toutes ces trajectoires seront donc les développantes de la courbe C et l'on retrouve ainsi un résultat déjà obtenu par la considération des équations de courbure et d'après lequel une même courbe a une infinité de développantes.

Toutes ces développantes détachent sur leur normale commune des segments mn, np, \dots qui ont des longueurs évidem-

ment invariables pour les diverses positions de cette normale, ce que l'on peut exprimer en disant qu'elles ont entre elles des espacements constants. Elles sont dites pour cette raison courbes parallèles (par analogie avec les droites parallèles de la géométrie élémentaire). Le



procédé de description explique d'ailleurs les noms de développées et de développantes attribués à ces courbes, car il est visible que l'extrémité m d'un fil inextensible fixé au point O de la développée C et primitivement enroulé sur l'arc CO de cette courbe décrit précisément un arc de développante M , lorsqu'on déroule le fil en le tenant constamment tendu.

étant d'un même côté de cette droite.

Supposons actuellement que la développante N se rapproche graduellement de la développante M qui passe en p_1 , jusqu'à se confondre finalement avec elle : les deux points de rebroussement ν et n_1 finiront par se confondre et la branche νn_1 , disparaissant, la développante ne présentera plus que les demi-branches m_1, m_0, m_1, m_1 , limites des branches νN et $n_1 n_2$, et ces deux demi-branches, normales à C en m_1 , se courberont comme l'indique la figure, de part et d'autre de leur tangente commune $m_1 t_1$, puisque leurs centres de courbure p_1 et p_2 seront situés de part et d'autre de cette droite. La disposition sera donc celle qui caractérise l'inflexion.

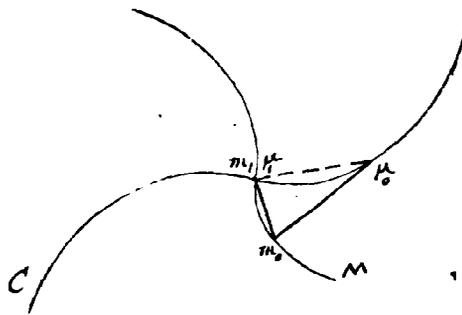
Mais ce point d'inflexion diffère essentiellement du point d'inflexion ordinaire, puisque le rayon de courbure, limite de $m_0 p_0$ lorsque m_0 vient en m_1 , y est visiblement nul. Ce sera un point d'inflexion de seconde espèce.

En ces points on doit remarquer qu'à un déplacement infiniment petit du premier ordre $p_1 p_0$ sur la développée correspond sur la développante un déplacement

$m_1 m_0$ qui doit être au moins du troisième ordre, car dans le triangle $m_1 m_0 p_0$ l'angle $m_1 p_0 m_0$ est du second ordre puisque le rayon de courbure de la développée est infini. ⁽¹⁾

On s'explique ainsi comment la courbure de la développante peut être infinie, bien que son angle de contingence, égal à celui de la développée soit du deuxième ordre.

En considérant la développante M comme limite de la développante N , on voit aussi qu'on doit regarder la direction du déplacement sur cette courbe comme variant brusquement de $180^\circ \pm 180^\circ$ par

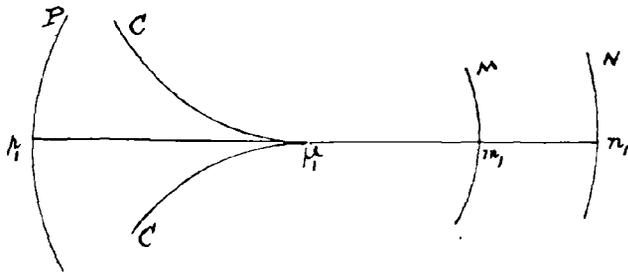


(1) Ce rayon de courbure s'exprime en effet par la limite du rapport de la corde $p_0 p_1$ à l'angle $m_1 p_0 m_0$ et par conséquent cet angle doit être du deuxième ordre si la corde $p_0 p_1$ qui est du même ordre que l'arc $p_0 p_1$ est du premier ; dès lors la corde $m_1 m_0$ (et par suite aussi l'arc $m_1 m_0$) doit être du troisième ordre.

l'effet des deux rebroussements ν et ν_1 .

Cette direction en définitive ne se trouve donc pas modifiée.

Si la développée présente un rebroussement de première espèce, on reconnaît facilement que ses différentes développantes doivent présenter des sommets aux points correspondants car le rayon de courbure de ces

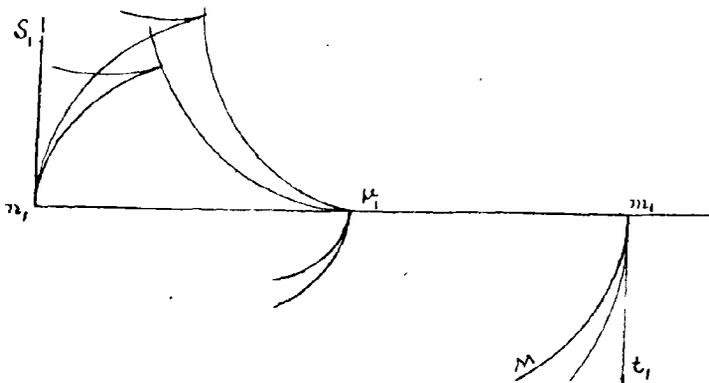


développantes passe en ces points par un maximum ou un minimum (1)

Et réciproquement si une courbe donnée présente un sommet en l'un de ses points m_1 , sa développée doit présenter au point correspondant p_1 un rebroussement de première espèce,

car le déplacement du point p_1 sur la développée mesurant les variations du rayon de courbure, le sens de ce déplacement doit changer en ce point, ce qui indique un rebroussement, et comme d'autre part la rotation de la normale à la courbe qui est la tangente à la développée continue à se faire dans le même sens, le rebroussement doit être de première espèce.

Enfin si la développée présente en l'un de ses points p_1 un rebroussement de seconde



espèce les développantes aux points correspondants tels que m_1 et n_1 doivent présenter également des rebroussements de seconde espèce; ces rebroussements doivent être considérés

(1) On s'en assure facilement en se reportant à la génération de la développante au moyen du fil tendu sur la développée et en remarquant que l'accroissement ou la diminution du rayon de courbure de la développante correspond à l'enroulement ou au déroulement du fil sur la développée.

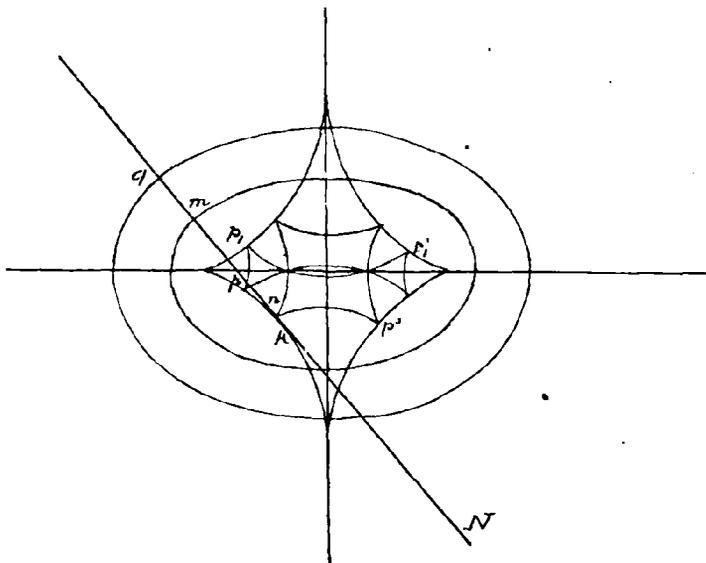
d'ailleurs comme des sommets car le rayon de courbure y passe par une valeur maxima ou minima.

Pour la développée qui passe en p_1 il y a encore rebroussement de seconde espèce mais avec un rayon de courbure nul.

59. Courbes parallèles à l'ellipse.

Appliquons les résultats généraux auxquels nous venons d'arriver au cas particulier de l'ellipse et de sa développée.

Tracons la développée de l'ellipse que nous obtenons assez facilement comme enveloppe des normales à la courbe.



Cette courbe symétrique par rapport aux deux axes de l'ellipse et qui a pour centre son centre, doit présenter quatre points de rebroussement de première espèce correspondant aux quatre sommets de l'ellipse.

Si l'on suppose ^{que} la normale mN à l'ellipse qui touche en m sa développée roule sur cette développée, ses différents points tels que r, p, q, \dots

décrivent des courbes dont les formes très-différentes d'aspect sont faciles à déterminer d'après l'étude que nous venons de faire.

Ces courbes présentent des rebroussements de première espèce lorsqu'elles rencontrent la développée (courbes des points r et p par exemple), des points doubles lorsque leurs branches telles que p, p', p_1, p'_1 se coupent sur le grand axe - ou bien elles se rapprochent de la forme de l'ellipse lorsque le point décrivant est voisin du point m (courbe du point q).

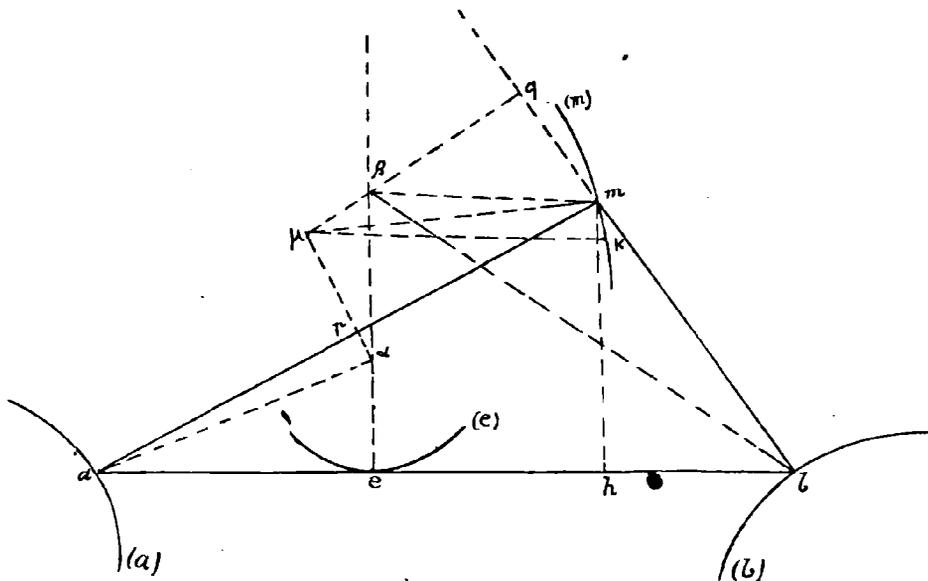
60) Application des théories précédentes au déplacement d'une figure de forme variable présentant des éléments invariables.

La théorie du déplacement d'une figure plane invariable de forme peut conduire à la démonstration de propriétés intéressantes dans le cas des figures variables, lorsque certains éléments de ces figures restent invariables pendant le déplacement.

Nous allons donner un exemple de démonstration de ce genre.

Supposons qu'un triangle abm se déplace dans le plan en restant semblable à lui-même : on connaît les trajectoires (a) et (b) de deux de ses sommets ainsi que l'enveloppe (c) de son côté ab , on demande la normale à la trajectoire (m) de son troisième sommet.

Les deux angles a et b du triangle sont deux figures invariables : les centres instantanés α et β de leurs déplacements s'obtiennent sans difficulté par les normales aux trajectoires de leurs sommets et par la normale à leur côté ab au point e où il touche son enveloppe.



Abaisant de α et de β les perpendiculaires αp , βq sur les côtés am et bm des angles a et b , on a en p et q les points où ces côtés touchent leurs enveloppes.

Mais l'angle m du triangle constitue lui aussi une figure invariable de forme, et ses côtés ma et mb coïncident constamment avec les côtés am et bm des angles précédemment considérés.

On a donc par l'intersection de αp et de βq le centre instantané

d'applications diverses. Il permet évidemment lorsqu'on connaît les normales aux trajectoires des points a et b et le point de contact de la droite ab avec son enveloppe de construire la normale à la courbe lieu du point m .

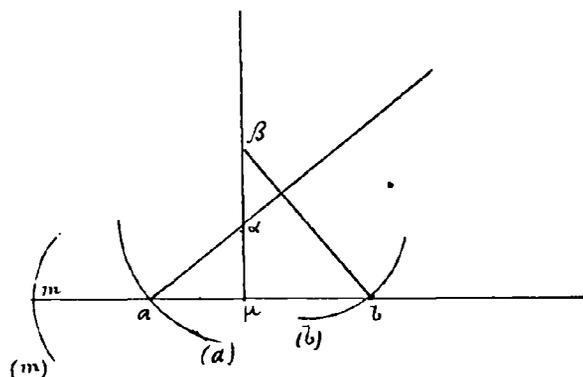
Mais il permet aussi inversement, lorsque les normales aux trois courbes (a) (b) (m) sont connues, de construire le point où la droite touche son enveloppe. En effet la perpendiculaire à la droite ab en ce point doit rencontrer les normales aux trois courbes en des points α β μ tels que

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{ma}{mb}$$

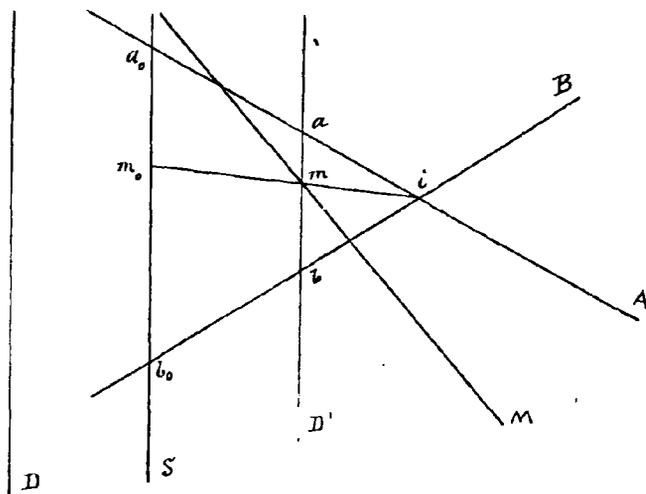
et la position de cette droite n'est susceptible dès lors que d'une détermination unique (1)

Si la droite mobile est constamment normale à l'une des trois courbes, la courbe m par exemple, le point où elle touche son

enveloppe sera le centre de courbure μ de cette courbe, d'où une détermination du centre de courbure d'une courbe toutes les fois que l'on peut trouver deux courbes (a) et (b) telles que la normale à (m) rencontre ces courbes en des points a et b formant avec m deux segments am , bm de rapport constant.



(1) Pour construire une droite de direction donnée D sur laquelle trois droites données A , B , M doivent détacher deux segments dans un rapport donné,



il suffit de mener une sécante quelconque S parallèle à D et qui rencontre A et B en a_0 , b_0 , de construire m_0 , divisant a_0b_0 dans le rapport donné, de joindre m_0 au point d'intersection i de A et de B et de mener par le point M ou cette droite comme M , une droite parallèle à D .

Ellipse — Prenons par exemple le cas de l'ellipse ; les deux axes de la courbe pourraient jouer le rôle des courbes (a) et (b).

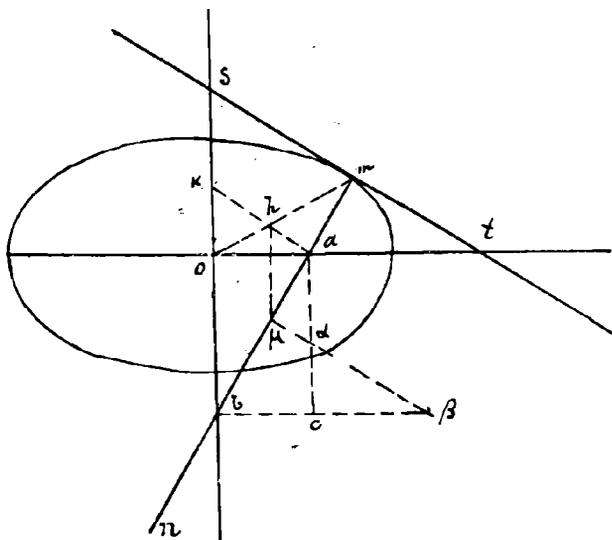
On sait en effet que la normale à l'ellipse les rencontre en deux points a et b tels que

$$\frac{ma}{mb} = \text{le carré du rapport des axes} = \text{constante} \quad (1)$$

Pour construire le centre de courbure, il faut donc mener une perpendiculaire à la normale mn qui soit rencontrée par les perpendiculaires en a et en b aux deux axes en des points α et β tels que

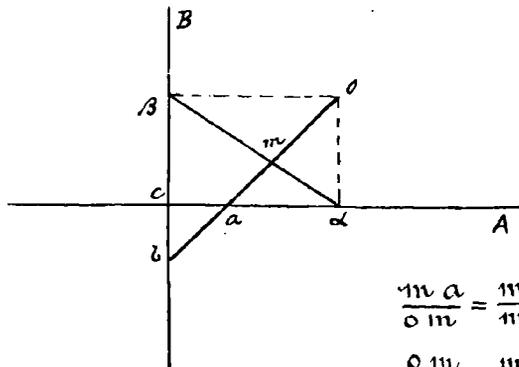
$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{ma}{mb}$$

Remarquons que si l'on mène la tangente st à l'ellipse, les



triangles rectangles sot, tca sont semblables comme ayant leurs côtés rectangulaires. Les droites bam, $\beta\mu$ en vertu de l'égalité précédente sont donc des droites homologues dans ces deux triangles donc le point μ divise ab comme le point m divise st. De là, une construction très-simple.

(1) Cette propriété de l'ellipse se démontre très-simplement en considérant la courbe comme engendrée (§42) par un point m d'une droite $\alpha\beta$ de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur deux droites fixes A et B.



$$\frac{ma}{om} = \frac{m\alpha}{m\beta} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{om}{mb} = \frac{m\alpha}{m\beta} = \frac{b}{a}$$

D'où, en multipliant membre à membre

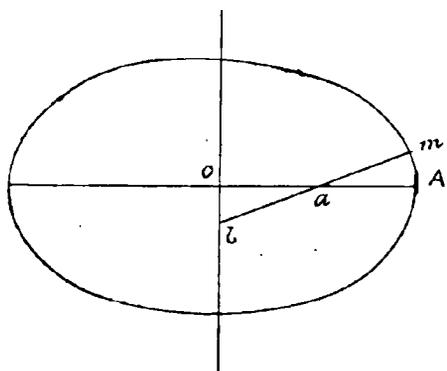
$$\frac{ma}{mb} = \frac{b^2}{a^2}$$

On a en effet par les triangles semblables $om\beta$ et $am\alpha$ d'une part, $om\alpha$ et $bm\beta$ d'autre part, O étant le centre instantané de rotation

Joignons Om et par a menons la parallèle aK à St , puis par le point h où elle rencontre Om la parallèle hK à Ob ; cette dernière droite coupe mN au point μ , car on a :

$$\frac{\mu a}{\mu b} = \frac{ha}{hK} = \frac{mt}{mS}$$

Les rayons de courbure ρ_A ρ_B qui correspondent aux sommets peuvent s'obtenir directement par une construction très-simple qu'il est utile de connaître

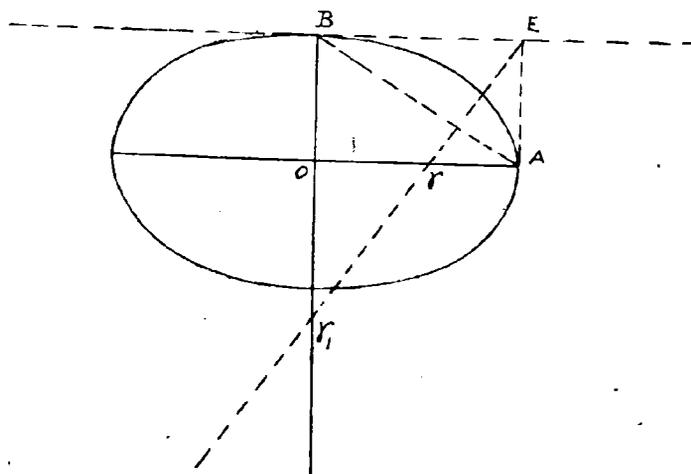


Remarquons que lorsque le point m se rapproche indéfiniment d'un sommet, le sommet A par exemple, le segment ma correspondant à l'axe OA devient à la limite le rayon de courbure en A , puis que le point a est l'intersection de deux normales infiniment voisines. On a alors

$$\rho_A = \lim ma = \lim \frac{b^2}{a^2} \cdot mb = \frac{b^2}{a}$$

On aurait de même

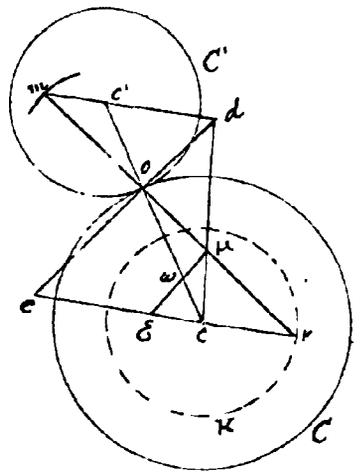
$$\rho_B = \frac{a^2}{b}$$



De sorte qu'en formant le rectangle $OABE$ sur les demi-axes et en abaissant de E une perpendiculaire sur la diagonale AB , on obtient, en r et r' les deux centres de courbure cherchés. Ces points sont comme on l'a vu deux points de rebroussement de la développée.

Epicycloïde.

Soient C et C' les courbes du roulement qui sont ici deux cercles de centres c et c' , o leur point de contact qui est le centre le centre instantané de rotation à l'époque considérée, m le point mobile avec le cercle C' et décrivant l'épicycloïde.



Menons par c une parallèle ck à cm : on voit immédiatement par les triangles semblables OCK , $OC'm$ que la longueur CK est constante.

Le point K décrit donc un cercle de centre C et l'on a entre les points où la normale mo à l'épicycloïde rencontre le cercle C , le cercle K et l'épicycloïde elle-même, la relation

$$\frac{MO}{mK} = \frac{C'O}{C'C} = \text{constante.}$$

On se trouve donc dans les conditions voulues pour l'application du théorème précédent, et le centre de courbure s'obtiendra en menant une perpendiculaire à mo sur laquelle la droite mo elle-même et les normales OC et KC aux cercles C et K déterminent des segments dans le rapport de MO à mK .

Or si nous menons en o la perpendiculaire mo qui rencontre en d et en e les droites mc' et Kc , on a :

$$\frac{do}{de} = \frac{mo}{mK}$$

Donc, d'après la construction générale indiquée en note (page 78) il suffit de joindre le point d au point de concours c des deux normales OC et Kc et de prendre le point μ où cette droite rencontre mo pour avoir le point cherché.

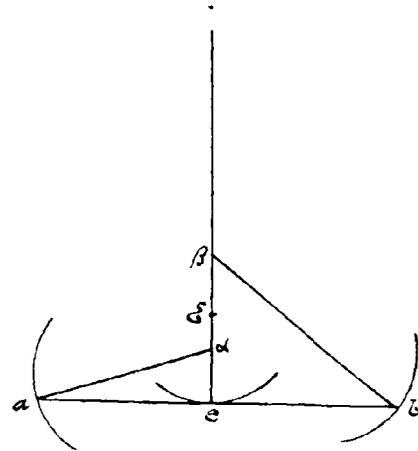
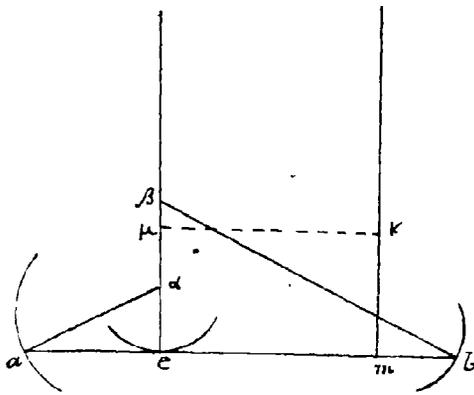
Effectivement si l'on mène par μ la parallèle à de , on a bien

$$\frac{\mu\omega}{\mu\delta} = \frac{do}{de} = \frac{mo}{mK}$$

82.

On retrouve ainsi la construction à laquelle on avait été déjà conduit par la théorie générale des roulettes.

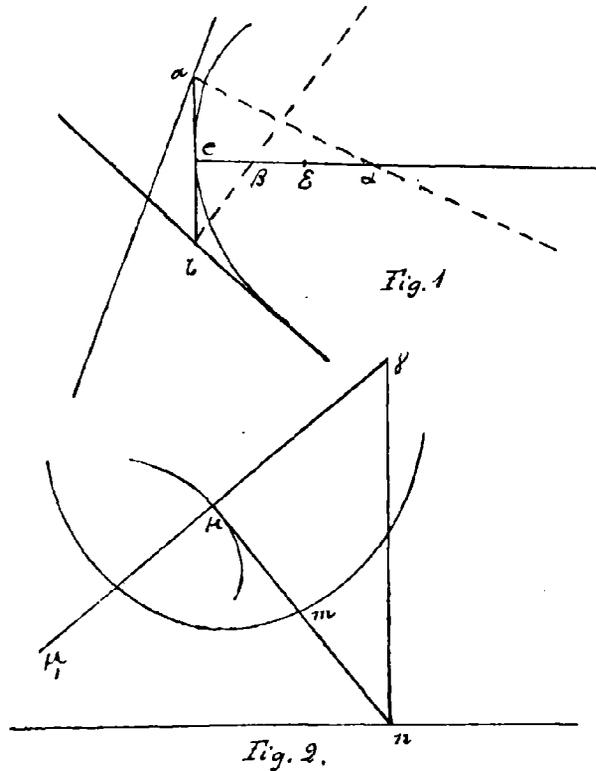
Revenons actuellement au théorème lui-même dont nous venons de donner quelques applications et cherchons ce qu'il devient dans le cas particulier où le point m coïncide d'une manière continue avec le point e , c'est-à-d. dire lorsque la droite mobile touche son enveloppe en un point qui divise le segment ab dans un rapport constant.



Remarquons que dans le cas général d'après une observation que nous avons faite, si l'on mène par le point m une perpendiculaire à ab et si l'on suppose cette perpendiculaire entraînée avec ab dans son déplacement, le point K où cette droite touche son enveloppe sera à une distance Km de ab égale à $e\mu$. Or dans le cas où le point m coïncide constamment avec e , la perpendiculaire que nous venons de considérer coïncide constamment avec la normale à l'enveloppe; le point K où elle touche son enveloppe devient donc le centre de courbure de cette enveloppe, et comme d'autre part, ce point coïncide alors avec le point μ , on arrive à ce théorème :

Si une droite mobile qui rencontre en a et en b deux courbes fixes touche son enveloppe en un point e divisant ab dans un rapport constant, le centre de courbure G de l'enveloppe divisera dans le même rapport le segment $\alpha\beta$ détaché sur la normale à l'enveloppe par les normales aux courbes a et b .

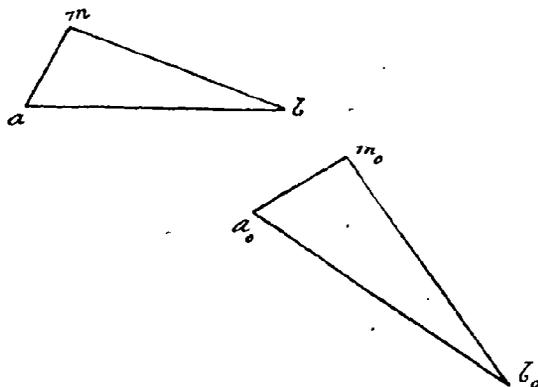
Ce résultat immédiatement applicable au cas de l'hyperbole et de ses asymptotes donne une construction très-simple du centre de courbure de cette courbe : le point c étant constamment le milieu de $a b$, le centre de courbure \mathcal{E} sera le milieu de $\alpha \beta$ (fig. 1).



Il fournit également une détermination immédiate du centre de courbure de la développée de la chaînette. En effet le point m de la chaînette étant constamment le milieu de $\mu \nu$, le centre de courbure μ' de la développée sera symétrique de ν par rapport à μ (fig. 2).

63. Déplacement sur son plan d'une figure plane qui reste semblable à elle-même. Centre instantané de rotation et de similitude. Tangentes aux trajectoires des points.

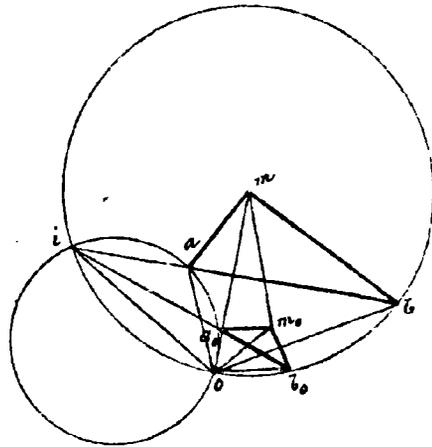
On peut remarquer d'abord qu'une figure mobile qui reste semblable à elle-même est complètement déterminée, comme une figure invariable, dans chacune de ses positions, par la connaissance de deux de ses points.



Considérons en effet deux points a_0 et b_0 de cette figure, et soient a et b leurs nouvelles positions : la nouvelle position d'un point m primitivement situé en m_0 s'obtiendra par

La construction d'un triangle abm directement semblable au triangle $a_0 b_0 m_0$, (c'est-à-dire dans lequel les angles homologues tels que bam , $b_0 a_0 m_0$ doivent être égaux en grandeur et de même sens).

Prolongeons les droites $a_0 b_0$ et ab qui joignent deux points homologues avant et après un déplacement quelconque jusqu'en leur point de rencontre i et traçons les deux cercles $a_0 a i$, $b_0 b i$.



Ces cercles qui ont déjà le point i commun se coupent en un second point o et à cause des angles égaux

$ia_0 o$ et $ia_0 o$

ibo et $ib_0 o$

les triangles aob , $a_0 o b_0$ sont semblables⁽¹⁾

Le point o est donc tel qu'il forme avec les segments correspondants ab , $a_0 b_0$ des triangles directement semblables, et il est aisé de voir qu'il en

sera de même pour tous les segments correspondants pris dans les deux figures car si nous considérons un segment $a_0 m_0$ déplacé en am par exemple, la similitude des triangles amb , $a_0 m_0 b_0$ entraîne celle des triangles aom , $a_0 o m_0$.

Mais on peut remarquer, en outre que les angles

oaa_0 , obb_0

sont aussi égaux comme formant les angles égaux aob , $a_0 o b_0$ par l'addition d'un même angle $a_0 ob$, et puisqu'on a d'ailleurs

$$\frac{oa}{oa_0} = \frac{ob}{ob_0}$$

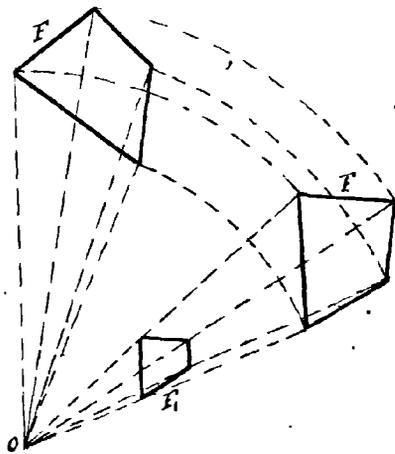
à cause des triangles semblables aob , $a_0 o b_0$, la similitude des

(1) Le résultat est indépendant, comme il est facile de s'en assurer, de la disposition de la figure.

triangles AOA_0, BOB_0 en résulte, et ce résultat s'étend immédiatement au triangle MOm_0 formé par un point quelconque m de la figure.

Le point O est donc tel qu'il forme avec les cordes du déplacement de tous les points de la figure des triangles semblables, et par suite ce déplacement peut être considéré comme résultant :

1° d'une rotation d'ensemble autour de O amenant la figure F dans une certaine position F' .

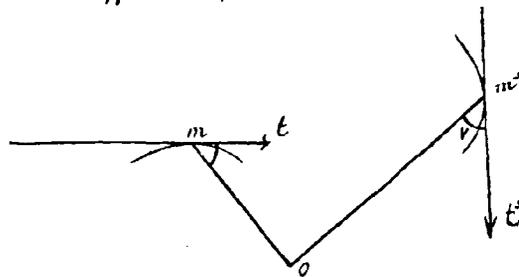


2° d'une contraction ou dilatation de la figure F' qui a pour effet d'augmenter ou de réduire dans un rapport constant les distances de tous les points au point O , ou en d'autres termes de changer la figure F' en une figure homothétique F_1 ayant avec F' le point O comme centre d'homothétie.

Ce résultat peut s'appliquer d'ailleurs à un déplacement quelconque.

Appliquons le en particulier à un déplacement infiniment petit et nous arriverons au théorème suivant :

À un instant donné du déplacement, il existe un point O tel qu'en le joignant aux différents points m, m' de la figure, les tan-



gentes aux trajectoires de ces points dirigées dans le sens du déplacement sur les trajectoires font avec les rayons Om, Om' des angles égaux.

On peut remarquer en outre que les déplacements

infiniment petits $mm_1, m'm'_1$ des points m, m' sont proportionnels à leurs distances au point O .

Ces propriétés du point O , très-analogues à celles du centre

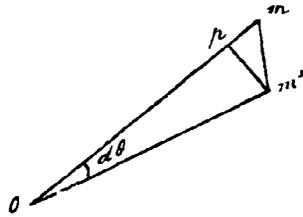
86.

instantané' dans le cas d'une figure invariable justifient le nom de centre instantané de rotation et de similitude que nous lui donnons.

Le point O considéré comme appartenant à la figure mobile est immobile pendant le déplacement.

L'angle V que font les tangentes aux trajectoires dirigées dans le sens du déplacement avec les rayons vecteurs correspondants est facile à évaluer en fonction de la rotation infiniment petite $d\theta$ de la figure et de sa contraction ou dilatation élémentaire correspondante, au même élément de temps; cette contraction ou dilatation $d\sigma$ étant définie par le rapport $\frac{dr}{r}$ - le même pour tous les points - de l'accroissement $\pm dr$ d'un rayon vecteur à la longueur r de ce rayon.

Considérons en effet le triangle $Om m'$ et abaissons du point m' une



perpendiculaire $m'p$ sur Om . L'angle mOm' ou $d\theta$ étant infiniment petit, la longueur Op peut être considérée comme égale à Om en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, de sorte que $m'p$ étant égal à

$d\sigma$ la contraction différentielle $d\sigma$ sera

$$d\sigma = \frac{dr}{r} = \frac{m'p}{Om}$$

d'autre part

$$m'p = Om' \operatorname{tg} d\theta = Om d\theta = Om d\theta = r d\theta$$

en négligeant également des infiniment petits d'ordre plus élevé à côté de ceux que l'on conserve.

Mais

$$\operatorname{tg} V = \lim. \frac{m'p}{m p}$$

d'où

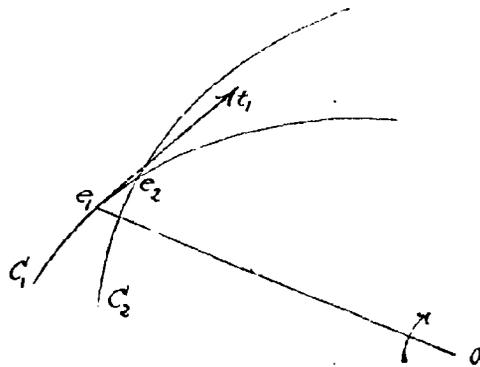
$$\operatorname{tg} V = \frac{r d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{d\sigma}$$

64, Point de contact d'une courbe avec son enveloppe.

Le théorème que nous venons de démontrer permet d'obtenir immédiatement la tangente à la courbe trajectoire d'un point.

Cherchons à déterminer également le point de contact d'une courbe mobile avec son enveloppe. Nous n'avons pour cela qu'à reproduire à peu près identiquement la solution donnée dans le cas d'une figure de forme invariable.

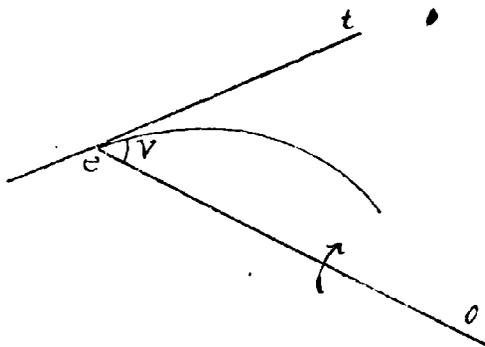
Soient C_1 et C_2 deux positions consécutives d'une courbe mo-



bile C et e_2 un point d'intersection de ces deux courbes. Ce point occupait avant le déplacement une position infiniment voisine e_1 sur C_1 , il s'est donc déplacé tangentielllement à C_1 . Donc la droite qui joint e_1 au centre O fait avec la tangente $e_1 t_1$ à la courbe C_1 prise dans le sens de la rotation autour de O un angle égal à V .

son enveloppe, il suffit de mener par le centre instantané de rotation et de similitude une oblique OE

Ainsi pour obtenir les points où une courbe mobile touche son enveloppe, il suffit de mener par le centre instantané de rotation et de similitude une oblique OE faisant un angle V avec la tangente au point où elle rencontre la courbe, cette tangente étant prise par rapport à OE dans le sens de la rotation autour de O .



Cette théorie appliquée aux problèmes traités dans les paragraphes immédiatement précédents, pourrait, en fournissant, on le conçoit,

des solutions différentes de celles que nous avons données.

Etude spéciale des courbes gauches.

65) On donne le nom de courbe gauche à toute courbe qui n'est pas plane.

Polygone infinitésimal inscrit dans une courbe gauche : longueur d'un arc de courbe.

On peut considérer un polygone infinitésimal inscrit dans une courbe gauche et obtenu comme dans le cas des courbes planes en joignant une succession de points infiniment voisins pris sur la courbe.



La longueur d'un arc de courbe ab compris entre deux points pris sur la courbe à distance finie l'un de l'autre sera dans ce cas encore, et par défini-

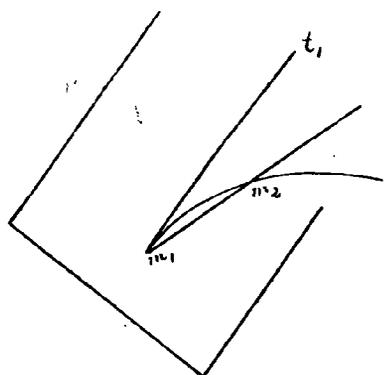
tion, la limite du contour d'un polygone infinitésimal inscrit entre a et b et l'on démontre comme dans le cas des courbes planes que cette limite est indépendante de la façon dont le polygone est tracé, pourvu que tous ses côtés soient infiniment petits.

La différence entre un arc infiniment petit du premier ordre et sa corde est, comme dans les courbes planes un infiniment petit du 3^e ordre.

66) Éléments caractéristiques du premier ordre d'une courbe gauche en l'un de ses points : tangente, plan normal.

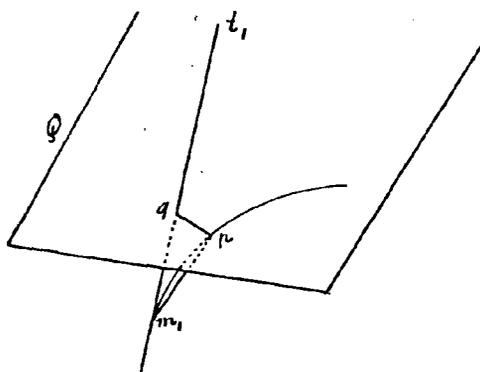
La tangente à une courbe gauche en l'un de ses points m_1 , se définit comme la tangente à une courbe plane, par la limite de la sécante qui joint ce point à un point infiniment voisin,

et cette détermination est la même (au sens près) qu'elle que soit celle des deux demi-branches aboutissant en m_1 sur laquelle on suppose le point infiniment voisin situé.



Le plan normal est le plan mené par le point considéré m_1 perpendiculairement à la tangente.

Remarque — Si l'on coupe la figure par un plan sécant ϱ de direction quelconque mais non parallèle à la tangente $m_1 t_1$ et passant par un point p infiniment voisin de m_1 sur la courbe, ce plan rencontrera la tangente $m_1 t_1$ en un point q et le segment $p q$ sera un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de $m_1 p$ à cause du triangle $p m_1 q$ dans lequel l'angle $p m_1 q$ est infiniment petit ; tandis que, les angles



en p et en q étant finis par hypothèse, les côtés $m_1 q$ et $m_1 p$ seront du même ordre de petitesse.

Contact de divers ordres des courbes gauches.

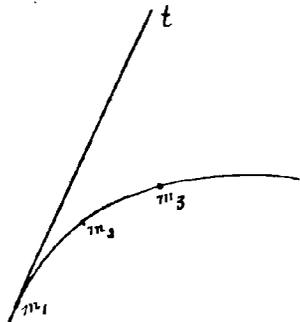
Le contact des courbes gauches peut se définir comme celui des courbes planes.

Deux courbes gauches qui se rencontrent en un point m_1 seront dites avoir un contact du $n^{\text{ème}}$ ordre en ce point si ces courbes peuvent être considérées comme limites de deux courbes se rencontrant en $n+1$ points qui sont venus tous se confondre avec le point m_1 .

67. Éléments caractéristiques du second ordre : plans osculateur, courbure, axe de courbure.

Considérons trois points infiniment voisins m_1, m_2, m_3 ,

qui peuvent être pris comme sommets consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit à partir du point m_1 dans la courbe et cher-

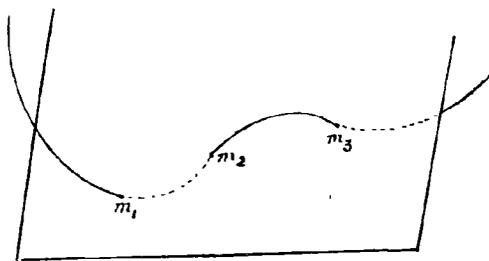


chons à nous rendre compte de la position limite du plan de ces trois points.

Pour cela faisons tendre d'abord m_2 vers m_1 ; la position limite de m_1, m_2 étant la tangente à la courbe en m_1 , ce plan se trouve déterminé par cette tangente $m_1 t$, et par le point infiniment voisin m_3 . Si main-

tenant on fait tendre à son tour le point m_3 vers m_1 , comme le plan considéré est parfaitement déterminé pour toute position de m_3 , il aura une position limite et c'est cette position limite qui est dite plan osculateur à la courbe au point m_1 .

Remarquons dès à présent que lorsqu'un plan rencontre une courbe en trois points m_1, m_2, m_3 cette courbe le traverse généralement



en chacun de ces points, de sorte que si la courbe était située d'un côté du plan pour la branche qui précède le point m_1 , elle doit se trouver de l'autre côté du plan pour la branche qui suit le point m_1 . Et comme cette disposition, indépendante de l'espacement des points, doit subsister à la limite lorsque les trois points viennent se confondre, on en

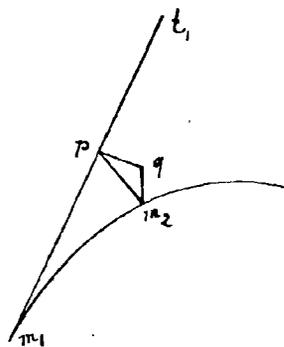
conclut que la courbe traverse son plan osculateur au point où elle le touche.

68) Distance d'un point infiniment voisin pris sur la courbe au plan osculateur de cette courbe.

Considérons le plan osculateur en m_1 et d'un point m_2 infiniment voisin pris sur la courbe abaissons une perpendiculaire $m_2 q$ sur ce plan, puis par $m_2 q$ menons un plan perpendiculaire à

m_1, t_1 , qu'il rencontre en p .

D'après ce qui a été dit plus haut, la longueur m_2, p est un infiniment petit du second ordre si m_1, m_2 est du premier et comme dans le triangle infinitésimal m_2, p, q rectangle en q , l'angle en p mesure l'angle du plan m_2, m_1, t_1 avec le plan osculateur qui est sa limite, cet angle est infiniment petit, et par suite, la distance m_2, q est au moins de troisième ordre.

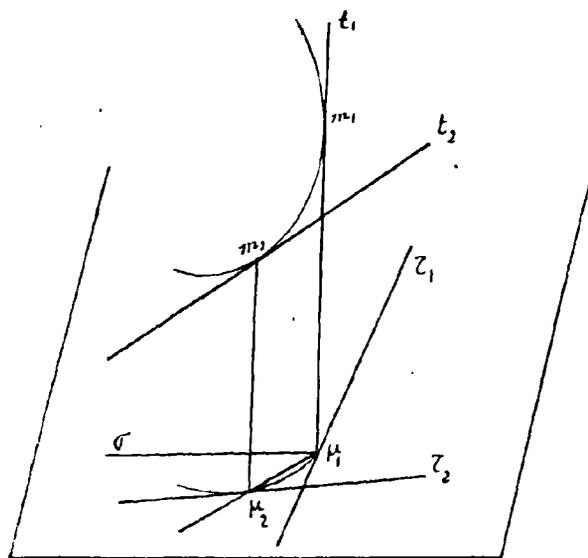


Et réciproquement si l'on fait la même construction

pour un plan quelconque passant par m_1, t_1 , et si l'on reconnaît que la distance m_2, q est d'ordre supérieur au second, on en conclut que l'angle m_2, p, q est infiniment petit et que par suite le plan considéré est la position limite du plan t_1, m_1, m_2 , ou en d'autres termes qu'il coïncide avec le plan osculateur.

On peut donc dire que de tous les plans menés par la tangente le plan osculateur est celui qui au voisinage du point de contact est le plus rapproché de la courbe.

69. Autres Définitions du plan osculateur.



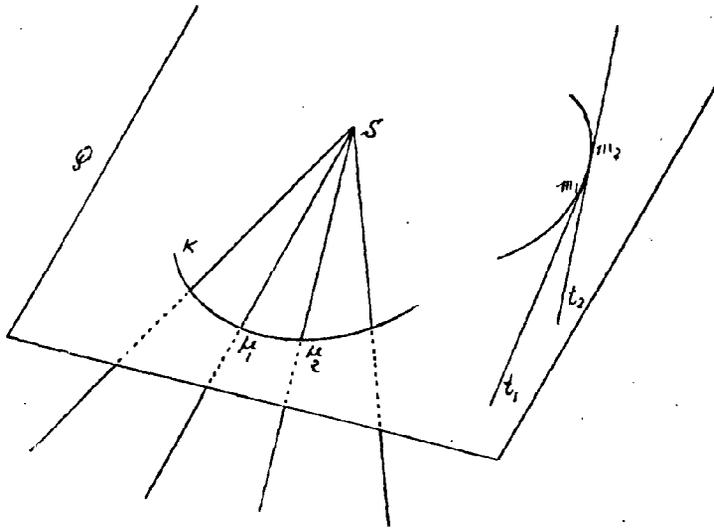
Nous allons démontrer actuellement que le plan osculateur en un point m_1 est aussi la position limite du plan mené par la tangente en ce point parallèlement à la tangente en un point infiniment voisin m_2 .

Pour le faire voir projetons les points m_1 et m_2 de la courbe en H_1 et H_2 sur un plan perpendiculaire à la tangente m_1, t_1 .

Le plan osculateur d'après la définition qui en a été précédemment donnée aura pour trace sur ce plan la limite de la sécante $\mu_1 \mu_2$; le plan mené par $m_1 t_1$ parallèlement à la tangente en m_2 aura pour trace sur ce même plan une parallèle $\mu_1 \sigma$ par μ_1 à la tangente $\mu_2 t_2$ à la courbe projetée. Or si m_2 se rapproche de m_1 jusqu'à se confondre avec lui, $\mu_1 \mu_2$ a pour limite la tangente $\mu_1 t_1$ et $\mu_1 \sigma$ venant se confondre avec cette droite la position limite des deux plans est bien la même. ⁽¹⁾

70. Cône directeur d'une courbe gauche.

Si par un point quelconque S de l'espace on mène des parallèles aux tangentes à une courbe gauche, on forme ainsi une surface conique qui est le cône directeur de la courbe.



Le plan tangent à ce cône le long d'une génératrice $S \mu_1$ sera la limite du plan des deux génératrices infiniment voisines $S \mu_1$, $S \mu_2$, lorsque $S \mu_2$ se rapproche indéfiniment de $S \mu_1$.

La direction de ce plan limite sera donc la même que celle du plan mené par la tangente au point correspondant m_1 de la courbe parallèlement à la tangente au point infiniment

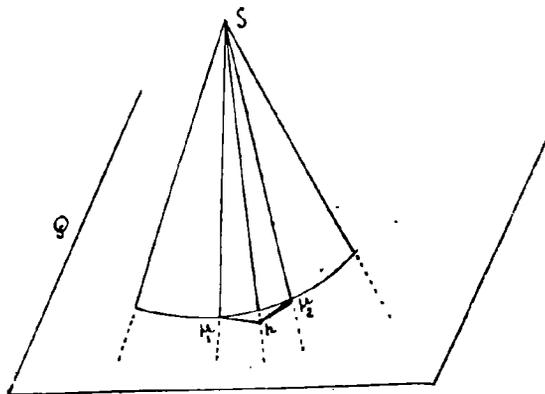
voisin m_2 ; autrement dit le plan tangent au cône le long de $S \mu_1$ est parallèle au plan osculateur à la courbe en m_1 .

71. Intersection du plan osculateur à une courbe gauche avec ses positions infiniment voisines.

Prenez la trace K du cône directeur sur un plan P

(1) La légitimité de cette démonstration résulte, il est bon de le remarquer, de ce que, bien que le point μ_1 soit comme on le verra plus loin un point singulier à la courbe projetée, la tangente en ce point est bien déterminée.

quelconque et considérons les plans tangents au cône le long de $S\mu_1$ et $S\mu_2$. Ces plans se coupent suivant la droite Sh , et d'après une remarque faite à propos des courbes planes, en désignant par μ_1, μ_2 et h les traces des droites $S\mu_1, S\mu_2$ et Sh sur le plan \mathcal{Q}_1 , le point h a pour limite le point μ_1 lui-même.



Donc l'intersection du plan osculateur avec ses positions infiniment voisines est, en direction, parallèle à $S\mu_1$, c'est-à-dire à la tangente à la courbe.

Mais on peut reconnaître en outre qu'elle coïncide avec cette tangente elle-même.

Reprenons en effet la figure du paragraphe 69.

Le plan osculateur en m_1 est comme on l'a vu le plan $m_1\mu_1\tau_1$ et le plan osculateur en m_2 renferme la tangente m_2t_2 qui se projette en $\mu_2\tau_2$ sur le plan de projection adopté.

Mais $\mu_2\tau_2$ et $\mu_1\tau_1$ se coupent en un point h projection du point e où m_2t_2 perce le plan osculateur du point m_1 , et comme h a pour limite μ_1 quand m_2 se rapproche indéfiniment de m_1 , la position limite du point e , qui devient un point de la caractéristique cherchée est

située sur m_1t_1 , ce qui démontre la proposition énoncée.

72) Cercle osculateur et courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points.

Trois points infiniment voisins m_1, m_2, m_3 pris sur une courbe gauche étant situés dans un même plan qui a pour limite

Le plan osculateur à la courbe, on voit que le cercle osculateur de la courbe au point m_1 , limite du cercle m_1, m_2, m_3 , est situé dans le plan osculateur à la courbe.

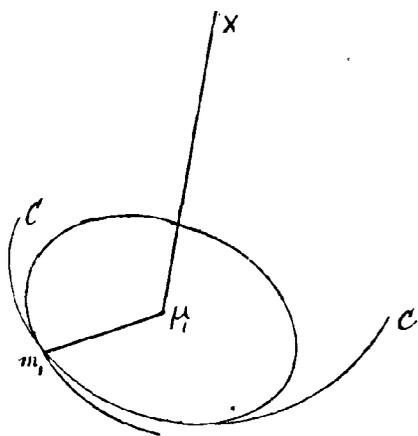
La courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points peut être définie d'autre part comme la courbure de son cercle osculateur. Elle aura donc pour expression, comme dans les courbes planes

$$\gamma = \lim \frac{\text{angle } (\overline{m_2 m_3}, \overline{m_1 m_2})}{\text{côté } \overline{m_1 m_2}}$$

m_1, m_2, m_3 , étant trois sommets consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit à partir du point m_1 , dans la courbe.

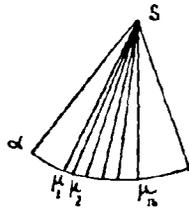
Cette courbure sera donc la même pour toutes les courbes ayant en m_1 un contact du deuxième ordre, puisque ces courbes au point m_1 ont même cercle osculateur.

Le cercle osculateur ou de courbure étant ainsi tracé dans le plan osculateur, son axe, c'est-à-dire la perpendiculaire à son plan menée par son centre μ_1 , est dit l'axe de courbure de la courbe.



Remarque — Si l'on projette orthogonalement la courbe gauche sur le plan m_1, m_2, m_3 , et si l'on appelle \mathcal{E} , l'angle de contingence de la courbe plane Γ ainsi obtenue relatif à l'arc m_1, m_2 de cette courbe, on a vu que cet angle pourrait être remplacé, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur par celui des côtés consécutifs m_1, m_2 et m_2, m_3 du polygone infinitésimal.

D'autre part les tangentes à la courbe projetée sont les projections des tangentes à la courbe gauche sur un plan avec lequel le plan de leurs directions fait un angle infiniment petit; l'angle \mathcal{E} des deux tangentes en m_1 et m_2 à la courbe gauche ne doit donc différer de \mathcal{E} , que par des infiniment petits négligeables, autrement dit, la courbe gauche a même angle de contingence que sa projection, et comme d'ailleurs l'arc m_1, m_2 de la courbe gauche ne diffère de sa



corde que par des quantités négligeables également, on peut dire que dans les courbes gauches, comme dans les courbes planes, la courbure a pour expression

$$\gamma = \lim \frac{\text{angle de contingence } \mathcal{E}}{\text{arc } m_1 m_2}$$

Mais il est important d'observer que dans ce cas, l'angle de contingence \mathcal{E} n'est plus la différentielle de l'angle que fait la tangente avec une direction fixe : ce serait la différentielle de l'angle au sommet du cône directeur développé.

33) Torsion ou seconde courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points..

La rotation de la tangente à une courbe, ou si l'on veut le changement de la direction de la courbe, lorsqu'on se déplace sur elle nous a conduit à la notion de courbure pour les courbes planes, notion que nous venons d'étendre aux courbes gauches par une extension toute naturelle.

La rotation du plan osculateur ou si l'on veut le changement du plan sur lequel cette courbe peut être considérée comme située au voisinage de l'un de ses points nous conduit de même à la notion de seconde courbure, à laquelle on donne aussi le nom de torsion et quelquefois de cambrure.

L'angle de torsion est l'angle infiniment petit η dont tourne le plan osculateur lorsqu'on passe d'un point m_1 à un point infiniment voisin m_2 de la courbe et la torsion est le rapport de cet angle au chemin parcouru c'est-à-dire à l'arc infiniment petit $m_1 m_2$.

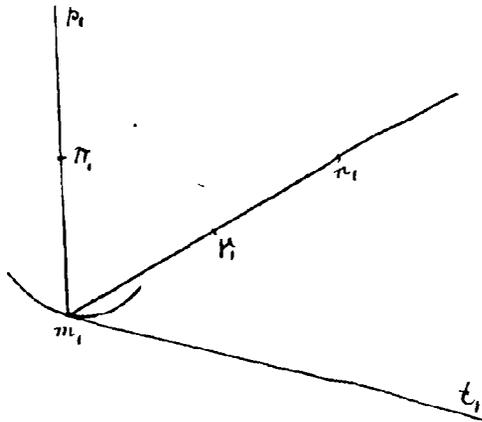
On a donc en désignant par K la torsion

$$K = \limite \frac{\text{angle } \eta}{\text{arc } m_1 m_2}$$

et par analogie avec la courbure, on appelle rayon de torsion de la courbe, l'inverse de la torsion, c'est-à-dire la limite du rapport

$$\frac{\text{arc } m_1 m_2}{\text{angle } \eta}$$

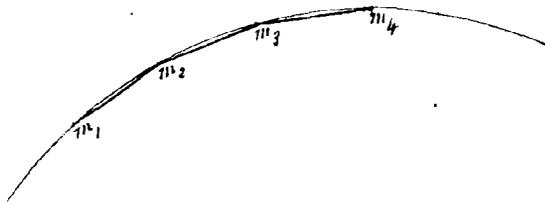
Cette longueur R portée en m, Π , sur la perpendiculaire m, p , au plan osculateur, définit pour le point m , le centre de torsion Π , de la courbe. La droite m, p , qui est normale à la courbe et normale à son plan osculateur a reçu pour cette raison le nom de binormale.



Les trois droites m, t , (tangente), m, n , (normale principale) et m, p , (binormale) forment en chaque point d'une courbe gauche un trièdre tri-rectangle dont la considération est souvent utile : le plan p, m, t , est désigné sous le nom de plan rectifiant pour des raisons qui seront expliquées dans la suite.

¶4, Détermination de la torsion d'une courbe au moyen d'éléments infiniment petits fournis par un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe.

Considérons un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe à partir du point m , et soient m, m_2, m_3, m_4 , quatre sommets consécutifs de ce polygone.



Le plan m, m_2, m_3 qui a pour limite le plan osculateur en m , lorsque m_2 et m_3 viennent de confondre avec m , reste fixe, diffère de cette limite par un angle infiniment petit θ .

Le plan m_2, m_3, m_4 qui a pour limite le plan osculateur en m_2 lorsque m_3, m_4 viennent de confondre avec m_2 , reste fixe, diffère de cette limite par un angle infiniment petit qui doit être égal à $\theta + d\theta$, $d\theta$ étant la variation infiniment petite d'ordre supérieur que subit l'infiniment petit θ pour une variation infinitésimale du paramètre qui fait passer de la figure m, m_2, m_3 à la figure m_2, m_3, m_4 .

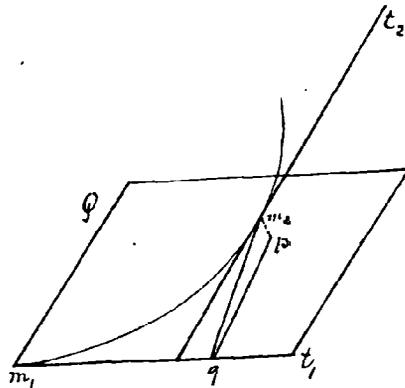
On peut donc dire, en négligeant $d\theta$ à côté de θ , que les plans osculateurs en m , et m_2 font avec les plans m, m_2, m_3 , m_2, m_3, m_4

le même angle, et comme les arêtes des Dièdres formés par ces plans font entre elles des angles infiniment petits, on en conclut que l'angle η des deux plans osculateurs et l'angle que les plans $m_1, m_2, m_3, m_2, m_3, m_4$ font entre eux peuvent être substitués l'un à l'autre dans les expressions différentielles où ces quantités figurent. On aura donc

$$K = \lim_{\text{arc } m_1 m_2} \frac{\text{angle } \eta}{\text{côté } m_1 m_2} = \lim_{\text{côté } m_1 m_2} \frac{\text{angle}(m_1, m_2, m_3 - m_2, m_3, m_4)}{\text{côté } m_1 m_2}$$

45. Plus courte distance des tangentes à une courbe gauche en deux points infiniment voisins : Théorème de Bouquet.

Soient m_1, m_2 les deux points considérés. Menons par la tangente m_1, t_1 le plan Q parallèle à la tangente m_2, t_2 . La distance m_2, p du point m_2 à ce plan est la distance cherchée.



Or en menant par m_2, p le plan m_2, p, q perpendiculaire à m_1, t_1 , on a dans le triangle rectangle m_2, p, q

$$m_2 p = m_2 q \cdot \sin. m_2 q p.$$

Mais m_2, q , distance d'un point de la courbe à la tangente en un point infiniment voisin est un infiniment petit au moins du second ordre si la distance m_1, m_2 de ces deux points est prise comme infiniment petit principal, et l'angle m_2, q, p mesurant le dièdre de deux plans qui ont le plan osculateur en m_1 pour limite commune, est un infiniment petit du premier ordre au moins. On en conclut que la distance des deux tangentes m_1, t_1 et m_2, t_2 est au moins du troisième ordre.

Ce Théorème est dû à Bouquet.

Cette distance, évaluée dans le cours d'Analyse, est égale à

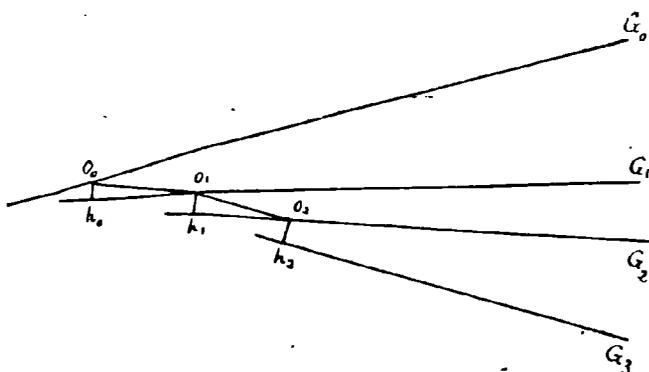
$$\frac{E \eta ds}{12}$$

E et η désignant comme précédemment les angles de courbure et de torsion de la courbe et ds l'arc infiniment petit

qui sépare leurs deux points de contact.

26) Réciproque du théorème précédent.

Si des droites dépendant d'un paramètre variable se succèdent dans l'espace de telle manière que la plus courte distance de deux d'entre elles soit d'un ordre au moins égal au second pour une variation infiniment petite du premier ordre du paramètre, les droites en question sont les tangentes à une même courbe gauche.



Soient en effet quatre droites infiniment voisines G_0, G_1, G_2, G_3 , correspondant à quatre valeurs infiniment peu différentes du paramètre et $o, h_0, o, h_1, o, h_2, h_3$ leurs plus courtes distances supposées d'ordre supérieur au premier.

Les distances o, o_1, o, o_2, \dots doivent être en général infiniment petites puis qu'on passe de la figure G_0, G_1 à la figure G_1, G_2 par une variation infiniment

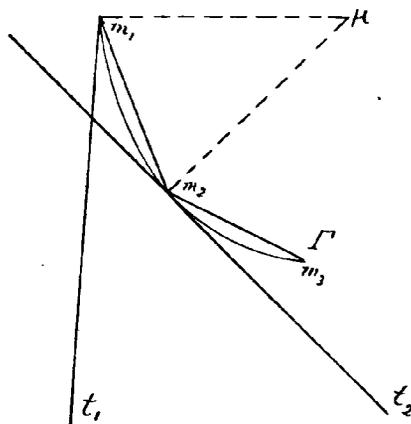
petite du paramètre et elles doivent être du premier ordre, car si elles étaient d'ordre supérieur au premier pour une variation finie du paramètre, c'est à dire pour des droites non infiniment voisines dans la série les positions du point O ne se différencieraient que d'une quantité négligeable et les droites passant ainsi à des distances négligeables de la position initiale de ce point passeraient toutes en définitive par un même point et formeraient par conséquent un cône.

Si il n'en est pas ainsi et si les longueurs o, o_1, o, o_2, \dots sont du premier ordre, la limite du polygone infinitésimal o, o_1, o_2, \dots est une courbe (C) , et les triangles tels que o, o_1, h_0, o, o_2, h_1 ayant leurs angles en o_1, o_2, \dots infiniment petits comme opposés à des côtés du deuxième ordre dans des triangles du premier, les droites G_0, G_1, G_2 ont même position limite que les côtés du polygone infinitésimal, c'est à dire qu'elles coïncident

à la limite avec les tangentes à la courbe (0). Les droites considérées sont donc bien les tangentes à une même courbe gauche, et par suite du théorème de Bouquet leur distance est du 3^e ordre. ⁽¹⁾

(77) L'axe de courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points est la limite de l'intersection du plan normal en ce point avec le plan normal infiniment voisin.

Remarquons d'abord que ces deux droites ont même direction car la première est perpendiculaire au plan osculateur au point considéré m_1 , et la seconde est perpendiculaire au plan mené parallèlement



aux deux tangentes infiniment voisines m_1, t_1, m_2, t_2 c'est-à-dire à un plan qui a pour limite le plan osculateur en m_1 . Il suffit donc de montrer que ces deux droites ont à la limite un point commun pour prouver leur coïncidence.

Or si nous prenons comme plan de projection

le plan m_1, m_2, m_3 de trois points consécutifs la courbe Γ projection orthogonale

(1) Ce résultat, qui peut sembler surprenant au premier abord, se présente analytiquement sous la forme suivante :

Si l'on cherche la plus courte distance entre deux positions infiniment voisines d'une droite définie par les équations

$$\frac{x - \varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \frac{y - \varphi_1(\alpha)}{\psi_1(\alpha)} = \frac{z - \varphi_2(\alpha)}{\psi_2(\alpha)}$$

On trouve une expression de la forme

$$\delta = \frac{d\alpha F(\alpha) + \frac{d\alpha^2}{1.2} F'(\alpha) + \frac{d\alpha^3}{1.2.3} \Psi(\alpha) + \dots}{\Psi(\alpha)}$$

$\Psi(\alpha)$ étant toujours différent de zéro sauf pour les surfaces cylindriques.

Si δ devient d'ordre supérieur au premier on aura pour toutes les valeurs de α

$$F(\alpha) = 0$$

et par suite

$$F'(\alpha) = 0$$

tandis que $\Psi(\alpha)$ reste généralement différent de 0.

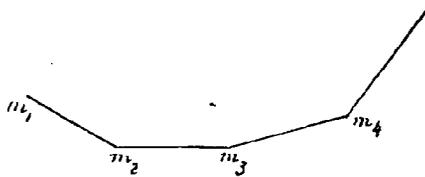
Donc si δ est d'ordre supérieur au premier il est nécessairement du troisième.

De la courbe donnée C sur ce plan a pour tangentes en m_1 et en m_2 les projections $m_1 t_1, m_2 t_2$ des tangentes $M_1 t_1, M_2 t_2$ à la courbe gauche. Les plans normaux à cette dernière courbe en m_1 et m_2 étant perpendiculaires respectivement à $m_1 t_1$ et $m_2 t_2$ auront donc pour traces les droites $m_1 \mu, m_2 \mu$ normales à la courbe Γ , et leur point d'intersection μ est un point dont la position limite appartiendra à la caractéristique du plan normal.

Or on a vu dans l'étude des courbes planes que cette position limite coïncidait avec celle du centre du cercle $m_1 m_2 m_3$, c'est-à-dire avec le pied de l'axe de courbure, donc, etc.

§8, Élément caractéristique du troisième ordre : sphère osculatrice à une courbe gauche en l'un de ses points.

Une sphère étant définie par quatre points, on peut toujours faire passer une sphère par quatre points consécutifs m_1, m_2, m_3, m_4 d'une courbe gauche. Cette sphère lorsque m_2, m_3, m_4 viennent se confondre avec m_1 a une grandeur et une position limites et devient alors la sphère osculatrice à la courbe au point m_1 .



Nous reviendrons sur ces propriétés générales des courbes gauches pour les compléter encore après l'étude des surfaces et en particulier après l'étude des surfaces développables dont la génération se rattache très-directement comme nous le verrons à celle des courbes à double courbure.

§9, Projections diverses d'une courbe gauche.

Il est utile de se familiariser avec les différents aspects que peut présenter une courbe gauche lorsqu'on la projette cylindriquement ou coniquement sur un plan.

Supposons une projection conique, la projection cylindrique pouvant rentrer dans la projection conique comme cas particulier.

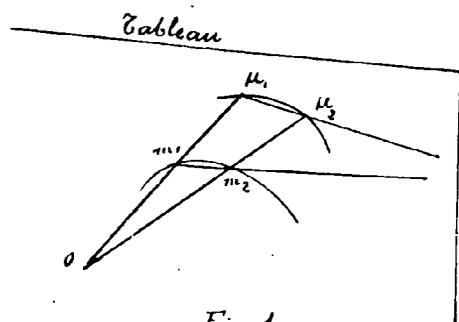


Fig. 1

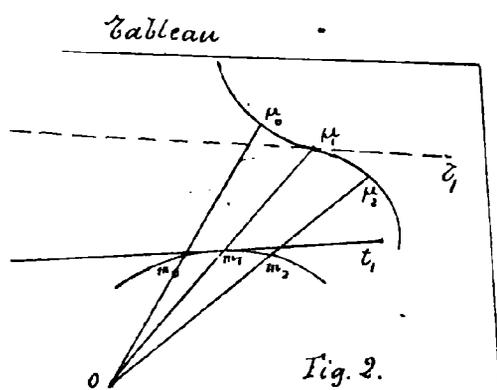


Fig. 2.

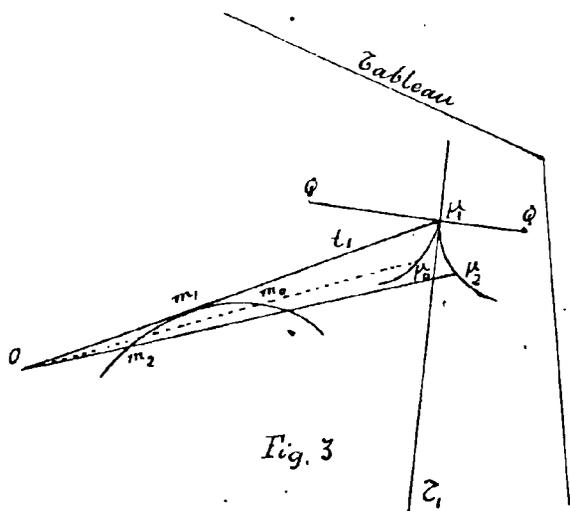


Fig. 3

En général la tangente à la courbe projetée sera, comme limite de sécante, la projection de la tangente à la courbe gauche (fig. 1).

Si en particulier le Sommet O du cône se trouve dans le plan osculateur en M_1 à la courbe gauche (fig. 2), ce plan se projette soit entier suivant une seule droite qui est la tangente en m_1 à la courbe projetée et comme la courbe de l'espace le traverse, la courbe projetée doit traverser sa tangente $m_1 z_1$.

Elle présente donc en général un point d'inflexion au point m_1 .

Mais si (fig. 3) le sommet du cône est sur la tangente $m_1 t_1$ à la courbe gauche le point d'inflexion de la courbe projetée se change en un rebroussement de première espèce.

En effet la trace $m_1 z_1$ du plan osculateur à la courbe gauche doit être toujours la tangente à la courbe projetée et s'obtient comme limite de la sécante $p_0 p_1$ ou de la sécante $p_1 p_2$ lorsque m_0 ou m_2 se rapprochent indéfiniment de M_1 .

Mais, d'après la propriété déjà rappelée du plan osculateur de traverser la courbe p_0 et p_2 doivent être de part et d'autre du plan osculateur c'est-à-dire de part et d'autre de $m_1 z_1$.

D'ailleurs si l'on mène par la tangente OM_1 un plan quelconque Q autre que le plan osculateur, la courbe ne traversant pas ce plan en M_1 , les points p_0 et p_2 seront

d'un même côté de sa trace. Q, Q' sur le tableau que l'on pourra faire coïncider avec la perpendiculaire à $\mu_1 \xi_1$ par exemple. Les points μ_0 et μ_2 infiniment voisins de μ_1 présentent donc la disposition caractéristique d'un rebroussement de 1^{re} espèce.

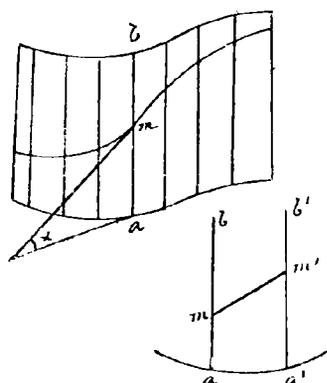
Application de la théorie générale Des courbes gauches à l'étude de l'hélice.

80. 1^{re} Hélice générale.

Nous appliquerons la théorie précédente à une courbe gauche très-remarquable, l'hélice qui joue dans la mécanique théorique et dans la mécanique appliquée un rôle considérable.

Définition — On donne en général le nom d'hélice à une courbe tracée sur une surface cylindrique et qui coupe sous un angle constant les génératrices de cette surface. On donne le nom d'angle de l'hélice à l'angle complémentaire de cet angle constant, c'est-à-dire à l'angle α que fait la tangente à l'hélice avec un plan de section droite du cylindre.

Nous supposons pour fixer les idées que le cylindre ait ses génératrices verticales.



Définition cinématique de l'hélice.

On peut considérer l'hélice comme la trajectoire d'un point mobile m qui se déplacerait sur une droite verticale ab tandis que cette droite se déplacerait elle-même par une translation parallèle au plan horizontal, ces deux mouvements simultanés étant réglés de telle manière que le chemin parcouru par le point m sur la droite

Dans un sens déterminé, le sens ab par exemple, soit constamment proportionnel au chemin parcouru par le point a sur sa trajectoire dans le plan horizontal.

Ainsi

$$\frac{a'm' - am}{\text{arc } aa'} = \text{constante} = K$$

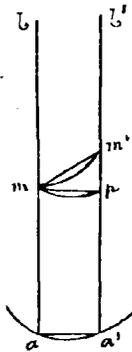
Il est facile de voir que cette définition revient à la précédente, car si l'on considère deux positions infiniment voisines de ab et

si l'on porte sur $a'b'$ une longueur $a'p$ égale à am , on a

$$\frac{m'\rho}{\text{arc } m\rho} = K$$

ou en négligeant la différence entre l'arc $m\rho$ et la corde

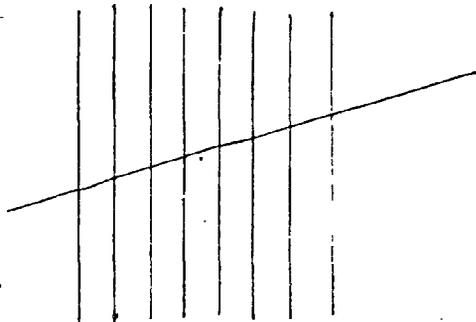
$$\frac{m'\rho}{m\rho} = K$$



La corde $m'm''$ fait donc avec la verticale un angle constant dont la tangente trigonométrique est égale à $\frac{1}{K}$ et comme cette corde devient à la limite la tangente à la trajectoire du point m , on voit que cette trajectoire est bien une hélice tracée sur le cylindre engendré par les positions successives de la droite mobile.

§1, Développement de l'hélice.

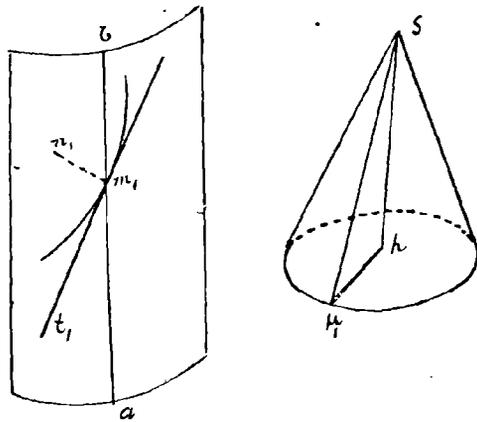
Si l'on développe le cylindre sur lequel l'hélice est tracée, les angles se conservent dans le développement, l'hélice se développera suivant une courbe plane coupant sous un angle constant une série de droites parallèles.



Il est facile d'en conclure que cette courbe est une droite, puisque la direction de sa tangente est la même en tous ses points.

82, Plan osculateur de l'hélice.

Si l'on mène par un point S le cône directeur de l'hélice ce cône sera un cône de révolution autour de la verticale Sh .



Sp_1 étant la génératrice de ce cône correspondant au point m_1 de l'hélice, le plan tangent au cône sera le plan passant par Sp_1 et perpendiculaire au plan hSp_1 , c'est-à-dire à un plan parallèle au plan tangent en m_1 au cylindre.

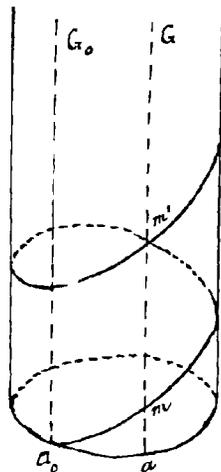
Or le plan tangent au cône directeur est parallèle au plan osculateur au point correspondant de la courbe.

Le plan osculateur en m_1 est donc le plan mené par m_1, t_1 et la normale m_1, n_1 ,

au cylindre. Cette normale m_1, n_1 est donc la normale principale à l'hélice.

83, 2° Hélice ordinaire.

Si le cylindre sur lequel l'hélice est tracée, est de révolution, l'hélice devient l'hélice ordinaire dont nous nous occuperons spécialement maintenant.



La base du cylindre étant alors une circonférence le point décrivant l'hélice revient à placer sur une même génératrice G quand la projection horizontale a a effectué le tour complet de la circonférence de base. Le point S est alors élevé d'une hauteur $m m'$ qui, d'après la seconde définition de l'hélice, est

proportionnelle à la longueur de la circonférence de base et indépendante par conséquent de la génératrice que l'on a choisie.

Cette longueur H s'appelle le pas de l'hélice et l'on a en désignant par r le rayon du cylindre et par α l'angle de l'hélice

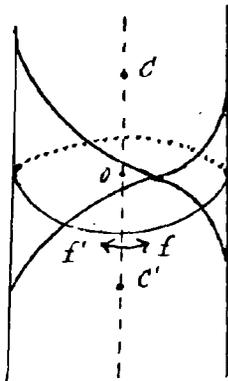
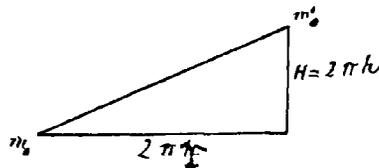
$$\frac{H}{2\pi r} = K = \operatorname{tg} \alpha$$

La longueur $\frac{H}{2\pi}$ a reçu le nom de pas réduit et nous la représenterons par la lettre h ; c'est on le voit le rayon d'une circonférence de longueur H , et elle est liée à l'angle de l'hélice par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$$

L'arc d'hélice compris entre deux points consécutifs situés sur une même génératrice s'appelle spire d'hélice.

On reconnaît immédiatement sur le développement que la spire d'hélice $m_0 m_0'$ est égale à



$$2\pi \sqrt{r^2 + h^2}$$

Si l'on suppose un spectateur debout au centre de la circonférence de base, ayant sa tête en C et les pieds en O par exemple, le sens suivant lequel l'hélice s'élèvera sur le cylindre sera pour lui selon le cas celui de la flèche f ou celui de la flèche f' , c'est-à-dire le sens des angles positifs ou celui des angles négatifs dans le plan horizontal; et ce sens resterait le même si, retournant la figure, on

supposait la tête du spectateur placée en C' et ses pieds toujours en O .

Le sens est donc caractéristique de la façon dont l'hélice est tracée sur le cylindre.

Dans le premier cas, l'hélice est dite directe, elle est dite retrograde dans le second.

84) Propriété caractéristique et très-importante de l'hélice ordinaire.

L'hélice ordinaire d'après sa définition même est évidemment superposable à elle-même dans toutes ses parties; cela résulte de ce fait que les conditions qui déterminent sa description sont identiques en tous ses points, comme la surface même du cylindre sur lequel elle est tracée.

Le rôle important que l'hélice joue en Mécanique est dû à cette propriété remarquable qui fait de cette courbe dans l'espace l'analogue du cercle dans le plan.

Elle a pour conséquence immédiate l'identité des propriétés de continuité de l'hélice en tous ses points. En particulier la courbure et la torsion sont les mêmes tout le long de la courbe; son plan osculateur qui est parallèle au plan tangent au cône directeur fait en tous les points de la courbe le même angle α avec le plan horizontal, etc. -----

On démontre analytiquement (Duisseau) que l'hélice est la seule courbe gauche pour laquelle il en est ainsi.

85) Rayon de courbure de l'hélice.

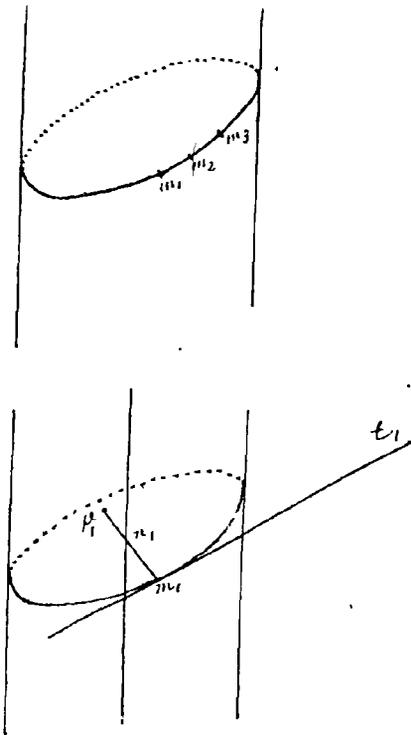
Pour obtenir le rayon de courbure de l'hélice considérons

trois points infiniment voisins m_1, m_2, m_3 sur la courbe et le plan passant par ces trois points.

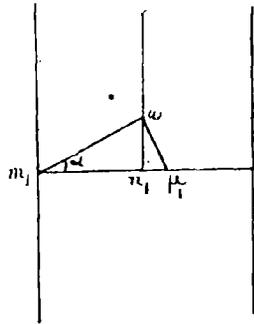
Le plan coupe le cylindre suivant une ellipse qui a, à la limite, un contact du deuxième ordre avec l'hélice et par conséquent même courbure qu'elle.

Mais dans cette position limite le plan qui est devenu osculateur à l'hélice passe par la normale m, n au cylindre et par la tangente m, t à l'hélice.

Par suite le point m est le sommet du petit axe de l'ellipse



Section et comme son plan fait l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec l'axe du cylindre, les axes de cette courbe sont en grandeur



$$a = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$b = r$$

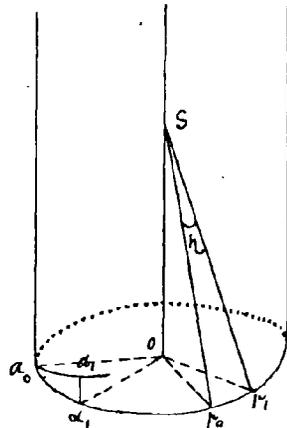
Le rayon de courbure au point m_1 est donc

$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

et sa longueur $m_1 p_1$ s'obtient géométriquement par une construction très-simple qu'explique suffisamment la figure.

86. Rayon de torsion de l'hélice.

L'angle de torsion est l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins. Menons par un point S de l'axe du cylindre des perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe. Ces perpendiculaires formeront un cône de révolution autour de l'axe avec lequel ses génératrices feront l'angle α .



Nous pouvons choisir le sommet S de manière à donner à ce cône la même base qu'au cylindre. Considérons alors le point de l'hélice qui est en a_0 sur cette base. La perpendiculaire par S au plan osculateur correspondant sera

la droite $S p_0$ qui se projette horizontalement suivant $o p_0$ perpendiculaire à $o a_0$. Si le point a_0 se déplace sur l'hélice et vient en a_1 dans une position infiniment voisine de a_0 , le point p_0 vient en p_1 en tournant autour de o d'un angle $p_0 o p_1$ égal à $a_0 o a_1$, α , étant la projection de a_1 sur le plan horizontal.

L'angle de torsion correspondant sera :

$$\eta = p_0 S p_1$$

Mais si l'on développe le cône, le cercle de base se développe suivant un arc de cercle de rayon $S\rho_0$ et l'arc p_0p_1 correspondant à l'angle η est égal à

$$\eta \times S\rho_0 \text{ ou } \eta \frac{r}{\sin \alpha}$$

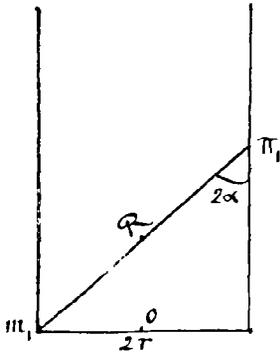
d'autre part dans le cercle horizontal, ce même arc, égal à l'arc a_0a_1 , a pour mesure (d'après la définition de l'hélice)

$$\text{arc } a_0a_1 \times \cos \alpha$$

On a donc en égalant ces deux valeurs

$$\eta r = (\text{arc } a_0a_1) \sin \alpha \cos \alpha$$

ou



$$\frac{\eta}{\text{arc } a_0a_1} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}$$

Le rapport $\frac{\eta}{\text{arc } a_0a_1}$ mesuré précisément à la limite la torsion de la courbe, le rayon de torsion est donc

$$R = \frac{r}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2r}{\sin 2\alpha}$$

et sa grandeur m, π , s'obtient comme celle du rayon de courbure par une construction très-simple.

87) Projection de l'hélice sur un plan parallèle à l'axe du cylindre.

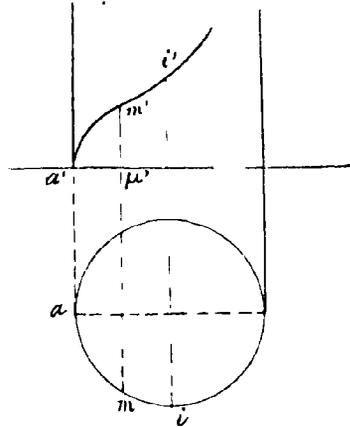
Établissons d'abord la base du cylindre qui est une circonférence tracée dans le plan horizontal et son contour apparent vertical composé de deux droites verticales tangentes à cette circonférence.

Proposons nous par exemple de tracer la projection verticale de l'hélice directe d'angle α et partant du point a, a' .

Pour en avoir un point, il suffit de prendre un point m sur la circonférence de base et de construire en projection verticale un point m' sur la ligne de rappel du point m à une hauteur

au-dessus de a' déterminée par la proportion

$$\frac{m' \mu'}{arc am} = \frac{H}{2\pi R} = \text{tg. } \alpha$$



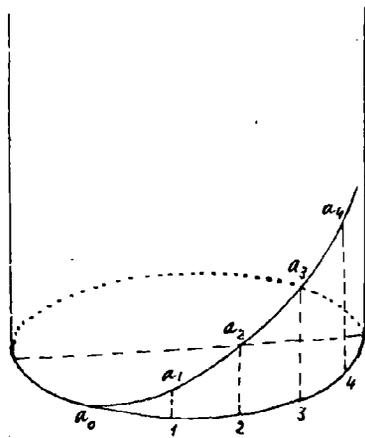
Au point i' de la courbe qui se projette sur l'axe du cylindre, le plan osculateur étant debout, la projection présente un point d'inflexion.

Aux points tels que $a a'$ situés sur le contour apparent du cylindre la courbe est tangente à ce contour.

§8. Perspective cavalière de l'hélice.

L'hélice peut être représentée d'une façon plus satisfaisante par une perspective cavalière.

Supposons la base du cylindre située dans le géométral et mettons ce cercle en perspective en marquant sur cette courbe perspective, à partir du point a_0 origine de l'hélice à tracer, une série de points 1, 2, 3, 4, ...



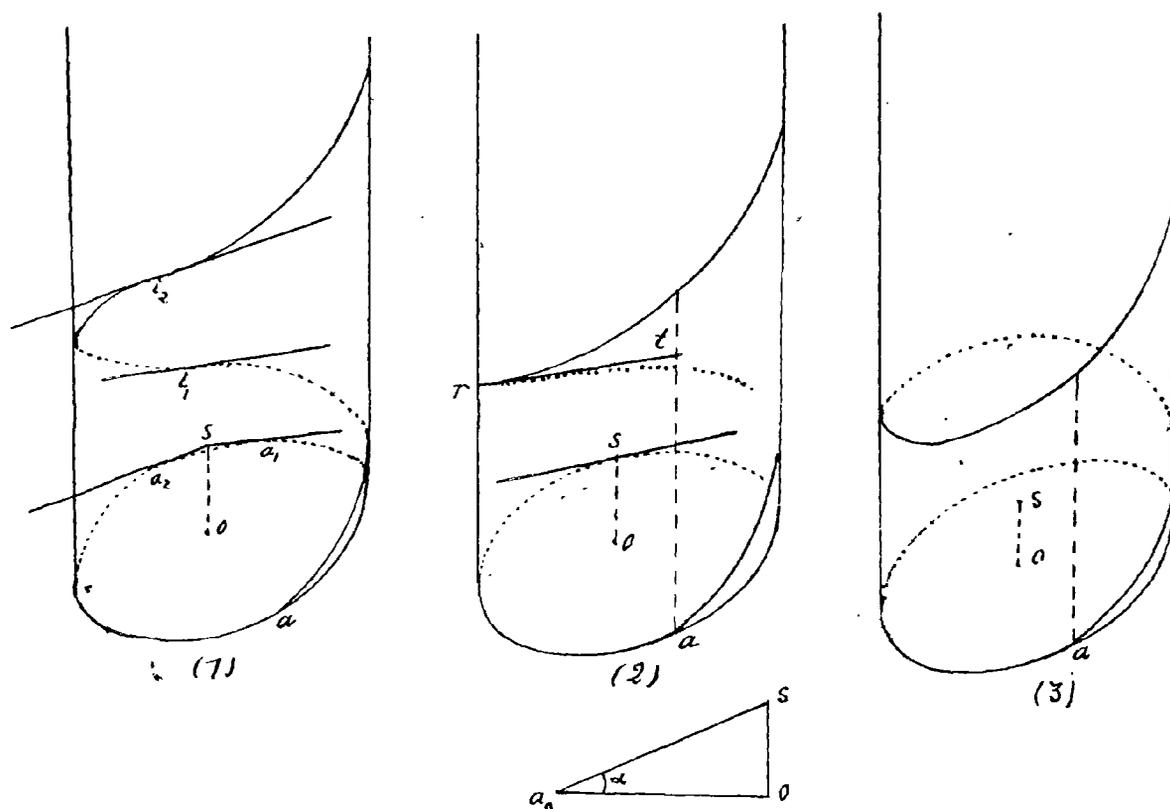
..... perspectives de points divisant la circonférence en parties égales. Divisons également le pas H en autant de parties égales et soit K la longueur d'une de ces parties.

Portons sur les verticales des points 1, 2, 3, 4 des longueurs égales à $K, 2K, 3K, 4K$ et nous

obtiendrons ainsi par points l'hélice perspective.

La forme de la courbe ainsi tracée diffiera suivant l'inclinaison des projectantes et la discussion peut se faire au moyen du cône de révolution dont les génératrices sont parallèles aux tangentes à la courbe de l'espace.

Mettons ce cône en perspective en lui donnant pour base la base même du cylindre. Son sommet s'obtiendra en portant sur l'axe du cylindre à partir de son pied O une hauteur OS égale à $l \tan \alpha$, et le point S ainsi construit pouvant être considéré également comme la perspective du point ou la parallèle aux projetantes menée par le sommet du cône percer le plan du cercle de base, ce point se trouve extérieur à l'ellipse, intérieur à l'ellipse ou situé sur l'ellipse même selon que la projetante du sommet sera extérieure au cône, intérieure au cône ou située sur le cône.



Dans le premier cas le cône a deux génératrices de contour apparent, c'est-à-dire que l'hélice a deux plans osculateurs parallèles aux projetantes. La perspective d'une spire présentera donc deux points d'inflexion i_1 et i_2 (fig. 1) et les tangentes en ces points à l'hélice seront parallèles aux génératrices de contour apparent du cône.

Si la projetante du sommet est une génératrice du cône, il y a une tangente à l'hélice qui est parallèle aux projetantes; la

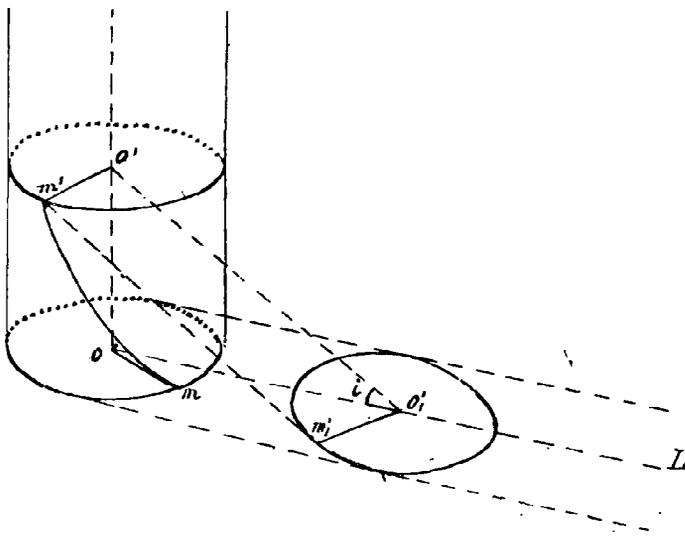
projection aura donc au point correspondant I un rebroussement de première espèce, et ce point se trouvera sur le contour apparent du cylindre, car au point où la tangente à l'hélice est parallèle aux projetantes, le plan tangent au cylindre est évidemment un plan perspectif. La tangente $I't$ en ce point, perspective du plan osculateur, est d'ailleurs parallèle à la tangente en S au cercle (fig. 2).

Enfin si la projetante du sommet est intérieure au cône la projection présentera un point double donné par la projetante qui rencontre deux fois la spire d'hélice considérée (fig. 3).⁽¹⁾

La courbe (sauf le cas du rebroussement) est tangente au contour apparent du cylindre aux points où elle le rencontre.

§2. Ombre d'une hélice sur le plan de base du cylindre.

Supposons l'hélice éclairée par des rayons parallèles et cherchons son ombre portée sur le plan de base du cylindre.



Imaginons que la section droite du cylindre qui passe par le point m décrivant l'hélice accompagne dans son mouvement ce point supposé fixé sur ce cercle. Le cercle sera animé à la fois d'une rotation dans son plan autour de son centre O et d'une translation parallèle à l'axe, c'est-à-dire d'un déplacement égal et simultané de tous ses points dans la direction de cet axe, et ces deux

déplacements seront liés entre eux de telle manière, que lorsque le cercle se

(1) Si l'on joint un point m d'une hélice aux différents autres points m', m'' ... de la courbe il est facile de reconnaître que les cordes ainsi obtenues font avec la verticale un angle qui prend toutes les valeurs possibles entre 0 et l'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est celui de la tangente en m . Si donc les projetantes sont plus rapprochées de la verticale que cette tangente on obtiendra certainement une corde parallèle aux projetantes en déplaçant convenablement le point m sur l'hélice.

Sera élevé d'une hauteur l , il aura tourné d'un angle θ satisfaisant à la condition

$$\frac{l}{\theta} = \frac{H}{2\pi} = h$$

où $l = \theta h$

Ce cercle mobile aura pour ombre sur le plan de base un cercle égal, c'est-à-dire de grandeur constante, et qui (si l'on fait correspondre ses points à ceux du cercle O') tournera du même angle que lui tandis que son centre décrivant la droite OL ombre de l'axe du cylindre se déplacera de quantités OO' ou d proportionnelles aux quantités OO' ou l dont s'élève le premier cercle.

Le rapport entre les longueurs l et d sera donné par la proportion

$$\frac{l}{d} = \operatorname{tg} i$$

où i est l'angle des rayons lumineux avec le plan horizontal.

On aura donc par la comparaison avec la relation précédemment écrite

$$\frac{\theta}{d} = \frac{\operatorname{tg} i}{h} = \text{constante}$$

c'est-à-dire que le cercle ombre O' tournera de quantités proportionnelles à celles dont se déplacera son centre sur la droite OL .

Nous avons vu (§.48) que dans ces conditions le point m' qui décrit l'ombre de l'hélice a pour trajectoire selon la valeur du rapport $\frac{\theta}{d}$ une cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie.

Pour que la courbe soit une cycloïde ordinaire il faut que l'on ait :

$$\frac{\theta}{d} = \frac{1}{r}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} i = \frac{h}{r} \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$i = \alpha$$

Etude des surfaces.

Généralités

20, Après l'étude des lignes planes et gauches nous aborderons maintenant celle des surfaces. Cette étude nous sera, comme les précédentes, l'occasion d'applications nombreuses que nous choisirons ainsi que nous l'avons fait déjà, non seulement de manière à expliquer le caractère et la portée des théories générales, mais aussi de façon à démontrer certains théorèmes, à étudier certaines lignes ou certaines surfaces qu'il est particulièrement utile de connaître.

Toutefois comme quelques unes de ces applications comportent des développements assez importants nous croyons préférable de les rejeter à la fin de ces leçons afin de ne pas interrompre trop longuement l'exposé général de la théorie.

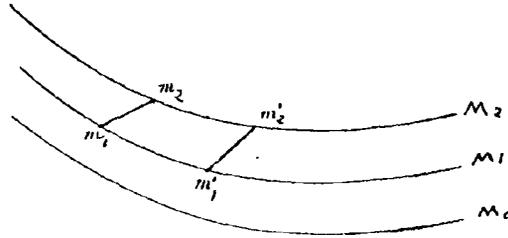
21, Définition des surfaces.

Une surface est une succession continue de lignes, c'est-à-dire une succession telle que les quantités numériquement comparables (coordonnées) qui définissent la forme et la position de ces lignes varient d'une façon continue lorsqu'un même paramètre α dont ces quantités dépendent varie lui-même d'une façon continue.

Il résulte de cette définition que si à partir d'une valeur α_1 du paramètre correspondant à une ligne M_1 , on attribue à α un accroissement infiniment petit positif ou négatif, on obtiendra deux lignes M_0 et M_2 , infiniment peu différentes de M_1 .

La série des lignes M_0, M_1, M_2, \dots que l'on obtient ainsi peut être considérée comme résultant du déplacement d'une même ligne M qui se déforme en même temps qu'elle se déplace et cette existence simultanée d'un déplacement continu et d'une déformation également continue peut s'exprimer en disant que deux

points infiniment voisins m, m' , étant pris sur la courbe mobile



dans l'une de ses positions, M_1 , par exemple, ces deux points viennent occuper sur la courbe infiniment voisine M_2 deux positions m_2, m_2' telles qu'en général les déplacements m, m_2 et m', m_2' sont infiniment petits et que le segment m_2, m_2' ne diffère en longueur du segment m, m' que par un

infiniment petit d'ordre supérieur à m, m' , et ne s'en écarte en direction que par un angle infiniment petit. (1)

22) Surfaces considérées comme lieux géométriques.

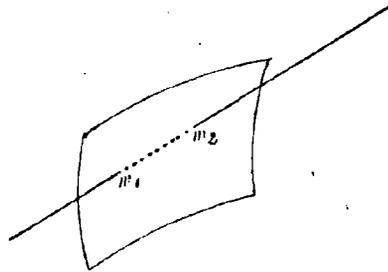
Une surface peut être géométriquement définie par le fait que ses différents points jouissent d'une même propriété géométrique : la surface se présente ainsi comme lieu géométrique. Par exemple la sphère est le lieu géométrique des points tels que leur distance à un point donné est égale à une longueur donnée, l'ellipsoïde de révolution est le lieu géométrique des points tels que la somme de leurs distances à deux points donnés est égale à une longueur donnée, l'hyperboloïde à une nappe est le lieu des points tels qu'on peut mener par chacun d'eux une droite s'appuyant sur trois droites données, etc.....

Si l'on ajoute à la condition ainsi imposée aux points de la surface une condition nouvelle dépendant d'un paramètre unique α , (l'obligation par exemple d'appartenir à un plan faisant partie d'une série de plans donnés), on obtient ainsi pour chaque valeur du paramètre α une ligne particulière appartenant à la surface et la succession continue de ces lignes engendre la surface comme on l'a expliqué au paragraphe précédent.

(1) en général dans une figure qui se déforme d'une façon continue la distance de deux points ne doit se modifier que d'une quantité infiniment petite par rapport à sa propre grandeur.

23, Droites tangentes à une surface.

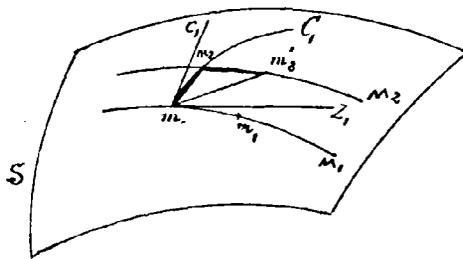
Une droite qui passe par un point m_1 , d'une surface et qui rencontre la surface en un point m_2 , infiniment voisin de m_1 , a pour limite par définition



est une tangente à la surface en m_1 ; il résulte de cette définition même que les tangentes à toute courbe tracée sur une surface sont tangentes à cette surface.

24, Éléments caractéristiques du premier ordre d'une surface en l'un de ses points : plan tangent : normale.

Théorème : Toutes les droites tangentes à une surface en un point de cette surface appartiennent à un même plan qui est dit le plan tangent à la surface en ce point.



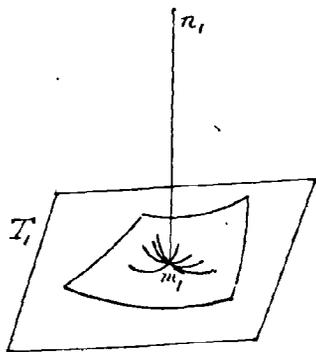
Considérons en effet une surface S engendrée par une courbe M et soit M_1 une position particulière de la courbe M et m_1 un point de cette courbe : désignons encore par C_1 la trajectoire du point m_1 lorsque M_1 se déplace et prenons sur la surface en dehors des courbes M_1 et C_1 un point m_2 infiniment voisin de m_1 , mais quelconque d'ailleurs.

Le point m_2 appartiendra à une position M_2 de la courbe générale, et comme les points m_1 et m_2 sont infiniment voisins, les courbes M_1 et M_2 seront en général deux positions infiniment peu différentes de la courbe M .⁽¹⁾ Soient m_2 la position que vient occuper m_1



(1) Le raisonnement ne serait en défaut que si par le point m_1 passaient plusieurs positions de la courbe mobile M (exemple des points situés sur l'axe pour une surface de révolution engendrée par des méridiens) mais c'est là évidemment un cas exceptionnel.

Sur M_2 et m_1' , la position qu'occupait sur M_1 le point qui est venu en m_2' . D'après la définition de la continuité qui a été donnée plus haut pour le déplacement et la déformation de la courbe mobile, m_1, m_2 et m_1', m_2' sont infiniment petits et de plus m_2, m_2' a même direction limite que m_1, m_1' . Donc la position limite du plan du triangle infinitésimal m_1, m_2, m_2' doit renfermer la tangente m_1, t_1 à la courbe M_1 , et la tangente m_1, c_1 à la courbe C trajectoire du point m_1 . Mais ces deux directions m_1, t_1 et m_1, c_1 sont indépendantes du choix du point m_2' , donc la tangente position limite de m_1, m_2' est toujours située dans un même plan quel que soit m_2' , ce qui démontre le théorème.

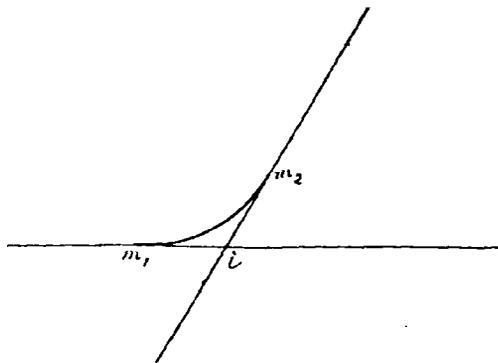


Le plan T_1 lieu des tangentes à la surface au point m_1 est le plan tangent à la surface en ce point.

La perpendiculaire m_1, n_1 à ce plan menée par m_1 est la normale à la surface et le point m_1 est le piéd de cette normale. Cette droite est normale à toutes les courbes tracées par son piéd sur la surface.

§5. Conséquences.

Si deux surfaces se coupent suivant une courbe, la tangente à cette courbe est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces.



Si deux plans touchent une surface en deux points infiniment voisins m_1 et m_2 , lorsque le point m_2 vient se confondre avec le point m_1 , supposé fixe, la position limite de la droite d'intersection des deux plans passe par m_1 .

En effet si l'on coupe la surface et ses plans tangents par un plan quelconque mené par m_1 et m_2 , on obtient une courbe et deux tangentes infiniment

voisines à cette courbe et l'intersection i de ces deux tangentes qui est un point de l'intersection des deux plans tangents vient de confondre avec M , d'après une remarque faite (§ 49, 3°) à propos des courbes planes.

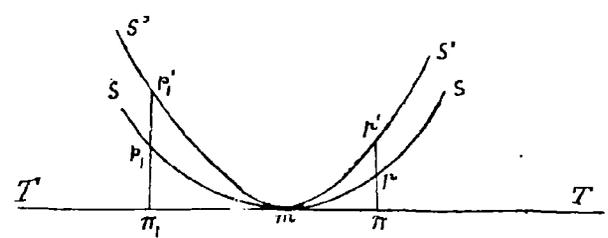
26, Surfaces tangentes entre elles : nature de la courbe d'intersection de deux surfaces tangentes entre elles en un point.

Deux surfaces qui ont en un point commun même plan tangent ou ce qui revient au même même normale sont dites tangentes entre elles en ce point. Si cette particularité se reproduit tout le long d'une ligne, les surfaces sont dites de raccordement tout le long de cette ligne.

Lorsque deux surfaces se touchent en un point elles peuvent se traverser ou ne pas se traverser et nous reconnaitrons plus loin à propos de l'étude de la courbure des surfaces par quels caractères ces deux cas se distinguent.

Remarquons seulement dès à présent que si les deux surfaces S et S' se traversent, leur courbe d'intersection doit présenter en général un point double au point de contact.

En effet puisque les deux surfaces tangentes en M se traversent au voisinage de ce point il doit exister sur leur plan tangent commun des points Π infiniment voisins de M pour lesquels la perpendiculaire au plan rencontre les surfaces S et S' en des points p et p' tels que $\Pi p < \Pi p'$, et d'autres points γ pour lesquels $\gamma \Pi'$ est au contraire plus petit que $\gamma \Pi$.



Memoire par la normale en M et par $\Pi p p'$ un plan sécant. Ce plan donnera dans les deux surfaces deux courbes de section qui seront tangentes en M , mais qui n'auront généralement en ce point qu'un contact du premier ordre et

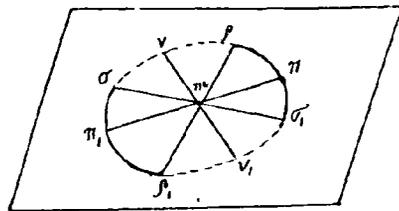
ne se traverseront pas en conséquence.

On trouvera donc à l'opposé de Π par rapport à M des points

tels que Π_1 pour lesquels la disposition des points p_1 et p'_1 sera la même que celle des points p et p' .

De même à l'opposé de v on trouvera des points v_1 sur le plan tangent pour lesquels les points π et π_1 présenteront la même disposition que les points π et π' .

Tracons actuellement dans le plan tangent une courbe infiniment petite contourant le point m et passant par les quatre points Π , Π_1 et σ , σ_1 et marquons en trait plein sur cette courbe les arcs correspondant



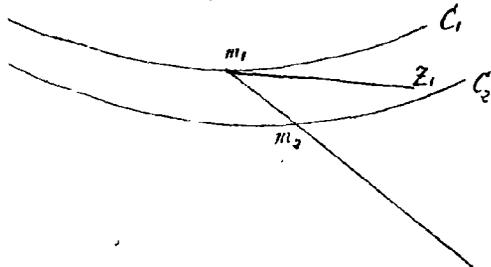
aux points pour lesquels la disposition est la même qu'aux points Π et Π_1 et en trait pointillé les arcs pour lesquels la disposition est contraire. Nous devons avoir nécessairement au moins deux arcs en trait plein et deux arcs en trait pointillé, et par conséquent au moins quatre points

de passage p, p_1, σ, σ_1 qui d'après la démonstration même devront être opposés deux à deux par rapport au point m .

Or à ces quatre points correspondent quatre points v et v_1 , σ et σ_1 communs aux deux surfaces. La courbe d'intersection des deux surfaces présente donc en général au moins un point double au point m .

Le résultat s'applique évidemment comme cas particulier à l'intersection de la surface par son plan tangent

Le cas des deux surfaces S et S' se raccordant tout le long d'une ligne C peut être considéré comme le cas limite de deux surfaces se coupant suivant deux courbes infiniment peu différentes C_1 et C_2 .



Il est évident en effet que les deux surfaces auront à la limite même plan tangent en un point quelconque m_1 de C_1 , car ce plan tangent est déterminé pour les deux surfaces par la tangente $m_1 z_1$ à la courbe C_1 et par la position limite d'une droite $m_1 m_2$

joignant le point m_1 à un point infiniment voisin m_2 pris sur C_2 .

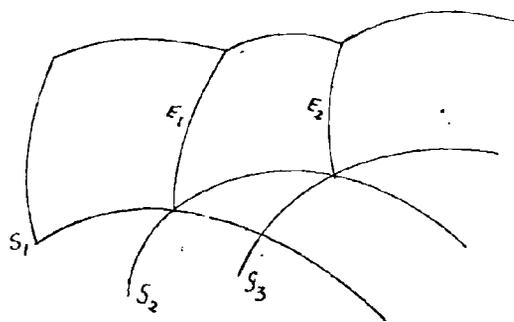
Dans ce cas la courbe d'intersection des deux surfaces se réduit à la courbe limite commune de C_1 et de C_2 et cette courbe doit être considérée comme une courbe double. Ce cas se rattache d'ailleurs au précédent en remarquant que les directions pp_1 et OO_1 précédemment considérées doivent être regardés comme confondus en tous les points de la ligne de contact.

27) Surfaces enveloppes et surfaces enveloppées : caractéristiques.

Imaginons une série de surfaces S c'est-à-dire une succession continue de surfaces déterminées par la variation continue d'un paramètre α .

En raison de la continuité admise, à deux valeurs infiniment peu différentes α_1 et $\alpha_1 + \epsilon = \alpha_2$ du paramètre correspondront deux surfaces S_1 et S_2 infiniment peu différentes, c'est-à-dire telles qu'à chaque point m_1 de S_1 correspondra un point m_2 infiniment peu différent de S_2 et que les plans tangents en m_1 et m_2 aux deux surfaces auront des directions infiniment peu différentes.

Supposons que la surface S_1 rencontre la surface S_2 suivant une courbe E_1 et considérons la figure formée par l'ensemble des deux surfaces



S_1 et S_2 et par leur courbe d'intersection E_1 . Cette figure dépend de α_1 et de ϵ et si laissant ϵ constant nous donnons à α_1 un accroissement précisément égal à ϵ la figure se déformera infiniment peu, la surface S_1 deviendra la surface S_2 , la surface S_2 devien-

dra la surface S_3 de la série correspondant à la valeur

$$\alpha_2 + \epsilon = \alpha_3$$

du paramètre, et la courbe E_1 se changera en une courbe E_2 infiniment voisine.

En opérant ainsi d'une manière continue, la succession des courbes infiniment voisines $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$ formera à la

limite une surface continue Σ . Cette surface est dite l'enveloppe des surfaces de la série et celles-ci en sont les enveloppées.

On reconnaît d'ailleurs immédiatement d'après les explications données plus haut sur le contact des surfaces, que l'enveloppe, limite d'une surface rencontrant suivant deux courbes E_1, E_2 infiniment voisines une surface quelconque S_i de la série, se raccorde avec toutes ses enveloppées le long des courbes E qui ont reçu le nom de caractéristiques.

18. Remarques.

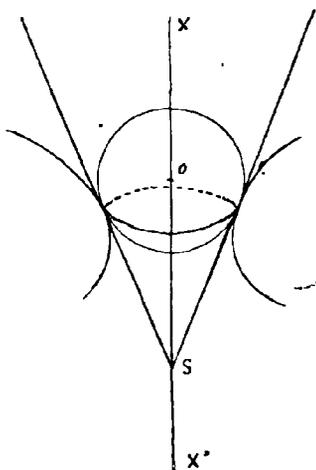
A chaque courbe d'intersection des deux surfaces S_1 et S_2 - si ces surfaces ont plusieurs courbes d'intersection - correspondra une nappe de l'enveloppe. Par contre si les surfaces de la série ne se rencontrent pas elles n'auront pas d'enveloppe.

Exemple : série de sphères concentriques - série d'ellipsoïdes de révolution homofocaux, etc.

Si les enveloppées sont des plans, les caractéristiques sont évidemment des droites.

Remarquons encore qu'on peut toujours considérer une surface donnée comme enveloppe d'une infinité de manières différentes.

Soit par exemple une surface de révolution, c'est-à-dire une surface qui peut être engendrée par la rotation d'une courbe plane de forme invariable tournant autour d'une droite située dans son plan.

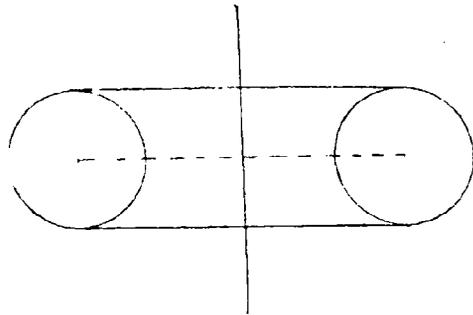


Rappelons que cette droite est dite l'axe de la surface; que la courbe mobile en est la courbe méridienne, et que les cercles décrits par les points de la courbe méridienne en tournant autour de l'axe en sont les parallèles.

Une pareille surface peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères ayant leurs centres O sur l'axe et touchant la surface de révolution suivant des

parallèles - ou bien encore comme l'enveloppe d'une série de cônes S , de

révolution autour de l'axe, et touchant également la surface suivant ses parallèles. Dans ces deux cas les caractéristiques sont les parallèles.



Mais s'il s'agit d'un stère c'est-à-dire d'une surface de révolution ayant pour courbe méridienne un cercle dont le centre n'est pas sur l'axe, on peut aussi considérer la surface comme l'enveloppe de sphères ayant pour grands cercles les cercles méridiens, et dans

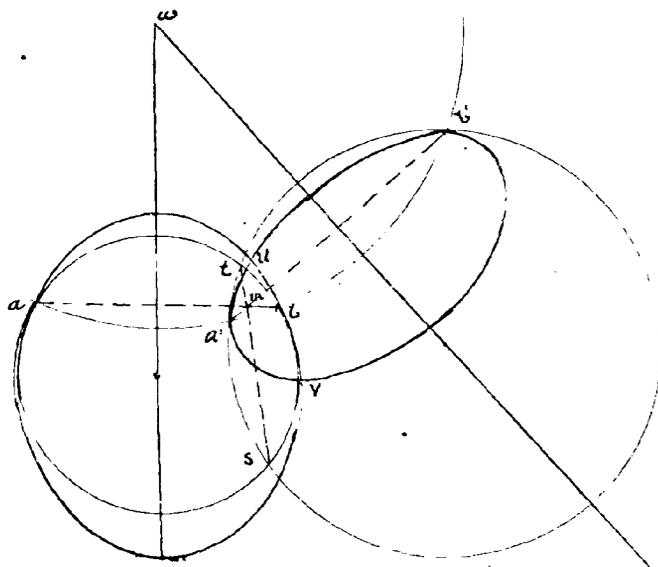
ce cas ce sont ces cercles méridiens qui sont les caractéristiques.

29, Quelques applications de la théorie des enveloppes.

Donnons dès à présent quelques applications intéressantes de cette théorie.

1° Tangente à la courbe d'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

Soit ω le point de rencontre des deux axes. Coupons les deux surfaces par une sphère de centre ω et prenons pour plan de projection un plan parallèle aux axes.



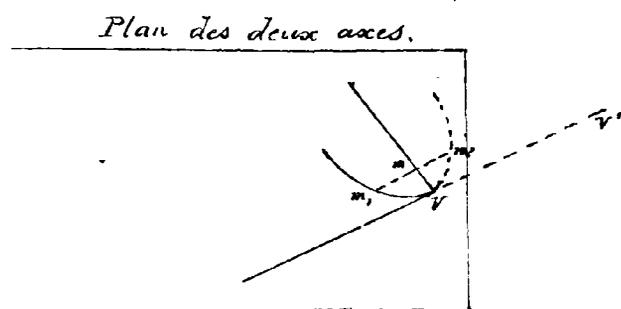
La section se composera de deux parallèles ab , $a'b'$ qui se projettent suivant deux droites et le point d'intersection m de ces droites sera la projection des deux points d'intersection m_1 et m_2 des deux parallèles, c'est-à-dire de deux points de

la courbe d'intersection des deux surfaces données.

Considérons deux sphères tangentes aux deux surfaces le long de ces parallèles. Ces sphères se couperont suivant un cercle qui étant situé dans un plan debout se projettera également suivant une droite et cette droite St devra passer par le point m , puisque les points m_1 et m_2 appartiennent aux deux sphères. Mais de plus cette droite sera la tangente à la projection sur le tableau de la courbe d'intersection des deux surfaces.

En effet les sphères ayant respectivement mêmes plans tangents que les surfaces aux points m_1 et m_2 , les tangentes à leur courbe d'intersection en ces points sont aussi tangentes à l'intersection des deux surfaces. Or l'intersection des deux sphères se projette suivant la droite St qui est à elle-même sa propre tangente, donc, etc - - - - -

Remarque — Aux points limites, tels que u et v , la tangente à la courbe d'intersection dans l'espace est perpendiculaire au tableau et la construction qui s'applique encore donne par conséquent la trace sur le tableau du plan osculateur à la courbe de l'espace (cela résulte des remarques que nous avons faites § 79 au sujet des projections d'une courbe gauche). On voit d'ailleurs directement dans ce cas que le plan des deux axes étant un plan de symétrie



pour la courbe de l'espace, la position limite Vm , trace sur ce plan d'un plan passant par la tangente VV' en V et par la corde m, m_2 , parallèle à VV' et infiniment voisine, doit être la trace du plan osculateur en V . Ce point V est en outre visiblement et par simple raison de symétrie un sommet de la courbe de l'espace.

Quant à la courbe projection (qui a pour tangente en V la limite Vm) elle cesse au-delà du point V de répondre à la question bien que d'autres propriétés géométriques permettent dans certains cas d'en prolonger le tracé : nous verrons plus loin à propos du cône droit circonscrit à la sphère, un exemple de courbe projection ainsi prolongée au-delà de sa partie utile.

100, 2^e Détermination de la courbe d'ombre propre ou de contour apparent d'une surface.

La théorie des surfaces enveloppes peut servir à la détermination des courbes d'ombre propre d'une surface en projection cylindrique, ou de son contour apparent en perspective conique. Ces deux problèmes en effet n'en font qu'un en réalité, et reviennent comme on l'a vu à la construction de la courbe de contact d'un cône circonscrit à la surface. Le sommet du cône est le point lumineux dans le premier cas, et le point de vue dans le second. Les cônes peuvent devenir d'ailleurs des cylindres s'il s'agit de rayons lumineux parallèles ou de perspective cavalière : on arrive à ces cas limites en supposant que le sommet du cône s'éloigne à l'infini.

La méthode consiste à substituer à la surface donnée une série de surfaces dont elle peut être considérée comme l'enveloppe et à choisir ces surfaces auxiliaires de manière à ce que leurs caractéristiques d'une part et leurs courbes d'ombre ou de contour apparent d'autre part soient d'une détermination commode et facile. Aux points où la courbe d'ombre ou de contour apparent de la surface auxiliaire rencontrera la caractéristique on aura un point de la courbe d'ombre ou de contour apparent de la surface donnée puisqu'en ces points cette surface a même plan tangent que la surface auxiliaire et que le plan tangent à celle-ci passe par le point lumineux ou par le point de vue.

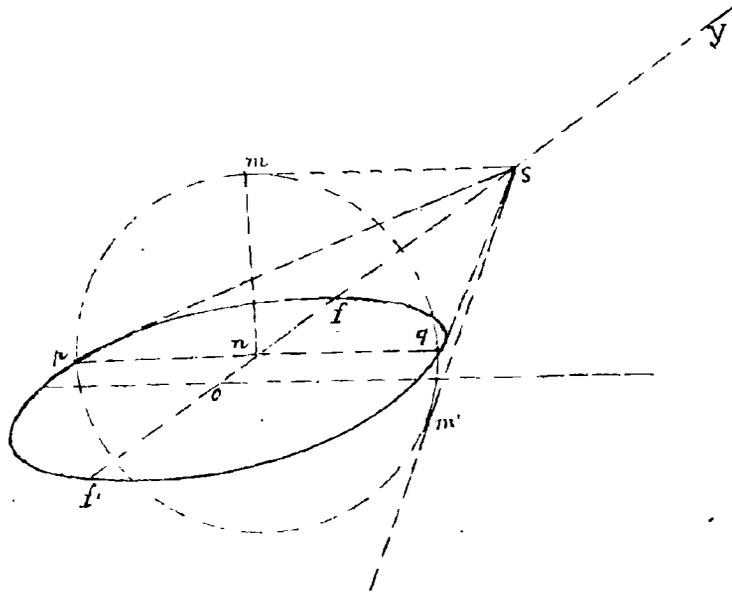
Exemple — Nous avons déjà donné une application de cette méthode, en perspective conique, pour la détermination du contour apparent du tore. Nous allons en donner une autre d'un caractère un peu différent et qui se rapporte à un problème de perspective cavalière.

Supposons qu'on veuille tracer le contour apparent d'une sphère connaissant la perspective cavalière de son grand cercle horizontal.

Considérons la sphère comme l'enveloppe des cônes de révolution ayant leurs sommets sur un diamètre de bout OV .

L'un de ces cônes ayant pour base le petit cercle de front de bout sur une corde de front pq du grand cercle horizontal aura son sommet en S , pôle de cette corde dans l'ellipse perspective du grand cercle.

Le contour apparent se composera de deux génératrices qui seront en perspective les tangentes menées par S au petit cercle.



Mais ce petit cercle est la caractéristique du cône, les points m et m' de son contour apparent situés sur le petit cercle appartiennent donc aussi au contour apparent de la sphère, d'où une construction par points de ce contour.

On peut déduire de cette construction un théorème intéressant sur l'ellipse.

En effet le contour apparent de la sphère étant comme l'on sait une ellipse E qui admet la droite SO pour grand axe et les points F et F' de cette droite pour foyers, le petit cercle pq devant être tangent à cette ellipse aux points m et m' , la droite mn qui joint le point m au centre n du petit cercle, est une normale à l'ellipse E et l'on voit que si par le point n où la normale à une ellipse E rencontre le grand axe de la courbe, on porte sur une droite de direction fixe, mais quelconque d'ailleurs, un segment np égal à la longueur nm de cette normale, le lieu du point p est une seconde ellipse qui passe par les foyers F et F' de la première.

Ces foyers pouvant être considérés d'ailleurs comme des cercles de rayons nuls ayant avec l'ellipse E un double contact imaginaire, il était à prévoir qu'on les trouverait comme points de la seconde ellipse.

Surfaces réglées.

101, Avant d'aller plus loin dans l'étude générale des surfaces, nous appliquerons les résultats qui viennent d'être établis à une classe de surfaces spéciale dont les propriétés simples et remarquables nous seront utiles dans la suite quand nous reprendrons pour la compléter l'étude précédente.

Nous voulons parler des surfaces réglées qui comprennent comme cas particulier les surfaces développables.

102 Définition et génération des surfaces réglées.

On désigne sous le nom de surfaces réglées les surfaces qui peuvent être engendrées par le déplacement continu d'une droite nommée pour cette raison génératrice de la surface. (1)

La génératrice qui engendre une surface réglée doit être assujettie à trois conditions qui commandent son déplacement. (2)

(1) La génératrice rectiligne joue ici le rôle attribué à la courbe M du § 91 dans la génération d'une surface quelconque. Mais dans le cas actuel il n'y a plus que déplacement sans déformation.

(2) La position d'une droite dépend, comme on le voit immédiatement par des équations

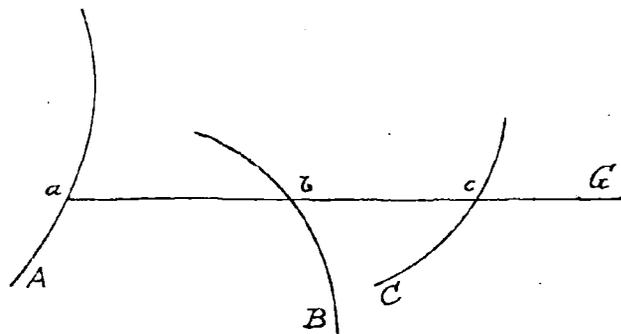
$$z = mx + p$$

$$z = ny + q$$

de quatre paramètres m , n , p et q . Si ces paramètres sont assujettis à trois conditions, on a une série de droites; si le nombre des conditions est de deux seulement, on a ce qu'on appelle une congruence et par chaque point de l'espace passe un nombre limité de droites; enfin si le nombre des conditions se réduit à une on a un complexe; il passe alors une infinité de droites par chaque point de l'espace.

Ces conditions peuvent être d'ailleurs de natures diverses. Ainsi on peut définir une surface gauche en assujettissant la génératrice à rencontrer trois courbes fixes.

Soient A, B, C les trois courbes qui sont dites directrices



de la surface. On conçoit facilement la manière dont une génératrice peut être construite.

Prenant arbitrairement un point a sur l'une des trois courbes, A par exemple, on considérera les deux cônes qui ont a pour sommet

et B, C pour directrices.

Ces cônes auront en général une ou plusieurs génératrices communes et ces génératrices, telles que G seront les génératrices de la surface réglée qu'elles engendreront lorsqu'on déplacera d'une manière continue le point a sur A .

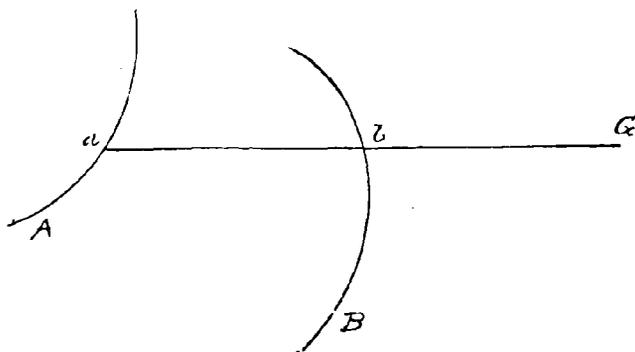
On peut remplacer la courbe B ou les deux courbes B et C par une surface B ou par deux surfaces B et C dites surfaces directrices auxquelles la génératrice devra être tangente. La construction se fera par un procédé entièrement analogue à celui que nous venons d'indiquer, en remplaçant les cônes précédemment considérés par des cônes de sommet a circonscrits à la surface ou aux surfaces directrices.

Les trois courbes directrices A, B, C peuvent être encore remplacées par trois surfaces directrices auxquelles la génératrice devra être tangente.

Enfin, on peut remplacer l'une des conditions précédentes par l'obligation pour la génératrice d'être parallèle à un cône ou à un plan donné qui sont dits alors cône directeur ou plan directeur de la surface.

Par exemple si l'on a deux directrices A et B et un cône directeur, on pourra construire une génératrice de la surface en prenant sur l'une des directrices, A par exemple, un point a et en menant par a deux cônes, l'un avec la courbe B pour directrice, l'autre parallèle au cône directeur. Toute génératrice G commune à ces deux cônes sera une génératrice de la surface.

Si l'une des courbes directrices est une droite et si le cône directeur se réduit à un plan (la seconde courbe directrice pouvant être remplacée d'ailleurs par une surface directrice), la surface réglée prend le nom de conoïde. Le conoïde est droit si la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur.



Si la surface réglée est engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites fixes, on a l'hyperboloïde à une nappe, surface du second degré, c'est-à-dire rencontrée par une droite

en deux points seulement et coupée par un plan quelconque suivant une section conique.

Si la surface est engendrée par une droite s'appuyant sur deux droites et restant parallèle à un plan directeur, on a le paraboloïde hyperbolique, surface du second degré également.

Ces deux surfaces jouissent de la propriété très-remarquable d'être doublement réglées, c'est-à-dire d'admettre deux systèmes différents de génératrices rectilignes.

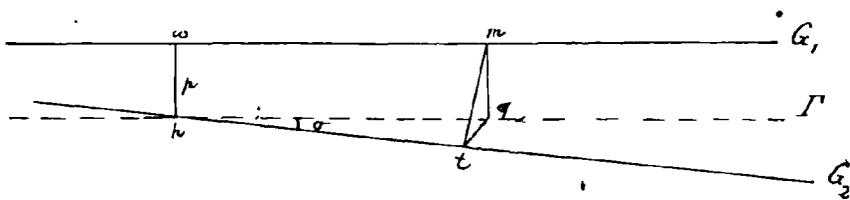
Nous reviendrons à la fin du cours sur l'étude de ces deux surfaces spéciales qui vous sont d'ailleurs déjà bien connues.

103) Variation du plan tangent à une surface réglée le long d'une génératrice : paramètre de distribution : point central.

La génération des surfaces réglées au moyen d'une droite qui se déplace a pour conséquence une relation très-simple entre les positions des plans tangents aux différents points d'une même génératrice. Cette relation dont la découverte est due à Chasles, est indépendante d'ailleurs dans sa forme de la nature particulière de la surface réglée que l'on considère.

Remarquons tout d'abord que les plans tangents le long d'une même génératrice, renfermant tous cette génératrice forment un faisceau de plans ayant cette droite pour arête.

Soient deux génératrices infiniment voisines G_1 et G_2 ,
soit leur plus courte distance dont nous désignerons par p la
longueur et σ l'angle que font ces génératrices entre elles ; p et
 σ , d'après la condition de continuité admise pour le déplacement



de G_1 doivent
être des quantités
infiniment petites.

Menons par le
pied h de la plus
courte distance la
parallèle Γ à G_1 ,
et par un point
quelconque m pris
sur G_1 , un plan
perpendiculaire à

cette génératrice. Le plan coupe la génératrice G_2 et la droite Γ
en des points t et q et le triangle mtq , qui est rectangle en q ,
aura ses côtés infiniment petits, car mq est égal à p et tq ,
dans le triangle htq est opposé à l'angle infiniment petit σ .
Les deux points m et t de la surface sont donc infiniment voisins,
et la sécante mt a pour limite une tangente à la surface en m .
En sorte que la limite θ de l'angle $t\hat{m}q$ est l'angle du plan tan-
gent en m avec le plan de Γ et de G_1 .

D'ailleurs dans le triangle $t\hat{m}q$ on a :

$$\text{tg. } t\hat{m}q = \frac{tq}{mq} = \frac{tq}{p}$$

et dans le triangle thq on a de même

$$tq = hq \text{ tg. } \sigma = \text{com } tq \cdot \sigma$$

Donc enfin

$$\text{tg. } \theta = \text{Lim } \text{tg } t\hat{m}q = \text{Lim } \frac{\text{com } tq \cdot \sigma}{p}$$

Mais la tangente de l'angle infiniment petit σ peut être
remplacée par cet angle lui-même. D'autre part lorsque G_2 se
rapproche indéfiniment de G_1 , le point co tend vers une position
limite O_1 et le plan de G_1 et de Γ tend vers le plan tangent
en O_1 à la surface.

Le point O_1 ainsi défini, est dit le point central de la génératrice considérée et le plan tangent en ce point est le plan central pour cette génératrice. L'angle θ est donc l'angle du plan tangent en M avec le plan central et si l'on désigne par x la distance (positive ou négative) du point m au point central, on aura la relation

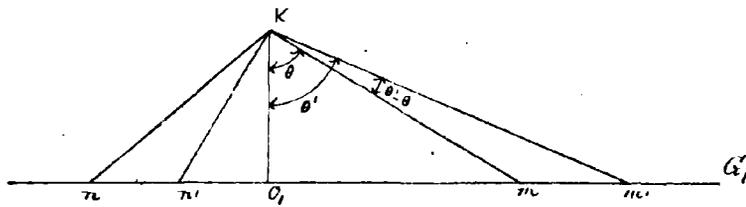
$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{Lim} \frac{\overline{com}}{\frac{r}{\sigma}} = \frac{x}{\operatorname{Lim}(\frac{r}{\sigma})} = \frac{x}{K}$$

en repr santant par la lettre K , la valeur limite de $\frac{r}{\sigma}$.

Cette valeur limite a reçu le nom de paramètre de distribution des plans tangents en raison même de la formule remarquable que nous venons d'établir.

104. Point représentatif.

Pour donner une image géométrique qui rende bien visible la loi de rotation du plan tangent autour de la génératrice lorsque le point de contact se déplace sur cette génératrice, nous construirons dans un plan quelconque mené par cette droite une perpendiculaire A_1 au point central O_1 et nous porterons sur cette per-



pendiculaire une longueur $O_1 K$ égale au paramètre.

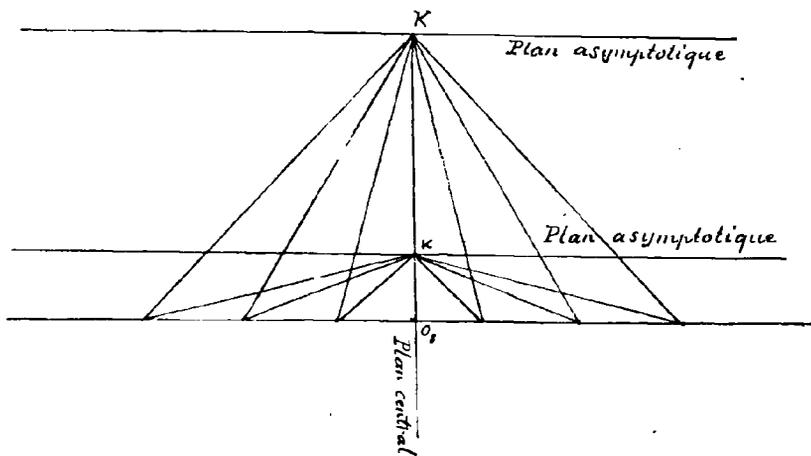
L'angle $m K O_1$ étant égal à θ d'après la relation précédemment établie pour toute position du point m , il en résulte pour le point K cette

propriété que l'angle $m K m'$ sous lequel on voit de ce point un segment quelconque $m m'$ de la génératrice est l'angle que font entre eux les plans tangents aux extrémités de ce segment.

En d'autres termes, le faisceau des droites $K (n n', o, m m', \dots)$ allant du point K aux différents points de la génératrice représente précisément la section faite dans le faisceau des plans tangents

en π, π', o_1, m, m' ----- par un plan perpendiculaire à l'arête G_1 de ce faisceau.

La considération de ce point K (qu'on nomme quelquefois point représentatif en raison de cette propriété) fait bien voir comment tourne le plan tangent lorsque le point de contact parcourt de $- \infty$ à $+\infty$ la génératrice.



De $-\infty$ au point central le plan tangent tourne de 90° et il tourne encore de 90° dans le même sens du point central à $+\infty$ de manière à prendre des inclinaisons égales de part et d'autre du plan central pour des positions du point de contact symétriques par rapport au point O_1 . Le plan tangent est le même à $-\infty$ et à $+\infty$ et ce plan est dit plan asymptotique; le plan asymptotique

est perpendiculaire au plan central; c'est la limite du plan mené par une génératrice parallèlement à la génératrice infiniment voisine.

Supposons maintenant que le paramètre H tende vers Zéro. Les deux rotations de 90° qui s'effectuent comme on vient de le voir, symétriquement de part et d'autre du point central O_1 , se concentreront de plus en plus dans le voisinage de ce point et à la limite la rotation de 180° tout entière devra être considérée comme s'effectuant en ce point. Le plan tangent coïncidera avec le plan asymptotique tout le long de la génératrice; au point O_1 il sera indéterminé.

Au contraire, si le paramètre devient infini, les deux rotations s'éloignant de plus en plus du point central finiront par être rejetées à l'infini, et dans toute la région située à distance finie, le plan tangent coïncide avec le plan central.

Les génératrices pour lesquelles ces particularités se présentent ont reçu le nom de génératrices singulières.

Celles pour lesquelles le paramètre est nul sont dites génératrices.

coniques : effectivement dans les cônes $\mu = 0$ et par suite $K = 0$.
Celles pour lesquelles le paramètre est infini sont dites généralu-
ces cylindriques : dans les cylindres en effet $T = 0$ et $K = \infty$. D'ail-
leurs dans l'un et l'autre cas le plan tangent est le même tout
le long de la génératrice.

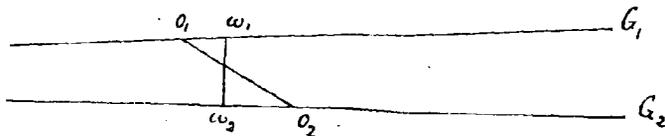
On doit remarquer qu'en négligeant les infiniment petites
d'ordre supérieur une génératrice singulière peut être considérée com-
me rencontrant la génératrice infiniment voisine, elle la rencontre
à distance finie si elle est conique, et si elle est cylindrique elle
lui est parallèle.

105, Conséquence importante de la formule de Charles.

Un plan quelconque mené par une génératrice d'une surface
gauche, touche généralement la surface en un point et en un
seul : toutefois dans le cas des génératrices singulières, le point
de contact est indéterminé lorsque le plan coïncide avec le plan qui
touche la surface tout le long de la génératrice, et tout autre
plan doit être considéré comme touchant la surface au point cen-
tral ou au point à l'infini selon que la génératrice est conique ou
cylindriques.

106, Ligne de striction.

Le lieu des points centraux sur les génératrices d'une surface
gauche est une courbe qui s'appelle ligne de striction de la sur-
face.



Contrairement à ce qu'on
pourrait être tenté de croire,
cette courbe n'est pas en
général orthogonale aux
généralices.

Considérons en effet deux
généralices infiniment voi-
sines G_1 et G_2 , et soit ω_1, ω_2
leur plus courte distance. Le

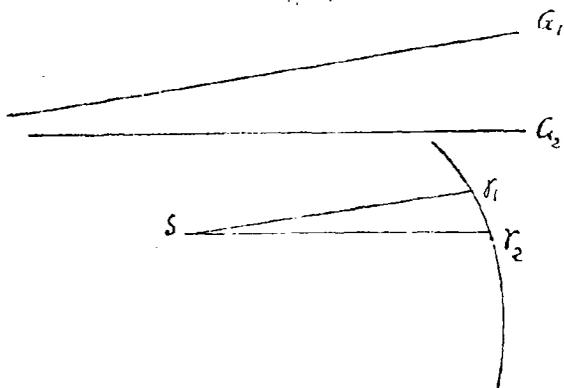
point central O_1 de G_1 est la position limite de ω_1 quand G_2 se rap-
proche indéfiniment de G_1 , supposé fixe : le point central O_2 de G_2

est la position limite de ω_2 quand G_1 se rapproche indéfiniment de G_2 supposé fixe.

La tangente à la ligne destriction est la limite de la droite $O_1 O_2$ quand les deux génératrices se confondent : elle diffère donc en général de la direction limite de ω_1, ω_2 qui est perpendiculaire à la génératrice.

107, Cône Directeur.

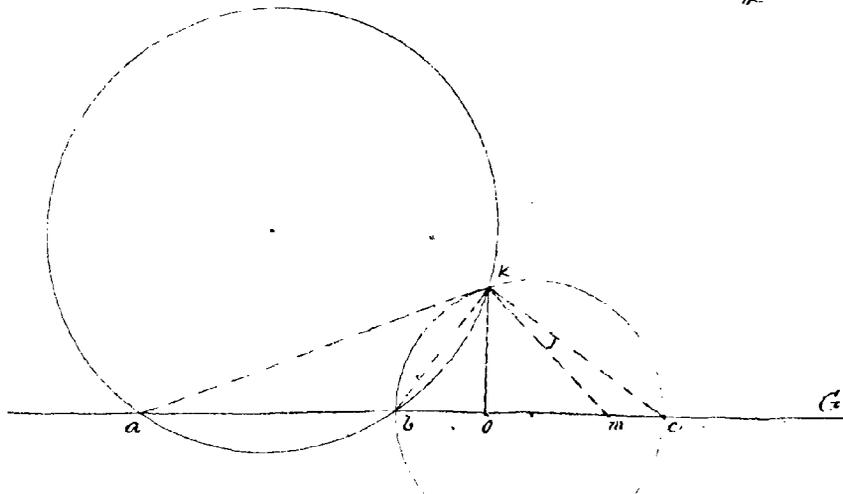
Si l'on mène par un point fixe de l'espace des parallèles aux génératrices d'une surface réglée, on forme ainsi un cône qui est dit cône directeur de la surface.



Le plan tangent au cône directeur, limite d'un plan passant par deux génératrices infiniment voisines S_1 et S_2 du cône, parallèles à deux génératrices infiniment voisines G_1 et G_2 de la surface est évidemment parallèle au plan asymptotique correspondant de la surface réglée.

108, Raccordement de deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune.

Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune et même



un plan tangent en tous de ses points se raccorde tout le long de cette génératrice.

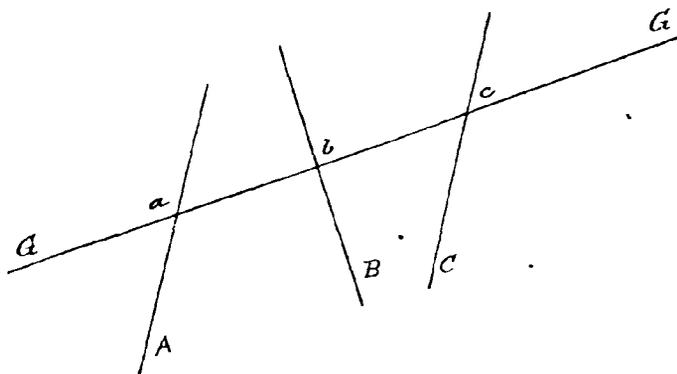
Cela résulte immédiatement de la loi de variation des plans tangents qu'on vient d'établir. En effet, étant connus

Les plans tangents en trois points a, b, c , on connaît les angles qu'ils font entre eux ; décrivant alors sur ab et bc , dans un plan quelconque passant par G , des segments capables des angles compris entre les plans tangents communs aux deux surfaces aux points correspondants, on obtient toujours par leur intersection un point unique K qui est le point représentatif commun aux deux surfaces. En abaissant de K la perpendiculaire KO sur G , on a le point central, et OK est la grandeur du paramètre.

Le plan tangent en un point quelconque m est alors déterminé (par l'angle mKc qu'il fait avec le plan tangent en c par exemple) et comme cette détermination est la même pour les deux surfaces, on en conclut que les deux surfaces ont même plan tangent tout le long de la génératrice.

109, Paraboloïdes et hyperboloïdes de raccordement avec une surface réglée le long d'une de ses génératrices.

Si, prenant les plans tangents en trois points a, b et c d'une génératrice G , on choisit arbitrairement trois droites A, B et C menées par a, b, c dans ces trois plans, d'après ce qui vient d'être dit, l'hyperboloïde ayant ces trois droites pour directrices sera de raccordement avec la surface réglée tout le long de la génératrice G .



Si les droites sont prises parallèles à un même plan P quelconque d'ailleurs, l'hyperboloïde deviendra un paraboloïde ayant le plan P pour plan directeur.

Il existe donc une infinité d'hyperboloïdes et de paraboloïdes

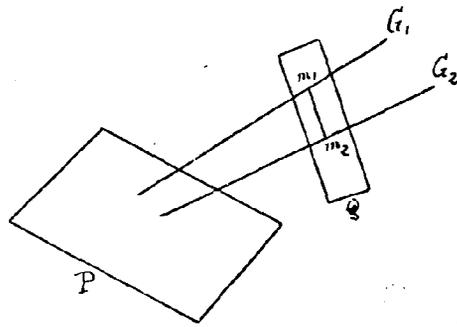
de raccordement à une surface réglée le long de chacune de ses génératrices.

On peut arriver à la même conclusion d'une autre manière.

Deux génératrices quelconques G_1 et G_2 d'une surface réglée peuvent être prises évidemment pour directrices d'un paraboloïde dont

Le plan directeur P peut être arbitrairement choisi.

Si les génératrices G_1 et G_2 , deviennent infiniment voisines, ce paraboloides est de raccordement, car en coupant par un plan



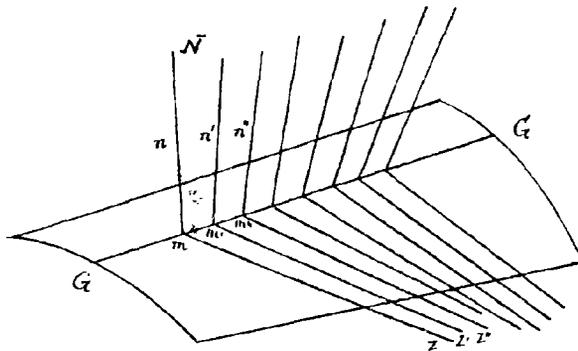
quelconque Q la section faite dans le paraboloides et celle que donne la surface sont tangentes entre elles puisqu'elles ont en commun les deux points infiniment voisins m_1 et m_2 où les génératrices infiniment voisines G_1 et G_2 percent le plan sécant.

Prenez ces mêmes génératrices comme directrices d'un hyperboloides en leur adjoignant une troisième directrice rectiligne arbitrairement choisie : nous aurons un hyperboloides qui sera encore de raccordement pour la même raison.

Prenez ces mêmes génératrices comme direc.

110. Paraboloides des normales.

Parmi les paraboloides de raccordement que l'on peut ainsi définir, il y en a un qui offre un intérêt particulier : c'est celui dont le plan directeur P est perpendiculaire à G .



Ce paraboloides a ses plans directeurs rectangulaires : il est le lieu géométrique de la tangente à la surface réglée perpendiculaire à la génératrice (limite de la sécante mn et du §. 103).

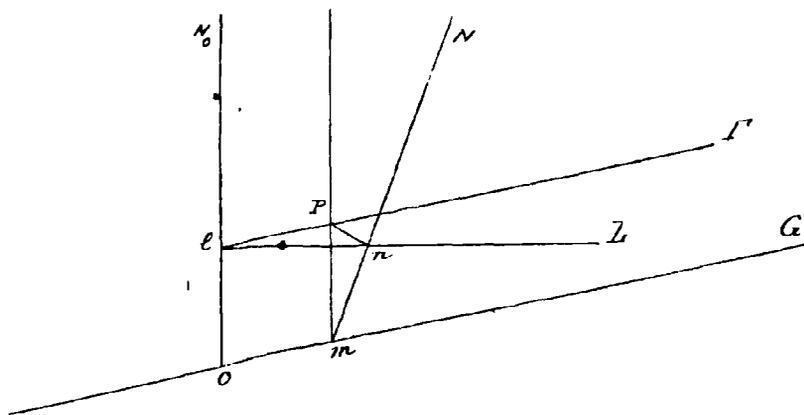
Si l'on fait tourner ce paraboloides de 90° autour de G par une rotation d'ensemble, toutes ses

génératrices viennent coïncider avec les normales N à la surface et l'on reconnaît ainsi que les normales à une surface réglée le long d'une génératrice forment un paraboloides hyperboliques.

C'est ce parabolôide qu'on désigne sous le nom de parabolôide des normales.

Le parabolôide des normales a la génératrice \mathcal{C} pour ligne de striction relativement à ses génératrices de système N . Son plan tangent en chaque point de \mathcal{C} étant perpendiculaire au plan tangent en ce même point à la surface réglée, le plan central de cette dernière surface est le plan asymptotique du parabol ide pour la génératrice \mathcal{C} , c'est-à-dire son plan directeur pour ses génératrices de même système que \mathcal{C} . Le point central de la surface est également le point central du parabol ide et de plus c'est son sommet, c'est-à-dire le pied de la génératrice ON_0 de système N perpendiculaire au plan directeur des génératrices de système \mathcal{C} . Cette génératrice de système N est la ligne de striction du parabol ide pour les génératrices du système \mathcal{C} .

Enfin le parabol ide des normales qui a évidemment même paramètre de distribution que la surface pour la génératrice commune \mathcal{C} a aussi même paramètre pour sa génératrice ON_0 de système N qui passe au point central O de \mathcal{C} .



En effet cette génératrice ON_0 étant comme nous venons de le voir, la seconde ligne de striction du parabol ide, toutes les génératrices de ce parabol ide du même système que \mathcal{C} lui sont perpendiculaires.

Soit L une de ces génératrices qui rencontre ON_0 en l . Menons par l une

parallèle Γ à \mathcal{C} et coupons par un plan quelconque perpendiculaire à \mathcal{C} .

Soient m, n, p les rencontres de ce plan étant avec \mathcal{C}, L et Γ . Le triangle mnp rectangle en p donne

$$\text{tg. } \pi mp = \frac{np}{pm} = \frac{nl}{ol}$$

et le triangle $l n p$ également rectangle en p donne de même.

$$\text{tg. } n l p = \frac{np}{lp} = \frac{np}{om}$$

Mais le point O étant le point central à la fois pour la génératrice G de la surface et pour les génératrices G et N_0 du paraboloides on a en appelant K_1 le paramètre du paraboloides relatif à la génératrice N_0 et désignant par K celui de la surface

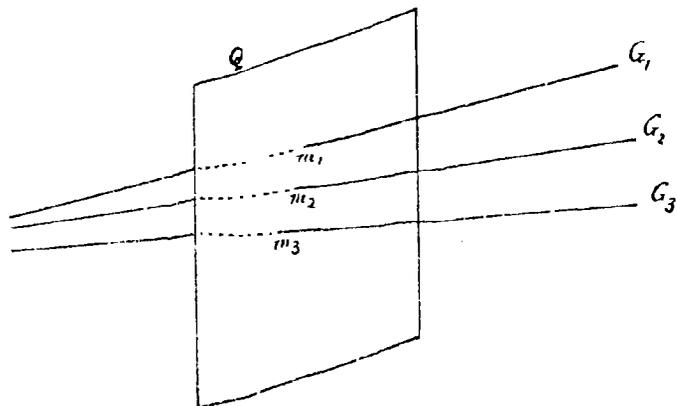
$$\text{tg. } n m p = \frac{om}{K} \quad \text{d'où } K = \frac{om}{\text{tg. } n m p} = \frac{om \cdot ol}{np}$$

$$\text{tg. } n l p = \frac{ol}{K_1} \quad \text{d'où } K_1 = \frac{ol}{\text{tg. } n l p} = \frac{ol \cdot om}{np}$$

Ce qui démontre l'égalité des deux paramètres.

111) Hyperboloïde osculateur.

Parmi les hyperboloïdes de raccordement il y en a un également qui offre un intérêt particulier. C'est celui qu'on obtient comme limite d'un hyperboloïde ayant pour directrices trois génératrices consécutives G_1, G_2, G_3 de la surface.



Si l'on fait une section par un plan quelconque Q les courbes de section obtenues dans l'hyperboloïde et dans la surface réglée ont trois points consécutifs m_1, m_2, m_3 communs : ces courbes ont donc un contact du second ordre à la limite et pour cette raison l'hyperboloïde ainsi défini a reçu le nom d'hyperboloïde osculateur.

Nous reviendrons sur ce sujet à propos de la courbure des surfaces.

Surfaces développables.

(112) Nous avons vu que si le paramètre devenant nul ou infini pour une génératrice d'une surface réglée la surface admettait le même plan tangent en tout point de cette génératrice qui recevait alors le nom de génératrice singulière.

Si cette particularité se reproduit pour toutes les génératrices d'une surface réglée, celle-ci prend le nom de surface développable et l'on désigne plus spécialement sous le nom de surfaces gauches, les surfaces réglées pour lesquelles il n'en est pas ainsi, ce qui suppose par conséquent des valeurs généralement finies du paramètre.

Une surface développable est donc tangente à une série de plans dont elle est l'enveloppe.

Dans le cas où le paramètre est constamment infini, l'angle de deux génératrices infiniment voisines est infiniment petit par rapport à leur plus courte distance; c'est le cas des cylindres pour lesquels cet angle est nul.

Dans le cas où le paramètre est constamment nul, c'est la distance de deux génératrices qui est infiniment petite par rapport à leur angle, c'est le cas des cônes pour lesquels cette distance est nulle, et c'est aussi le cas des surfaces engendrées par les tangentes à une courbe gauche, pour lesquelles, en supposant l'angle de contingence infiniment petit du premier ordre, cette distance (Ehvième de Bouquet) est infiniment petite du 2^e; la surface développable est alors l'enveloppe des plans osculateurs à la courbe gauche que touchent ses génératrices.

Nous allons faire voir que ces trois cas sont les seuls qui puissent se présenter.

En effet pour que le plan tangent à une surface réglée soit le même tout le long de ses génératrices, il faut que le paramètre de distribution de cette surface ait constamment des valeurs nulles ou infinies.

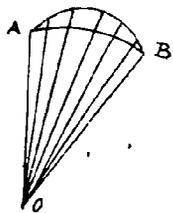
Si le paramètre de distribution est constamment nul et si les génératrices ne passent pas par un point fixe, ce qui serait le cas des cônes, elles forment une série de droites dont les plus courtes distances

sont infiniment petites d'ordre supérieur par rapport aux variations du paramètre qui règle leur succession dans l'espace. Or on a vu (§76) que de pareilles droites doivent être tangentes à une courbe gauche.

Si le paramètre de distribution est constamment infini, l'angle de deux génératrices infiniment voisines doit être nul ou infiniment petit par rapport à leur plus courte distance. Or il est impossible que cet angle soit infiniment petit d'ordre supérieur sans être nul, car s'il en était ainsi pour une variation finie du paramètre qui règle la succession des droites, autrement dit pour deux droites occupant dans la série des génératrices deux situations non infiniment voisines on aurait deux directions infiniment peu différentes, c'est-à-dire que ces deux génératrices devraient être parallèles. (1)

(1) Il résulte de ces considérations que dans une série continue de droites la plus courte distance de deux droites infiniment voisines peut devenir infiniment petite d'ordre supérieur au premier tandis que l'angle de ces mêmes droites ne peut être d'ordre supérieur sans être exactement nul. Ce fait qui semble surprenant au premier abord s'explique de la manière suivante.

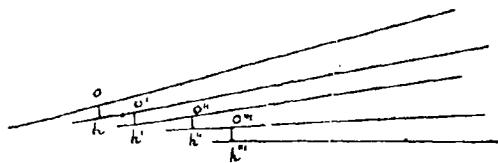
Si l'on considère une succession continue de droites l'angle de deux quelconques de ces droites est la somme géométrique des angles que font entre elles les droites consécutives comprises dans la série entre les droites extrêmes que l'on a choisies, autrement dit c'est l'angle AOB qui ferme le polyèdre des directions consécutives des droites entre les deux positions extrêmes OA et OB.



Si les angles que font entre elles deux droites infiniment voisines sont infiniment petits d'ordre supérieur, l'angle AOB que feront entre elles deux droites occupant des situations quelconques dans la série sera infiniment petit, et par conséquent nul à la limite, c'est-à-dire

que ces droites seront parallèles.

Mais on ne peut raisonner de même sur les plus courtes distances.



Si ces plus courtes distances sont infiniment petites d'ordre supérieur, leur somme géométrique $o^k + o^{k'} + o^{k''} + o^{k'''} \dots$ sera bien infiniment petite, c'est-à-dire nulle à la limite pour deux droites occupant une situation quelconque dans la série, mais cela ne

prouviera pas que ces droites se rencontrent, parce que leur plus courte distance n'est pas la somme géométrique des plus courtes distances des droites consécutives intermédiaires.

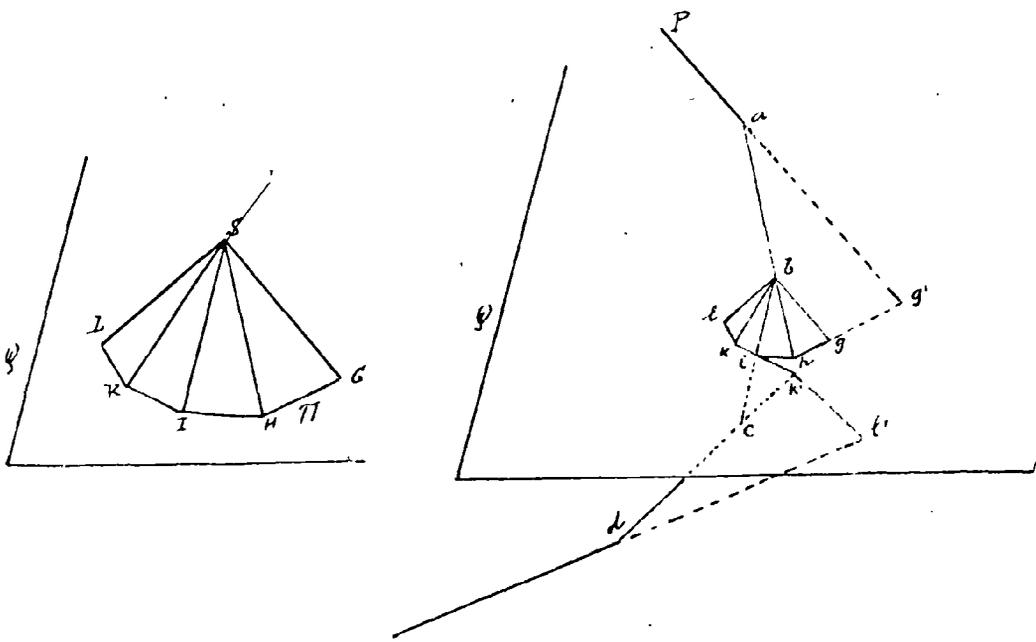
Ainsi en dehors des cônes et des cyllindres, toute surface développable est le lieu de tangentes à une courbe gauche.

113) Cette courbe qui est la ligne destriction de la surface prend dans ce cas particulier le nom spécial d'arête de rebroussement qui lui a été donné parce que toute section plane de la surface présente un rebroussement de première espèce au point où elle rencontre cette arête.

On peut s'en rendre compte de la façon suivante :

Considérons un polygone infinitésimal abc et un P inscrit dans la courbe C arête de rebroussement de la surface et supposons qu'un plan Q rencontre ce polygone en un point i appartenant au côté bc par exemple.

Si nous menons par un point quelconque S de l'espace des parallèles aux côtés consécutifs de ce polygone nous formerons ainsi une pyramide à facettes infinitésimales et si nous prenons la trace de cette pyramide sur un plan quelconque le plan Q par exemple, nous obtiendrons un polygone Π ($GHJKL$ -----) dont les



côtés consécutifs, à cause de la continuité, devront tourner dans un sens qui ne changera pas en général lorsqu'on suivra son contour.

Mais cette section restant semblable à elle-même quand on déplace le sommet de la pyramide d'une façon quelconque, la même observation pourra s'appliquer à la section Π obtenue dans la pyramide dont le sommet aurait été transporté au point b . Cette section sera alors $ghikl$ -----

Si l'on prend d'autre part la section faite par le même plan Q .

Dans le polyèdre formé par les côtés du polygone infinitésimal P prolongés on obtiendra un autre polygone $g'h'i'k'l'$ ou R ayant ses sommets h et i communs avec le polygone Π et son sommet k' situé sur le prolongement de ki du côté opposé à k par rapport au point i .

On voit donc que lorsqu'on suit le polygone R , la direction du déplacement en passant du côté hi au côté suivant $i'k'$ a tourné d'un angle infiniment peu différent de 180° (puisque l'angle supplémentaire celui de hi avec ik , doit différer infiniment peu de Zéro). De plus la rotation continue à se faire dans le même sens puisque $k'l'$ est parallèle à kl , et ainsi de suite.

Ces propriétés du polygone R étant indépendantes du nombre des côtés du polygone P inscrit dans la courbe C doivent être encore vraies à la limite. Mais alors ce dernier polygone se confond avec la courbe C elle-même et le polygone R devient la courbe d'intersection du plan sécant Q avec la surface développable lieu des tangentes à la courbe C . Or le changement de 180° qui se produit dans la direction de cette courbe au point où elle rencontre l'arête de rebroussement, sans que le sens de rotation de cette direction soit modifié, caractérise en ce point un rebroussement de première espèce.

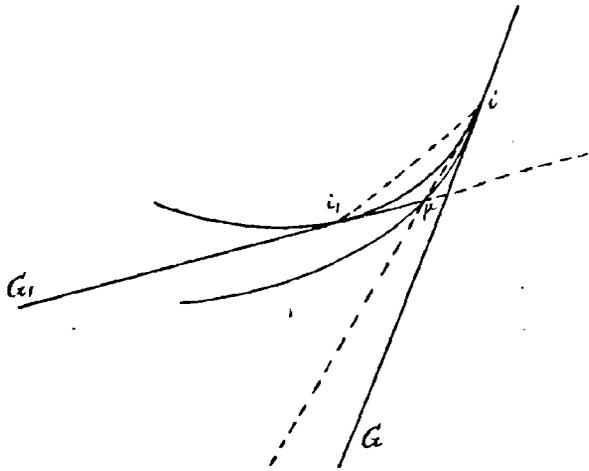
114, Remarques.

La démonstration est en défaut si le plan Q passe par la génératrice de la surface, autrement dit par la tangente à l'arête de rebroussement C au point i où il rencontre cette courbe.

Dans ce cas, en dehors de la génératrice G elle-même le plan coupe toujours la surface suivant une courbe, lieu de ses intersections avec les génératrices successives et il est facile de reconnaître que cette courbe est tangente à G au point i , lorsque Q ne coïncide pas avec le plan osculateur à l'arête de rebroussement C .

En effet soit p un point de cette courbe infiniment voisin de i et intersection du plan Q avec une tangente à l'arête de rebroussement au point infiniment voisin i_1 .

La droite ip qui a pour limite la tangente à la courbe de section est la trace sur le plan Q d'un plan mené par la tangente i_1p et le point infiniment voisin i , lorsque i_1 se rapproche

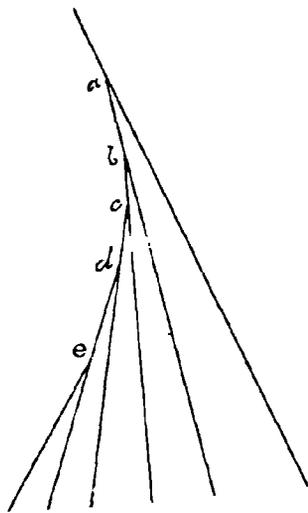


- indéfiniment de i ce plan devient le plan osculateur en i , et la trace $i p$ devient par conséquent la génératrice G , trace du plan osculateur en i sur le plan Q qu'on a supposé distinct de ce plan osculateur (1).

L'arête de rebroussement d'une développable divise cette surface en deux nappes séparées par cette arête à la façon dont les deux nappes d'un cône sont séparées par son sommet.

115) Développement des surfaces développables.

Le polyèdre que nous venons de considérer et qui a pour limite la surface développable lorsque les points a, b, c, d, e, \dots sont infiniment voisins, peut servir utilement à l'étude de la surface.



En effet les propriétés de ce polyèdre qui sont indépendantes de la grandeur de ses facettes doivent appartenir par continuité à la surface elle-même.

C'est ainsi que nous venons de prouver le rebroussement des sections planes et c'est encore ainsi que nous pouvons nous rendre compte simplement de cette propriété importante des

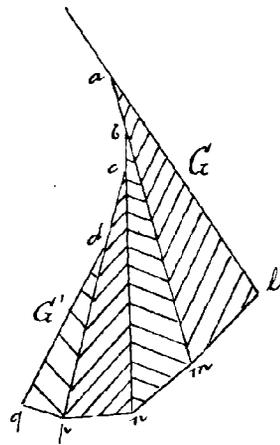
développables d'être applicables sur un plan sans déchirure ni

(1) La section de la surface par le plan Q se compose dans ce cas d'abord de la génératrice G , puis de la courbe lieu des points p qui sont les traces sur le plan Q des génératrices autres que G , et il est facile de s'assurer que cette dernière courbe passe au point i , car dans le triangle i, i, p , le côté i, i étant du premier ordre, et l'angle i, i, p infiniment petit, i, p est du deuxième ordre de petitesse.

ni Duplication, propriété qui a fait donner à ces surfaces le nom caractéristique qu'elles portent.

En effet pour le polyèdre l'application de ses facettes sur un même plan est toujours facile, elle s'effectuera en faisant tourner successivement le polyèdre entier par une rotation d'ensemble autour de chacune de ses arêtes consécutives de manière à appliquer ainsi successivement chacune de ses facettes sur le plan de la facette précédente.

Dans ce développement la surface des facettes n'étant pas modifiée, la surface totale du polyèdre comprise entre son arête



polygonale $abcde$ -----
 -----, une autre ligne
 polygonale quelconque lm
 npq ----- tracée
 sur une de ses nappes et
 deux arêtes rectilignes G et
 G' sera égale à la surface
 plane sur laquelle cette sur-
 face polyédrique se dévelop-
 pera.

Donc à la limite l'aire
 courbe de la développable,
 qui peut être considérée comme
 la limite de la portion corres-
 pondante de la surface polyé-

drique sera égale à l'aire plane vers laquelle tend le développement de cette portion de polyèdres.

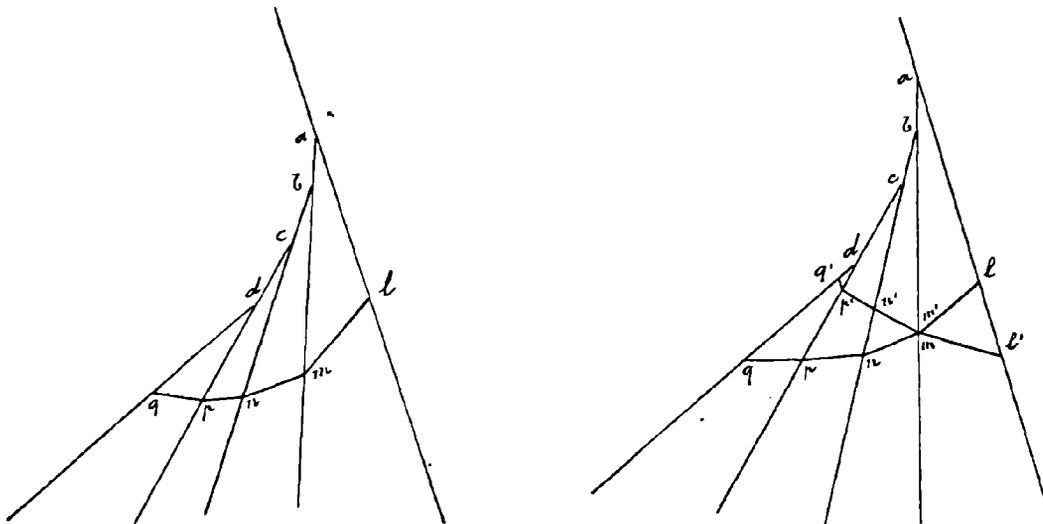
116, Transformation des figures tracées sur une développable par l'effet du développement : conservation des longueurs d'arc et des angles finis ; modification des angles infiniment petits.

Si nous considérons sur les arêtes consécutives du polyèdre une série de points $lmnpq$ ----- formant un polygone infinitésimal tracé sur le polyèdre, dans le développement la longueur de ce polygone ne variera évidemment pas et comme cette propriété est indépendante du nombre des facettes du polyèdre, on peut en conclure que dans le développement de la développable, la courbe C limite du polygone $lmnpq$ ----- se développera suivant une courbe C'

qui passe entre des points correspondants aura même longueur que la courbe C .

Cette courbe C' est dite la transformée de la courbe C .

Ces deux courbes pendant le développement sont constamment tangentes entre elles.



Considérons maintenant un second polygone $l'm'n'p'q'$

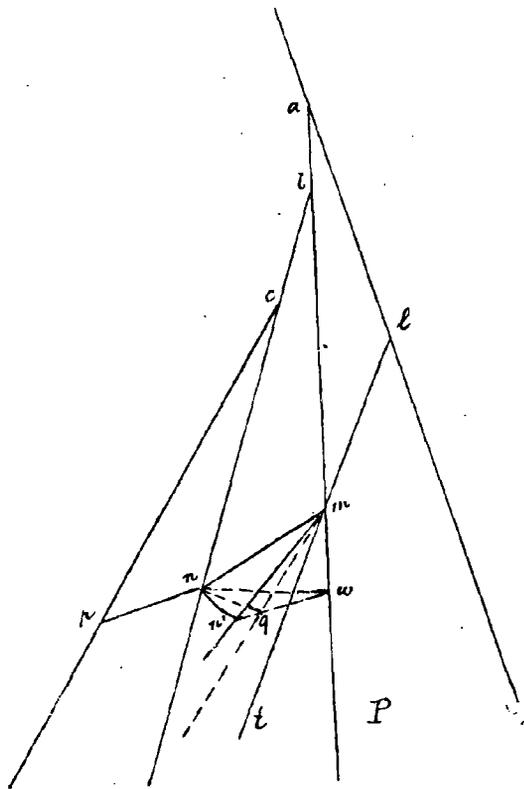
tracé de la même façon que le précédent et croisant le premier en un point tel que m par exemple.

Dans le développement la figure formée autour du point m par les quatre côtés des polygones se modifiera seulement par le déplacement de l'angle $n'mn$ se rabattant sur le plan de l'angle $l'ml'$. Les angles que font entre eux les côtés lm et $l'm$, nm et $n'm$ situés respectivement sur une même facette ne seront donc pas modifiés, et les angles tels que $n'm'l'$, $n'ml$ formés par des côtés situés dans deux facettes différentes, le seront infiniment peu puisque cette modification résultera de la rotation infiniment petite que doit effectuer la seconde facette pour s'appliquer sur le plan de la première. Ces altérations seront donc négligeables à la condition toutefois que les angles eux-mêmes aient des grandeurs finies.

C'est ainsi que l'angle fini que font entre elles les directions de deux courbes qui se coupent n'est pas modifié dans le développement, tandis qu'il n'en est pas de même des angles de contingence. La modification de ces derniers angles entraîne avec elle une modification de la courbure que nous cherchons actuellement à évaluer.

113. Modification de la courbure pendant le développement;
rayon de courbure de la transformée.

Reprenons la figure représentant le polyèdre auxiliaire et le polygone infinitésimal $l-m-n-p$ tracé sur sa surface et



supposons que la facette $l-am$ coïncidant déjà avec le plan P du développement, on fasse tourner la facette $m-b-n$ autour de bm jusqu'à l'appliquer à son tour sur ce même plan P .

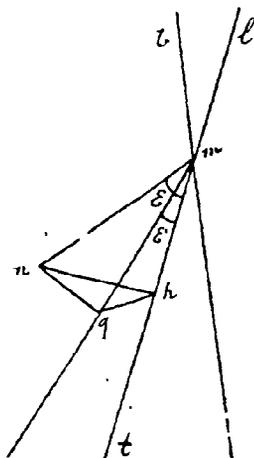
Le point n décrivant autour de bm un arc de cercle de centre w viendra se rabattre en n' , de sorte que l'angle infiniment petit des deux côtés consécutifs $l-m$ et $m-n$ du polygone qui était supplémentaire de nml avant le développement deviendra après le développement supplémentaire de $n'm'l$.

Désignons par E et E' ces deux angles infiniment petits et cherchons à évaluer leur rapport.

Pour cela, abaissons de n la perpendiculaire nq sur le plan P ; le pied de cette perpendiculaire tombera sur $n'w$ et la longueur $n'q$ égale à ncw multipliée par la différence entre l'unité et le cosinus de l'angle $n'cn$ sera infiniment petite du troisième ordre au moins, car l'angle $n'cn$ qui mesure l'inclinaison de deux facettes consécutives du polyèdre est infiniment petit, et il en est de même du côté $n'cw$ opposé dans le triangle $n'cw$ à l'angle infiniment petit de deux arêtes consécutives de ce polyèdre.

En en conclut que l'angle $n'mq$, d'ordre supérieur au premier, peut être négligé dans les évaluations où subsisteront des quantités du premier ordre et que l'angle qmt peut être pris en conséquence pour égal à E' .

Mais si du point q nous abaissons qh perpendiculaire à mt et si nous joignons nh , cette droite d'après le théorème des trois perpendiculaires sera elle aussi perpendiculaire à mt de sorte que l'angle nhq mesurera l'angle que font entre eux le plan lmn c'est-à-dire le plan de deux côtés consécutifs du polygone avec le plan qmh c'est-à-dire avec le plan P de la facette m à l .



D'autre part dans les triangles rectangles nhm , qhm on a

$$\text{tg. } \mathcal{E} = \frac{nh}{hm} \quad \text{et } \text{tg. } \mathcal{E}' = \frac{qh}{hm}$$

d'où

$$\frac{\text{tg. } \mathcal{E}'}{\text{tg. } \mathcal{E}} = \frac{qh}{nh} = \cos. nhq$$

et puisque les angles \mathcal{E}' et \mathcal{E} sont infiniment petits

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \cos. nhq$$

et en passant aux limites

$$\text{Lim. } \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \cos \theta$$

en désignant par θ l'angle que fait le plan osculateur au point m à la courbe limite du polygone $lmn \dots$ avec le plan tangent à la surface développable en ce même point.

Or nous avons vu que dans un polygone infinitésimal, le rapport de l'angle de deux côtés consécutifs à la longueur du premier de ces côtés pouvait être pris à la limite comme mesure de la courbure

limite du polygone. On a donc dans le cas actuel, en désignant par ρ et ρ' les rayons de courbure respectifs au point m de la courbe tracée sur la développable (limite de $l m n \mu$) et de la courbe transformée (limite $l m n'$)

$$\rho = \lim. \frac{lm}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \rho' = \lim. \frac{lm'}{\varepsilon'}$$

d'où

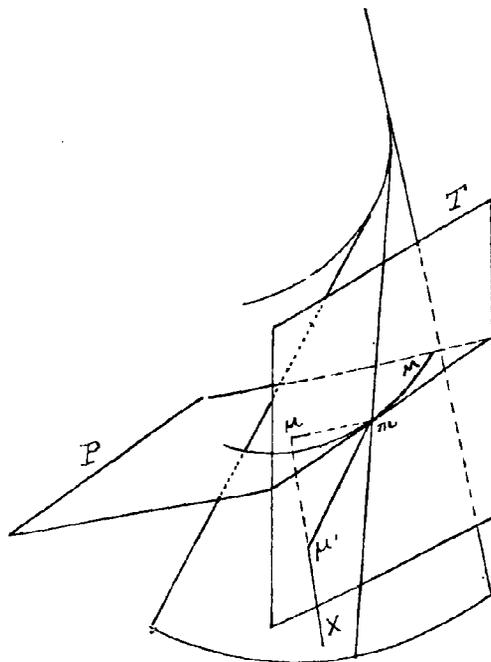
$$\frac{\rho'}{\rho} = \lim. \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{\cos \theta}$$

On peut énoncer ce résultat en disant que le rayon de courbure en un point de la courbe transformée s'obtient en divisant le rayon de courbure de la courbe primitive par le cosinus de l'angle que font entre eux le plan osculateur de cette courbe et le plan tangent à la développable au point considéré.

La longueur de ce rayon de courbure peut s'obtenir par une construction simple : considérons en effet le point μ centre de courbure de la courbe donnée M au point m et par μ menons l'axe de courbure μx de cette courbe.

Cet axe de courbure percera le plan tangent à la développable en son point μ' et comme le plan $m \mu \mu'$ est normal en m à M c'est-à-dire perpendiculaire à mt , l'angle $\mu m \mu'$ est précisément l'angle θ du plan P osculateur à M en m avec le plan T tangent à la développable.

L'hypoténuse $m \mu'$ du triangle $m \mu \mu'$ est donc égale au rayon de courbure de la transformée puisqu'on a :



$$m \mu' \cos. \theta = m \mu = \rho$$

118) Conséquences de la relation précédente.

Si une courbe a en l'un de ses points son plan osculateur normal à la développable, sa transformée a au point correspondant un rayon de courbure infini et présente par conséquent en ce point une inflexion de première espèce.

Si cette particularité se reproduisait en tous les points d'une courbe, cette courbe aurait pour transformée une droite et comme les longueurs d'arcs ne se modifient pas dans le développement, on voit que la courbe en question jouirait sur la développable de la propriété de la droite dans le plan d'être le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. Et l'on peut dire réciproquement que si une courbe jouit de cette propriété sur la développable, sa transformée devant être une droite, son plan osculateur d'après la relation précédente, devra être en chacun de ses points normal à la développable.

On donne le nom de ligne géodésique à la ligne de longueur minimum tracée entre deux points sur une surface. La propriété remarquable que nous venons de démontrer pour les lignes géodésiques des développables s'étend comme nous le verrons plus loin aux géodésiques tracées sur une surface quelconque.

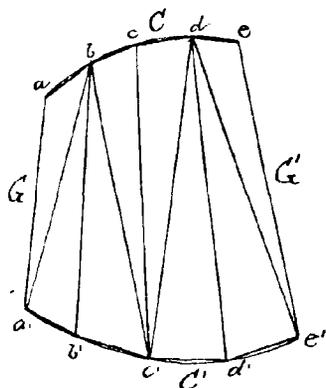
La formule $\rho = \frac{\rho'}{\cos \theta}$ appliquée à l'arête de rebroussement pour laquelle θ est nul, fait voir que le rayon de courbure de cette courbe ne se modifie pas dans le développement.

119) Développement approximatif d'une portion de surface développable.

On peut effectuer le développement approximatif d'une portion de développable comprise entre deux courbes C et C' et deux génératrices limites G et G' en opérant de la façon suivante.

On prend sur la courbe C une succession de points suffisamment

voisins $abcde$ et l'on mène les génératrices par ces points. Elles



rencontrent l'autre courbe C' en des points $a'b'c'd'e'$. On joint les points $abcde$, $a'b'c'd'e'$ par des lignes polygonales, et l'on obtient ainsi une série de quadrilatères gauches que l'on décompose en triangles par des diagonales.

On construit ensuite sur un même plan une suite de triangles égaux à ces triangles et l'on a le développement approxi-

matif cherché. Les lignes tracées sur la portion de développable considérée se reportent ensuite sur le développement au moyen de leurs points de rencontre avec les génératrices.

120, Complément à l'étude des surfaces gauches et des courbes gauches.

La connaissance que nous avons actuellement des surfaces développables nous permet de revenir sur l'étude des surfaces réglées et sur celle des courbes gauches pour les compléter par la simplification de quelques énoncés et par l'addition de quelques définitions nouvelles.

Ainsi si nous considérons les plans tangents à l'infini ou plans asymptotiques correspondant aux génératrices successives d'une surface gauche, la série de ces plans enveloppera une développable qui est dite développable asymptote de la surface gauche considérée (cône asymptote dans le cas particulier de l'hyperboloïde).

Et il est facile de voir que les génératrices de la développable asymptote sont parallèles aux génératrices correspondantes de la surface. En effet, nous avons remarqué que les plans asymptotiques étaient parallèles aux plans tangents au cône directeur; or le plan tangent à un cône à la génératrice de ce cône pour caractéristique.

Autre application de la théorie des développables :

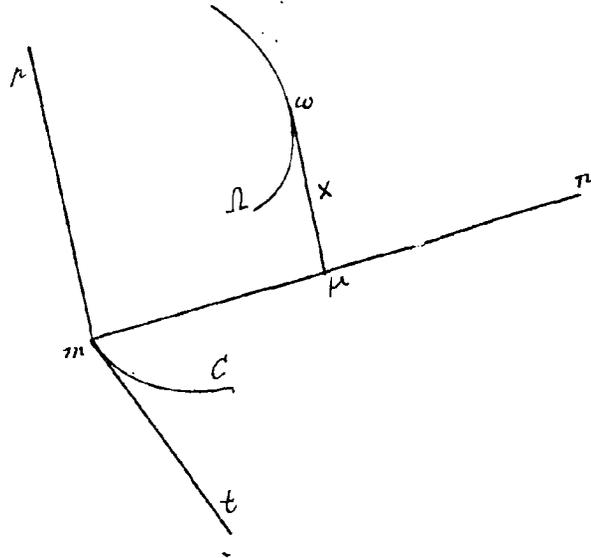
Nous avons démontré que la série des plans normaux à une

courbe gauche avait les axes de courbure de cette courbe pour caractéristiques. Nous pouvons énoncer désormais ce résultat en disant que les axes de courbure d'une courbe gauche forment une surface développable enveloppe des plans normaux à la courbe.

L'arête de rebroussement Ω de cette développable est le lieu des centres des sphères osculatrices à la courbe donnée C .⁽¹⁾ C'est une courbe qui a pour angle de contingence l'angle de torsion de la courbe donnée, et pour angle de torsion son angle de contingence; en effet les tangentes à la courbe Ω sont perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe C et les tangentes à la courbe C sont perpendiculaires aux plans normaux à cette courbe, c'est-à-dire aux plans tangents à la développable qui sont osculateurs à son arête de rebroussement Ω .

Si nous considérons le trièdre $m(tnp)$ formé par la tangente, la normale principale et la binormale à une courbe gauche en l'un de ses points et si nous imaginons ce trièdre dans les positions successives qu'il occupe lorsque le point m décrit la courbe gauche, sa face tmn a pour caractéristique mt et enveloppe la développable (C) dont la courbe C est l'arête de rebroussement. La face pnm a pour caractéristique l'axe de courbure X et enveloppe la développable (Ω) ayant la courbe Ω pour arête. Quant à la face tnp sa caractéristique sera une droite passant par m qu'il n'est pas difficile de

(1) On peut s'en rendre compte de la façon suivante: Si nous considérons un polygone m_1, m_2, m_3, \dots inscrit dans la courbe C et si nous imaginons les axes des cercles passant par des sommets consécutifs $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, \dots$, deux axes consécutifs se rencontrant en un point qui est le centre de la sphère menée par les quatre points consécutifs correspondants, ces axes forment un polygone gauche dont les sommets $\omega_1, \omega_2, \dots$ sont les centres des sphères considérées. Et comme ce résultat est indépendant de la grandeur des côtés du polygone m_1, m_2, m_3, \dots , on peut l'appliquer au cas d'un polygone infini-
simal ce qui conduit à la propriété énoncée puisqu'à la limite le polygone m_1, m_2, m_3, \dots devient la courbe C , le polygone $\omega_1, \omega_2, \dots$ la courbe Ω et que les sphères passant par quatre points infiniment voisins de C sont alors des sphères osculatrices à cette courbe.



de déterminer⁽¹⁾ et la courbe C qui appartient à la développable que cette face enveloppe est une ligne géodésique de cette développable, puisque son plan osculateur qui est $t m p$ est constamment normal à la surface. Dans le développement de cette surface la courbe donnée se transformerait donc en une droite.

Le géomètre Lancelotti qui a le premier

considéré cette développable lui a donné pour cette raison le nom de surface rectifiante. Les noms de plan rectifiant et de droite rectifiante ont été donnés pour ce même motif au plan $t m p$ et à sa caractéristique.

121. Divers modes de génération des développables.

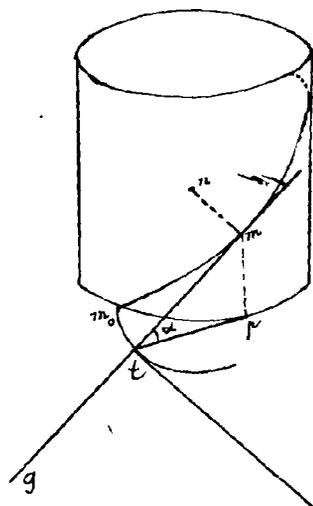
Une surface développable qui n'est ni un cône ni un cylindre peut être déterminée de différentes manières; par la connaissance de son arête de rebroussement par exemple - ou par l'obligation imposée à ses génératrices de rencontrer deux courbes directrices ou de toucher deux surfaces directrices - ou bien enfin par la condition de s'appuyer sur une courbe ou de toucher une surface jointe à celle de rester parallèle aux génératrices d'un cône directeur.

(1) La caractéristique du plan $t m p$ passe par m , car ce plan renfermant dans ses positions successives les génératrices mt de la développable C , sa caractéristique doit passer par son point de contact avec cette développable, c'est-à-dire par le point m .

Dans le premier cas la construction des génératrices revient à celle des tangentes à une courbe gauche.

Prenez par exemple le cas d'une hélice. Nous savons construire les tangentes à cette courbe, nous obtiendrions donc sans difficulté les génératrices de la surface qui recoit dans ce cas le nom d'h licoide développable.

Cette surface se rencontre même souvent en Mécanique, et nous aurons occasion d'en reparler à propos de l'étude générale des h licoides réglés à laquelle nous consacrerons une leçon à la fin du cours.



Remarquons d s à présent que les génératrices telles que mg peuvent être considérées comme les positions successives occupées par la droite $m t$ développement de l'arc d'hélice $m m_0$ sur le plan tangent au cylindre si l'on suppose que ce plan roule sur le cylindre. On voit immédiatement ainsi que le segment pt étant le développement de l'arc pm_0 du cercle de base du cylindre, le point t décrit un arc de développante de cercle.

D'ailleurs la surface est visiblement superposable à elle même, comme l'hélice qui est son arête, le long de ses génératrices successives, ses sections par tous les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre doivent donc être identiques.

Les plans tangents qui sont les plans osculateurs à l'hélice passent par les normales au cylindre aux points correspondants de l'hélice, et font avec le plan perpendiculaire à l'axe l'angle α de l'hélice. Cet angle est lié d'ailleurs, comme on l'a vu au rayon du cylindre et au pas de l'hélice par la relation

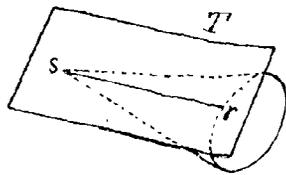
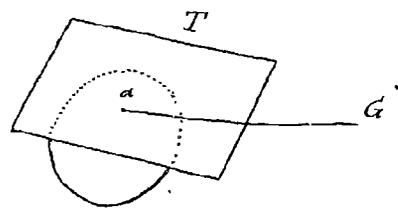
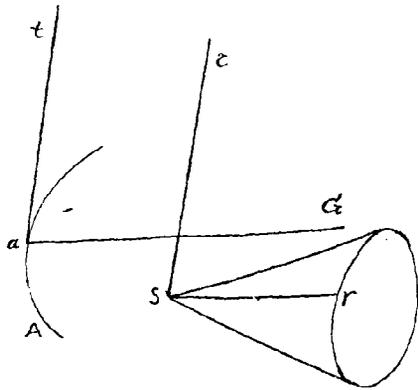
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$$

Enfin dans le développement de la surface, l'arête de rebroussement ayant un rayon de courbure constant se développe suivant

-un cercle dont le rayon, égal au rayon de courbure de l'hélice, a pour valeur

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

Dans le cas où la surface développable est définie par deux courbes directrices ou deux surfaces directrices, ou bien encore par une courbe directrice et une surface directrice, son plan tangent est un plan tangent commun aux courbes ou aux surfaces directrices et sa génératrice est la caractéristique de ce plan. Nous verrons dans les dernières leçons du cours quelques exemples de surfaces développables ainsi déterminées.



Si l'on a un cône directeur et une directrice, on obtiendra une génératrice en prenant un point a sur la directrice A , en menant par le sommet S du cône directeur une parallèle ST à la tangente at à A , en prenant la génératrice de contact Sr d'un plan tangent au cône mené par ST , et en menant par a la parallèle ag à Sr .

Si la courbe directrice était remplacée par une surface directrice, on mènerait à cette surface des plans tangents T parallèles aux plans tangents T' au cône directeur et par les points de contact tels que a des parallèles ag aux génératrices de contact correspondantes Sr sur le cône.

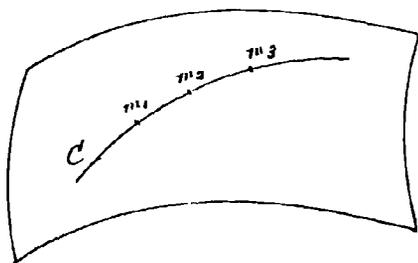
Éléments caractéristiques du second ordre d'une surface en l'un de ses points.

122, Revenons actuellement aux surfaces en général et reprenons l'étude des propriétés qui résultent pour elles de la continuité admise dans leur génération.

Nous avons déjà démontré que les tangentes à toutes les courbes tracées par un point sur une surface appartenaient à un même plan, et ce plan, dépendant des éléments caractéristiques du premier ordre des courbes, a constitué pour nous un élément caractéristique du premier ordre de la surface au point considéré.

Nous allons reconnaître qu'il existe également des liaisons très-simples entre les rayons de courbure des diverses courbes tracées sur une surface par l'un de ses points. Par ces liaisons les rayons de courbure de toutes ces courbes se trouvent rattachés à un certain nombre d'éléments géométriques finis, qui, dépendant des éléments caractéristiques du deuxième ordre des courbes constitueront naturellement les éléments caractéristiques du deuxième ordre de la surface au point considéré.

123, Liaison entre les courbures des sections passant par une même tangente : relation de Menonier.



Remarquons tout d'abord qu'une courbe C étant tracée sur une surface, si l'on prend sur cette courbe un point M_1 et deux points infiniment voisins M_2 et M_3 , le plan passant par M_1, M_2, M_3 coupe la surface suivant une section plane qui, lorsque M_2 et M_3 viennent se confondre avec M_1 , a même courbure en ce point que la courbe

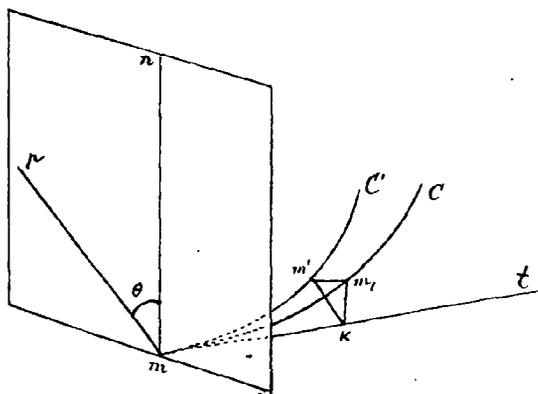
C et appartient à son plan osculateur.

Pour l'étude de la courbure des courbes tracées par un point d'une surface, on peut donc toujours substituer à ces courbes les sections planes de la surface par leurs plans osculateurs.

Cela posé, considérons d'abord les différentes sections passant par une même tangente mt . Soit C' une de ces sections et C la section normale correspondante, c'est-à-dire la section par le plan de mt et de la normale mn .

La position du plan de section C' est déterminée par l'angle θ

que fait sa trace mp sur un plan perpendiculaire à mt avec la normale mn .



Preons sur C' un point m' infiniment voisin de m et menons par m' un plan perpendiculaire à mt .

Ce plan coupe les plans des sections C' et C suivant des droites $m'm_1$, $m'm_2$, respectivement parallèles à mp et à mn - et formant le triangle infinitésimal $m'm_1m_2$ (du second ordre

de petitesse si mm' est du premier), dans lequel l'angle K sera égal à θ , et l'angle m_1 infiniment peu différent de 90° puisque m, m' rencontrant la surface en deux points infiniment voisins de m devient à la limite une tangente en M à la surface.

On aura donc par la considération de ce triangle

$$\lim \frac{m_1 K}{m_2 K} = \lim \frac{\sin(90^\circ + \varepsilon + \theta)}{\sin(90^\circ + \varepsilon)} = \cos \theta$$

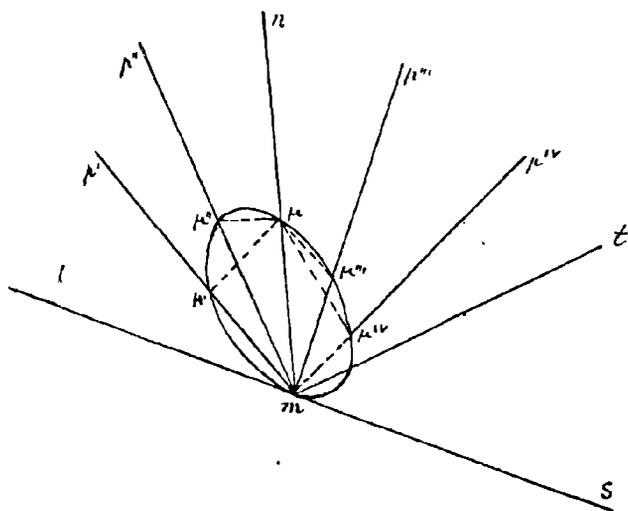
Mais d'après une formule connue, en désignant par R et R' les rayons de courbure des sections, on a :

$$R = \lim \frac{m_1 K^2}{2 m_1 K} \quad \text{et} \quad R' = \lim \frac{m_2 K^2}{2 m_2 K}$$

d'où

$$\frac{R'}{R} = \lim \frac{m_1 K'}{m' K} = \cos. \theta$$

Cette relation remarquable, qui est due à Meunier et qui porte son nom, fait voir que les centres de courbure μ' μ'' μ''' des différentes sections faites dans une surface par des plans passant par une même tangente mt sont les projections sur ces plans du centre de courbure μ de la section normale correspondante.⁽¹⁾



Le lieu de ces centres de courbure est donc la circonférence décrite sur $m\mu$ comme diamètre dans le plan nms perpendiculaire à mt .

(124) Il est intéressant de remarquer que la relation de Meunier donne un rayon de courbure tendant vers l'infini lorsque le plan de section s'inclinant de plus en plus sur la normale tend à se confondre avec le plan tangent lui-même.

Or ce résultat se vérifie bien dans le cas des surfaces situées d'un même côté de leur plan tangent au voisinage du point de contact, puisque la section devient alors une courbe évanescente, mais il ne semble pas conforme à la réalité quand la surface traverse son plan tangent. Nous avons vu en effet que dans ce cas la section devait se composer au voisinage du point m de deux branches, et les rayons de courbure de ces branches peuvent avoir une

(1) Ce résultat peut encore s'énoncer en disant que les axes de courbure des différentes sections tangentes entre elles au point m passent tous par un même point μ de la normale à la surface en m , ce point étant, comme cas particulier, le centre de courbure de la section normale.

valeur quelconque (ils sont infinis par exemple dans le cas de l'hyperboloïde et du parabolôïde), et prennent une valeur finie dans le cas du plan bitangent au tore qui coupe cette surface suivant deux cercles.

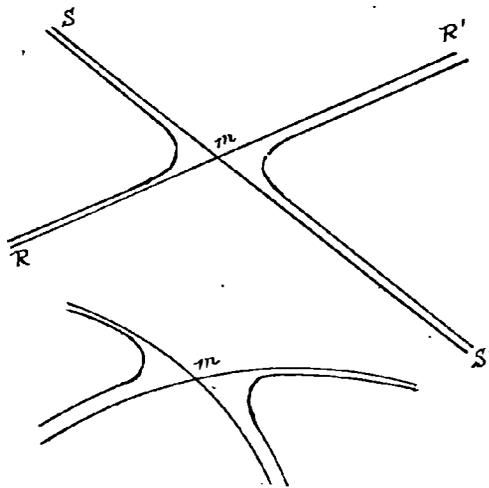
Et si l'on peut dire que la démonstration de la relation de Meusnier ne s'applique plus au plan tangent, il est certain qu'elle doit s'appliquer à un plan d'inclinaison infiniment peu différente dont la section, différant infiniment peu par continuité de celle du plan tangent, ne saurait avoir au point m un rayon de courbure infiniment petit.

Pour expliquer cette contradiction apparente nous remarquerons que dans le cas de l'hyperboloïde ou du parabolôïde par exemple, cette section infiniment peu différente de celle du plan tangent se compose

d'une hyperbole qui se confond avec ses asymptotes à la limite.

La section par le plan tangent se présente donc ici non comme un système de deux droites RR' , SS' mais comme deux angles RmS , $R'mS'$ et ces angles présentent en m une courbure infinie, correspondant à un changement brusque de direction.

Les choses se passent d'une façon analogue dans le cas d'une surface quelconque qui traverse toujours son plan tangent, comme nous l'avons vu, suivant une courbe dont deux

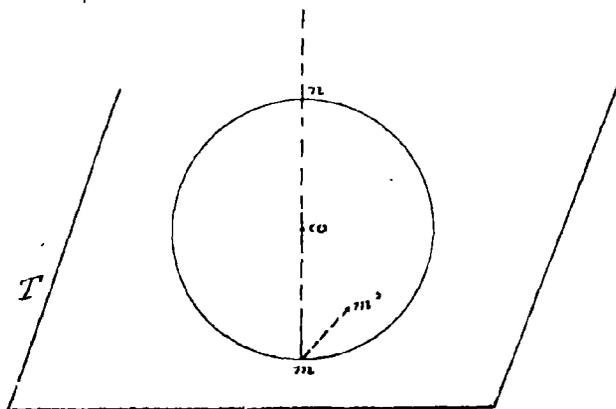


branches se croisent au point de contact.

125. Autre démonstration de la relation de Meusnier.

Le théorème que nous venons de démontrer ayant une grande importance, nous croyons utile d'en donner une seconde démonstration qui a l'avantage de rattacher cette propriété générale des surfaces à une propriété bien connue et presque évidente de la sphère.

Imaginons une sphère tangente à la surface donnée au point

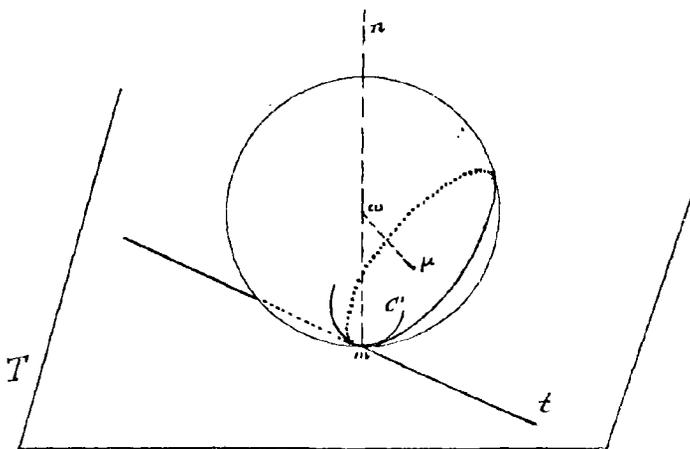


m . La position du centre c de cette sphère sur la normale mn restant arbitraire, nous pouvons profiter de cette indétermination pour faire passer la sphère par un point quelconque m' de la surface.

Si nous coupons alors par des plans passant par mm' nous obtiendrons dans la surface une série de sections planes et dans la sphère une série de cercles tangents en m aux sections de la surface (puisque la sphère et la surface sont tangentes entre elles en ce point) et ayant encore en commun avec ces sections le point m .

sections de la surface (puisque la sphère et la surface sont tangentes entre elles en ce point) et ayant encore en commun avec ces sections

le point m .



Supposons actuellement que le point m' se rapproche indéfiniment du point m , les plans de section seront conduits à la limite par une même tangente mt , limite de mm' et les cercles sections de la sphère seront osculateurs aux sections C' de la surface, puisque ces courbes pourront être considérées comme limites de courbes ayant trois

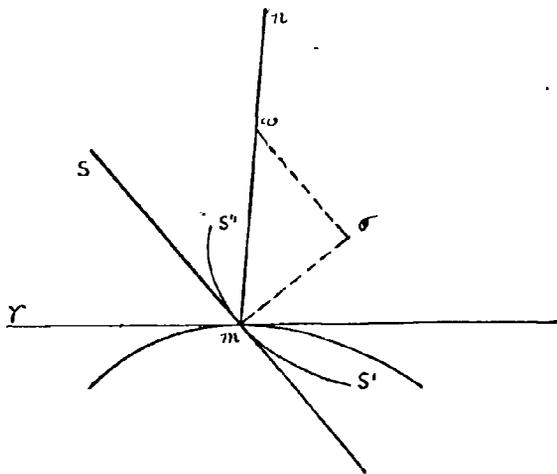
points infiniment voisins communs.

Mais alors les cercles ont pour centres μ les projections du centre co de la sphère sur leurs plans respectifs ; donc les centres de courbure des sections planes de la surface menées par une même tangente mt sont les projections sur ces plans d'un même point co de la normale qui coïncide comme cas particulier, avec le centre de courbure de la section normale elle-même.

126. Conséquences de la relation de Meusnier.

Si deux surfaces S et S' qui se raccordent en un point m , se traversent au voisinage de ce point, les sections normales menées par les tangentes mT , mS aux deux branches de leur courbe d'intersection ont même courbure dans ces deux surfaces.

En effet considérons l'une des branches d'intersection, la branche $S'mS''$ par exemple.



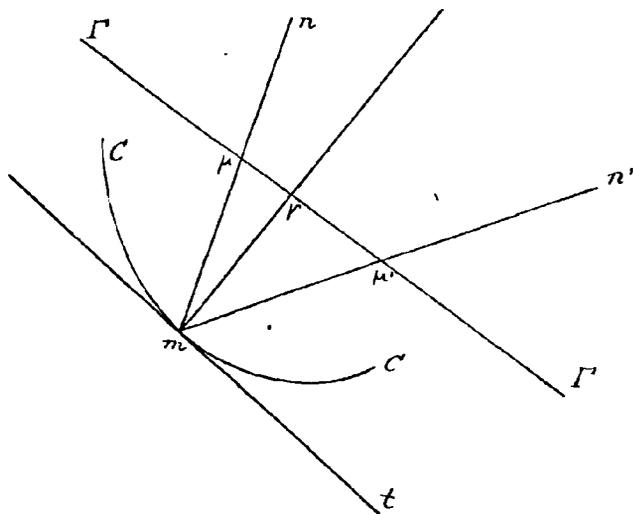
D'après la relation de Meusnier le centre de courbure I de cette courbe au point m doit s'obtenir en projetant sur son plan osculateur le centre de courbure co de la section normale correspondante et comme cette construction peut se faire indifféremment dans l'une ou l'autre surface puisque la courbe leur appartient

également, les centres de courbure des deux sections normales doivent nécessairement coïncider.

Autre conséquence du théorème de Meusnier.

Si deux surfaces S et S' se croisent suivant une courbe C sans se raccorder le long de cette courbe, le plan osculateur de la courbe C est perpendiculaire à la droite qui joint les centres de courbure μ et μ' des sections normales correspondantes dans les deux surfaces, car l'axe de courbure I de la courbe C qui

doit passer à la fois par ces deux points est précisément la

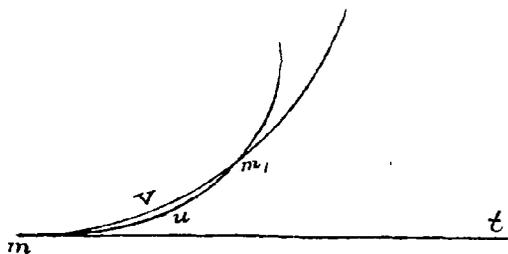


droite pp' et le plan osculateur de la courbe lui est perpendiculaire.

Cette remarque due à Hachette fournit un moyen de construire le plan osculateur à la courbe d'intersection de deux surfaces S et S' lorsque ces surfaces sont connues.

(127) Enfin à la seconde démonstration du théorème de Meusnier se rattache encore l'extension aux surfaces quelconques d'un théorème que nous avons démontré dans le cas des développables et d'après lequel les lignes géodésiques (c'est-à-dire de longueur minimum entre deux quelconques de leurs points) tracées sur ces surfaces ont, en tous leurs points, leur plan osculateur normal à la surface.

Remarquons en effet qu'une ligne minimum entre ses deux extrémités a et b doit être aussi minimum entre deux quelconques de ses points.



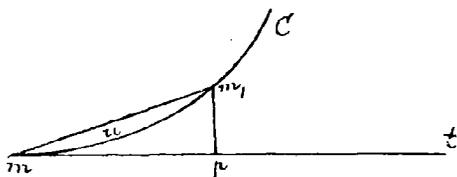
Considérons donc sur une pareille ligne un arc infiniment petit m_1m_1 . D'après un lemme que nous admettons sans le démontrer géométriquement, si deux courbes quelconques qui partent tangentielllement

d'un point m se rencontrent de nouveau en un point m_1 infiniment voisin du premier la différence de longueur de leurs arcs m_1m_1 , $m_1v m_1$, est un infiniment petit du quatrième ordre au moins,

la distance mm_1 , étant supposée du premier.⁽¹⁾ Et par suite ces deux arcs peuvent être indifféremment substitués l'un à l'autre pour l'évaluation des différences entre leurs longueurs et celle de leur corde commune, différences qui sont comme nous l'avons déjà vu du troisième ordre de petitesse.

(1) Voici une démonstration analytique de ce lemme.

Soit S , la longueur de l'arc infiniment petit mm_1 d'une courbe C tangente à la droite mt en m . Appelons l la longueur de la corde mm_1 , et r la courbure au point m .



La différence δ entre S et l a pour expression

$$\delta = S - l = \frac{r^2}{24} l^3 + \mathcal{E}_4$$

en désignant par \mathcal{E}_4 une quantité infiniment petite d'ordre supérieur au troisième et comme d'après cette relation même la différence de S avec l est d'ordre supérieur au premier, on peut encore écrire

$$\delta = \frac{r^2}{24} l^3 + \mathcal{E}_4$$

Si nous imaginons actuellement une seconde courbe C' tangente à mt en m comme la première et passant également au point m_1 , on aura pour cette courbe C'

$$\delta' = \frac{r'^2}{24} l^3 + \mathcal{E}'_4$$

de sorte que

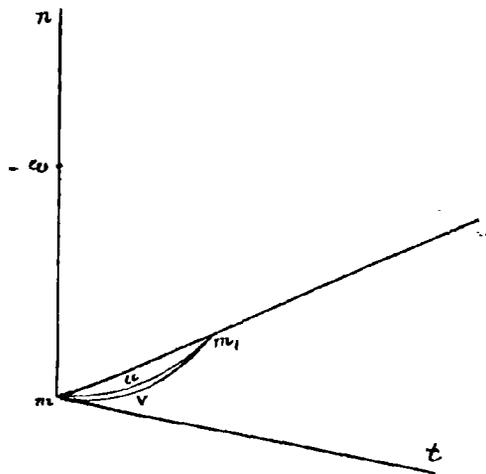
$$\delta' - \delta = \frac{r'^2 - r^2}{24} l^3 + \mathcal{E}''_4 = \frac{(r' - r)(r' + r)}{24} l^3 + \mathcal{E}''_4$$

Or lorsque m_1 se rapproche infiniment de m les rayons de courbures des courbes C et C' ne peuvent différer que par un infiniment petit puisqu'ils sont tous deux limite de la même expression

$$\frac{-mm_1 p^2}{2mm_1 p}$$

il en est donc de même des courbures et $r' - r$ étant infiniment petit, l'expression de $\delta' - \delta$ qui est égale à $\delta' - \delta$ est au moins du quatrième ordre de petitesse.

Imaginons actuellement une sphère de centre ω tangente à la surface donnée en m et passant par le point m_1 . A toute courbe $m u m_1$, tracée entre m et m_1 , sur la surface correspondra sur la sphère un cercle $m v m_1$, section de la sphère par le plan de la



tangente $m t$ à la courbe et du point m_1 , et cet arc de cercle pourra être substitué à l'arc de courbe pour l'évaluation qui nous occupe. Mais parmi tous les cercles que l'on peut obtenir ainsi, celui qui a le plus grand rayon et par conséquent le plus petit arc, pour une même corde, est évidemment le grand cercle de la sphère.

Donc la ligne géodésique sera celle des courbes $m u m_1$, pour laquelle le plan $t m m_1$, passera par le centre ω , et comme ce plan est à la limite osculateur à la courbe considérée, la propriété des lignes géodésiques d'avoir leur plan osculateur normal à la surface sur laquelle elles sont tracées, se trouve ainsi démontrée.

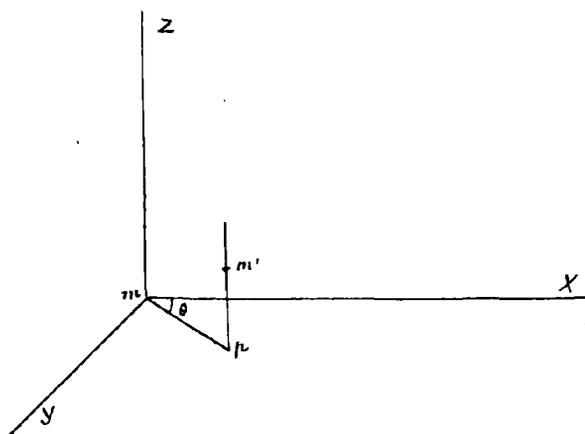
128. Liaison entre les courbures des sections normales. Indicatrice de Charles Dupin.

La relation de Meusnier établit une liaison entre les courbures des sections faites par des plans passant par une même tangente à la surface, et rattache par une construction simple les centres de courbure des sections obliques au centre de courbure de la section normale correspondante. Il nous reste actuellement à rechercher la relation qui par raison de continuité doit exister entre les courbures des différentes sections normales, à établir en d'autres termes la loi suivant laquelle le rayon de courbure varie lorsque la section pivote autour de la normale à la surface au point considéré.

Pour y parvenir nous chercherons d'abord à nous rendre compte de la forme qu'affecte la surface autour d'un de ses points m . Des sections faites dans la surface par des plans H parallèles au plan tangent en m et infiniment peu distants de ce plan tangent nous

renseigneront à cet égard.

Prenez la normale mZ et deux droites rectangulaires quelconques d'ailleurs mX , mY du plan tangent comme axes de coordonnées. La cote Z d'un point m' de la surface infiniment voisin de m



au-dessus du plan tangent Z dépendra évidemment de la position de sa projection p sur ce plan, autrement dit de ses coordonnées x et y et, en raison de la continuité que nous avons supposée dans la génération de la surface, Z devra être une fonction continue de x et y généralement développable suivant les puissances croissantes de ces deux variables.

Mais x et y , pour les points tels que m' infiniment voisins de m , sont des infiniment petits de même ordre en général que mm' dont ils sont les projections orthogonales sur des axes auxquels mm' n'est pas perpendiculaire, et si l'on observe d'autre part que Z doit s'annuler avec x et y et que sa grandeur $mm'p$ doit être infiniment petite du second ordre par rapport à mm' , c'est-à-dire aussi par rapport à x et y , ce développement pourra se mettre sous la forme

$$Z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + E_3$$

en désignant par r , s et t trois constantes⁽¹⁾ et par E_3 une quantité qui, renfermant dans chacun des termes composant son expression x et y à des puissances dont la somme est au moins égale à 3, est par conséquent infiniment petite au moins du troisième ordre.

Si nous désignons d'ailleurs par ρ la longueur mp , et par θ l'angle que fait cette droite avec mX , la relation précédente

(1) Ces constantes sont les valeurs que prennent les dérivées secondes

$$\frac{d^2z}{dx^2} \quad \frac{d^2z}{dxdy} \quad \frac{d^2z}{dy^2} \quad \text{lorsqu'on fait } x \text{ et } y \text{ égaux à } Z=0 \text{ dans}$$

leurs expressions générales déduites de l'équation $Z = f(x, y)$ de la surface.

peut s'écrire

$$Z = \frac{1}{2} d^2 (T \cos^2 \theta + 2S \sin \theta \cos \theta + t \sin^2 \theta) + \mathcal{E}_3$$

Coupons actuellement la surface par un des plans H précédemment définis, et soit h la distance de ce plan au plan tangent h pouvant recevoir des valeurs positives ou négatives selon que H est d'un côté ou de l'autre de T .

Les sections ainsi obtenues pourront renfermer des points de la surface situés à distance finie du point m , puisque nous avons vu que la section par le plan tangent qu'elles ont pour limite pourrait se composer d'une courbe de dimensions finies, mais en nous bornant aux points m' infiniment voisins de m , nous voyons que leurs coordonnées devront satisfaire à la relation

$$\frac{1}{2} d^2 (T \cos^2 \theta + 2S \sin \theta \cos \theta + t \sin^2 \theta) = h - \mathcal{E}_3$$

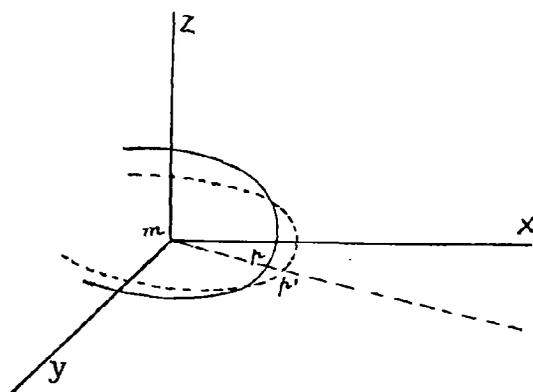
Cette relation exprime qu'en projection sur le plan tangent chacun de ces points à une distance ρ, ρ' infiniment petite d'ordre supérieur au premier du point ρ' situé sur le même rayon $m\rho$ et

appartenant à une conque infiniment petite ayant le point m pour centre et dont l'équation serait

$$\frac{1}{2} d^2 (T \cos^2 \theta + 2S \sin \theta \cos \theta + t \sin^2 \theta) = h$$

ou

$$\frac{1}{2} (Tx^2 + 2Sxy + ty^2) = h \quad (1)$$



(1) En effet on a en désignant encore par \mathcal{E}_3 un infiniment petit du troisième ordre (qui n'est pas exactement celui des équations précédentes)

$$(d^2 - d'^2) = \mathcal{E}_3$$

ou

$$d - d' = \frac{\mathcal{E}_3}{d + d'}$$

c'est-à-dire, puisque d et d' sont des infiniment petits du premier ordre et que \mathcal{E}_3 est du troisième

$\rho\rho' =$ un infiniment petit du second ordre.

Nous pouvons donc en vue des recherches de limites substituer $m\rho'$ à $m\rho$, c'est-à-dire la conique infinitésimale à la section infinitésimale de la surface

Une simplification en résulte. En effet toute conique rapportée à son centre admettant un système d'axes rectangulaires, il sera toujours possible, en déterminant convenablement la position des axes mX et mY jusqu'à présent arbitrairement choisis, de faire coïncider ces axes avec ceux de la conique. Par ce changement la constante S devra s'annuler et les deux autres constantes prenant les valeurs nouvelles I_1 et t_1 , l'équation de la conique infiniment petite deviendra

$$\frac{1}{2} d^2(I_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta) = h$$

ou

$$\frac{1}{2} (I_1 x^2 + t_1 y^2) = h$$

en désignant encore par d et θ , x et y les coordonnées polaires et rectangulaires relatives aux nouveaux axes.

Mais tandis que, par le fait du paramètre h tendant vers zéro, les dimensions de cette courbe infiniment peu différente de la section vont en diminuant d'une manière continue, rien n'empêche d'amplifier ces dimensions, en les multipliant par un même facteur K dont la grandeur ira en croissant au fur et à mesure que le paramètre h deviendra plus petit, de manière à conserver à la courbe ainsi amplifiée et restée semblable à elle-même, des dimensions finies.

Preons par exemple pour K la valeur

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pm 2h}}$$

(λ étant un coefficient de grandeur finie mais encore arbitraire) et les équations précédentes deviendront

$$D^2(I_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta) = \lambda^2$$

et

$$I_1 X^2 + t_1 Y^2 = \lambda^2$$

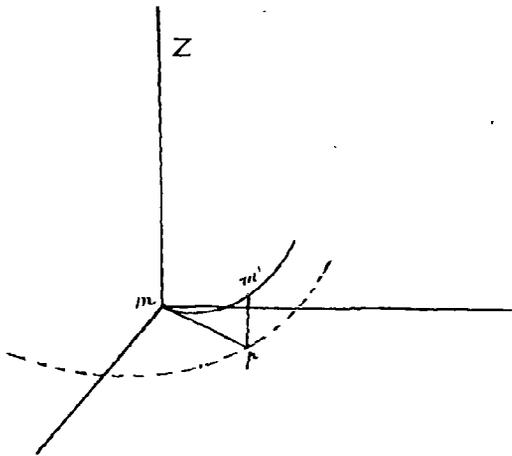
en désignant par D et θ , X et Y les coordonnées des points de la courbe amplifiée.

Cette conique de grandeur finie qu'on suppose tracée dans le plan tangent, mais qui n'est déterminée que de forme, puisque la valeur de λ reste arbitraire, a été considérée pour la première fois par Charles Dupin qui lui a donné le nom d'indicatrice.

On comprend que l'indicatrice, d'après la façon même dont elle a été obtenue, puisse renseigner sur la forme de la surface au voisinage du point auquel elle se rapporte.

Nous allons faire voir qu'elle est très directement liée à la courbure des sections normales en ce point.

129 Reprenons en effet la figure ci-dessous et considérons la section normale menée par la normale en m et le point infiniment voisin m' .



D'après une formule dont nous avons souvent fait usage le rayon de courbure R de cette section au point m sera donné par l'expression

$$R = \lim \frac{m p^2}{2 m' p}$$

ou en remplaçant $m p$ par le rayon vecteur $m p'$ ou d' de la conique infinitésimale, et remarquant que $m' p$ est égal à h

$$R = \lim \frac{d'^2}{2h}$$

Or

$$\lim \frac{d'^2}{2h} = \frac{D^2}{\lambda^2}$$

donc

$$R = \frac{D^2}{\lambda^2}$$

C'est-à-dire que le rayon de courbure d'une section normale est proportionnel au carré du demi-diamètre correspondant de l'indicatrice.

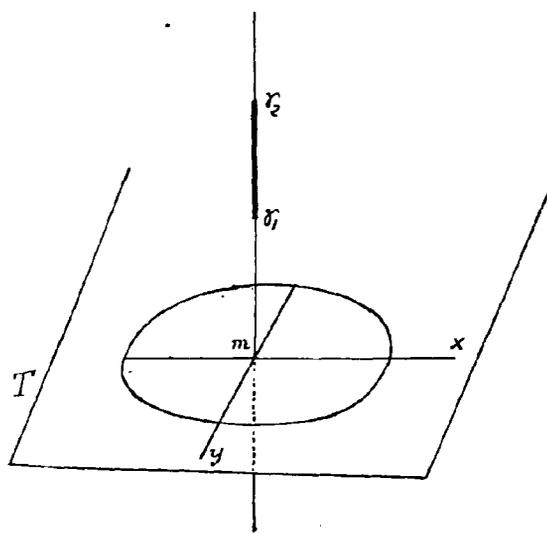
On voit ainsi que la liaison cherchée entre les courbures des sections normales se trouve précisément représentée par l'indicatrice. Cette courbe, par sa forme et son orientation dans le plan tangent, constitue donc un élément caractéristique du 2^e ordre pour la surface au point considéré.

130. Formes diverses de l'indicatrice.

Cherchons actuellement à nous rendre compte des formes diverses que peut affecter l'indicatrice suivant la valeur des coefficients r_1 et t_1 qui la définissent.

1^{er} Cas r_1 et t_1 sont de même signe :
la section infinitésimale n'est réelle que pour un signe déterminé positif ou négatif de h . Cela prouve que la surface est située tout entière d'un même côté de son plan tangent, ce que l'on exprime en disant qu'elle est convexe.

L'indicatrice est elliptique et le rayon de courbure de la



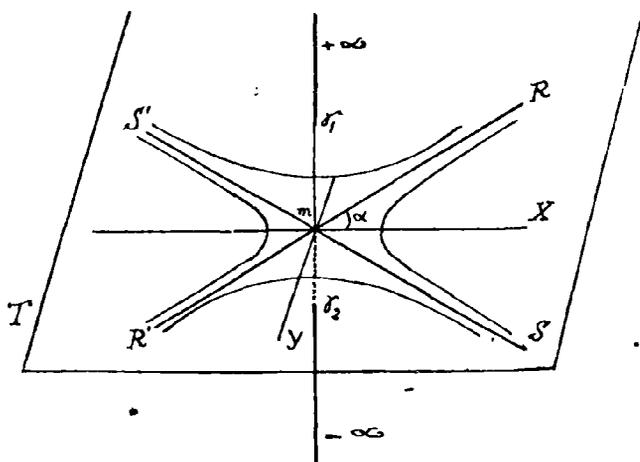
section normale varie entre un minimum $m r_1$, correspondant au petit axe de l'ellipse indicatrice et un maximum $m r_2$, correspondant à son grand axe. Il prend d'ailleurs toutes les valeurs intermédiaires. Le lieu des centres de courbure r des sections normales est donc le segment $r_1 r_2$ de la normale et pour une rotation de 180° du plan normal, le point r parcourt deux fois ce segment.

Les relations simples et bien connues qui existent entre les diamètres conjugués ou rectangulaires d'une conique conduisent dans ce cas comme dans le suivant, à des relations analogues entre les rayons de courbure, relations que nous ne nous arrêtons pas à énoncer ici.

Si $r_1 = r_2$, l'indicatrice est un cercle et les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux : un pareil point est dit un ombilic de la surface.

131) 2: Cas I_1 et t_1 sont de signes contraires.

Supposons par exemple I_1 positif et t_1 négatif.
L'équation de la conique infinitésimale où nous mettrons le signe de t_1 en évidence



$$\frac{1}{2}(I_1 x^2 - t_1 y^2) = h$$

montre que la section est réelle pour toute valeur positive ou négative de h .

Seulement si l'on trace dans le plan tangent les deux directions RR' et SS' correspondant aux angles $+\varphi$ et $-\varphi$ définis par la condition

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{I_1}{t_1}}$$

la courbe, pour des valeurs positives de h , sera comprise dans les angles RmS' , $R'mS'$, tandis que pour h négatif, elle sera comprise dans les deux angles supplémentaires RmS et $R'mS$.

La surface traverse donc son plan tangent et ses sections normales, suivant que leurs traces tombent dans l'un ou l'autre des angles formés par les directions RR' et SS' , se courbent en dessus ou en dessous de ce plan. Pour les plans dont les traces tombent dans l'angle RmS , le centre de courbure sera situé au-dessous du plan tangent, il sera situé en dessous de ce même plan, lorsque la trace de la section tombera dans l'angle $R'mS'$.

On dit dans ce cas que la surface est à courbures opposées.

L'indicatrice obtenue en faisant, suivant le signe de h ,

K égal à $\frac{\lambda}{\sqrt{2h}}$ ou à $\frac{\lambda}{\sqrt{-2h}}$ se compose des deux hyperboles

conjuguées

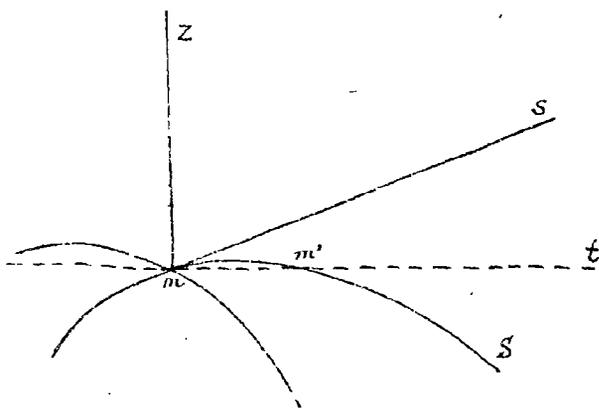
$$r_1 X^2 - t_1 Y^2 = \lambda^2$$

$$t_1 Y^2 - r_1 X^2 = \lambda^2$$

D'ailleurs la relation qui lie les rayons de courbure aux demi-diamètres de l'indicatrice subsistant pour les deux hyperboles, on voit que le centre de courbure se déplace sur la normale de r_1 à $+\infty$ et de $-\infty$ à r_2 ; r_1 et r_2 étant comme précédemment les centres de courbure des sections correspondant aux axes; la continuité dans la variation du rayon de courbure existe donc encore dans ce cas, mais par un passage à l'infini. Les rayons de courbure qui correspondent aux sections $RR'SS'$ sont infinis tandis que ceux correspondant aux axes de l'indicatrice sont des minimums.

Lorsque le plan de section normale partant de la position $r_1 m X$ tourne de 100° autour de la normale en m le centre de courbure part de r_1 pour aller à $+\infty$ puis de $-\infty$ à r_2 , et refait le même chemin en sens inverse; on voit donc qu'il parcourt deux fois les portions marquées en gros trait sur la normale.

132) Nous avons vu que dans le cas où la surface traversait son



plan tangent, ce plan devait la couper en géométral suivant une courbe présentant au point de contact un point double. Il est facile de reconnaître que les tangentes aux deux branches de cette courbe de section sont précisément les asymptotes de l'indicatrice en ce point.

En effet si nous menons un plan de section

normale quelconque dont la trace mt rencontre en un point m' la courbe en question, la section normale ainsi obtenue devra être tangente à la droite mt et la rencontrer en outre au point m' .

Si le plan tournant autour de mZ , le point m' se rapproche indéfiniment de m , la section étant tangente à la droite mt en m et la rencontrant en un point infiniment voisin présentera en ce point une inflexion de première espèce. Son rayon de courbure sera donc infini et la trace qui sera la tangente mS à la branche mS de la section devra coïncider avec une des asymptotes de l'indicatrice. ⁽¹⁾

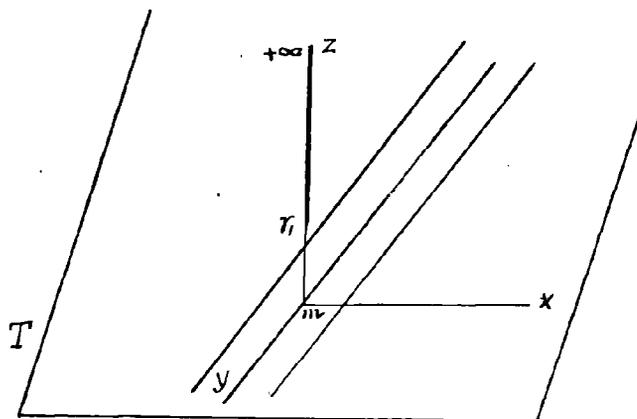
133, 3^e cas : l'une des constantes I_1 ou t_1 est égale à Zéro.

Supposons par exemple que t_1 soit nul.

L'équation de la conique infinitésimale qui se réduit à

$$\frac{1}{2} I_1 x^2 = h$$

montre que selon le signe de h la section sera réelle ou imaginaire.



La surface est donc tout entière d'un même côté de son plan tangent et au-dessus de ce plan si, pour fixer les idées, nous supposons I_1 positif. Elle est donc convexe.

L'indicatrice

$$I_1 X^2 = h^2$$

qui se compose de deux droites parallèles est du genre parabolique et les rayons de courbure varient depuis une valeur minimum

(1) Ceci résulte d'ailleurs comme cas particulier d'une conséquence du théorème de Meusnier établie au paragraphe 126. En effet la section normale ZmS dans le plan tangent étant la droite mS son rayon de courbure qui est infini doit être aussi celui de la section normale correspondante dans la surface.

m et n , qui correspond à la section ZMY jusqu'à une valeur infinie qui correspond à la section ZMX .

Les centres de courbure occupent toute la portion de normale comprise entre η_1 et $+\infty$. Ils parcourent cette droite deux fois, de η_1 à $+\infty$ et de $+\infty$ à η_1 lorsque le plan de section partant de la position ZMX tourne de 180° autour de la normale.

Les points d'une surface pour lesquels les choses se passent ainsi reçoivent le nom de points paraboliques.

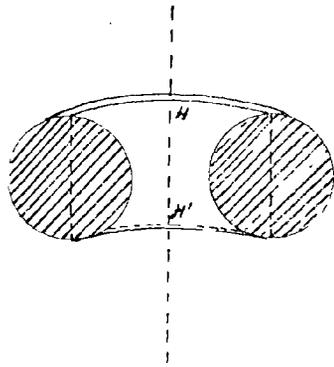
Le dernier cas peut être considéré comme le passage du premier cas examiné au second. Supposons en effet que la surface convexe correspondant au premier cas se déforme de telle manière que η_1 restant fixe, η_2 s'éloigne jusqu'à $+\infty$ sur la normale, on arrivera ainsi au troisième cas, et si en vertu du principe de la continuité par l'infini, le point η_2 passant à $-\infty$ continue à se mouvoir dans le même sens, il se rapprochera de nouveau de m et occupera une série de positions au dessous de m sur la normale, ce qui ramène au second cas, celui des surfaces à courbures opposées.

Le plan tangent qui, dans le premier cas ne touchait la surface qu'en un point, la touche dans le troisième cas suivant un élément de courbe. Cette courbe doit être considérée comme une courbe double dont les deux branches ont pour tangente commune l'un des axes de l'indicatrice. Les deux branches se dédoublent ensuite et leurs tangentes deviennent les asymptotes de l'indicatrice lorsqu'on arrive au cas des surfaces à courbures opposées.

(134) Il y a des surfaces qui sont convexes en tous leurs points comme la sphère et l'ellipsoïde par exemple; il y en a d'autres qui sont en tous leurs points à courbures opposées, comme le parabolôïde hyperbolique, l'hyperbolôïde à une nappe et toutes les surfaces gauches en général. Mais il y a aussi des surfaces qui sont convexes dans certaines régions et à courbures opposées dans d'autres.

Une surface qui vous est familière, le tore se trouve dans ce cas. Lorsqu'il en est ainsi, par raison de continuité, les régions convexes sont séparées des régions à courbures opposées par des courbures qui sont des lieux de points paraboliques. Ainsi dans

Le tore, les deux parallèles extrêmes H et H' forment une ligne de séparation de cette nature et l'on vérifie effectivement que le long de ces parallèles le plan tangent touche la surface suivant une courbe double, puisque ce plan tangent peut être obtenu comme limite d'un plan sécant perpendiculaire à l'axe qui coupe la surface suivant deux cercles.



Dans les surfaces développables tous les points de la surface sont des points paraboliques comme nous le démontrons plus loin (S. 142).

Comme conclusion de cette discussion, nous voyons qu'en général il existe en chaque point d'une surface deux directions rectangulaires pour lesquelles le rayon de courbure de la section normale est maximum ou minimum. Ces directions sont celles des axes de l'indicatrice elles sont dites directions principales.

Les sections normales correspondantes sont les sections principales de la surface au point considéré : leurs rayons de courbure et leurs centres de courbure sont les rayons de courbure principaux et les centres de courbure principaux.

Enfin les axes de courbure des sections principales sont encore désignés sous le nom d'axes de courbure de la surface.

Les sections normales menées par les asymptotes de l'indicatrice dans le cas des surfaces à courbures opposées sont dites sections asymptotiques.

Les tangentes à la surface qui coïncident avec deux diamètres conjugués dans l'indicatrice sont dites tangentes conjuguées.

135. Relation d'Euler.

Si l'on porte dans l'équation de l'indicatrice

$$D^2(I, \cos^2 \theta + t, \sin^2 \theta) = \lambda^2$$

la valeur de D^2 tirée de la relation

172.

$$R = \frac{D^2}{\lambda^2}$$

on obtient l'équation

$$\frac{1}{R} = r_1 \cos^2 \theta + t_1 \sin^2 \theta$$

ce qui donne directement la valeur du rayon de courbure d'une section normale en fonction de l'angle que fait son plan avec l'une des sections principales.

En faisant θ égal à zéro et à 90° , on obtient les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 respectivement égaux à $\frac{1}{r_1}$ et à $\frac{1}{t_1}$ et en remplaçant r_1 et t_1 par $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$, la relation précédente s'écrit

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}$$

c'est la relation d'Euler, qui s'applique à tous les cas que nous avons examinés à la condition de donner aux rayons principaux R_1 et R_2 des signes convenables.

Les directions asymptotiques sont déterminées en fonction de R_1 et de R_2 par la valeur de $\text{tg } \theta$,

$$\text{tg. } \theta = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

qui fait bien voir qu'elles sont imaginaires dans le cas des surfaces convexes.

136. Conséquences des relations de Meusnier et d'Euler : surfaces osculatrices entre elles en un point de contact.

Il résulte immédiatement des relations de Meusnier et d'Euler que si deux surfaces qui se touchent en un point ont en ce point mêmes sections principales et mêmes rayons de courbure principaux, les sections faites en ce point dans les deux surfaces par un plan sécant quelconque y ont un contact du deuxième ordre.

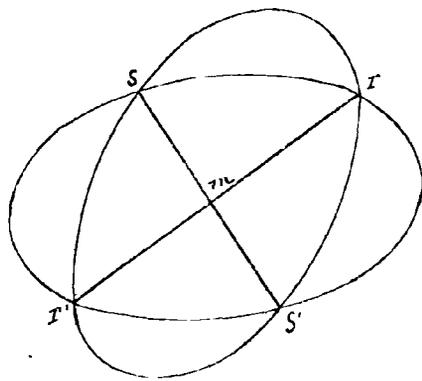
Les surfaces sont dites alors osculatrices entre elles au point considéré. Et réciproquement si deux surfaces tangentes entre elles

en un point sont telles que les sections faites en ce point par un plan quelconque dans les deux surfaces y soient osculatrices entre elles, elles doivent avoir en ce point mêmes directions principales et mêmes rayons de courbure principaux. L'hyperboloïde osculateur d'une surface gauche rentre donc bien dans la définition que nous venons de donner des surfaces osculatrices.

Les indicatrices de deux surfaces osculatrices construites à la même échelle dans leur plan tangent commun doivent se superposer et réciproquement s'il en est ainsi les surfaces tangentes sont osculatrices.

137, Surfaces tangentes en un point et qui se traversent en ce point.

Si deux surfaces qui sont tangentes entre elles se traversent au voisinage immédiat de leur point de contact, nous avons vu que leur courbe d'intersection devait présenter en ce point un point double. Nous pouvons ajouter maintenant que si l'on trace dans leur plan tangent commun les indicatrices des deux surfaces construites à la même échelle, les diamètres communs à ces indicatrices sont les tangentes aux deux branches de la courbe d'intersection des surfaces. En effet comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 126), chacune de ces branches appartenant à la fois aux deux surfaces, son centre de courbure doit s'obtenir d'après le

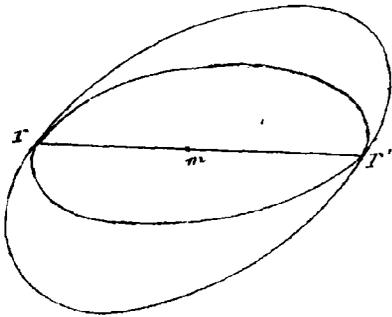


théorème de Meusnier en projetant indifféremment sur son plan osculateur le centre de courbure de la section normale correspondante dans l'une ou l'autre des deux surfaces. Ces derniers centres

doivent donc coïncider et par suite les diamètres correspondants doivent être égaux dans les indicatrices.

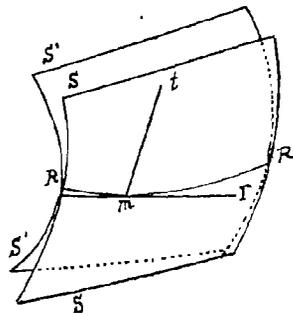
138) Surfaces de raccordant le long d'une ligne.

Si les deux surfaces devaient de raccordement le long d'une ligne commune R , les deux branches de la courbe d'intersection en



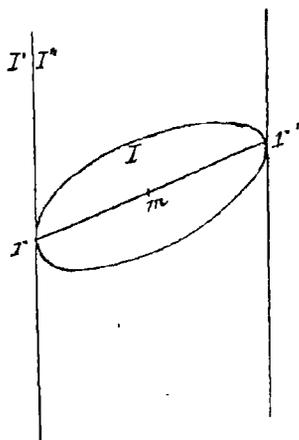
chaque point de contact se confondant avec cette ligne unique, les indicatrices devront être bitangentes et leur corde de contact $r r'$ sera la tangente en m à la courbe R .

Il en conclut que lorsque deux surfaces se raccordent tout le long d'une ligne commune, la direction conjuguée mt de la tangente mr à la courbe de contact est en chaque point de cette courbe la même pour les deux surfaces.



Remarquons que si deux surfaces S' et S'' se raccordent avec une troisième S le long de deux lignes R' et R'' tangentes entre elles en un point m , leurs indicatrices I' et I'' au point m devront être bitangentes entre elles puisqu'elles seront bitangentes à l'indicatrice I de la surface S aux extrémités d'un même diamètre.

Si les indicatrices I' et I'' sont de genre parabolique, c'est-à-dire formées de deux droites, elles coïncideront, et par suite les surfaces S' et S'' seront osculatrices entre elles en ce point.

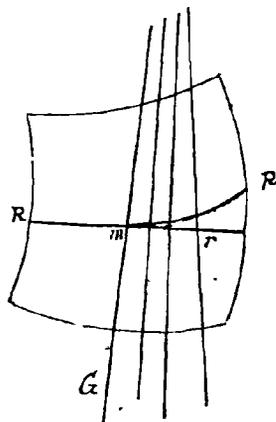


139) Théorème des tangentes conjuguées.

L'application du résultat que nous venons d'établir à un cas particulier fournit une démonstration très-simple d'un théorème très-important, le théorème des tangentes conjuguées.

Nous avons fait observer en effet. (S 134) - et nous reviendrons sur ce point dans la suite - qu'en tout point d'une surface développable l'indicatrice était du genre parabolique. Il en résulte que la direction conjuguée d'une direction quelconque en un point d'une pareille surface est toujours parallèle à la direction des deux droites formant l'indicatrice, autrement dit à la génératrice de la surface.

Si donc l'une des deux surfaces de raccordement S et S' considérées



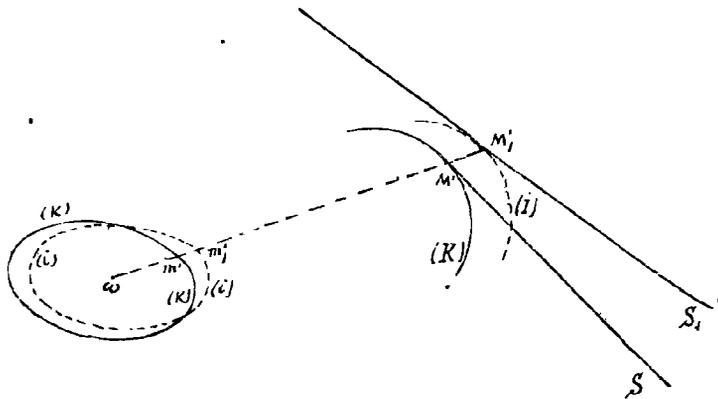
au début du paragraphe précédent est une développable, la tangente MR à la courbe de contact sera conjuguée de la génératrice MG dans l'indicatrice de cette développable, et d'après ce qu'on a vu, ces deux directions devront être conjuguées également dans l'indicatrice de l'autre surface.

On en conclut que lorsqu'une développable est circonscrite à une surface le long d'une courbe, sa génératrice est conjuguée de la tangente à cette courbe dans l'indicatrice de la surface.

C'est ce résultat qui constitue le théorème des tangentes conjuguées; on l'énonce quelquefois d'une façon un peu différente en disant que lorsqu'un plan se déplace en restant tangent à une surface sa caractéristique est conjuguée dans l'indicatrice de la surface de la tangente à la courbe décrite par son point de contact; mais cet énoncé ne diffère du précédent que dans la forme puisque la caractéristique du plan mobile est la génératrice d'une développable se raccordant à la surface le long de la courbe en question.

140) Le Théorème des tangentes conjuguées ayant une grande importance nous en donnerons une seconde démonstration le rattachant plus directement à l'étude que nous avons déjà faite de la forme d'une surface au voisinage immédiat d'un de ses points.

Pour cette étude nous avons eu recours à la considération de deux courbes infinitésimales, l'une section de la surface par un plan sécant H parallèle au plan tangent en m et infiniment peu distant de ce plan, l'autre située dans ce même plan, infiniment peu différente de la première et affectant la forme d'une conique dont le centre ω serait situé sur la normale mz .



Désignons pour abréger ces deux courbes par (K) et par (I) .

C'est en amplifiant la courbe (I) que nous avons obtenu l'indicatrice (I) .

Nous appliquerons actuellement à la courbe (K) le même procédé d'amplification qui consiste à multiplier par un

même facteur toujours réel.

$$\sqrt{\pm 2h}$$

toutes les dimensions de la figure infinitésimale. La courbe (K) se transformera ainsi en une courbe (K') et la figure formée par les courbes (K') et (I) sera homothétique à la figure que forment les deux courbes infinitésimales correspondantes. Nous supprimerons toutes ces courbes tracées dans le plan de section H .

Les rayons vecteurs des deux courbes infinitésimales (K) et (I) correspondant à une même direction θ diffèrent comme nous l'avons vu par un segment $m'm'$, égal à

$$d-d' = \frac{\varepsilon_3}{d+d'}$$

et par conséquent du deuxième ordre de petitesse si $\omega m'$ ou d est

Du premier.

On en conclut que la différence $M'M_1'$ entre les rayons vecteurs des courbes finies (K) et (I) est du premier ordre.

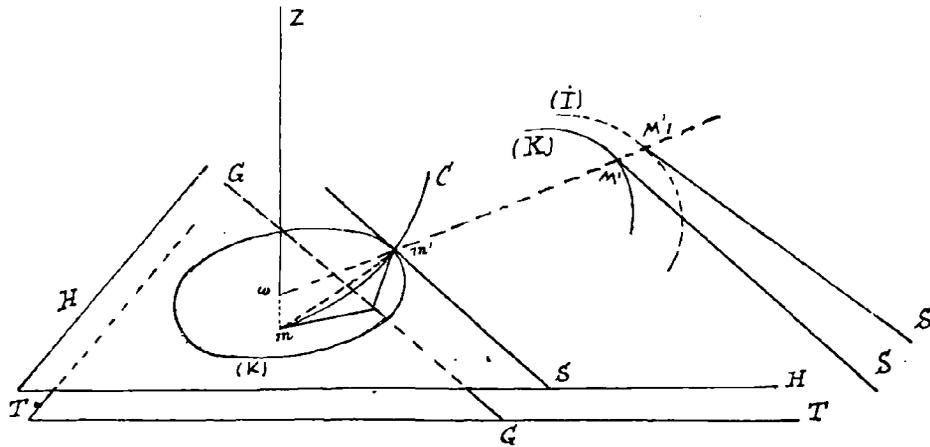
En effet

$$M'M_1' = m'm_1' \frac{\lambda}{\sqrt{\pm 2h}}$$

et comme h est du deuxième ordre $\sqrt{\pm 2h}$ est du premier.

Il en résulte que la courbe (K) tend à se confondre avec l'indicatrice (I) et que par suite la direction de sa tangente $M'S$ en M' a pour limite celle de la tangente $M_1'S_1$ au point correspondant M_1' de l'indicatrice.

Cela posé considérons le plan tangent en m' à la surface.



La trace de ce plan tangent sur le plan tangent en m sera une droite G parallèle à la tangente $m'S$ à la courbe infinitésimale (K), c'est-à-dire aussi à la tangente $M'S$ à la courbe finie (K) et faisant par conséquent un angle infiniment petit avec la tangente $M_1'S_1$ au point correspondant M_1' de l'indicatrice.

Supposons maintenant que le plan H tendant vers le plan tangent T le point m' se rapproche indéfiniment du point m en suivant une certaine trajectoire C : mm' sera à la limite la tangente à cette trajectoire, et cette direction se confondra avec celle de om' , parce que dans le triangle $om'm'$, le côté om étant du deuxième ordre l'angle en m' est infiniment petit. D'autre part la droite G d'après ce qu'on a vu devient parallèle à la tangente $M_1'S_1$,

à l'indicatrice. Les deux directions $co M_1'$ et $M_1' S_1'$ qui sont conjuguées dans l'indicatrice, sont donc à la limite celle de la tangente à la courbe C en m et celle de la caractéristique du plan tangent dont le point de contact se déplace le long de cette courbe; le théorème des tangentes conjuguées se trouve ainsi démontré.

141) Normales aux points infiniment voisins d'un point d'une surface.

Nous allons encore faire usage des courbes (K) , (I) , (R) et (I') qui nous ont servi dans la démonstration précédente pour étudier la distribution des normales à la surface aux points infiniment voisins du point m .

Nous supposons comme précédemment toutes ces courbes tracées sur le plan sécant H .

D'après ce qui a été dit plus haut la tangente $m'S$ faisant avec la tangente $M_1' S_1'$ à l'indicatrice un angle infiniment petit, si l'on appelle φ l'angle que fait la normale à l'indicatrice en M_1' avec le rayon vecteur $co M_1'$, la normale $m'\rho'$ à la courbe (K) fera avec ce même rayon vecteur un angle différent infiniment peu de φ et que nous désignerons par $(\varphi + \eta)$.

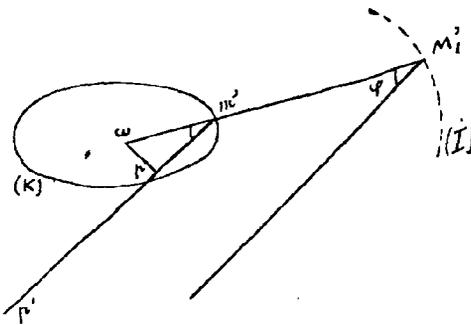
Si donc nous abaissons du point co une perpendiculaire $co\rho$ sur la normale $m'\rho'$, la longueur $co\rho$ sera liée à $co m'$ par

$$co\rho = co m' \sin(\varphi + \eta)$$

ou

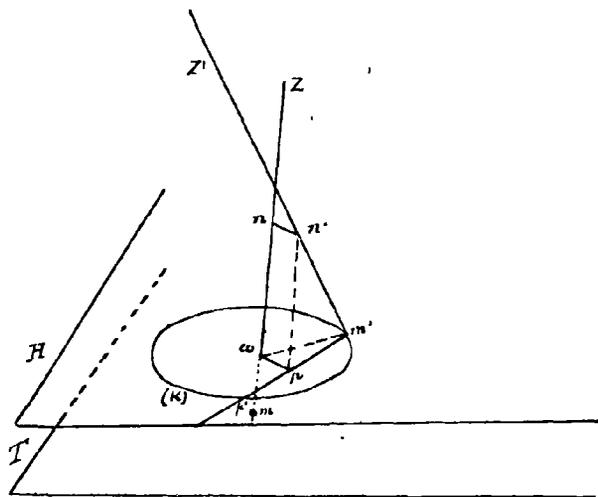
$$co\rho = co m' \sin \varphi$$

en négligeant l'infiniment petit η à côté de l'angle φ qui a généralement une grandeur finie.



la normale $m'\rho'$ à la courbe (K) et la plus courte distance $\rho\rho'$

Des deux normales en m et m' sera précisément égale à ωp .
 Cette plus courte distance sera donc, d'après l'expression trouvée,
 du même ordre que ωm^2 , c'est-à-dire
 du premier ordre
 avec $m m'$.

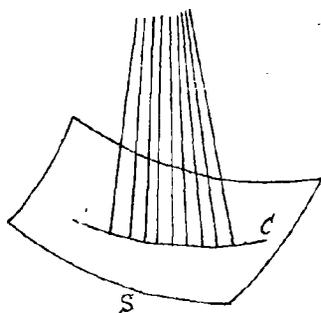


Il n'y avait d'ex-
 ception que dans le
 cas où φ étant in-
 finiment petit, le
 raisonnement précé-
 dent serait en défaut:
 la distance ωp de-
 viendrait alors du
 deuxième ordre au
 moins, $\sin(\varphi + \eta)$
 étant infiniment
 petit, et il en serait
 de même de la plus
 courte distance des
 deux normales. Ceci
 aura lieu si le rayon

$\omega m'$ rencontre l'indicatrice en un point infiniment voisin de l'un
 de ses sommets c'est-à-dire si la tangente à la surface, limite de
 $m m'$, est l'une des directions principales au point m .

142, Normales : normales développables : lignes de courbure.

On donne le nom de normales aux surfaces réglées engendrées
 par les normales à une surface donnée S le long d'une courbe C tracée
 sur cette surface ; la courbe
 C est dite la directrice de
 la normale.



D'après le résultat que
 nous venons d'établir, les
 normales sont généralement
 des surfaces gauches, puisque
 la plus courte distance de

Leurs génératrices infiniment voisines est du même ordre que la distance mm' de deux points pris sur ces génératrices. Le paramètre ne peut s'annuler que si la courbe directrice est tangente au point correspondant à l'une des directions principales de la surface S en ce point.

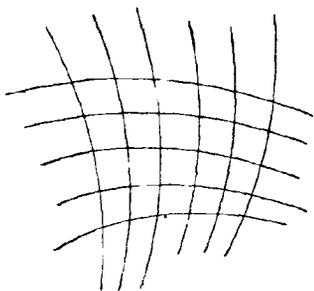
Si l'on supposait cette condition satisfaite en tout point de la directrice C , la normale serait développable.

Or on conçoit qu'on puisse se déplacer sur la surface S en assujettissant le déplacement à cette condition. Un déplacement infiniment petit ayant transporté le point décrivant m en m' suivant une direction infiniment peu différente de l'une des sections principales en m , il existera en m' deux nouvelles directions principales et à cause de la continuité, l'une de ces directions différera infiniment peu de celle que le point a suivie : il pourra donc suivre cette nouvelle direction sans que son déplacement cesse d'être continu, et la trajectoire qu'il décrira sera directrice d'une normale développable.

Une ligne ainsi tracée est dite une ligne de courbure de la surface S .

C'est à Monge que l'on doit la considération de ces lignes remarquables.

Comme il existe d'ailleurs en chaque point d'une surface deux directions rectangulaires que l'on peut indifféremment suivre pour le tracé d'une ligne de courbure, on voit qu'il passera par chaque point deux lignes de courbure se rencontrant en ce point à angle droit.



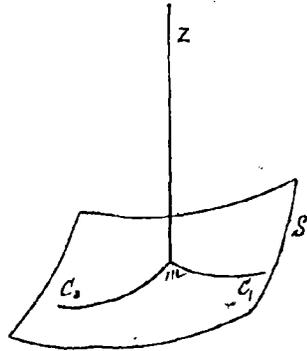
Les lignes de courbure forment donc deux séries de courbes couvrant la surface tout entière d'un réseau orthogonal.

À chacune de ces séries de courbes correspond une série de normales développables et les normales développables de séries différentes

qui se coupent suivant les normales à la surface S sont orthogonales entre elles le long de leurs génératrices communes puisque leurs directrices C_1 et C_2 sont rectangulaires.

La propriété des lignes de courbure d'être directrices de normales

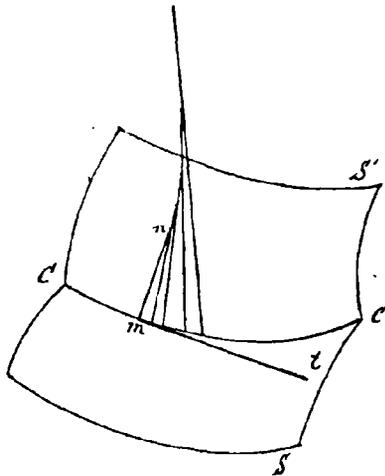
développables est d'ailleurs caractéristique de ces lignes, d'après la démonstration même. Elle permet souvent de les reconnaître.



Ainsi la normale d'une surface développable le long d'une de ses génératrices étant un plan, cette génératrice est ligne de courbure de la surface et comme elle est en même temps asymptote de l'indicatrice

en l'un quelconque de ses points, on peut en conclure qu'en tout point d'une surface développable l'indicatrice est parabolique.

Autre exemple : Toutes les fois qu'une surface S est tangente à une sphère le long d'une ligne quelconque, on peut affirmer que cette ligne est une ligne de courbure de la surface S puisque les normales à cette surface, qui sont aussi normales à la sphère, forment un cône. Et plus généralement toutes les fois que deux surfaces se raccordent le long d'une ligne, si cette ligne est ligne de courbure de l'une, elle est aussi ligne de courbure de l'autre puisqu'elle est directrice d'une normale commune aux deux surfaces.



Enfin lorsque deux surfaces S et S' se coupent orthogonalement suivant une courbe C , on peut encore reconnaître par l'application de la propriété caractéristique des lignes de courbure que si C est ligne de courbure de l'une des surfaces, elle est également ligne de courbure de l'autre. En effet si C est ligne de courbure de la surface S' par exemple, les normales à S' le long de C forment une

normale développable, mais comme les deux surfaces sont orthogonales, cette normale est circonscrite à S le long de C . Donc, d'après le

théorème des tangentes conjuguées, les directions mN , mT sont conjuguées dans l'indicatrice de la surface S' au point m , et comme ces directions sont rectangulaires, ce sont les axes de cette indicatrice. La courbe C qui est tangente ainsi en chacun de ses points à une direction principale de la surface S' est une ligne de courbure de cette surface.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer sur les surfaces qui se raccordent ou se coupent orthogonalement le long d'une courbe C ne sont d'ailleurs que deux cas particuliers d'un théorème plus général et tout à fait analogue qui s'applique aux surfaces se coupant sous un angle de grandeur constante le long d'une courbe d'intersection. Nous donnerons plus loin une démonstration de ce théorème déduite des théories de la géométrie cinématique.

C'est aussi le cas de mentionner ici, le beau théorème de Charles Dupin sur les triples séries de surfaces orthogonales dont voici l'énoncé.

Si trois séries de surfaces se rencontrent toutes orthogonalement leurs lignes d'intersection sont nécessairement des lignes de courbure pour chacune d'elles.

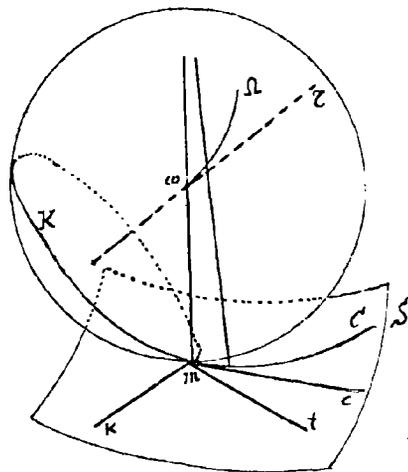
Je me bornerai à rappeler ici ce théorème très-important qui vous est démontré dans le Cours d'Analyse, mais pour sembler cet exposé succinct des propriétés les plus essentielles des lignes de courbure, j'établirai encore la proposition suivante qui offre un intérêt particulier au point de vue de l'étude de ces lignes :

Les lignes de courbure d'une surface se transforment par l'inversion en lignes de courbure de la surface transformée.

Pour démontrer ce théorème, nous cherchons une propriété caractéristique des lignes de courbure qui se conserve dans l'inversion et nous l'obtiendrons une par la considération des sphères tangentes à la surface donnée le long de ces lignes.

En général si l'on suppose une série de sphères touchant une surface S le long d'une courbe C , les centres de ces sphères décrivent une courbe Λ appartenant à la normale qui a cette courbe C pour directrice et leurs caractéristiques seront des cercles K passant par les

points de contact m des sphères avec la surface $S^{(1)}$ et dont les plans seront perpendiculaires aux tangentes co & c à la courbe Ω . Par suite



la tangente mK à l'un de ces cercles au point m doit être perpendiculaire à la projection orthogonale mt de co & sur le plan tangent à la surface S , autrement dit à la trace sur ce dernier plan du plan tangent en co à la normale.

Si donc la normale est développable, mt coïncidant avec la tangente mc à la courbe C , le cercle K est orthogonal à cette courbe. Et réciproquement si le cercle

caractéristique de la sphère est orthogonal à la courbe C , lieu des contacts, la normale qui a même plan tangent en co et en m , est développable et la courbe C est ligne de courbure.

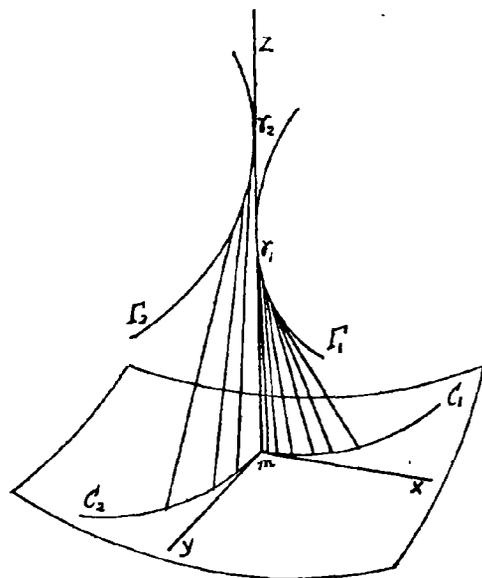
On a donc là une propriété caractéristique à laquelle les lignes de courbure peuvent se reconnaître, et comme dans l'inversion cette propriété se conserve, le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.

143, Surfaces Σ_1 et Σ_2 auxquelles toutes les normales à une même surface S sont tangentes.

Considérons la double série des normales développables correspondant à la double série des lignes de courbure de la surface S . Le lieu des arêtes de rebroussement Γ_1 appartenant aux développables de la première série (celles qui correspondent aux lignes de courbure G par exemple) est une certaine surface Σ_1 et de même le lieu des arêtes de rebroussement Γ_2 des normales développables correspondant aux lignes de

(1) Quand des surfaces formant une série continue touchent une surface donnée le long d'une ligne, leurs caractéristiques passent par leurs points de contact; on le démontre comme pour une série de plans tangents (§. 95).

courbure C_1 , est une seconde surface Σ_2 .



Comme d'ailleurs toute normale à la surface S appartient à la fois à une normale développable de chacune des séries elle est tangente aux surfaces Σ_1 et Σ_2 , puisqu'elle est tangente aux deux arêtes de rebroussement correspondantes Γ_1 et Γ_2 qui sont deux courbes respectivement tracées sur ces deux surfaces.

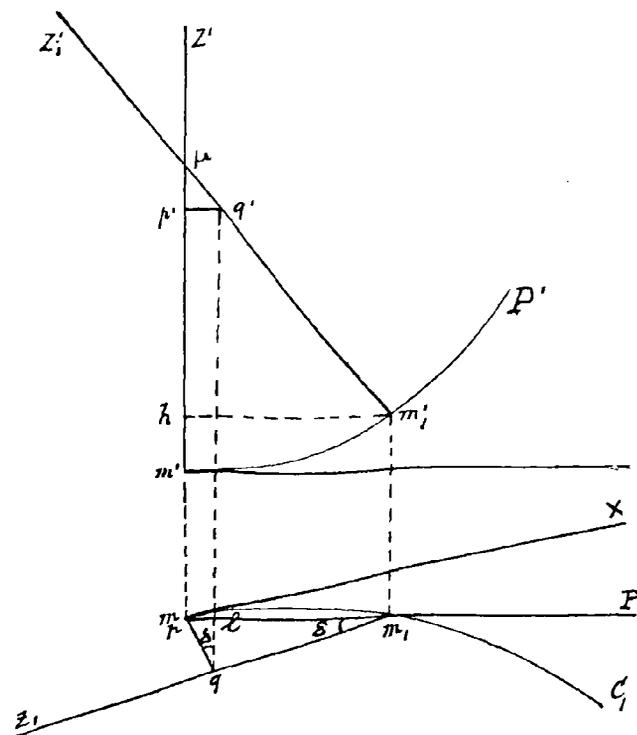
114. Surfaces Σ_1 et Σ_2 considérées comme lieux des centres de courbure principaux de la surface S .

Les surfaces Σ_1 et Σ_2 peuvent être également considérées comme lieux géométriques des centres de courbure principaux ρ_1 et ρ_2 .

Pour le faire voir il faut prouver que le centre de courbure ρ_1 , par exemple coïncide avec le point où la normale MZ touche l'arête de rebroussement Γ_1 de la normale développable tangente à la section principale ZMX .

Or ce dernier point est la position limite du pied p de la perpendiculaire commune à la normale MZ et à une normale infiniment voisine M_1Z_1 ayant son pied sur la ligne de courbure C_1 tangente à la section principale ZMX .

Menons un plan P par MZ et par M_1 , et projetons la figure sur un plan parallèle à P et sur le plan tangent en M . Les normales à la surface en M et M_1 se projettent verticalement en $M'Z'$ et $M'_1Z'_1$ suivant deux normales infiniment voisines à la courbe P' section normale de la surface par le plan P . Ces projections se coupent donc en un point p qui a pour position limite le centre de courbure de la courbe limite vers laquelle tend la section normale P' . Mais cette courbe limite est la section principale ZMX car la limite de $M'P$ est la tangente MX à la ligne de courbure C_1 à



laquelle le point m_1 appartient.
Donc la limite du point p est le point p_1 .

D'autre part si nous menons la perpendiculaire commune $p q, p' q'$ aux deux normales $m Z, m_1 Z_1$, la limite du point $p p'$ est le point où $m Z$ touche l'axe de rebroussement Γ_1 .

Pour prouver que ces deux positions limites sont les mêmes, il suffit donc de prouver que $p p'$ tend vers Z_1 .

Or les triangles semblables de la figure donnent

$$\frac{\mu p'}{\mu h} = \frac{p' q'}{h m_1} = \frac{m l}{m m_1}$$

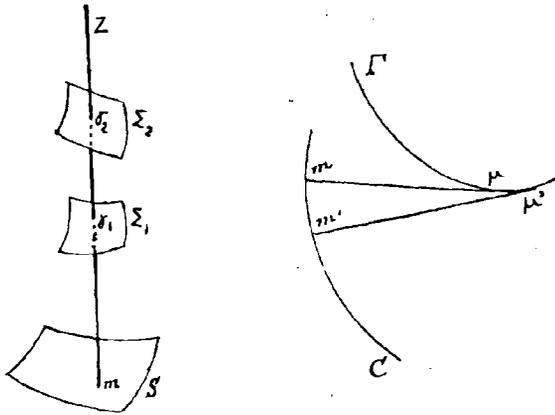
et comme μh a pour limite la valeur finie du rayon de courbure principal R_1 , tandis que l'angle E étant infiniment petit, $m l$ est infiniment petit d'ordre très-supérieur à $m m_1$ ⁽¹⁾, la proposition énoncée se trouve démontrée.

(1) On a

$$m l = p q \sin E$$

et comme $p q$, plus courte distance de deux génératrices consécutives d'une développable est du troisième ordre d'après le théorème de Bouquet, on voit que $m l$ est du quatrième ordre.

Par cette définition nouvelle les surfaces Σ_1 et Σ_2 présentent une analogie frappante avec les développées des courbes planes. Nous avons vu en effet que si l'on porte sur les normales à



une courbe plane C des longueurs $m\mu$ égales aux rayons de courbure correspondants de la courbe, le lieu des points μ ainsi obtenus est une courbe Γ à laquelle toutes les normales à la courbe donnée sont tangentes.

Et nous voyons maintenant que si l'on porte sur les normales à une surface S

des longueurs $m r_1$, $m r_2$ égales aux rayons de courbure principaux de la surface S au point considéré, les lieux des points r_1 et r_2 ainsi obtenus sont deux surfaces Σ_1 et Σ_2 auxquelles toutes les normales à la surface S sont tangentes.

Mais nous reconnaissons en outre que ces surfaces Σ_1 et Σ_2 jouissent de propriétés remarquables qui ne peuvent avoir leurs analogues dans le plan.

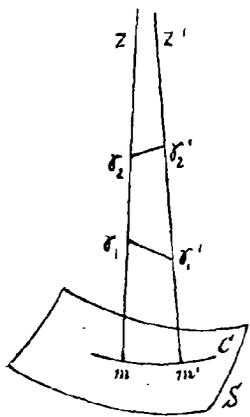
145. Théorème sur les normales.

Imaginons non plus seulement les normales développables qui ont les lignes de courbure pour directrices, mais toutes les normales que l'on peut obtenir en prenant pour directrices des courbes quelconques tracées par le point m sur la surface. Je dis que toutes ces normales qui ont mZ comme génératrice commune se raccordent aux points r_1 et r_2 sur cette génératrice.

En effet soit C la directrice d'une de ces normales et $m'Z'$ une génératrice infiniment voisine de mZ sur cette normale.

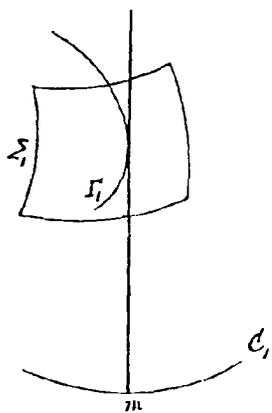
D'après ce qu'on vient de voir, cette normale $m'Z'$ doit toucher les surfaces Σ_1 et Σ_2 aux points r_1' et r_2' centres de courbure principaux du point m' . Or les points r_1' et r_2' étant respectivement infiniment voisins des points r_1 et r_2 , les droites $r_1 r_1'$, $r_2 r_2'$ seront à la limite des

tangentes à la fois à la normale et à celle des surfaces Σ_1 et Σ_2 à laquelle ces points appartiennent, et comme elles déterminent avec mZ les plans tangents à ces surfaces, il y a raccordement des surfaces Σ_1 et Σ_2 avec la normale considérée.



était tangente au point r_1 à la normale mZ , car alors les deux directions qui nous ont servi à définir en ce point le plan tangent à la normale se confondraient en une direction unique.

Or c'est précisément ce qui a lieu pour la normale développable ayant la ligne de courbure C_1 pour directrice, puisque ses génératrices successives sont tangentes à une courbe tracée sur Σ_1 .



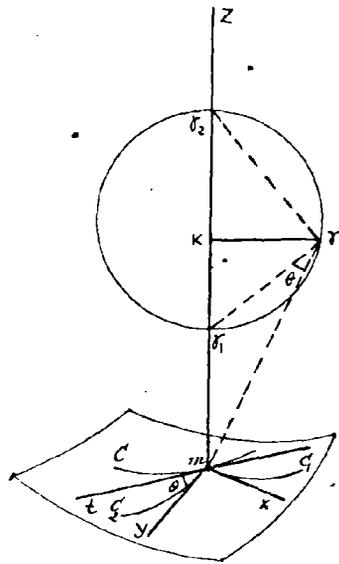
Ainsi les normales développables ne sont pas tangentes à celle des surfaces Σ sur laquelle leur arête de rebroussement est située, mais elles sont tangentes à l'autre de ces surfaces⁽¹⁾. D'où il résulte que les plans tangents aux surfaces Σ_1 et Σ_2 aux points r_1 et r_2 situés sur une même normale à S sont rectangulaires entre eux.

(1) Ou plus exactement, le plan qui touche une normale développable tout le long de sa génératrice n'est pas tangent à celle des surfaces Σ qui renferme l'arête de rebroussement de cette normale, car si l'on se rappelle qu'au point de l'arête de rebroussement, le plan tangent à la développable doit être considéré comme indéterminé, en tenant compte de cette remarque, on peut dire que la surface Σ en question est aussi tangente à la normale.

Le plan tangent à une développable le long de sa génératrice étant d'ailleurs le plan osculateur à son arête de rebroussement au point de contact, on en conclut que chacune des arêtes Γ_1 et Γ_2 a en tous ses points son plan osculateur normal à la surface Σ à laquelle elle appartient. Ces courbes sont par conséquent des lignes géodésiques de ces surfaces.

146, Points centraux, points représentatifs et paramètres des différentes normales dont les directrices passent en un même point m d'une surface S .

Les différentes normales dont les directrices passent par un même point m de (S) ayant toutes pour plans tangents en γ_1 et γ_2 deux plans rectangulaires qui sont les plans principaux ZmY et ZmX , si l'on construit dans un même plan passant



par mZ leurs points représentatifs γ , on voit d'après la propriété connue de ce point que l'angle γ_1, γ_2 devant être droit, le lieu de γ sera le cercle décrit sur γ_1, γ_2 comme diamètres.

Soit γ l'un de ces points, la normale qui a γ pour point représentatif aura la projection K de γ sur mZ pour point central et $K\gamma$ sera son paramètre de distribution pour la génératrice mZ .

D'ailleurs si la tangente mt à la directrice C fait avec la direction principale mC l'angle θ , le plan tangent en m à cette normale étant évidemment le plan Zmt

et ce plan faisant l'angle θ avec le plan principal ZmY tangent en γ_1 , le segment $m\gamma_1$ devra être vu de γ sous un angle $\gamma_1, \gamma m$ égal à θ ce qui permet de déterminer γ lorsque la directrice C est connue.

147) Applications Diverses des résultats précédents : nouvelle démonstration de la relation de Meusnier.

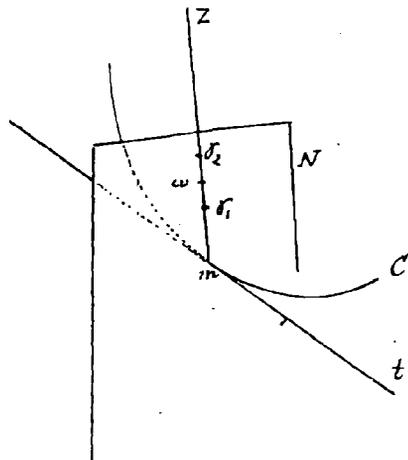
Le théorème que nous venons de démontrer sur les normales conduit à des conséquences très-nombreuses.

Il fournit immédiatement une nouvelle démonstration du théorème de Meusnier.⁽¹⁾

Considérons en effet parmi les normales dont les directions passent par m et qui ont par conséquent la normale mZ comme génératrice commune, celles dont les directrices sont tangentes en m à une même droite mt .

Toutes ces normales se raccordent tout le long de la génératrice mZ , puisqu'elles ont même plan tangent aux trois points m , r_1 et r_2 de cette génératrice.

Cela posé si nous imaginons que le plan normal N à la directrice C d'une de ces normales se déplace en restant normal à cette courbe, comme dans ce déplacement il passe constamment par les normales à la surface ce le long de la courbe C , c'est-à-dire par les génératrices de la normale considérée, il reste constamment tangent à cette normale, et par suite sa caractéristique passe par le point ω où il la touche.



mZ , la position de ce point ω pour toutes les courbes C sera la même.

(1) Il est bon de remarquer qu'il n'y a ici aucune répétition de principe, car la démonstration du théorème sur les normales telle que nous l'avons donnée ne s'appuie en rien sur celle du théorème de Meusnier.

Mais la caractéristique d'un plan qui reste normal à une courbe gauche est l'axe de courbure de cette courbe.

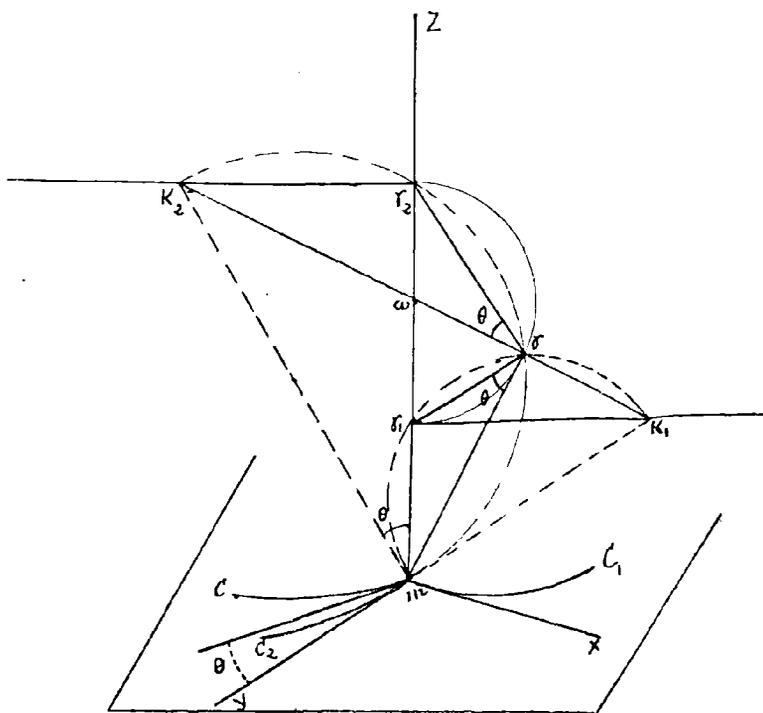
Donc les axes de courbure de toutes les courbes C tracées sur S par un point m et tangentes entre elles en ce point passent par un même point ω de la normale, ce qui est l'un des énoncés du théorème de Meusnier.

Cette nouvelle démonstration a l'avantage de faire ressortir une propriété intéressante du point ω qui est le centre de courbure de la section normale. On voit en effet qu'en ce point le plan tangent commun aux normales considérées est le plan N , c'est-à-dire que de m en ω le plan tangent à ces normales tourne de 90° .

Une nouvelle démonstration de la relation d'Euler peut se déduire de cette remarque.

148, Nouvelle démonstration de la relation d'Euler.

Reprenons la figure du paragraphe 146 qui nous a servi pour étudier les positions des points représentatifs des normales passant par la normale mZ et considérons en particulier le point r correspondant à une



normalie ayant pour directrice une section normale C de la surface.

θ étant l'angle de cette section avec le plan de la section principale ZmY (que nous supposons tangent à la ligne de courbure C_2 et tangent par conséquent aux normales en s_1) nous avons vu que l'angle $r_1 r m$ était égal à θ et nous savons maintenant qu'en

élevant en r la perpendiculaire rw à mr , nous obtenons en w point de rencontre de cette droite avec mz le centre de courbure de la section normale considérée.

On voit ainsi que l'angle θ étant donné le rayon de courbure mw correspondant à cet angle en résulte ; mais on peut simplifier encore cette construction en la transformant un peu et la relation d'Euler s'en déduit alors d'une façon très-simple.

Prolongeons en effet rw jusqu'à ses rencontres en K_1 et K_2 avec les perpendiculaires à mz menées dans le plan du cercle σ_1 & σ_2 par les points r_1 et r_2 et joignons les points K_1 et K_2 au point m .

A cause des angles droits mr_2K_2 et mr_1K_1 d'une part, mr_1K_1 et mr_2K_2 d'autre part, les quadrilatères mr_2K_2 , mr_1K_1 sont inscriptibles et l'on en conclut que l'angle K_2mr_2 est égal à $K_2r_2r_1$ c'est-à-dire à θ , et que l'angle K_1mr_1 complément de mK_1r_1 est aussi complément de mr_1r_2 , c'est-à-dire de θ . Donc l'angle K_2mK_1 est droit,

et par suite le centre de courbure w peut s'obtenir en menant par m une droite mK_2 faisant avec mz un angle égal à θ , et une seconde droite mK_1 perpendiculaire à la première, en prenant les intersections respectives K_1 et K_2 de ces droites avec les points r_1 et r_2 et en traçant enfin la droite K_1K_2 qui coupe mz au point cherché.

Évaluons mw ou R d'après cette construction.

Pour cela nous écrivons que le triangle rectangle

K_1mK_2 est la somme des triangles K_2mw et wmK_1 . On a ainsi

$$\overline{mK_1} \cdot \overline{mK_2} = \overline{mK_2} \cdot \overline{mw} \sin \theta + \overline{mK_1} \cdot \overline{mw} \cos \theta$$

et comme

$$\overline{mK_1} = \frac{R_1}{\sin \theta}$$

$$\overline{mK_2} = \frac{R_2}{\cos \theta}$$

$$\overline{mw} = R$$

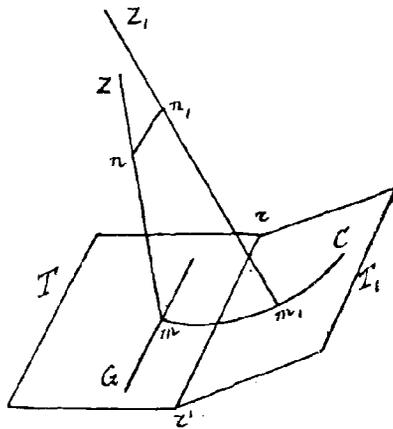
cette relation peut s'écrire en divisant par mk_1 , mk_2 et mco les deux membres

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \theta}{R_1} = \frac{\cos^2 \theta}{R_2}$$

C'est la relation d'Euler.

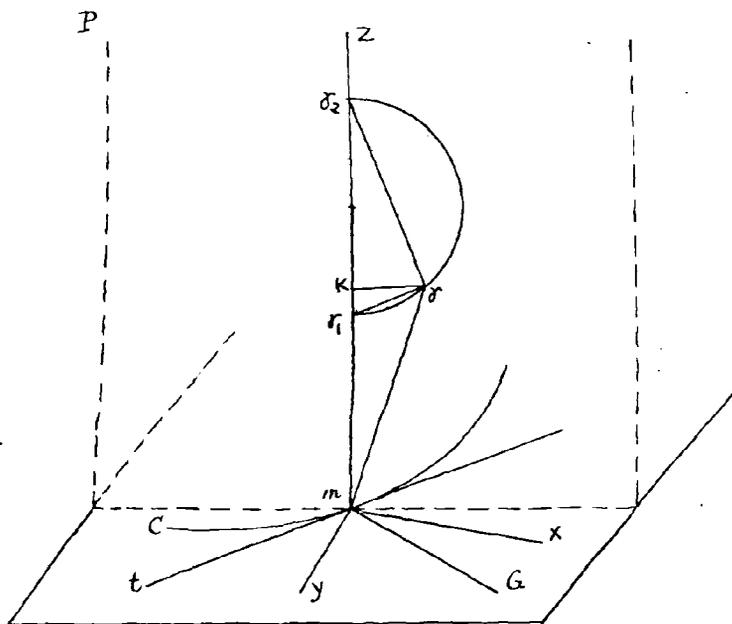
149 Nouvelle démonstration du théorème des tangentes conjuguées.

Le théorème des normales nous fournit encore une nouvelle démonstration du théorème des tangentes conjuguées.



Remarquons d'abord que si le plan T se déplace en restant tangent à la surface S le long d'une certaine courbe C, sa caractéristique est parallèle à son intersection avec le plan central correspondant de la normale qui a la courbe C pour directrice. En effet l'intersection \mathcal{C}' de deux positions infiniment voisines T et T1 du plan T est perpendiculaire à la plus courte distance nn_1 de ces normales, et aussi à la trace mG du plan $n, n_1 m$ sur le plan tangent T. Mais à la limite ce plan $ZM G$ devient le plan central à la normale de directrice C, tandis que la droite G se confond avec la caractéristique du plan T, ce qui démontre la proposition énoncée.

En effet l'intersection \mathcal{C}' de deux positions infiniment voisines T et T1 du plan T est perpendiculaire à la plus courte distance nn_1 de ces normales, et aussi à la trace mG du plan $n, n_1 m$ sur le plan tangent T. Mais à la limite ce plan $ZM G$ devient le plan central à la normale de directrice C, tandis que la droite G se confond avec la caractéristique du plan T, ce qui démontre la proposition énoncée.



Cela posé si nous figurons en y dans un plan

quelconque P passant par la normale mZ , le point représentatif de la normale qui a la courbe C pour directrice et si nous abaissons de ce point la perpendiculaire rK sur mZ , le faisceau

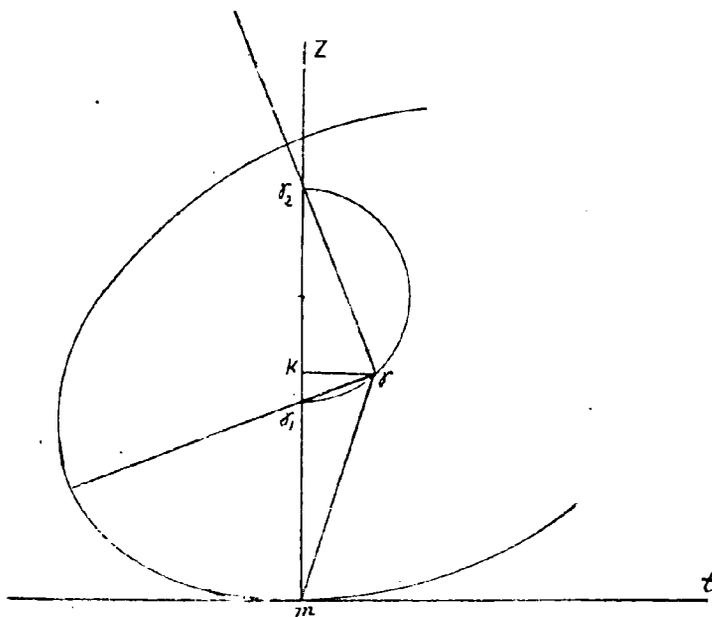
$$r(mr_1, Kr_2)$$

est identique, d'après la propriété connue du point représentatif, au faisceau

$$m(tY, tX)$$

que forment, dans le plan tangent T à la surface, la tangente mt à la courbe C , la trace mG du plan central à la normale et les deux axes mX, mY de l'indicatrice.

Donc pour démontrer que les directions mG et mt sont conjuguées dans l'indicatrice tracée sur le plan tangent et dont mX et mY sont les axes, il suffit de prouver que $r m$ et rK sont conjugués dans une conique que nous imaginons tracée sur le plan P , conique semblable à l'indicatrice et



ayant r pour centre et f_1, f_2 pour directions d'axes. Mais puisque les dimensions de cette conique sont arbitraires, rien n'empêche de la faire passer par le point m et comme d'après la relation d'Euler les grandeurs a et b de ses axes doivent satisfaire à la proportion

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{m r_1}{m r_2}$$

la droite $m r_1, r_2$ sur laquelle les axes détachent des segments $m r_1, m r_2$ dont le rapport est $\frac{b^2}{a^2}$ doit

être la normale en m à cette conique.

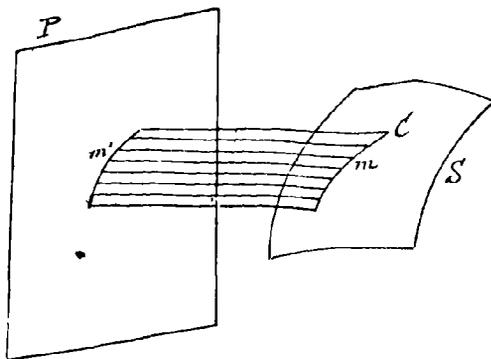
La direction $r m$ est donc bien conjuguée de la direction mt ou rK dans cette courbe.

150) Recherche du rayon de courbure du contour apparent d'une surface.

Proposons nous de déterminer le rayon de courbure du

contour apparent d'une surface S projetée orthogonalement sur un plan P .

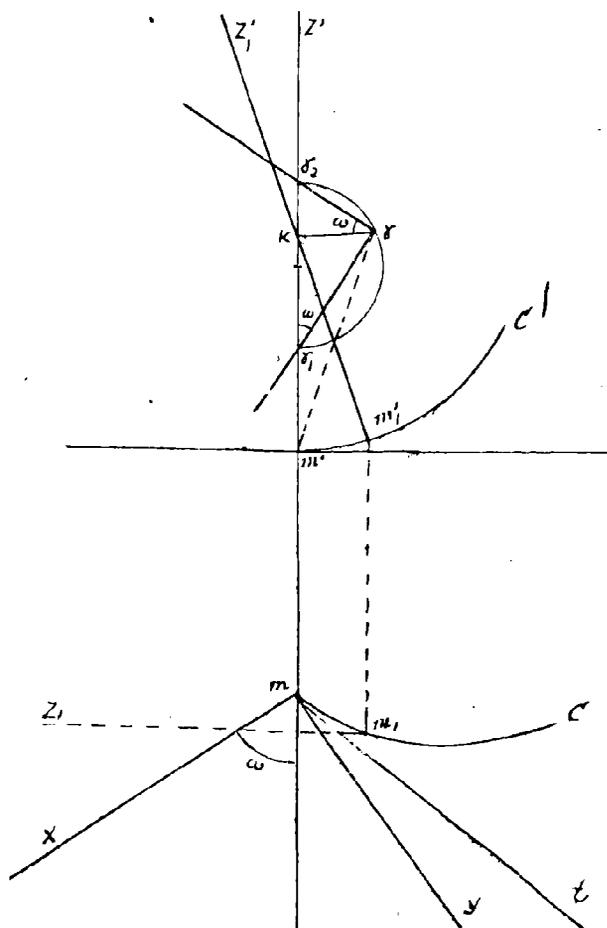
Ce contour apparent est la trace sur le plan P d'un cylindre circonscrit à la surface S et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan P .



Soit m un point de la courbe de contact C de ce cylindre avec la surface S . Prenons pour plans de projection le plan tangent à la surface S au point m et le plan P qui lui est perpendiculaire.

La courbe de contact C se projette verticalement suivant une courbe C' qui

sera précisément le contour apparent dont nous nous proposons de déterminer en m' la courbure.



Or si nous considérons la normale ayant la courbe C pour directrice, cette normale d'une nature spéciale a toutes ses génératrices de front et admet par conséquent le plan vertical comme plan directeur.

Son plan central pour la génératrice $m'Z'$ est donc un plan de profil et son point central est la position limite ou point K où les normales aux deux points m, m', m, m' infiniment voisins pris sur CC' se rencontrent en projection verticale. D'ailleurs

ces droites en projection verticales sont normales à C' de sorte que le point K a pour limite le centre de courbure cherché.

Mais si l'on trace dans le plan P le cercle des points représentatifs des normales et si l'on joint le point représentatif γ de la normale considérée au point γ_2 , γK étant perpendiculaire à $\gamma_1 K$, l'angle $\gamma_2 \gamma K$ est égal à l'angle ω que fait le plan central de la normale avec le plan principal mX , c'est-à-dire à l'angle ω que font les projetantes avec la direction principale mX .

Il est donc facile d'évaluer le rayon de courbure ρ du contour apparent $m'K$ en fonction de cet angle et des éléments caractéristiques de la surface. On a en effet d'après la figure

$$\begin{aligned} \rho &= m'K = m'\gamma_1 + \gamma_1 K = R_1 + (R_2 - R_1) \cos^2 \omega \\ &= R_2 \cos^2 \omega + R_1 \sin^2 \omega \end{aligned}$$

Celle est la relation que nous nous proposons d'établir (!)

Dans le cas des surfaces à courbures opposées, R_1 et R_2 étant de signes contraires, en mettant le signe de R_1 en évidence cette relation s'écrit

$$\rho = R_2 \cos^2 \omega - R_1 \sin^2 \omega$$

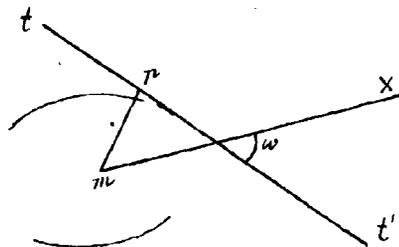
et l'on peut remarquer que pour la direction définie par la condition

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

le rayon de courbure ρ s'annule. Mais cette direction est celle des asymptotes de l'indicatrice. Ainsi lorsqu'une projetante coïncide accidentellement avec une asymptote de l'indicatrice de la surface, le contour apparent présente au point correspondant un rayon de courbure nul.

(1) Cette relation est susceptible d'une interprétation géométrique très-simple.

Si l'on suppose en effet l'indicatrice du point m tracée dans le plan tangent et si

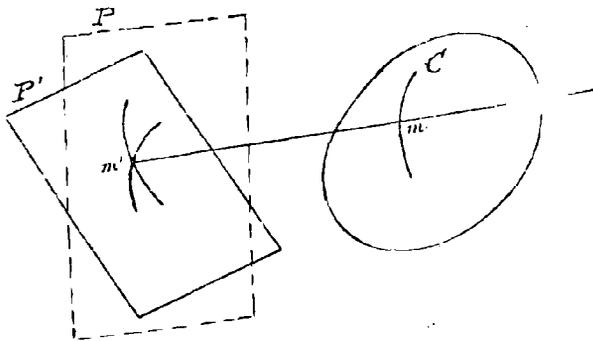


l'on mène à cette conique une tangente parallèle à la direction des projetantes, c'est-à-dire faisant un angle ω avec la direction de l'arc mX , la distance mp du centre m à cette tangente aura pour expression

$$mp^2 = b^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega = \lambda^2 (R_2 \cos^2 \omega + R_1 \sin^2 \omega) = \lambda^2 \rho$$

Ainsi le rayon de courbure de la courbe de contour apparent se trouve lié à la distance mp par une relation tout à fait analogue à celle qui lie aux rayons de l'indicatrice les rayons de courbure des sections normales correspondantes.

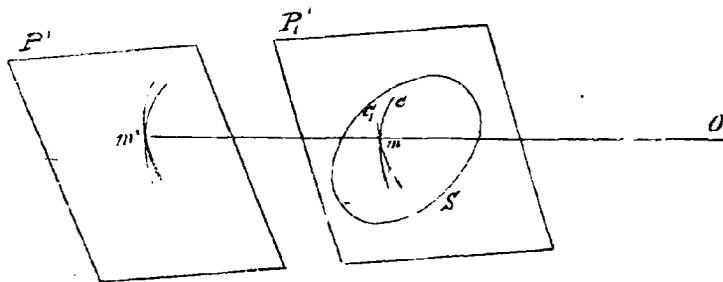
Remarquons que la formule précédente permet le calcul du rayon de courbure du contour apparent dans le cas d'une projection oblique.



En effet dans ce cas le contour apparent est la section oblique du cylindre circonscrit à la surface, et puisqu'on connaît actuellement par la formule précédemment établie, le rayon de courbure de la section droite P de ce cylindre, c'est-à-dire de la section principale normale aux génératrices on peut sans difficulté en déduire par l'application des relations de Meusnier et d'Euler le rayon de courbure d'une section oblique dont le plan P' a une direction déterminée.

Enfin la relation trouvée peut encore conduire à la solution du même problème dans le cas d'une projection conique.

Soit en effet O le sommet du cône et $Om m'$ une projectante tangente à la surface et donnant en m' un point de son contour apparent sur un plan F quelconque. Substituons au cône, un cylindre



de génératrices parallèles Om . La courbe de contact C se trouve modifiée et transformée en une courbe nouvelle C_1 , mais les courbes C et C_1 sont tangentes entre elles puisque leurs tangentes, conjuguées de m et dans l'indicatrice de S au point m , coïncident; par suite le cylindre et

le cône d'après une remarque précédemment faite (§ 138) sont osculateurs au point m . Si donc on les coupe par un plan P_1 passant par m et parallèle à F on obtient des sections, c'est-à-dire des courbes de contour apparent ayant entre elles un contact du second ordre,

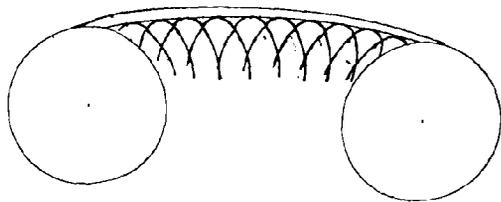
c'est-à-dire même rayon de courbure, et si l'on transporte le plan sécant P_1' en P' , le rayon de courbure pour la projection cylindrique reste le même, tandis que pour la projection conique il croît proportionnellement à la distance au sommet du cône. Il est donc facile de déterminer ce dernier rayon.

151. Lignes asymptotiques.

En remplaçant dans la génération des lignes de courbure les directions principales par les directions asymptotiques on est conduit à la définition de courbes nouvelles auxquelles Dupin a donné le nom de lignes asymptotiques. Ainsi un point assujéti à se déplacer sur une surface à courbures opposées en suivant à chaque instant de son déplacement l'une des directions asymptotiques de la surface engendrera une courbe continue qui sera une ligne asymptotique de cette surface.

Les lignes asymptotiques forment donc comme les lignes de courbure deux séries continues de courbes tracées sur la surface, mais leur réseau ne couvre entièrement que la région où la surface est à courbures opposées. Dans ces régions deux lignes asymptotiques passent par chaque point de la surface, mais ces lignes ne sont pas comme les lignes de courbure rectangulaires entre elles.

Si la surface a des régions convexes et des régions à courbures opposées, la ligne des points paraboliques qui sépare ces régions est l'enveloppe des lignes asymptotiques de la surface (exemple: le tore).



Dans les surfaces convexes les lignes asymptotiques sont imaginaires.

La tangente à une ligne asymptotique étant par définition une asymptote de l'indicatrice en ce point, d'après les relations de Meusnier et d'Euler, le rayon de courbure de ces courbes devrait

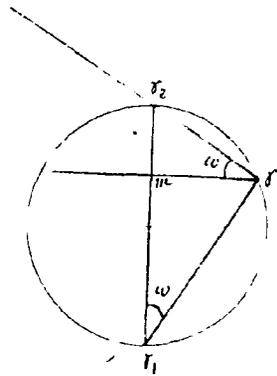
être infini si leur plan osculateur faisait un angle fini avec le plan tangent à la surface. Or ce rayon ne pourrait être constamment infini que si la ligne asymptotique était une droite, ce qui n'a lieu évidemment que dans le cas particulier des surfaces réglées. On en conclut qu'en général, le plan osculateur des lignes asymptotiques se confond

avec le plan tangent à la surface à laquelle elles appartiennent (!)

L'application de la relation de Meusnier pour la détermination du rayon de courbure des lignes asymptotiques est illusoire (comme cela a lieu pour toutes les lignes en général qui ont leur plan osculateur tangent à la surface) car l'expression $R \cos \theta$ devient dans ce cas $\infty \times 0$.

On doit à M. Beltrami une relation remarquable entre les rayons de courbure de deux courbes qui se trouvent dans ce cas, les lignes asymptotiques et la section de la surface par son plan tangent. Pour les branches de ces courbes qui sont tangentes entre elles, le rayon de courbure de la ligne asymptotique est les $\frac{2}{3}$ de celui de la courbe de section.

On peut remarquer encore, en se reportant à la figure qui donne le lieu des points représentatifs des normales et en reproduisant cette figure dans le cas d'une surface à courbures opposées, qu'il existe dans ce cas au point m de la surface deux directions de normales dont le point central est le point m lui-même : les tangentes aux directrices de ces normales font avec la section principale $m \times$ un angle ω donné par



les relations

$$\text{tg. } \omega = \frac{m r_2}{m r_1} = \frac{m r}{m r_1}$$

d'où

$$\text{tg}^2 \omega = \frac{m r_2}{m r_1} = - \frac{R_2}{R_1}$$

Ces tangentes coïncident donc avec les asymptotes de l'indicatrice et l'on en conclut que toute ligne asymptotique est ligne de striction

(1) Ce résultat peut se vérifier encore par le théorème des tangentes conjuguées.

Supposons en effet qu'un plan tangent à la surface S se déplace de façon à ce que son point de contact devienne une ligne asymptotique. Sa caractéristique d'après le théorème des tangentes conjuguées sera la tangente à cette courbe, il enveloppera donc une développable dont la ligne asymptotique de la surface sera l'arête de rebroussement, et par conséquent, il sera osculateur à cette ligne.

de la normale dont elle est directrice. ⁽¹⁾

152) Lignes géodésiques.

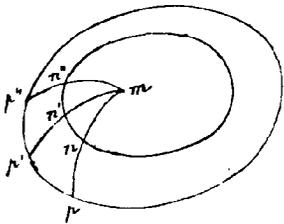
Pour compléter cette étude très-sommaire des surfaces nous aurions à parler encore des lignes géodésiques et des théorèmes qui se rattachent à leur étude (Surfaces minima dans un périmètre donné, surfaces applicables les unes sur les autres; expressions proposées pour représenter la courbure d'une surface en l'un de ses points). Mais les limites restreintes de ce Cours nous obligent à résumer en quelques mots ce que nous pouvons dire sur ces importants sujets.

Nous avons déjà reconnu qu'une ligne tracée sur une surface et qui jouit de la propriété d'être la plus courte entre deux de ses points devait avoir en tous ses points son plan osculateur normal à la surface.

Une ligne géodésique se projette donc sur le plan tangent suivant une ligne présentant un point d'inflexion.

Ces lignes jouissent de propriétés très-remarquables qui en font sur les surfaces auxquelles elles appartiennent les analogues de la ligne droite sur le plan.

D'après sa définition même une ligne géodésique doit se trouver déterminée en général par la connaissance de deux de ses points et par deux points donnés il ne doit passer qu'une ligne géodésique.



Mais il en passera une infinité par un même point m et si nous considérons un contour fermé tracé autour du point m sur la surface, nous pouvons imaginer les lignes géodésiques qui joignent le point m aux différents points p, p', p'' de ce contour. Si nous portons sur ces lignes, à partir de m des longueurs d'arcs égales, nous obtiendrons ainsi des points n, n', n'' --- dont le lieu formera une courbe.

(1) Ceci peut se vérifier encore en remarquant que le centre de courbure de la section normale asymptotique étant à l'infini, le plan tangent en m à la normale qui a cette section pour directrice doit être le plan central à cette normale. Or cette normale se raccorde avec celle qui a la ligne asymptotique pour directrice, donc, etc. ---

à laquelle on a donné le nom de circonférence géodésique, et l'on démontre qu'une pareille ligne coupe orthogonalement toutes les lignes géodésiques issues de m .

La circonférence géodésique serait la trajectoire d'une extrémité d'un fil inextensible dont l'autre extrémité serait fixée en m et qui serait constamment tendu sur la surface.

Enfin si l'on considère une courbe quelconque C tracée sur une surface on peut toujours par deux de ses points m et m' mener une ligne géodésique S qui sera une sécante géodésique à la courbe.

Si le point m' se rapproche indéfiniment du point m , la sécante devient la tangente géodésique au point m , tangente qui se trouve ainsi parfaitement définie.

On conçoit dès lors qu'il soit possible d'évaluer la courbure géodésique de la courbe C au moyen de ses tangentes géodésiques par une expression infinitésimale

$$\lim_{m_1, m_2} \frac{\mathcal{E}}{\rho}$$

formée avec l'angle \mathcal{E} de deux tangentes géodésiques infiniment voisines et entièrement analogue à celle qui nous avait conduit dans le cas des courbes planes à l'évaluation de la courbure ordinaire.

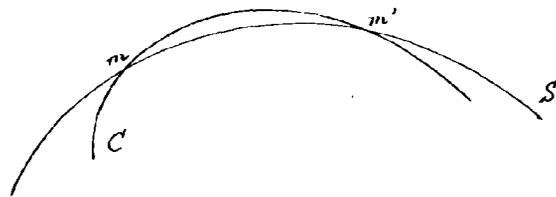
On démontre que la courbure géodésique ainsi définie est égale à la courbure ordinaire de la courbe projetée sur le plan tangent en m , à la surface S . Son expression est

$$\frac{\sin \theta}{\rho}$$

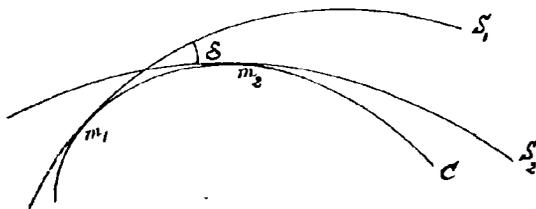
en désignant comme précédemment par θ l'angle que le plan osculateur à la courbe C fait avec la normale à la surface.

Elle est donc constamment nulle pour les lignes géodésiques elles-mêmes pour lesquelles l'angle θ est constamment égal à Zéro.

Nous devons nous borner à l'énoncé de ces quelques résultats, le temps nous faisant défaut pour en donner les démonstrations ou pour en développer les conséquences.



moyen de ses tangentes géodésiques par une expression infinitésimale



Géométrie cinématique de l'espace.

153) La géométrie cinématique plane nous a déjà fait voir par les nombreuses applications auxquelles son étude nous a conduit, combien la considération des déplacements pouvait être utile pour la démonstration des propriétés géométriques des figures. Nous étendrons actuellement cette étude aux figures de l'espace.

Bien des fois déjà dans les leçons consacrées aux courbes gauches et aux surfaces, nous avons fait appel à des considérations de déplacement soit pour des définitions à établir, soit pour des démonstrations à faire. Mais actuellement nous nous occuperons des déplacements dans l'espace pour les étudier en eux-mêmes d'une façon systématique et pour établir à leur sujet un certain nombre de propositions qu'il nous sera utile d'invoquer dans des démonstrations ultérieures.

Comme nous l'avons fait d'ailleurs pour le plan nous commencerons par l'étude du déplacement d'une figure de forme invariable.

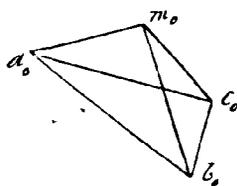
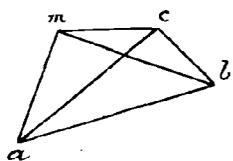
Etude du déplacement d'une figure invariable dans l'espace.

154) Nombre de conditions nécessaires pour fixer la position dans l'espace d'une figure invariable de forme donnée.

Une figure de forme donnée⁽¹⁾ dans l'espace, est définie par la position de trois de ses points A , B et C (non en ligne droite). En effet la position attribuée au point A étant arbitrairement choisie, le point B

(1) à laquelle on peut rattacher par la pensée un point quelconque de l'espace qu'on suppose invariablement lié à la figure et entraîné avec elle.

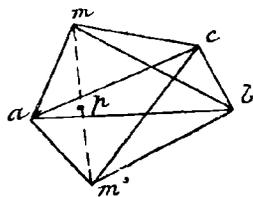
ne peut se déplacer que sur une sphère de centre a , et lorsqu'on a fixé sa position sur cette sphère, le point c ne peut plus se mouvoir que sur un cercle : enfin si l'on fixe sa position sur ce cercle, celle d'un autre point quelconque m se trouve déterminée par la connaissance



de la position m_0 que ce point occupait primitivement par rapport à a_0, b_0, c_0 dans la figure non déplacée.

Un tétraèdre égal à a_0, b_0, c_0 peut être effectivement construit de deux façons sur le triangle abc , mais on reconnaît aisément que de ces deux tétraèdres symétriques par rapport au plan abc un seul convient à la question.

En effet pour un spectateur debout sur le plan abc un rayon allant de ses pieds p successivement aux trois points a, b et c semblera tourner dans des sens opposés selon qu'il aura la tête en m ou en m' et comme ce sens n'a pu changer pendant le déplacement du tétraèdre primitif, on voit que celui-ci ne peut venir coïncider qu'avec l'un des deux tétraèdres abc, m , abc, m' .



La position des trois points qui déterminent ainsi la situation d'une figure de forme donnée dans l'espace, dépend d'après ce qui vient d'être dit de six valeurs qui peuvent être arbitrairement attribuées à six des coordonnées des trois points.

Si l'on n'assujettit ces coordonnées qu'à cinq conditions, la figure pourra prendre une série de positions ; elle sera donc susceptible d'un déplacement continu dépendant des valeurs successives attribuées à un paramètre arbitrairement variable, qui sera la sixième coordonnée par exemple.

Si l'on n'imposait que quatre conditions aux six coordonnées, à partir d'une même situation donnée, une infinité de déplacements seraient possibles : le déplacement serait donc indéterminé dans une certaine mesure.

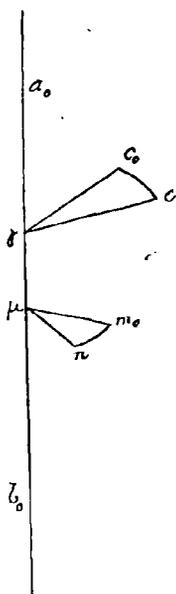
Dans l'examen des conditions imposées à la figure il est essentiel d'ailleurs de tenir compte du Degré de multiplicité de ces conditions. Par exemple la condition pour un plan mobile d'être tangent en l'un de ses points à une surface donnée doit être comptée comme condition triple, car il suffit de donner deux des coordonnées du point de contact pour que la position de ce point se trouve déterminée et dès lors le plan ne pouvant plus que tourner autour de la normale en ce point de contact, il suffit d'une seule condition pour fixer sa position et celle de la figure mobile qu'il entraîne.

155) Déplacements d'ensemble : Translation et rotation.

Nous donnerons comme dans le déplacement plan le nom de déplacement d'ensemble à tout déplacement compatible avec l'invariabilité de la figure et nous commencerons comme nous l'avons fait en Géométrie plane par définir les déplacements d'ensemble les plus simples, la translation et la rotation. Ces définitions ne sont d'ailleurs qu'une extension immédiate de celles que nous avons déjà données.

Dans la translation, tous les points de la figure reçoivent des déplacements égaux et parallèles.

Dans le cas de la rotation, deux points de la figure les points a_0 et b_0 par exemple étant supposés immobiles, et un troisième point c_0 non en ligne droite avec les deux premiers étant amené en c sur un cercle dont le plan est perpendiculaire à $a_0 b_0$ et qui a son centre en γ sur cette droite, un autre point quelconque m_0 viendra en m sur un cercle situé comme le précédent dans un plan perpendiculaire à $a_0 b_0$ et qui aura son centre en μ sur cette droite.



De plus l'angle $m_0 \mu m$ sera égal à l'angle $c_0 \gamma c$: cet angle qui est le même pour

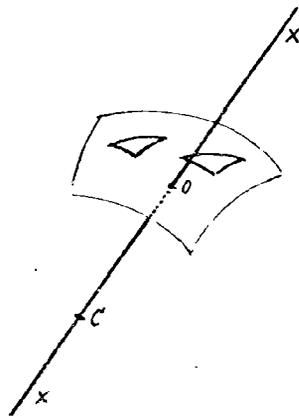
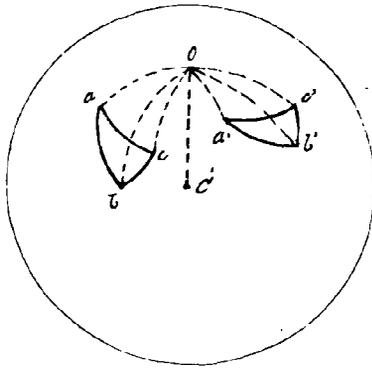
Tous les points de la figure est l'angle de la rotation ; la droite A, B en est l'axe.

Dans le cas ou l'axe s'éloigne à l'infini, on voit aisément que ce déplacement revient au précédent.

156, Déplacement élémentaire le plus général d'une figure de forme invariable.

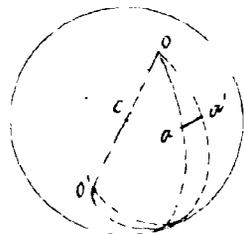
Nous pouvons étendre d'abord, par une généralisation qui n'offre aucune espèce de difficulté, les résultats obtenus pour une figure plane mobile sur son plan au cas d'une figure sphérique mobile sur sa sphère.

Une démonstration qui peut être calquée sur celle donnée dans le cas du plan en substituant simplement aux droites des arcs de grands cercles, conduit à reconnaître que le déplacement fini le plus général d'une figure sphérique peut être obtenu par une rotation autour d'un point O de la sphère nommé pôle de rotation ou ce qui revient au même, autour du diamètre CO de la sphère qui passe par ce pôle ⁽¹⁾.



Dès lors si nous supposons une figure de l'espace de forme invariable dans laquelle un point C reste fixe, et si nous considérons les points de cette figure (ou ceux qu'on peut leur supposer reliés) situés sur une

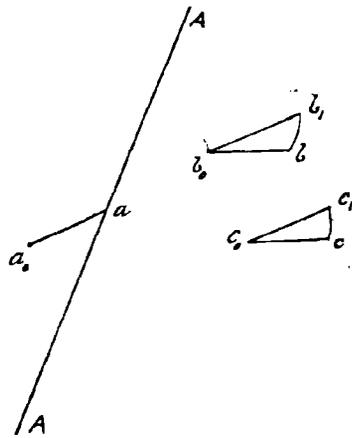
(1) Deux arcs de grand cercle se coupant en deux points, la démonstration conduit en réalité à la détermination de deux pôles de rotation qui sont les deux intersections O et O' de la sphère avec le diamètre CO .



même sphère de centre C , on voit qu'on pourra amener ces points dans leur position définitive par une rotation autour d'un certain axe XX passant par C . Cette même rotation appliquée comme déplacement d'ensemble à tous les autres points de la figure les amènera également dans la position qu'ils doivent prendre.
 L'axe XX lorsqu'il s'agit d'un déplacement infiniment petit reçoit le nom d'axe instantané de rotation.

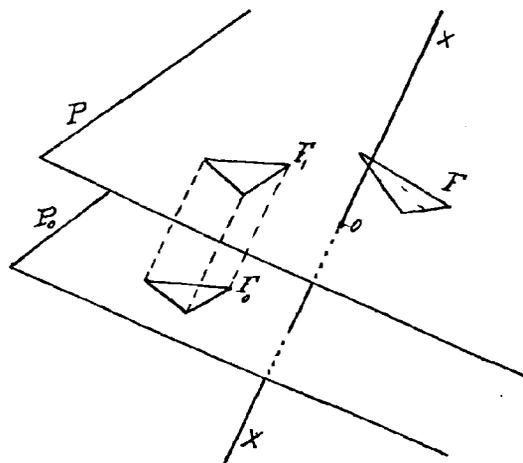
Faisons maintenant, au cas d'un déplacement absolument quelconque.

Soit A_0 un point de la figure et A sa position nouvelle : on peut donner au système une translation égale à A_0A qui l'amènera de sa position primitive S_0 ($a_0 b_0 c_0$) à une certaine position intermédiaire S_1 ($a b_1 c_1$). Pour passer ensuite de la position S_1 à la position définitive S ($a b c$) remarquons que le point A n'aura plus besoin d'être déplacé : donc en vertu de la démonstration précédente, ce second déplacement pourra s'obtenir au



moyen d'une rotation autour d'un certain axe A passant par a . Ainsi le déplacement définitif résultera d'une translation suivie d'une rotation et le point a par lequel passera l'axe de cette rotation peut être arbitrairement choisi.

Il est facile de prouver que l'on peut toujours, par un choix convenable du point a , faire en sorte que la direction de l'axe de rotation et celle de la translation coïncident.



Coupons en effet par un plan P_0 perpendiculaire à l'axe A , et considérons dans ce plan une figure quelconque F_0 entraînée

avec le système mobile.

Les deux déplacements consécutifs laisseront au plan P_0 sa direction primitive et l'amèneront dans une position P parallèle à P_0 . Soit F la position prise par la figure I_0 dans le plan P . Projétons la figure I_0 orthogonalement sur le plan P . La figure I_1 obtenue par cette projection étant identique à la figure F pourra être amenée à coïncider avec cette dernière par une rotation autour d'un point O du plan P , ou, ce qui revient au même, par une rotation autour d'un axe X mené perpendiculairement au plan P par le point O .

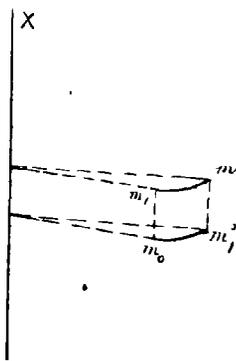
On voit ainsi qu'en définitive la figure I_0 (et avec elle le système entier qui en est solidaire) pourra toujours être amené à sa position définitive par une translation $I_0 I_1$ et par une rotation autour d'un axe X parallèle à la translation.

Ces résultats qui sont vrais pour un déplacement quelconque peuvent être appliqués en particulier à un déplacement infiniment petit.

Il est d'ailleurs bien facile de reconnaître que l'ordre dans lequel la translation et la rotation se succèdent n'influe pas - même

lorsqu'elles ont des grandeurs finies - sur le déplacement final qui en résulte (déplacements équivalents m_0, m_1, m et m_0, m', m de la figure).

On leur donne pour ce motif le nom de déplacements coexistants ou simultanés, et l'on dit que le déplacement élémentaire le plus général



d'un système invariable résulte de la coexistence d'une rotation élémentaire autour d'un axe et d'un glissement élémentaire le long de cet axe. Un pareil déplacement est dit hélicoïdal. (1)

L'axe de rotation prend alors le nom d'axe instantané de rotation et de glissement ou quelquefois aussi plus simplement d'axe du déplacement : on peut remarquer que cet axe dans le déplacement reste géométriquement en coïncidence avec lui-même et il est facile de voir

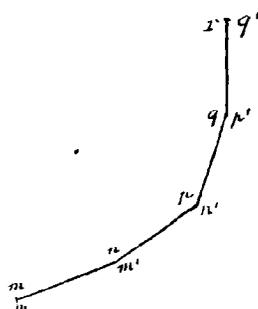
(1) C'est en effet par un déplacement de ce genre que nous avons engendré l'hélice.

qui est la seule droite qui soit dans ce cas.⁽¹⁾

157, Autre démonstration.

On peut arriver directement à reconnaître que le déplacement élémentaire de plus général d'un système invariable est un déplacement hélicoïdal, en employant le raisonnement suivant :

Considérons un point M appartenant au système et soit M' sa position après le déplacement élémentaire : ce point M' occupe la position qu'occupait avant le déplacement un point N qui, rattaché au système invariable et entraîné avec lui sera venu en N' .



De même le point N' coïncide avec la position première d'un point P qui est venu en P' et ainsi de suite.

En opérant ainsi de proche en proche, à partir d'un point arbitrairement choisi d'ailleurs, on forme un polygone infinitésimal qui coïncide avec lui-même après le déplacement. À la limite, ce polygone devient une courbe et cette courbe superposable à elle-même ne peut être qu'une hélice (§. 84) (ou comme cas particulier un cercle).

Le déplacement élémentaire peut donc être produit par le glissement d'une hélice sur elle-même, c'est donc un déplacement hélicoïdal.

158, Déplacement continu d'une figure invariable dans l'espace.

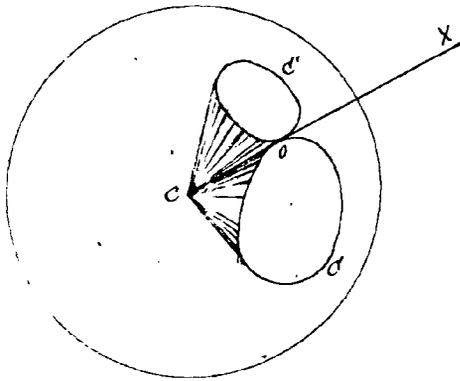
Après avoir étudié le déplacement infiniment petit d'une figure invariable dans l'espace, nous chercherons comme nous l'avons fait dans le plan, à nous rendre compte du déplacement continu qui résulte

(-1) car toute droite parallèle à l'axe change de position et toute droite non parallèle à l'axe change de direction lorsqu'elle est entraînée dans le mouvement hélicoïdal.

De la Succession de ces déplacements élémentaires.

Dans le cas où la figure a un point immobile C , on peut encore obtenir de son déplacement continu une image très-simple, et très-analogue à celle à laquelle l'étude du déplacement plan nous a conduits.

Coupant en effet la figure par une sphère de centre C , on obtient comme section une figure invariable se déplaçant sur la sphère, et par des raisonnements tout à fait semblables à ceux qui nous ont servi dans le cas du plan et que nous croyons inutile en conséquence d'exposer en détail, on arrive à reconnaître que le déplacement de cette figure sphérique résulte du roulement d'une courbe sphérique C' sur une courbe sphérique fixe C .



La figure sphérique considérée entraîne d'ailleurs dans son déplacement le système invariable tout entier, et comme le point C de ce système est fixe, on voit sans peine que son déplacement peut aussi s'obtenir par le roulement du cône de base C' et de sommet C sur le cône de base C et de même sommet.

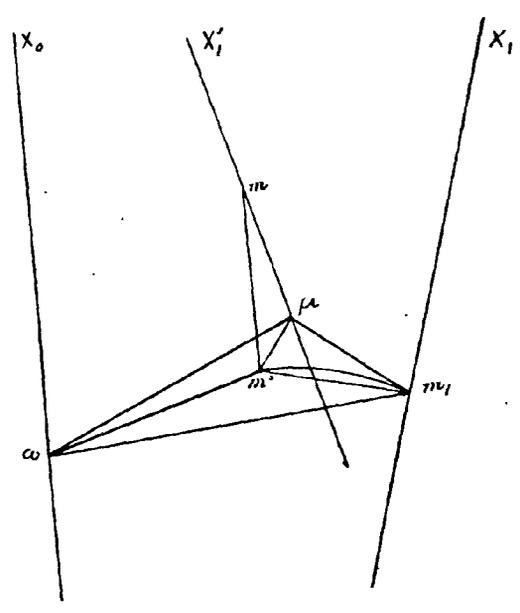
Dans le cas d'un déplacement absolument quelconque, l'image à laquelle on est conduit est moins simple.

Si l'on considère la succession des droites X_0, X_1, X_2, \dots de l'espace qui deviennent axes instantanés de rotation et de glissement à des époques successives infiniment peu différentes t_0, t_1, t_2, \dots , ces droites infiniment voisines forment une surface réglée Σ . Si d'autre part on considère à l'époque actuelle et dans le système mobile les droites X'_0, X'_1, X'_2, \dots la première qui coïncide avec X_0 et les autres qui viendront coïncider respectivement avec X_1, X_2, \dots aux instants où ces dernières droites seront axes instantanés, on obtient une seconde surface réglée Σ' et il n'est pas difficile de reconnaître que ces deux surfaces qui ont à chaque instant une génératrice commune se raccordent le long de cette génératrice.

Soit en effet X_0 la génératrice commune et considérons les

généralices infiniment voisines X_0 et X_1 des deux surfaces; la droite X_1 d'après la manière dont elle a été définie doit venir

coïncider avec la droite X_0 à l'époque t_1 , par l'effet du déplacement infiniment petit de la figure. Mais ce déplacement consiste, comme on l'a démontré, en une translation infiniment petite parallèle à X_0 et une rotation infiniment petite autour de X_0 comme axe. Par l'effet de ces deux déplacements un point m de X_1 doit se transporter en m' d'abord et en m_1 sur X_0 ensuite.



considéré pendant sa rotation. Le plan de ce cercle coupe X_1 en un point μ . Joignons $m\mu$; cette longueur est du deuxième ordre, si l'on prend la translation élémentaire mm' comme infiniment petit du premier ordre, car dans le triangle infinitésimal $mm'\mu$ le côté $m'\mu$ est opposé à l'angle en m qui est lui-même infiniment petit, comme angle des deux généralices consécutives X_0 et X_1 de la surface Σ' tandis que les deux autres angles ont des grandeurs finies voisines de 90° .

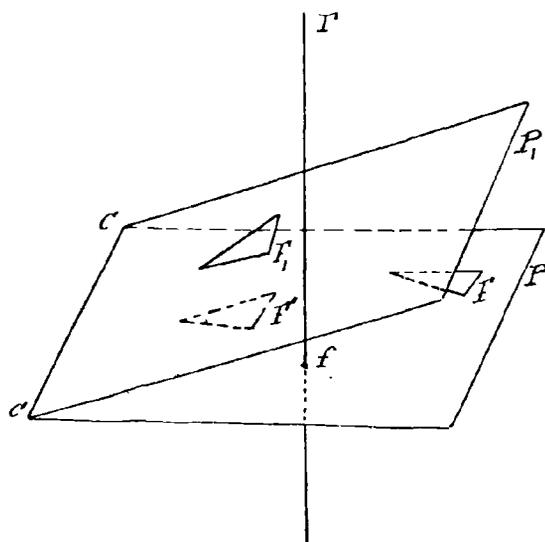
D'autre part l'angle de rotation $m'\omega m$, étant infiniment petit et la distance $m'\omega$ qui est celle du point m de X_1 à la généralice infiniment voisine X_0 étant également infiniment petite l'arc de cercle $m'm_1$ et sa corde sont également du deuxième ordre. Il en résulte que $m_1\mu$, plus petit que la somme des deux infiniment petits du second ordre m_1m' et $m'\mu$; est lui-même du second ordre, et par suite l'angle opposé $\mu\omega m_1$, dans le triangle infinitésimal $\mu\omega m_1$,

Doit être infiniment petit. Or $co\mu$ et com , sont à la limite deux tangentes aux surfaces Σ et Σ' , et comme ces surfaces ont déjà la génératrice commune X_0 , il en résulte qu'elles se raccordent au point co qui est un point quelconque de cette génératrice; ce qui démontre la proposition énoncée.

Le mouvement continu le plus général d'une figure invariable dans l'espace peut donc s'obtenir par le déplacement d'une surface réglée mobile sur une surface réglée fixe, les deux surfaces se raccordant tout le long d'une génératrice commune et le déplacement de la surface mobile résultant d'une rotation autour de cette génératrice, accompagné d'un glissement (ou translation) le long de cette même droite. Les deux surfaces doivent être constituées d'ailleurs de telle manière que par ces déplacements successifs elles restent constamment de raccordement l'une avec l'autre.

159. Foyer et caractéristique d'un plan mobile.

Revenons actuellement au déplacement élémentaire pour nous rendre compte de la façon dont certains éléments - plans ou droites par exemple - de la figure mobile se déplacent. Nous serons ainsi



amenés à des résultats intéressants qui nous fournissent une autre image très-simple du déplacement élémentaire d'une figure invariable dans l'espace.

Considérons un plan quelconque P faisant partie du système mobile. Ce plan est généralement coupé par la position infiniment voisine P_1 suivant une droite C qui est à la limite la caractéristique.

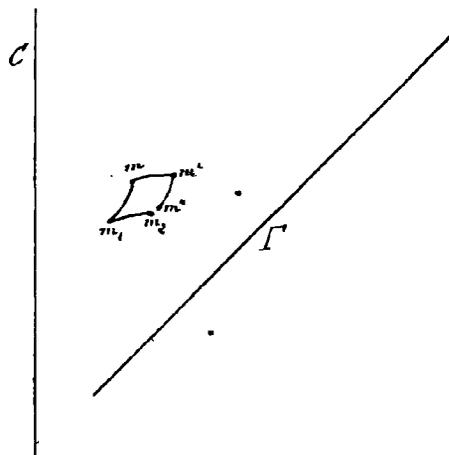
Soit une figure F prise arbitrairement dans ce plan, F_1 sa nouvelle position dans le plan P_1 . Ramenons le plan P_1 sur le plan P par une rotation autour de C . La figure F_1 viendra alors dans une certaine position F' et nous pouvons, d'après la théorie du centre instantané de rotation, ramener la figure F sur la figure

F' par une rotation élémentaire autour d'un point F du plan P , ou, ce qui revient au même, autour d'un certain axe Γ perpendiculaire au plan P et passant par F . Et réciproquement par les rotations inverses autour de Γ et de C , on amènera la figure F' sur la figure F_1 et avec elle tout le système de sa position primitive dans sa position nouvelle f .

Le point F dans sa position limite est dit le foyer du plan P . Et l'on voit que le déplacement infiniment petit du système peut s'obtenir par deux rotations infiniment petites s'effectuant l'une autour de la perpendiculaire à un plan menée par son foyer et l'autre autour de la caractéristique de ce plan qui peut être choisie d'une façon arbitraire.

D'ailleurs dans ce cas encore l'ordre dans lequel ces déplacements infiniment petits se succèdent n'influe pas sur le résultat.

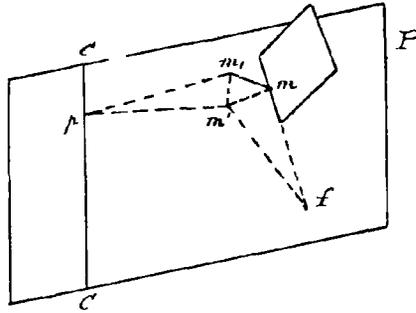
En effet, si nous faisons tourner successivement un point m d'angles infiniment petits autour de deux axes quelconques C et Γ , selon l'ordre dans lequel s'effectuent ces rotations, le point m suivra les chemins mm_1m_2 ou $mm'm''$, mais les points m et m' étant infiniment voisins, les deux arcs mm_1 et $m'm''$ qu'ils décrivent par



l'effet d'une même rotation autour de C ne peuvent différer que par des infiniment petits d'ordre supérieur à la longueur de ces arcs infiniment petits eux-mêmes et leurs directions doivent faire également des angles infiniment petits entre elles. Et comme les mêmes considérations s'appliquent aux arcs mm' et m_1m_2 , et qu'on peut les étendre aux cordes de ces arcs, les points m_2 et m'' peuvent être considérés comme coïncidant avec le quatrième sommet d'un parallélogramme construit sur mm' et mm_1 , ce qui démontre bien la proposition énoncée.

Il est facile de reconnaître que si l'on joint un point quelconque m du plan P à son foyer F , la droite Fm est normale à la trajectoire du point m . En effet le déplacement infiniment petit de ce point

est la somme géométrique mm_1 , de deux déplacements mm' et $m'm_1$, qui sont tous deux perpendiculaires à mf à la limite.

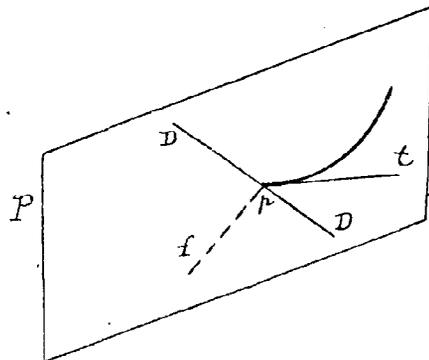


On a donc ce théorème :

Les plans successifs aux trajectoires des points d'un plan passent tous par un même point de ce plan qui en est le foyer.

On remarquera l'analogie de ce théorème avec celui du centre instantané de rotation dans le déplacement plan.

Le foyer d'un plan mobile, d'après ce qu'on vient de voir, est le seul point de ce plan qui sorte normalement du plan fixe avec lequel le plan mobile vient de coïncider : la caractéristique par contre est le lieu des points du plan mobile qui ne sortent pas de ce plan fixe dans leur déplacement élémentaire, ou autrement dit, dont la trajectoire est tangente à ce plan.



Une droite D du plan P , entraînée dans le mouvement engendre une surface réglée (D) et la perpendiculaire Ip abaissée du foyer I sur la droite D est normale à la surface (D) , car elle est perpendiculaire à deux

droites du plan tangent en p à cette surface, la génératrice D et la tangente pt à la trajectoire du point p . Et la réciproque est évidemment vraie,

c'est-à-dire que la normale à la surface (D) située dans le plan P passe par le foyer de ce plan.

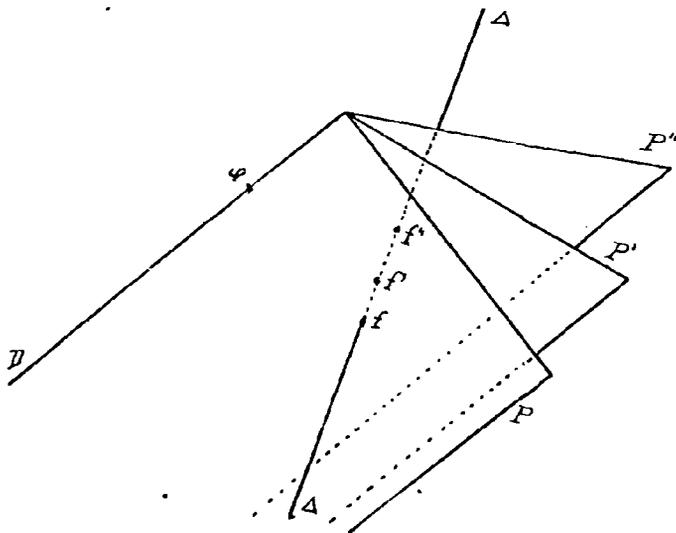
Le raisonnement ne se trouverait en défaut que si le point p était situé sur la caractéristique, car alors les deux droites D et p t n'en feraient qu'une seule, mais dans ce cas, le point p ayant son déplacement tangent à la droite D, la plus courte distance de cette droite avec sa position infiniment voisine serait infiniment petite d'ordre supérieur au premier et la droite deviendrait un élément de surface développable dont l'arête de rebroussement toucherait en p la génératrice. Il y aurait donc en ce point (S. 104) indétermination du plan tangent, et par suite la droite l_p pourrait être encore considérée comme une normale à la surface (D).

Remarquons enfin qu'une droite d'un plan qui passe par le foyer de ce plan est normale aux trajectoires de tous ses points.

160. Droites conjuguées : adjointes.

Considérons deux plans P et P' menés par une droite D du système mobile.

D'après ce qui vient d'être démontré, les plans normaux aux trajectoires des points de D doivent tous passer par les foyers f et f'



des deux plans P et P' auxquels cette droite D appartient. Ces plans se coupent donc tous suivant la même droite ff' ou Δ , et par suite, si nous menons par D un troisième plan P'' le foyer f'' de ce plan sera nécessairement situé sur Δ , puisqu'il doit être le point d'intersection commun des traces des plans normaux aux points de D sur le plan P.

Les foyers des plans qui passent par une même droite D sont situés sur une seconde droite Δ , qui est l'intersection commune des plans normaux aux trajectoires des points de la première.

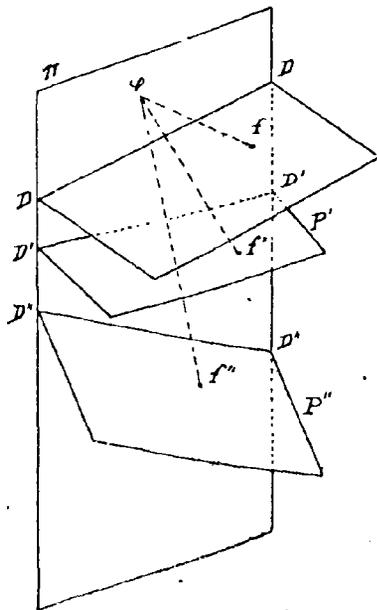
Ces deux droites D et Δ sont dites conjugues et jouissent de propriétés réciproques.

En effet, considérons un plan quelconque mené par Δ , le plan $\Delta \varphi$ par exemple, ce plan a pour foyer le point φ où il rencontre la droite D , puisqu'il est, d'après ce qui précède, normal à la trajectoire de ce point. Et d'autre part les plans PP' normaux aux trajectoires des points f, f' de Δ qui sont leurs foyers passent bien par la droite D .

Ainsi dans un déplacement déterminé, à toute droite prise arbitrairement dans le système mobile correspond à chaque instant une droite conjugue, et la première droite est réciproquement conjugue de la seconde.

Il est évident d'ailleurs que si plusieurs droites sont dans un même plan, leurs conjuguées doivent toutes passer par le foyer de ce plan.

Par suite, si deux droites se rencontrent, leurs conjuguées se rencontrent également : si plusieurs droites appartiennent à un même hyperboloïde, leurs conjuguées sont situées sur un second hyperboloïde qui a pour directrices les droites conjuguées des directrices du premier.



Enfin si l'on considère les droites d'intersection D, D', D'' de différents plans P, P', P'' avec un même plan Π , les conjuguées $\Delta, \Delta', \Delta''$ de ces droites devant toutes concourir au foyer φ du plan Π , ces conjuguées deviendront parallèles entre elles si le plan Π s'éloigne à l'infini.

On en conclut que la droite conjuguée de la droite à l'infini d'un plan quelconque P a une direction indépendante du choix de ce plan. Cette droite qui est dite l'adjointe du plan P peut être

considérée comme le lieu des foyers des plans passant par la droite D , c'est-à-dire parallèle au plan P , puisque la droite D se trouve rejetée à l'infini à la limite.

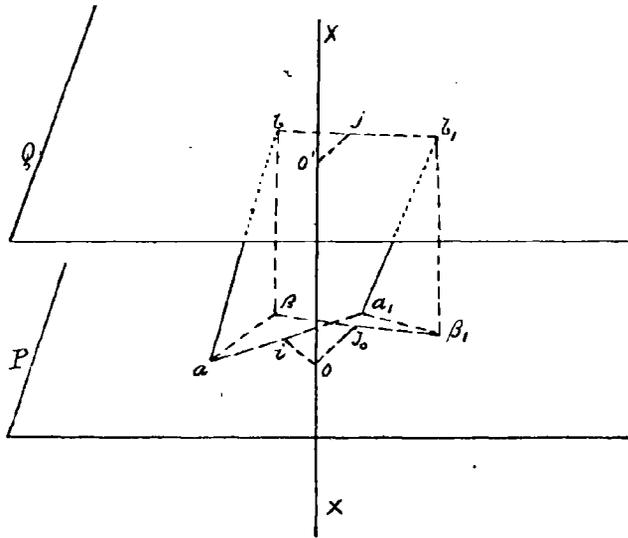
161) Sans insister davantage sur ces propriétés des droites conjuguées dont la théorie a été créée par Chasles, nous démontrerons le théorème suivant qui a une grande importance.

Le déplacement infiniment petit d'un système invariable peut s'obtenir au moyen de deux rotations élémentaires simultanées autour de deux droites conjuguées.

Nous établissons d'abord le lemme suivant :

Le déplacement quelconque, fini ou infiniment petit d'un système invariable de points pris sur une droite peut toujours s'obtenir par une simple rotation.

Ceci résulte immédiatement de la théorie du centre instantané dans le plan.



Menons en effet par les cordes aa_1 , bb_1 , des déplacements de deux des points considérés, deux plans parallèles P et Q . Les deux segments ab , a_1b_1 , compris entre ces plans ayant des longueurs égales, auront même inclinaison sur ces plans, et par conséquent leurs projections orthogonales

ab , a_1b_1 sur le plan P seront aussi égales.

Il existe donc un point O dans le plan P , tel qu'en faisant tourner ab autour de ce point dans le plan on peut l'amener sur a_1b_1 .

Mais ce déplacement revient à une rotation autour de l'axe X mené par le point O perpendiculairement au plan, et le triangles

rectangle $a_1 b_1$, entraîné dans cette rotation vient coïncider évidemment avec le triangle égal $a_2 b_2$.

L'axe X s'obtient d'ailleurs, comme le montre clairement la figure, par l'intersection des plans perpendiculaires aux cordes $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, on leurs milieux i et j . Si donc le déplacement devient infiniment petit, l'axe X deviendra l'intersection des plans normaux aux trajectoires des points a et b , c'est-à-dire la conjuguée de la droite mobile.

Ainsi on peut toujours amener une droite D de la figure mobile de sa position dans la position infiniment voisine qu'elle doit occuper par une rotation autour de sa conjuguée Δ . A son tour la droite Δ qui ne s'est pas déplacée pendant cette première rotation pourra être amenée dans la position nouvelle par une rotation autour de D , et lorsque les deux droites D et Δ auront été ainsi amenés dans leurs nouvelles positions D_1 et Δ_1 , il est clair que le système tout entier qui aura été entraîné avec elles occupera la position qu'il doit prendre après son déplacement infiniment petit. Dans ce cas d'ailleurs le résultat est encore indépendant de l'ordre dans lequel ces deux rotations s'exécutent.

C'est on le voit une nouvelle manière d'obtenir le déplacement élémentaire le plus général d'un système invariable au moyen de deux déplacements élémentaires simultanés. Nous avons reconnu d'abord que ce déplacement pouvait s'obtenir par une rotation autour d'un axe déterminé et par une translation parallèle à cet axe. Nous reconnaissons maintenant qu'il peut s'obtenir également par deux rotations élémentaires autour de deux droites conjuguées dont la première peut être arbitrairement choisie.

On doit observer que la perpendiculaire à un plan menée par son foyer étant évidemment la conjuguée de la caractéristique de ce plan, les rotations simultanées autour de ces deux droites, que nous avons reconnues équivalentes au déplacement hélicoïdal, sont bien comme cas particulier dans les combinaisons de rotations que l'on peut obtenir par les couples de droites conjuguées. Il est à remarquer seulement que dans ce cas particulier, les deux axes de rotation sont rectangulaires.

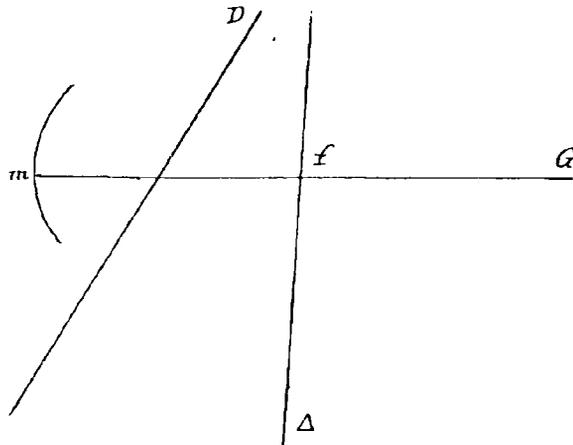
162. Quelques conséquences remarquables de la théorie des droites conjuguées. Théorème de M. M. Mannheim et Schönemann.

Signalons quelques conséquences remarquables de la théorie

précédente.

On peut observer d'abord que si l'on considère un plan perpendiculaire à la direction commune des adjointes et si l'on désigne par X l'adjointe de ce plan, le déplacement pouvant s'obtenir par deux rotations simultanées autour de X et de sa conjuguée et cette dernière droite étant rejetée à l'infini, la rotation qui s'effectuera autour d'elle se réduira à une translation parallèle à X . Le déplacement élémentaire ainsi déterminé sera donc un déplacement hélicoïdal autour de cette dernière droite. On retrouve ainsi l'axe instantané de rotation et de glissement du solide et l'on reconnaît que cet axe est parallèle à la direction commune des adjointes.

Observons encore que si une droite G , normale au déplacement d'un de ses points rencontre une droite D , comme elle doit passer au foyer F



du plan qu'elle détermine avec D , elle rencontre aussi la conjuguée Δ de D , puisque le point F appartient à cette dernière droite. Et par suite la droite G est normale à la trajectoire de tous ses points.

Réciproquement si une droite G rencontre deux droites conjuguées D et Δ , elle passe par cela même au foyer F du plan qu'elle forme avec l'une d'elles, D par exemple, et par conséquent elle est normale aux trajectoires de tous ses points.

Ces deux lemmes conduisent très simplement à la démonstration d'un théorème très remarquable dû à M. H. Mannheim et Schöenemann sur le déplacement d'une figure invariable assujettie à quatre conditions.

On a vu que le déplacement d'une figure invariable, pour être entièrement déterminé devant être assujettie à cinq conditions et que, si le nombre des conditions imposées se réduisait à quatre, le déplacement était indéterminé dans une certaine mesure. Les points se déplacent alors sur des surfaces et à partir d'une situation donnée, chacun d'eux peut recevoir une infinité de déplacements élémentaires appartenant à un même élément de la surface trajectoire sur laquelle il se meut.

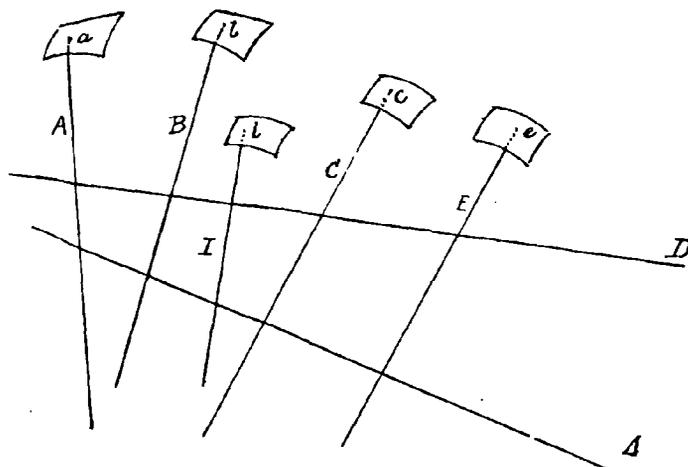
Considérons en particulier quatre points $a b c e$ de la figure

invariable et soient (a) (b) (c) (e) les éléments des surfaces sur lesquels ces points doivent se mouvoir et A, B, C, E les normales en a, b, c, e à ces quatre surfaces.

Si l'on prend trois de ces normales A, B, C par exemple, comme directrices d'un hyperboloïde, le quatrième E rencontrera cet hyperboloïde en deux points, réels ou imaginaires, et par ces deux points passeront deux génératrices D et Δ du second système qui rencontreront les quatre droites A, B, C, E et qui seront évidemment les seules droites satisfaisant à cette condition.

Mais dans tous les déplacements possibles, les quatre droites A, B, C, E sont normales aux trajectoires des points a, b, c, e et par conséquent, rencontrant D, elles doivent aussi rencontrer sa conjuguée : cette conjuguée ne peut donc être que la droite Δ puisque les deux droites D et Δ sont les seules qui rencontrent à la fois les quatre normales.

Il existe donc deux droites D et Δ qui sont conjuguées dans tous les déplacements compatibles avec les liaisons imposées au système.



Mais alors si l'on considère un point quelconque i du système et si l'on mène par ce point la droite I s'appuyant sur D et Δ, cette droite rencontrant, deux droites qui sont conjuguées dans tous les déplacements possibles, sera normale à toutes les trajectoires possibles du point i , c'est-à-dire normale à la surface-trajectoire sur laquelle se déplace ce point.

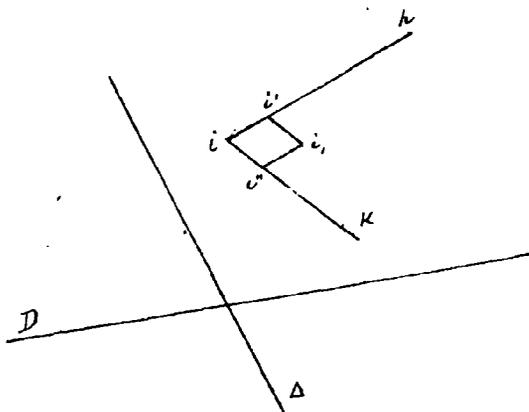
D'où le théorème suivant qui se rattache par son caractère à ceux que nous avons précédemment démontrés :

Dans un déplacement assujéti à quatre conditions, pour une position du système, les normales aux surfaces-trajectoires de tous les points rencontrent deux mêmes droites D et Δ.

On peut remarquer encore que les différents déplacements élémentaires

de la figure mobile pouvant tous s'obtenir par deux rotations élémentaires simultanées autour des droites D et Δ , ces déplacements ne doivent différer que par la grandeur relative de ces rotations élémentaires.

Ainsi pour un point i quelconque le déplacement $i i_1$ est la somme géométrique des déplacements $i i'$ et $i i''$ dus aux rotations élémentaires simultanées, et comme ces déplacements ont des directions



$i h$ et $i k$ respectivement perpendiculaires aux plans $i D$ et $i \Delta$, la direction $i i_1$ est toujours tangente au plan $i h$ et de $i k$ qui est de le plan tangent à la surface trajectoire du point i .

Mais si le point i était situé sur l'un des axes D ou Δ , le déplacement produit par la rotation autour de cet axe devenant nul,

tous les déplacements du point i s'effectueraient dans la direction perpendiculaire au plan de i et de l'autre axe. L'élément superficiel de surface-trajectoire se réduirait donc pour ce point à un simple élément linéaire.

163. Quelques propriétés importantes des droites conjuguées, des caractéristiques de plans et des adjointes.

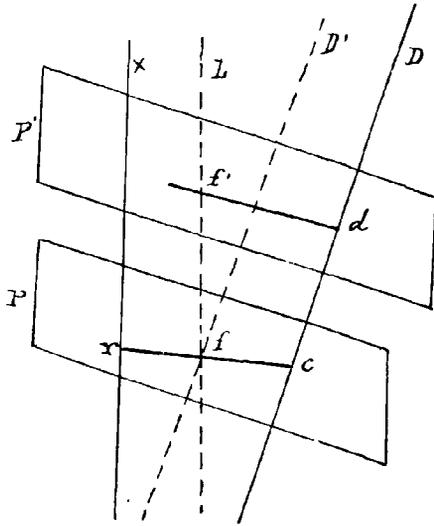
Revenons actuellement à la théorie générale du déplacement d'une figure invariable assujettie à cinq conditions pour établir quelques relations importantes entre la position de l'axe instantané d'une part et d'autre part les situations relatives des couples de droites conjuguées, des adjointes et des caractéristiques des plans mobiles.

Soit X l'axe du déplacement et D une droite de la figure mobile. Menons la perpendiculaire commune IC à ces deux droites et par cette perpendiculaire commune un plan P perpendiculaire à D .

Le foyer F de ce plan sera situé sur IC , car le point F de

déplace suivant X , c'est-à-dire perpendiculairement à ic , et l'adjointe du plan P sera la parallèle L à X par le foyer f .

Coupons par un plan quelconque P' parallèle à P : ce plan rencontrera L et D en f' et d , et le point f' étant le foyer du plan P' , $f'd$ sera normal à la trajectoire du point d ; mais comme il est aussi normal à D , il sera normal à la surface réglée décrite par la droite D au point d .



Ainsi lorsque le plan P' occupe toutes les positions parallèles à P , le lieu de la droite $f'd$ (dont $f'c$ est une position particulière) est le paraboloïde des normales à la surface réglée (D). La droite L adjointe au plan P est donc une génératrice de ce paraboloïde et d'après ce qui a été vu dans l'étude générale des surfaces réglées, le plan central à la surface (D) pour la génératrice D est le plan mené par D parallèlement à L , c'est-à-dire parallèlement à l'axe

du déplacement X , d'où il résulte que le point C est le point central de cette génératrice, en d'autres termes, le point central sur une droite mobile engendrant par son déplacement une surface réglée, est le pied de la perpendiculaire commune à la droite génératrice et à l'axe du déplacement.

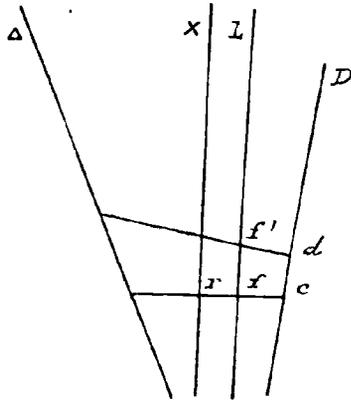
Comme d'ailleurs la droite L ne dépend que de la position du plan P , et que ce plan ne change pas si la droite D se déplace en restant parallèle à elle-même, on en conclut que les paraboloïdes des normales aux surfaces réglées engendrées par toutes les droites parallèles à une même direction ont, pour une position de la figure, une génératrice commune.

Si l'on considère en particulier une parallèle D' à D , rencontrant l'adjointe L , le paraboloïde des normales à la surface décrite se réduira à un plan: la droite D' engendre donc un élément de surface développable. Et il est facile de voir que réciproquement parmi les droites parallèles à D les droites qui rencontrent L sont les seules qui jouissent de cette propriété.

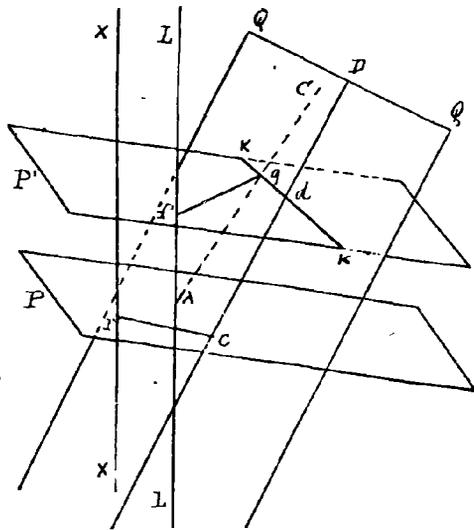
Reprenons la droite D et le paraboloidé des normales à la surface réglée qu'elle engendre.

Les normales telles que $f'd$ à cette surface réglée étant (si on les considère comme entraînées dans le déplacement) normales aux trajectoires de leurs points, ces droites rencontrant D doivent rencontrer aussi sa conjuguée Δ . Donc cette dernière droite appartient au paraboloidé des normales à la surface (D) et comme la droite IC perpendiculaire aux deux génératrices L et D de ce paraboloidé, et par conséquent ligne de striction de cette dernière surface doit être aussi perpendiculaire à Δ : cette droite est la plus courte distance de D et Δ , et par suite, la plus courte distance

de deux droites conjuguées rencontre l'axe du déplacement et lui est perpendiculaire. Enfin: le plan mené par une droite D parallèlement à sa conjuguée Δ est parallèle à l'axe du déplacement.



Considérons actuellement un plan quelconque Q mené par la droite D et soit dK la trace de ce plan sur le plan P .

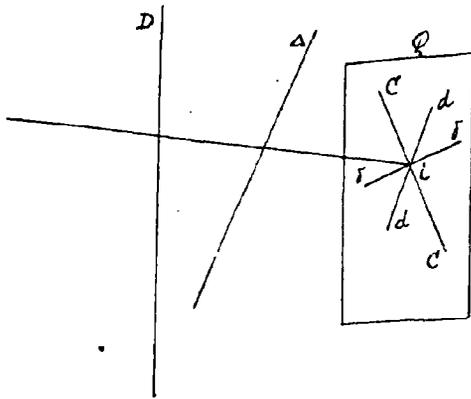


Si de f' on abaisse une perpendiculaire $f'q$ sur dK , cette droite est perpendiculaire au plan Q , car elle est perpendiculaire à dK par construction, et, étant située dans le plan P elle est perpendiculaire à D : elle est donc perpendiculaire à deux directions du plan Q . Mais cette droite est perpendiculaire à la trajectoire de tous ses

points puisqu'elle passe par le foyer f' du plan P qui la renferme; le point q se déplace donc tangentielllement au plan Q , c'est donc un point de la caractéristique C de ce plan.

Donc : la caractéristique C d'un plan Q passant par D est la projection orthogonale sur ce plan de l'adjointe d'un plan P perpendiculaire à D . Cette caractéristique passe donc par le point A ou l'adjointe L du plan P perce le plan Q .

Si l'on considère d'ailleurs les différentes droites telles que D que l'on peut tracer dans le plan Q , comme tout ce qui vient d'être dit peut être répété pour chacune d'elles, on voit que la caractéristique C d'un plan quelconque Q peut être obtenue en projetant sur ce plan l'adjointe d'un plan P perpendiculaire au plan Q , mais d'ailleurs quelconque.



Remarquons enfin à ce sujet que si l'on projette orthogonalement sur un plan Q deux droites conjuguées quelconques D et Δ , on a par l'intersection i de deux projections un

point de la caractéristique C du plan Q .

En effet la projetante du point i rencontrant D et Δ est normale à la trajectoire de tous les points : la trajectoire du point i est donc tangente au plan Q , ce qui démontre la proposition énoncée.

(164) Application des théories de la géométrie cinématique à l'étude des courbes gauches et des surfaces.

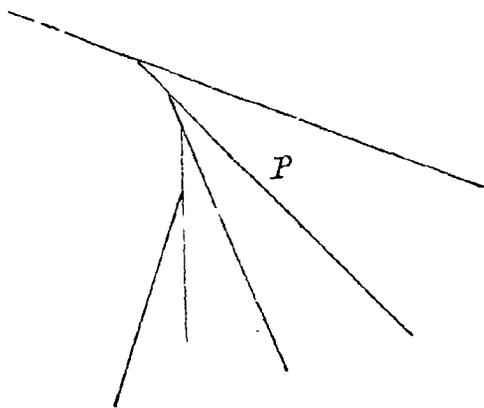
Pour montrer l'utilité de ces considérations de géométrie cinématique dans les recherches de pure géométrie, nous en donnerons immédiatement quelques applications très-simples.

A, Surface polaire d'une courbe gauche et développées de cette courbe.

Nous avons eu recours pour faire mieux comprendre la génération des développantes dans le cas des courbes planes, à la considération du seulement d'une tangente sur la développée. Nous pouvons de même

Dans le cas des courbes gauches imaginer le roulement d'un plan tangent sur la surface développable que nous avons définie comme enveloppe des plans normaux à la courbe donnée.

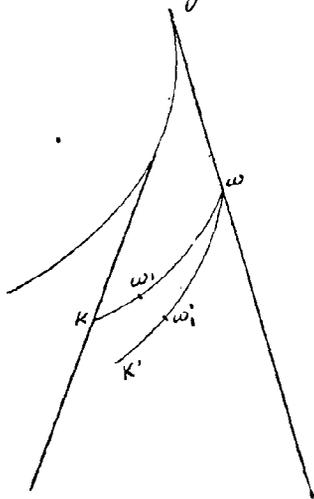
Le roulement sans glissement d'un plan sur une développable peut être défini de la façon suivante. Imaginons un polyèdre infinitésimal formé par les



côtés consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit dans l'arête de rebroussement de cette développable.

Un plan P qu'on suppose coïncider d'abord avec l'une des facettes du polyèdre pourra par des rotations successives autour des arêtes venir coïncider successivement avec toutes ses facettes consécutives.

À la limite le polyèdre deviendra la surface développable, le plan P un plan tangent à cette surface, et le déplacement limite de ce plan qui restera tangent à la développable dans toutes ses positions sera le roulement sans glissement que nous nous proposons de définir.



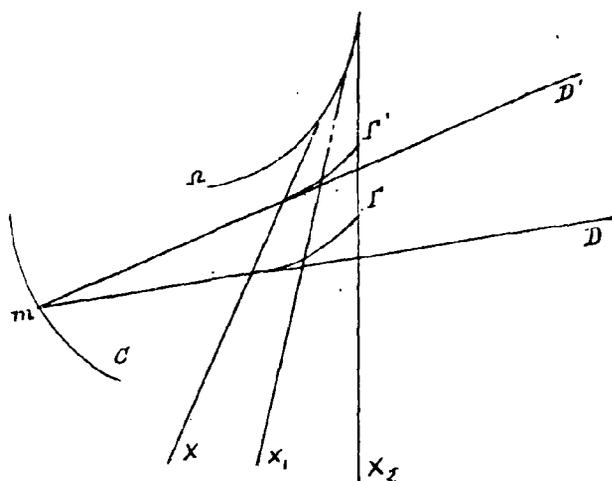
Si pendant ce roulement du plan P , on considère les points de contact successifs de ce plan avec une courbe quelconque K tracée sur la développable, on voit aisément (en se reportant au roulement sur le polyèdre) que les déplacements $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$ du point de contact ω sur la courbe K et sur la courbe K' lieu des positions de ce point sur le plan mobile, doivent être constamment égaux : il en résulte

que dans le roulement du plan P la courbe K' lieu de ω , roulera sans glisser sur la courbe K dont elle est la transformée (147).

Supposons qu'un plan N roule ainsi sur une développable et

(1) C'est le déplacement inverse de celui que nous avons eu à considérer pour le développement de la développable sur un plan.

Considérons un point m du plan entraîné dans ce mouvement. Le déplacement infiniment petit du plan N étant une rotation élémentaire autour de sa caractéristique qui est la génératrice de contact X avec la développable, le déplacement du point m sera constamment normal au plan mobile.⁽¹⁾ Donc les



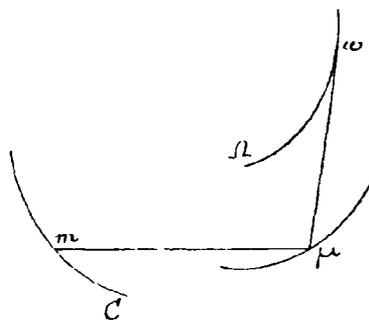
génératrices de la développable seront les axes de courbure de la trajectoire C du point m et l'axe de rebroussement Ω de cette surface sera le lieu des centres de ses sphères osculatrices. Ainsi les trajectoires de tous les points du plan ont à un moment donné même axe de courbure, et leurs sphères osculatrices ont même centre, ou si l'on préfère ces courbes ont même surface polaire on adoptant la dénomination attri-

buer par Monge à la surface enveloppe des plans normaux à une courbe.

Éacons actuellement par le point m une droite quelconque D dans le plan mobile. Cette droite pourra être considérée comme transformée d'une ligne géodésique Γ tracée sur la développable, et dans ses différentes positions elle sera tangente à cette courbe sur laquelle elle se rabat d'après la définition du roulement simple donnée pour les courbes planes.

On voit ainsi que la courbe C peut être engendrée au moyen de la courbe Γ comme les développantes planes sont engendrées au moyen de leurs développées.

À toute droite D correspond ainsi une courbe Γ et ces différentes courbes sont dites les développées de la courbe C . La surface polaire de la courbe C est donc le lieu géométrique de ses développées.



Quant au lieu des centres de courbure μ de la courbe, il n'est pas, comme dans le cas des courbes planes, une développée de cette courbe. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que dans le développement

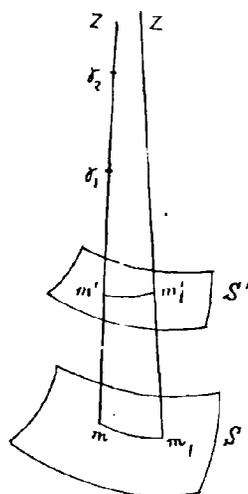
(1) On peut remarquer que dans ce déplacement particulier qui se réduit à une succession de rotations élémentaires, le foyer du plan considéré est indéterminé; tous les points de ce plan se déplacent en effet normalement au plan.

cette courbe se transforme dans la podaire de la transformée de l'arête de rebroussement Ω relative au point m ; cette podaire n'étant pas en général une droite, le lieu du point p n'est pas une ligne géodésique de la développable.

Elle le devient dans le cas particulier où la courbe C étant plane, sa surface polaire devient un cylindre.

6. Surfaces parallèles.

Si l'on porte sur les normales à une surface S à partir de leurs pieds et dans un sens déterminé par rapport à S une longueur constante mm' , le lieu du point m' ainsi obtenu est une seconde surface S' qui est dite parallèle à la première.



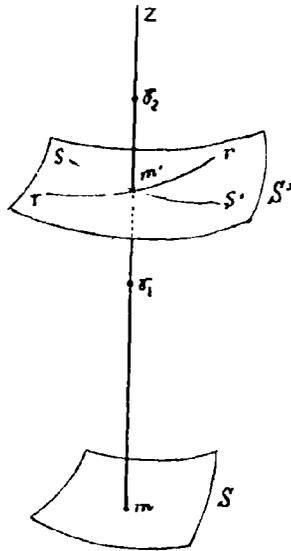
Imaginons que l'on attribue à la normale mZ un déplacement quelconque en faisant parcourir au point m une trajectoire arbitraire mm_1 sur la surface S , la droite mobile étant normale dans ce déplacement à la trajectoire. De son point m sera normale aux trajectoires de tous ses points, et en particulier à celle du point m' et comme le même raisonnement s'applique à tous les déplacements possibles du point m sur la surface S et à tous les déplacements qui en résultent

pour le point m' sur la surface S' , on en conclut que la normale mZ à la surface S est aussi normale à la surface S' ainsi qu'à toutes les surfaces analogues à S' et parallèles à la surface donnée.

Les surfaces parallèles ayant ainsi mêmes normales, leurs normales leur sont communes et en particulier leurs normales développables. On en conclut que ces surfaces ont aux points correspondants mêmes plans principaux et mêmes centres de courbure principaux ρ_1 et ρ_2 . La différence entre leurs rayons de courbure principaux étant par conséquent la même, il en résulte qu'en projection sur un plan perpendiculaire à leur normale commune mZ leurs indicatrices

sont des coniques homofocales.

Celles d'entre ces surfaces qui rencontrent la normale mZ en dehors du segment $\delta_1 \delta_2$ sont convexes aux points situés sur mZ , celles qui coupent mZ entre δ_1 et δ_2 sont à courbures opposées.

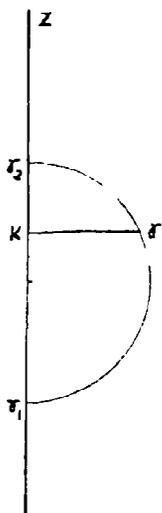


Soit S' une de ces dernières surfaces rencontrant en m' la normale mZ : en ce point passeront deux lignes asymptotiques r, r' , S, S' appartenant à la surface S' et ces deux lignes seront (S. 151) les lignes de striction des deux normales qui ont en m' leur point central. Or comme on peut faire coïncider le point m' avec le point central d'une normale quelconque, on reconnaît ainsi que toutes les normales du système de surfaces parallèles considéré ont pour lignes de striction des trajectoires ortho-

gonales de leurs génératrices et que ces lignes de striction sont aussi des lignes géodésiques de ces normales.

164, La démonstration qui précède en nous apprenant que les normales à une surface donnée sont aussi normales à une infinité d'autres surfaces, nous amène à dégager l'étude de ces normales de la considération de la surface particulière qui a conduit à les déterminer. L'ensemble de ces normales au voisinage immédiat de l'une d'elles Z constitue ce qu'on appelle un pinceau de droites, et l'étude du pinceau des normales peut se faire indépendamment de la surface qui lui a donné naissance en regardant ce pinceau comme caractérisé par la position sur Z des points δ_1 et δ_2 qu'on appelle alors foyers du pinceau et par celle des plans tangents en ces points aux surfaces Σ_1, Σ_2 , auxquelles toutes les droites du pinceau sont tangentes. Ces plans reçoivent le nom de plans focaux du pinceau. Ce sont les plans principaux communs aux surfaces parallèles à S , ils sont rectangulaires entre eux.

Chaque normale Z' infiniment voisine de Z détermine avec celle-ci un élément de normalie dont le point central est un point K du segment $\delta_1 \delta_2$, et dont le paramètre, égal à l'ordonnée du cercle décrit sur $\delta_1 \delta_2$ comme diamètre a pour valeur



$$K\gamma = \sqrt{K\delta_1 K\delta_2}$$

Si l'on considère en particulier la surface parallèle S_K passant par le point K , ses rayons de courbure principaux R_1 et R_2 sont égaux en valeur absolue

à $K\delta_1$ et $K\delta_2$ et comme les normales qui ont pour directrices les lignes asymptotiques de cette surface ont leurs points centraux, ainsi que nous venons de le faire remarquer, confondus avec le point K , on voit que le paramètre de ces normales est égal à $\sqrt{-R_1 R_2}$. Ce paramètre est d'ailleurs évidemment égal au rayon de torsion des lignes de striction des normales considérées, c'est-à-dire des lignes asymptotiques de la surface S_K .⁽¹⁾

165. Surfaces qui se coupent sous un angle constant le long de leur courbe d'intersection.

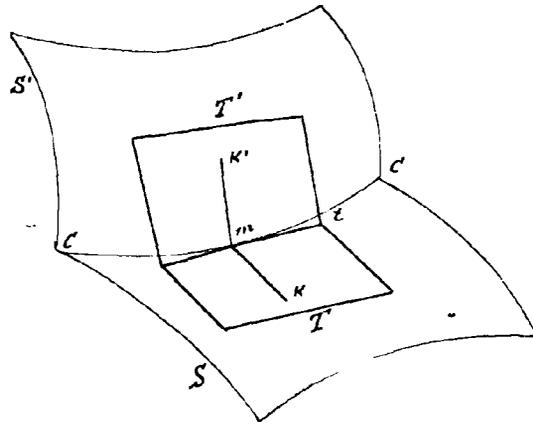
Nous avons énoncé sans le démontrer (§ 142) un théorème sur les surfaces qui se coupent sous un angle constant : les théories de la géométrie cinématique nous en fourniront une démonstration extrêmement simple.

Soient S et S' deux surfaces qui se coupent sous un angle constant le long de leur courbe d'intersection C et supposons que cette courbe

(1) parce que les normales Z et Z' étant respectivement perpendiculaires aux plans osculateurs des lignes asymptotiques, l'angle qu'elles font entre elles est égal à l'angle de torsion de ces lignes.

Soit pour la surface S une ligne de courbure.

Considérons le dièdre formé par les plans tangents T et T' à ces surfaces en un point m de la courbe C .



Nous pourrions déplacer ce dièdre invariable de forme en faisant décrire au point m la courbe C de manière à ce que ses faces T et T' soient constamment tangentes aux deux surfaces.

Les caractéristiques des deux plans dans ce déplacement seront deux droites mK et mK' passant par le point m et projections sur les deux plans mobiles de l'adjointe L d'un plan perpendiculaire à l'arête

mt du dièdre. Mais puisque C est par hypothèse ligne de courbure sur la surface S , mK conjuguée de mt lui sera perpendiculaire. La droite L se trouve donc située dans le plan perpendiculaire à mt dont elle est l'adjointe⁽¹⁾ et elle se projette par conséquent sur T' suivant une droite mK' également perpendiculaire à mt , d'où il suit que la courbe C tangente à une direction principale de la surface S en chacun de ses points est aussi ligne de courbure sur cette surface.

(1) Ce plan est parallèle à l'axe du déplacement dans le déplacement considéré et la droite L doit être rejetée à l'infini dans ce plan.

Troisième partie.

Application de la théorie générale des surfaces à la détermination des courbes d'ombre et à l'étude géométrique de quelques surfaces spéciales.

166. Nous aborderons actuellement l'étude d'un certain nombre d'applications importantes des théories géométriques développées dans les précédentes leçons. C'est à cette étude que seront consacrées les dernières leçons du cours.

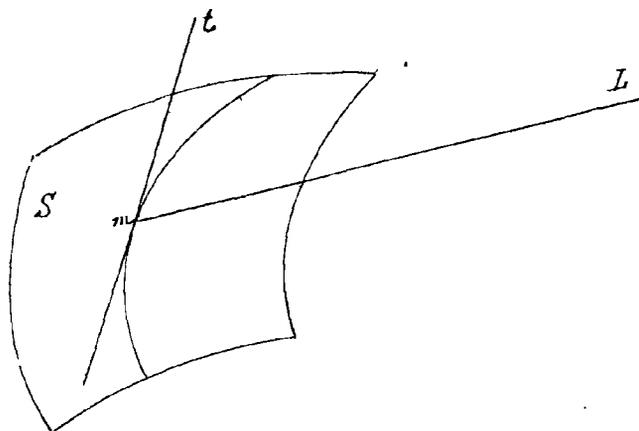
1^o Théorie des ombres.

Tangente à la courbe d'ombre propre.

La théorie des ombres nous a été enseignée dans les cours préparatoires à l'école et nous en avons déjà fait en perspective d'assez nombreuses applications. Mais il y a une question que nous n'avons pas résolue d'une façon générale ; c'est la détermination de la tangente à la courbe d'ombre propre. Les notions que nous avons acquises sur la courbure des surfaces nous permettent actuellement de combler cette lacune.

En effet les courbes d'ombre propre étant les courbes de contact des surfaces limitant les corps opaques avec des cônes ou des cylindres circonscrits à ces surfaces, les tangentes à ces courbes s'obtiendront immédiatement par l'application du théorème des tangentes conjuguées. Pour obtenir la tangente en un point d'une pareille courbe, on n'aura qu'à construire en ce point la direction conjuguée mt de celle du rayon

lumineux L m dans l'indicatrice de la surface

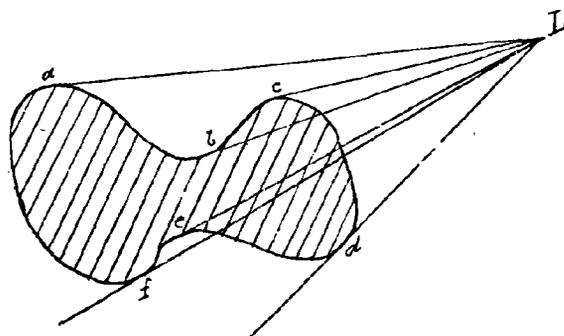


Si la surface est à courbures opposées son indicatrice étant hyperbolique, la tangente à la courbe d'ombre sera conjuguée du rayon lumineux par rapport aux asymptotes de l'indicatrice. Il suffira donc de connaître ces asymptotes pour la construire. Remarquons immédiatement qu'aux points paraboliques la direction de la tangente est indépendante de celle du rayon lumineux.

Il est bon d'observer également que la tangente à la courbe d'ombre en un point donné reste la même si l'on déplace le point lumineux sur le rayon lumineux qui passe en ce point, ou si l'on substitue à la surface donnée une autre surface osculatrice en ce point à la première.

167. Points virtuels et points réels : points utiles.

Soit une surface S que nous supposons géométriquement définie et jouissant des propriétés de continuité admises dans notre étude générale des surfaces. Cette surface limite un noyau matériel opaque et est éclairée par un point lumineux L .



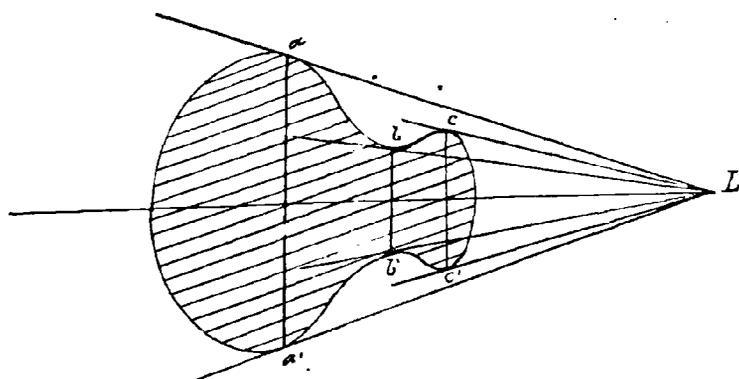
Si pour construire les points de la courbe d'ombre propre nous employons la méthode des plans sécants, nous aurons à mener par le point lumineux un plan sécant quelconque, puis par ce point L des tangentes à

à la section.

Mais on voit immédiatement que parmi les points de contact $a b c d e f$ ainsi obtenus, il y en a tels que $b e$ qui ne peuvent fournir des points de la courbe d'ombre parce que les rayons qui donnent ces points se trouvent au voisinage de leurs points de contact à l'intérieur du noyau matériel où ils ne peuvent exister en tant que rayons lumineux ; ces points sont dits pour cette raison points virtuels de la courbe d'ombre ; pour les autres points tels que $a c d f$ qui sont dits points réels, le rayon peut exister au voisinage du point de contact, à moins qu'il n'ait été préalablement intercepté (comme pour le point f par exemple) par une autre partie du noyau opaque. Il y a donc à distinguer pour les points réels entre les points utiles tels que $a c d$ et les points tels que f qui, tout en étant réels, ne sont pas utiles.

168. Points de passage.

Les points réels et les points virtuels peuvent fournir des branches de courbes séparées sur la surface comme cela a lieu par



exemple dans le cas d'une surface de révolution éclairée par un point lumineux L situé sur l'axe de la surface.

Dans le cas de la figure par exemple on a deux cercles réels $a a'$ et $c c'$ et un cercle virtuel $b b'$.

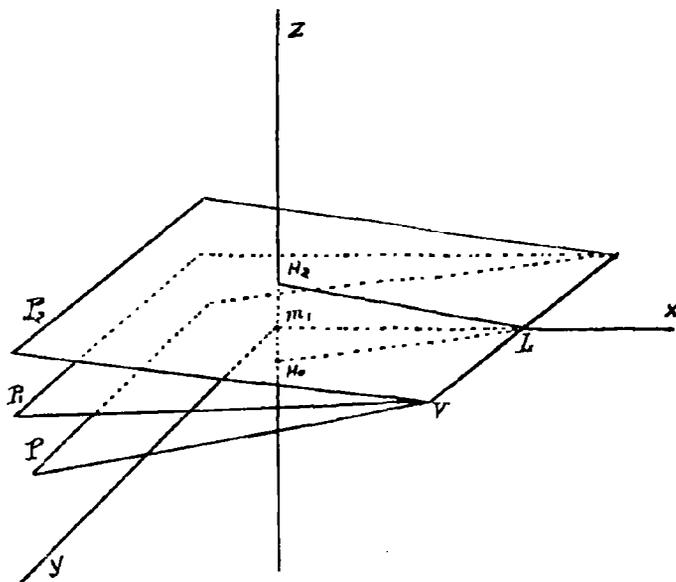
Le plus souvent les

points réels et les points virtuels forment des parties distinctes d'une même courbe et il est important dans ce cas de déterminer les points limites, c'est-à-dire de quels la courbe change de nature. On donne à ces points le nom de points de passage.

Pour arriver à la détermination de ces points, cherchons à nous rendre compte de ce qui se passe aux environs immédiats d'un point quelconque m , de la courbe d'ombre ; nous reconnaitrons ainsi quelles sont les conditions qui doivent se trouver satisfaites pour que ce

point devienne un point de passage de la courbe à laquelle il appartient.

Employons la méthode des plans sécants et de part et d'autre du plan P_1 tangent en m_1 à la surface menons deux plans sécants P_0 et P_2 infiniment peu différents de P_1 et obtenus en faisant tourner ce dernier plan d'angles infiniment petits autour de la droite LV perpendiculaire dans ce plan au rayon lumineux Lm_1 . Ces plans sécants rencontreront la normale m_1Z en deux points H_0 et H_2 qui seront situés à une même distance h de m_1 , si nous supposons les plans P_0 et P_2 également inclinés sur le plan P_1 .



Preons pour axes de coordonnées la normale m_1Z , le rayon lumineux m_1L et la droite m_1Y du plan P_1 perpendiculaire à ces deux premières droites. Les points de la surface infiniment voisins de m_1 auront leurs coordonnées x, y liées entre elles (S. 128) par une relation de la forme

$$2Z = Ix^2 + 2Sxy + ty^2 + E_3$$

ou I, S, t sont trois constantes dépendant de la forme de la surface S et E_3 un infiniment petit du troisième ordre si x et y sont du premier.

Les sections déterminées par les plans sécants P_0 et P_2

S'obtiendront, en projection sur le plan tangent, en faisant

$$z = \pm h \mp \frac{h}{l} x$$

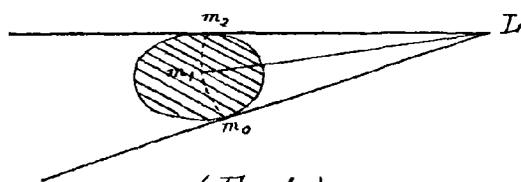
Dans l'équation précédente (l désignant la distance finie $m_1 L$). Mais h devant être du deuxième ordre si x et y sont du premier le terme $\frac{h x}{l}$ est du troisième, de sorte que les projections des courbes de section se trouvent représentées par les équations

$$\pm h = r x^2 + 2 s x y + t y^2 + \mathcal{E}_3$$

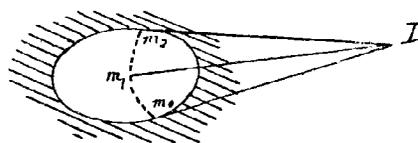
identiques avec celles des courbes (K) que nous avons considérées (§128) dans l'étude générale des surfaces et qui représentaient les sections de la surface par des plans parallèles au plan tangent et infiniment peu distants de ce plan.

Distinguons actuellement les différents cas qui peuvent se présenter.

1° La surface S est convexe — Si un des plans sécants le plan P_0 par exemple ne coupe pas la surface, l'autre P_1 la coupe suivant une courbe infinitésimale (K) , qui tend à devenir semblable à l'indicatrice elliptique de la surface. On pourra donc mener par le point L deux tangentes à cette section et l'on obtiendra ainsi deux points de contact m_0 et m_2 infiniment voisins de m_1 .



(Fig. 1.)



(Fig. 2)

Si le noyau matériel opaque occupe la concavité de la surface S (figure 1) les deux points m_0 et m_2 seront réels et comme le point m_1 l'est également, on aura de part et d'autre de m_1 deux demi-branches réelles $m_1 m_0$ et $m_1 m_2$.

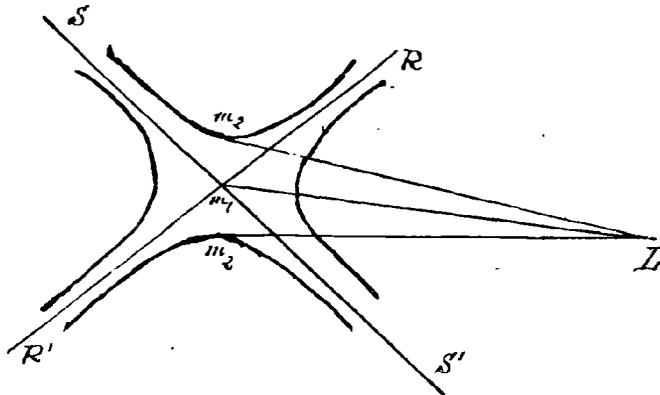
Si la matière est du côté convexe de la surface, le point

m_1 sera un point virtuel, et les points m_0 et m_2 s'étant également (figure 2), on obtient de part et d'autre du point m_1 deux demi-branches virtuelles.

Il ne peut donc pas y avoir de point de passage.

2° La surface S est à courbures opposées — Examinons actuellement le cas où la surface est à courbures opposées : traçons dans le plan P_1 les asymptotes RR' , SS' de l'indicatrice et supposons pour fixer les idées que le point L tombe dans l'angle Rm_1S' .

Les deux plans P_0 et P_2 coupent tous deux la surface, et les courbes de section dans leurs parties infiniment voisines du point m_1 seront deux courbes $(K)_0$ et $(K)_2$ qui tendront à devenir semblables à deux hyperboles conjuguées ayant RR' et SS' pour asymptotes communes.



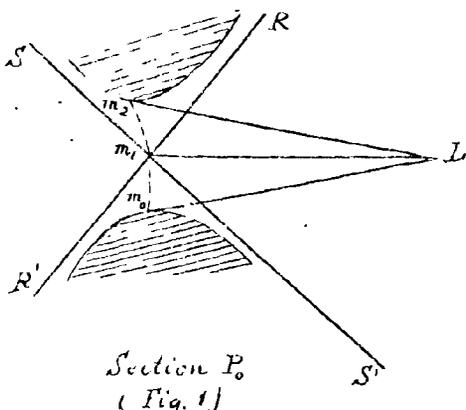
Supposons par exemple que la section P_0 tende vers une hyperbole située dans l'angle Rm_1S' , la section P_2 tendra vers une hyperbole située dans l'angle supplémentaire Rm_1S' .

Le point L étant dans la concavité de cette dernière hyperbole on ne pourra pas mener par ce point de tangentes à la

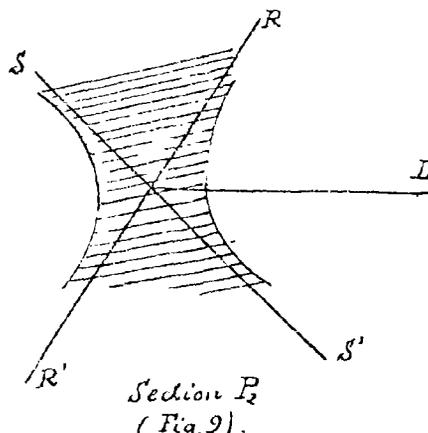
section P_2 tandis qu'on pourra en mener deux à la section P_0 qui tend à S confondue avec une hyperbole ayant sa convexité tournée vers L .

Les deux points de contact de ces tangentes détermineront à partir du point m_1 les deux demi-branches m_1, m_0, m_1, m_2 de la courbe d'ombres.

Pour déterminer actuellement la position du noyau matériel



Section P_0
(Fig. 1)

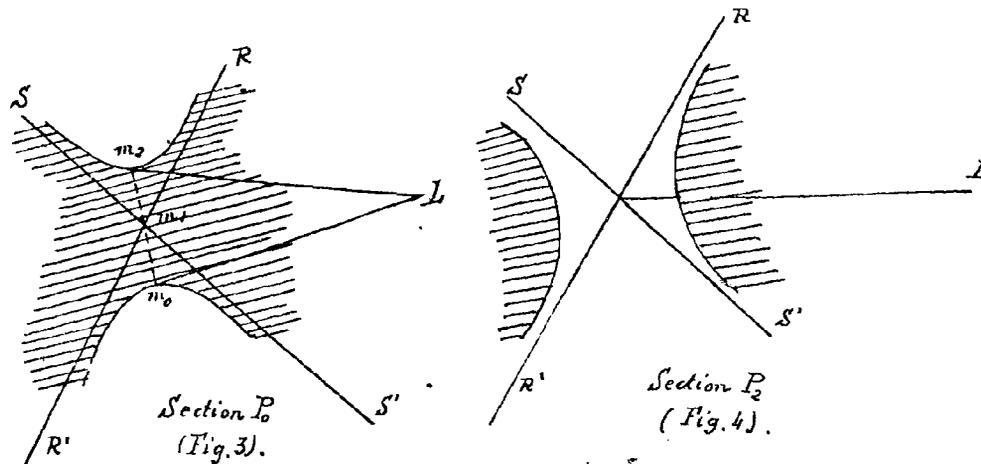


Section P_2
(Fig. 2).

par rapport à la surface S , nous pouvons remarquer que la normale $m_1 Z$ traversant la surface au point m_1 , doit sortir du noyau en ce point.

Supposons d'abord que la portion de normale qui se trouve dans le noyau soit celle qui est au-dessus de m_1 , c'est-à-dire $m_1 Z$ (figure de la page 232), nous aurons pour les sections P_0 et P_2 les dispositions des figures ci-dessus (1) et (2) et les points m_0 et m_2 seront réels ainsi que le point m_1 .

Au contraire si la normale pénètre dans le noyau matériel au-dessous de m_1 , on aura les dispositions suivantes (figures 3 et 4) et les deux points m_0 et m_2 seront virtuels ainsi que le point m_1 lui-même.



Ainsi dans tous les cas examinés la courbe d'ombre propre reste réelle ou virtuelle de part et d'autre du point m_1 . Et l'on voit par cette discussion même que le seul cas où les choses pourraient se passer différemment est celui où la surface étant à courbures opposées le point lumineux L se trouverait situé sur l'une des asymptotes de l'indicatrice.

Cherchons à nous rendre compte de ce qui a lieu dans ce cas.

Par un point situé sur l'asymptote d'une hyperbole on peut toujours mener à la courbe une seule tangente dont le point de contact soit à distance finie, et si l'on suppose qu'en multipliant les rayons de l'hyperbole par un facteur infiniment petit, ce point de contact se trouvera ramené à une distance infiniment petite du centre m_1 .

Donc par le point lumineux L on pourra mener une tangente

à la section P_0 et une tangente à la section P_2 : les points de contact m_0 et m_2

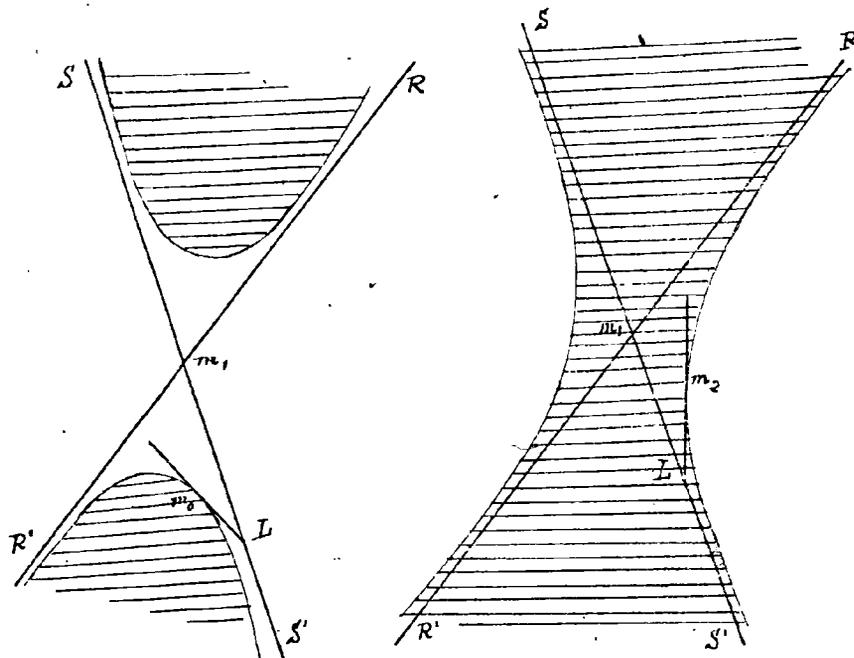
ainsi obtenus décrivent les arcs infiniment petits des deux demi-branches de la courbe d'ombre qui sont de part et d'autre du point m_1 .

D'ailleurs il suffit d'examiner sur les figures ci-contre les diverses dispositions possibles pour reconnaître que de quelque côté de la surface que le noyau opaque soit situé, l'un des points de contact est toujours réel et l'autre toujours virtuel :

on a donc au point considéré un point de passage.

Ainsi la propriété caractéristique des points de passage c'est qu'en ces points le rayon lumineux coïncide avec une des asymptotes de l'indicatrice de la surface.

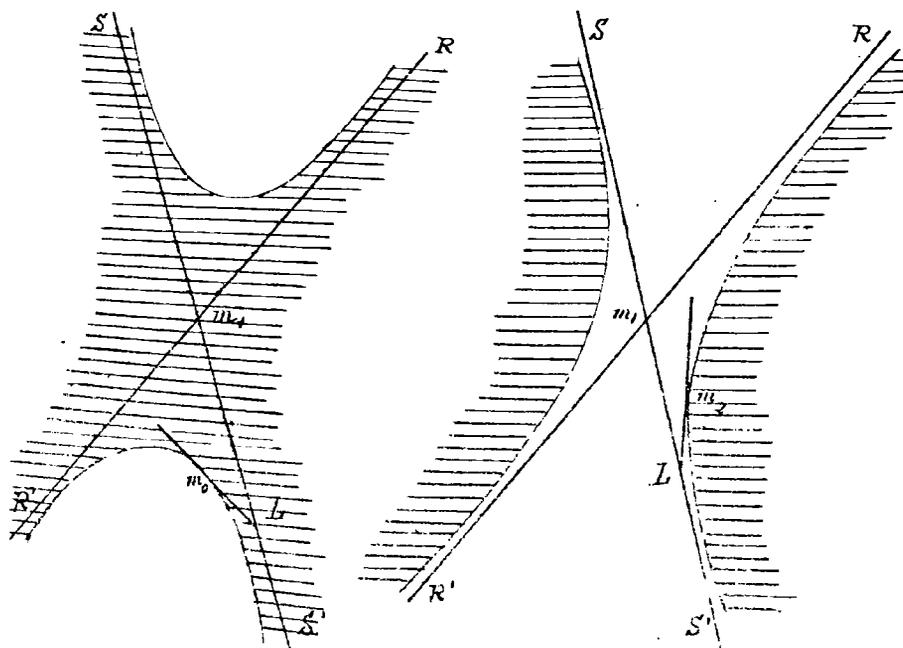
En ces points d'ailleurs la courbe d'ombre est tangente au rayon lumineux, car sa tangente



Première disposition

m_0 réel

m_2 virtuel



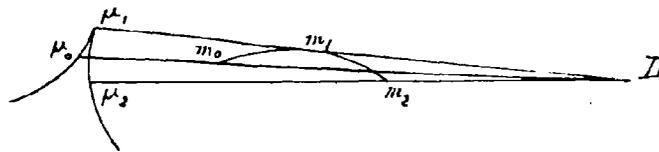
Deuxième disposition.

m_0 virtuel

m_2 réel.

qui est la conjuguée de l'asymptote coïncide avec cette asymptote elle-même.

Il en résulte que le cône d'ombre présente un rebroussement le long de ces génératrices. En effet si l'on coupe ce cône par un plan quelconque, on obtient une courbe de section qui peut être consi-



dérée comme la projection conique de la courbe d'ombre propre et comme cette courbe est tangente à la projectante $L m_1$, on a vu (§. 75) que sa projection devant présenter un rebroussement de première espèce : la tangente au point de rebroussement μ_1 est

la trace sur le plan sécant du plan osculateur à la courbe d'ombre.

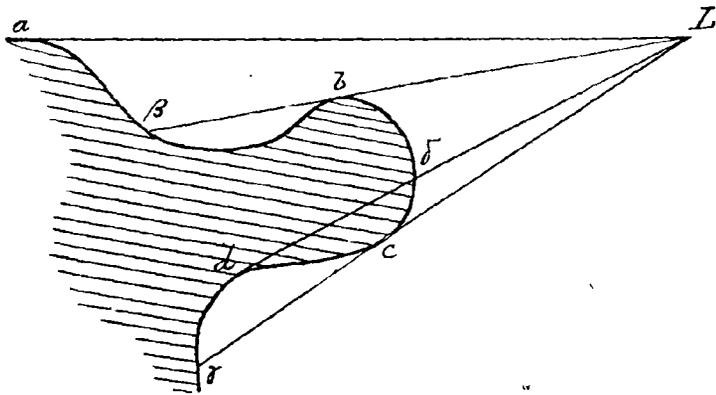
Observons encore qu'aux points de passage la courbe d'ombre étant une courbe tracée sur la surface S et tangente à une asymptote de l'indicatrice, son plan osculateur doit se confondre avec le plan tangent à la surface si son rayon de courbure n'est pas infini.

La propriété de la courbe d'ombre d'être tangente au rayon lumineux aux points de passage se conserve en projection et fournit un moyen de détermination de ces points par les tangentes menées du point lumineux projeté à la projection de la courbe d'ombre supposée construite. Il est cependant nécessaire de vérifier ensuite que le contact en projection correspond bien à un contact dans l'espace : par exemple si le plan tangent à la surface au point considéré était parallèle aux projectantes, toutes les droites de ce plan se confondraient en projection avec la tangente à la courbe d'ombre et le contact en projection ne prouverait pas le contact dans l'espace.

169. Courbe d'ombre portée par une surface sur elle-même.

En dehors des courbes d'ombre propre, lieu des points de contact tels que $a b c$ ----- des rayons lumineux issus de L , on a à considérer les points tels que $\beta \gamma$ -----

intersections des rayons Lb , Lc prolongés avec la surface.

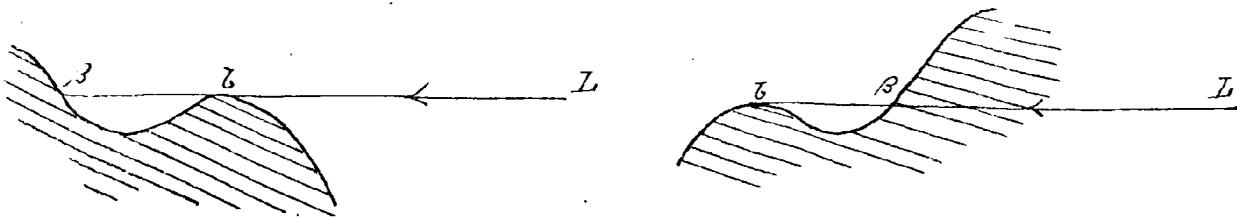


Le lieu de ces points constitue la courbe d'ombre portée par la surface sur elle-même.

La tangente à cette courbe est facile à déterminer: en β par exemple, ce sera l'intersection du plan tangent à la surface S en ce point avec le plan tangent au cône, c'est-à-

dire avec le plan tangent à la surface S en β . Ces courbes comme celles d'ombre propre comprennent d'ailleurs des branches virtuelles (telles que celle décrite par le point δ par exemple) dont on ne doit pas tenir compte au point de vue du tracé des ombres.

On peut reconnaître aisément que les points de passage des courbes d'ombre portée doivent coïncider avec ceux des courbes d'ombre propre. Les dispositions des figures ci-dessous représentent en effet les deux cas d'un point d'ombre portée réel et d'un point



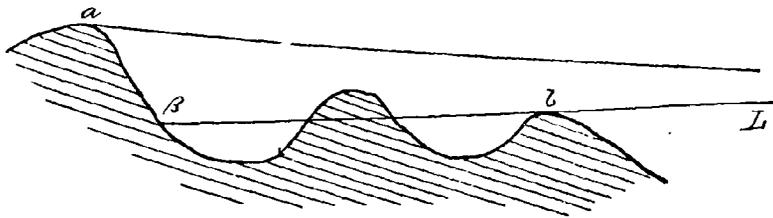
d'ombre portée virtuelle: pour passer de l'un à l'autre, il est nécessaire que la position relative des points b et B par rapport au point lumineux L se renverse ce qui ne peut avoir lieu par une déformation continue de la figure que si a , en m , et donne l

points β et β viennent de confondre ; mais à ce moment le rayon lumineux a avec la surface un contact du deuxième ordre : il coïncide donc avec une asymptote de l'indicatrice et le point est par conséquent un point de passage de l'ombre propre.

En ces points d'ailleurs la tangente à la courbe d'ombre portée, intersection des plans tangents aux points infiniment voisins β et β coïncide avec l'asymptote de l'indicatrice, c'est-à-dire avec la tangente à la courbe d'ombre propre.

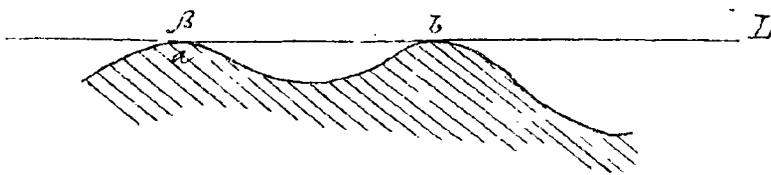
Remarquons enfin qu'il peut y avoir sur les courbes d'ombre portée comme sur les courbes d'ombre propre des points réels mais non utiles. Ceci aura lieu par exemple lorsqu'entre les points β et β de la figure précédente (1^{re} disposition) viendra s'interposer une

portion de surface interceptant le rayon réel. La courbe d'ombre portée β cesse d'être utile à partir des points où elle est rencontrée par la courbe d'ombre portée de la portion de surface interposée.



140. La tangente à la courbe d'ombre portée en ses points de rencontre avec une branche de la courbe d'ombre propre autre que celle dont elle est la projection.

Supposons par exemple que la courbe d'ombre portée (β) vienne rencontrer la courbe d'ombre propre (a).



Au point de rencontre de ces deux courbes la tangente à la courbe d'ombre portée est le rayon lumineux lui-même, puisque cette tangente est l'intersection des plans tangents à la surface β en a et en β .

et que ces deux plans tangents contiennent tous deux le rayon lumineux⁽¹⁾.

D'autre part la tangente à la courbe d'ombre propre est la direction conjuguée de ce même rayon lumineux dans l'indicatrice du point A : les tangentes aux deux courbes sont donc deux directions conjuguées par rapport à cette indicatrice.

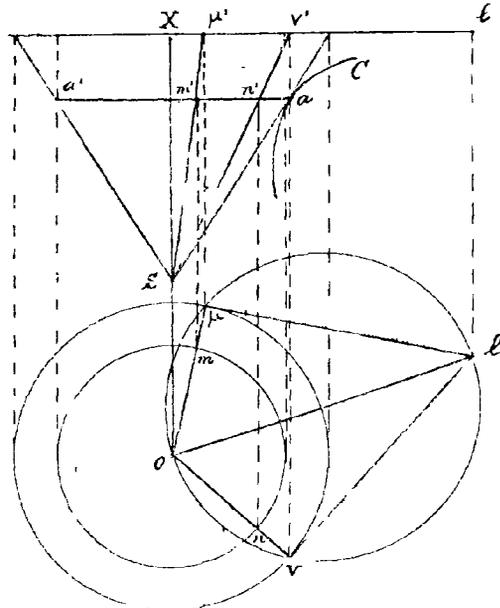
Cette propriété subsiste aux points de passage où les courbes d'ombre propre et d'ombre portée se raccordent comme nous l'avons fait voir puisque ces deux courbes sont alors tangentes à une asymptote de l'indicatrice qui est sa propre conjuguée.

Enfin cette propriété subsiste encore pour l'ombre portée par la surface S sur une autre surface S' , puisque rien dans le raisonnement ne suppose que les deux éléments superficiels a et b appartiennent à une même surface.

171. Application à la construction des lignes d'ombre propre sur les surfaces de révolution.

Appliquons les résultats précédents au tracé des courbes d'ombre propre sur les surfaces de révolution éclairées par un point lumineux.

Soit C le méridien d'une pareille surface, X son axe.



Nous pouvons appliquer ce qui a été dit au sujet des surfaces enveloppes et considérer la surface de révolution comme l'enveloppe des cônes de révolution la touchant suivant des parallèles et ayant leurs sommets sur son axe.

Pour construire les points de la courbe d'ombre propre situés sur un parallèle tel que $a a'$ par exemple, nous considérerons le cône de sommet

(1) en s'exceptant le cas très-particulier où les plans tangents aux points a et b coïncideraient.

S' circonscrit à la surface le long de ce parallèle et nous déterminons le cercle trace de ce cône sur le plan horizontal du point lumineux l' , puis nous mènerons par le point l des tangentes $l\mu$ et $l\nu$ à la projection horizontale de ce cercle et nous aurons en $O\mu$, $O\nu$, $S'\mu$, $S'\nu$ les génératrices du cône qui forment la courbe d'ombre sur cette surface. Les points m, m', n, n' où ces génératrices rencontrent le parallèle de la surface de révolution sont les points cherchés.

On peut remarquer que les points μ et ν sont sur la circonférence décrite sur Ol comme diamètre qui tracée une fois pour toutes servira pour toutes les constructions.

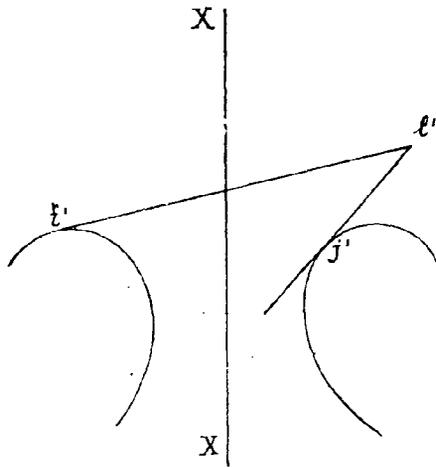
La courbe d'ombre est évidemment symétrique par rapport à la droite Ol en projection horizontale. Les points situés sur cette droite seront donnés par le cône ayant pour base dans le plan horizontal du point lumineux un cercle passant par ce point lumineux lui-même. Ils se trouveront donc sur les parallèles déterminés par les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point l' à la courbe méridienne située dans le plan vertical Ol .

En ces points la tangente à la courbe d'ombre est par symétrie la perpendiculaire à Ol , c'est-à-dire l'horizontale tangente au parallèle. (1)

Le contour apparent de la surface sur le plan vertical se compose de la courbe méridienne située dans un plan de front. Si l'on veut les points de la courbe d'ombre propre situés sur ce contour apparent, on appliquera la méthode des enveloppées en considérant le cylindre debout tangent à la surface le long de ce méridien.

Les génératrices d'ombre propre sur ce cylindre s'obtiendront en menant par le point l' des tangentes $l'i'$ et $l'j'$ à la courbe méridienne considérée

comme base du cylindre dans le plan de front du point l' . Les points i' et j' ainsi obtenus seront donc aussi les deux points cherchés

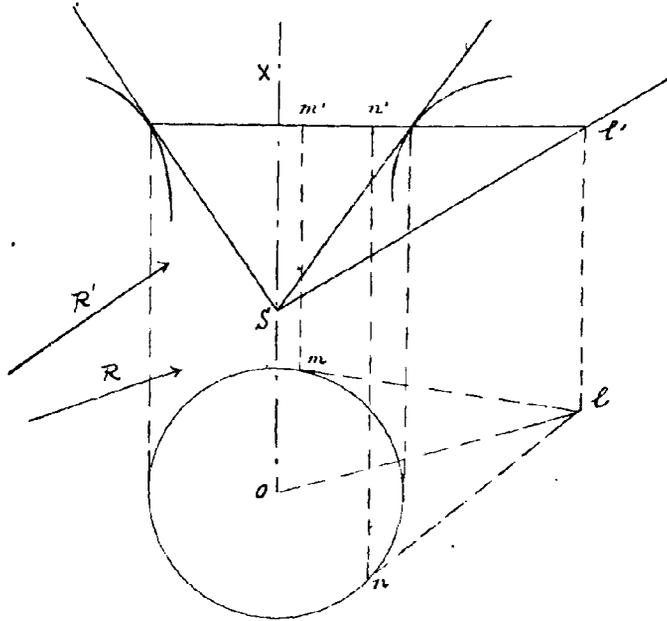


(1) Car elle ne peut se confondre avec le rayon lui-même, qui est tangent au méridien, c'est-à-dire à une section principale de la surface.

puisque les génératrices d'ombre sur le cylindre étant debout ont ces points pour projections.

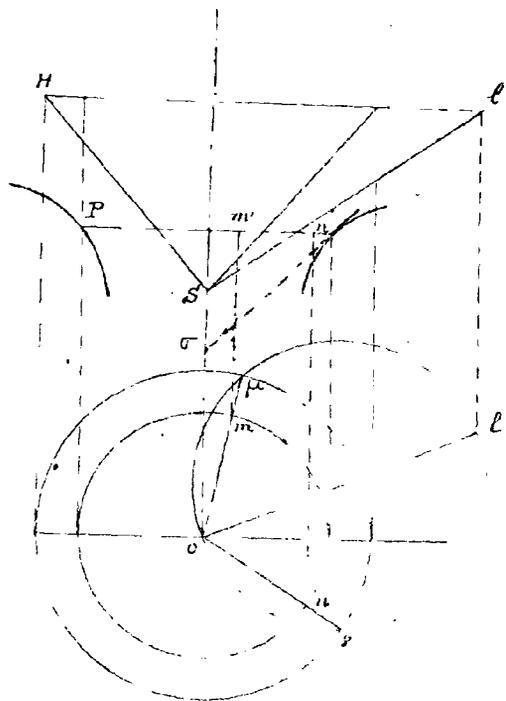
Si les rayons lumineux au lieu d'émaner d'un point étaient

parallèles et donnés par les projections R et R' d'une droite parallèle à leur direction, on aurait à mener par le point S sommet du cône une parallèle Ol , S l' à cette droite. On prendrait la trace ll' de cette parallèle sur le plan d'un parallèle de la surface et par ce point on mènerait deux tangentes à ce parallèle: d'où les points d'ombre $m m', n n'$.



L'ombre sur le cône n'étant pas modifiée dans ce cas lorsqu'on déplace ce cône par un mouvement de translation quelconque on voit qu'on pourra transporter ainsi en un même point S de l'axe les sommets de tous les cônes qu'on aura à considérer.

On prendra la trace sur un plan horizontal H de l'un quelconque de ces cônes on construira le point ll' où la parallèle au rayon au niveau menée par S perce le plan H et l'intersection de la trace du cône avec le cercle décrit sur Ol comme diamètre donnera en projection horizontale les génératrices



l'ombre Op , $O\delta$ dont on prendra ensuite les points de rencontre m et n avec le parallèle P obtenu en menant à la courbe méridienne des tangentes parallèles au contour vertical du cône.

Mais quand on opère ainsi il faut avoir soin de choisir parmi les points d'intersection de Op et $O\delta$ avec le parallèle les deux points m et n qui répondent bien à la question ; les points m et p et n et δ devront être situés d'un même côté ou de part et d'autre du point O selon que le plan horizontal H et le plan P du parallèle seront d'un même côté ou de côtés différents par rapport au sommet S du cône auxiliaire et du sommet O du cône circonscrit à la surface le long du parallèle P .

173, Détermination de la tangente à la courbe d'ombre.

Pour déterminer la tangente à la courbe d'ombre propre en l'un de ses points $m m'$, nous avons à chercher la direction conjuguée de celle du rayon lumineux qui passe en ce point par rapport à l'indicatrice de la surface. Nous nous proposons donc en premier lieu la détermination de cette indicatrice, et pour cela nous remarquerons que la surface étant identique à elle-même tout le long d'un parallèle nous pouvons substituer au point m' le point a' situé dans le plan méridien de front sur ce même parallèle.

Observons tout d'abord que les méridiens et les parallèles d'une surface de révolution doivent être des lignes de courbure, les premiers par simple raison de symétrie, les seconds comme trajectoires orthogonales des premiers.⁽¹⁾ Par suite les centres de courbure principaux de la surface sont le centre de courbure σ_1 du méridien et le centre de courbure σ_2 de la section normale tangente au parallèle.

Ce dernier d'après le théorème de Meusnier doit se trouver à la rencontre de la normale avec l'axe, puisque cet axe est l'axe de courbure de la section circulaire du parallèle.

Ainsi, les axes de l'indicatrice au point a sont dirigés suivant la tangente at et $a't'$ au méridien et suivant la tangente au parallèle qui est une droite debout projetée horizontalement en aq , et leurs carrés sont proportionnels à $a\sigma_1$ et $a\sigma_2$.

(1) On le reconnaît également d'ailleurs par ce fait que les normales qui ont pour directrices les méridiens et les parallèles sont des plans et des cônes, c'est-à-dire des surfaces développables.

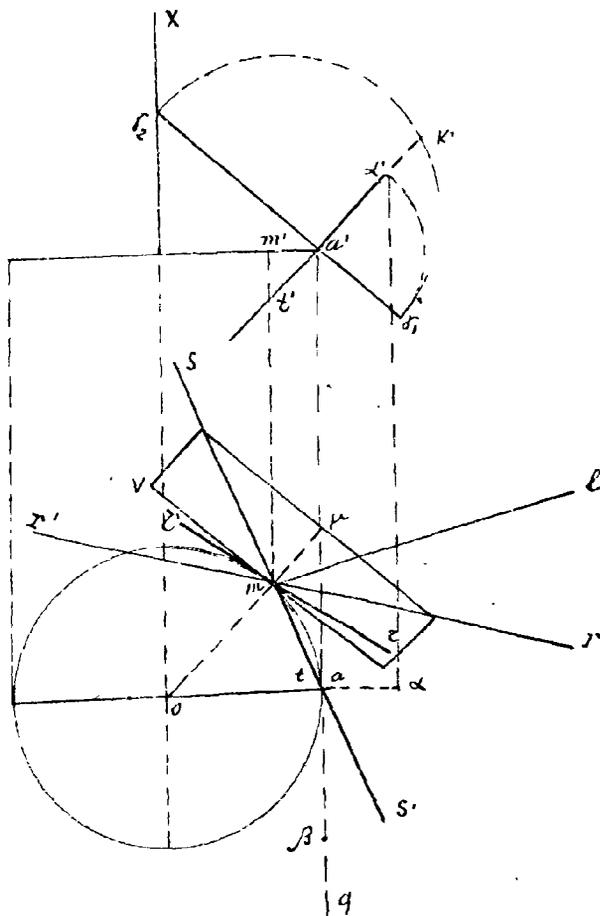
Si nous prenons l'axe dirigé suivant $a't'$ égal à $a'r_1$, le second axe sera une moyenne proportionnelle entre $a'r_1$ et $a'r_2$, car on doit avoir

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'r_1}{a'r_2}$$

$$\text{et si } a = a'r_1$$

$$b^2 = a'r_1 a'r_2$$

Cette moyenne proportionnelle se construit sans difficulté au moyen



du cercle décrit sur $r_1 r_2$ comme diamètre, c'est $a'k'$. Sortons une longueur égale à $a'r_1$ en $a'\alpha'$ sur $a'k'$ et projetons α' en α sur le plan horizontal. Sortons ensuite $a\beta$ égal à $\sqrt{a'r_1 a'r_2} = a'k'$ sur ag et nous aurons en $a\alpha$, $a\beta$, les axes de l'indicatrice du point a en projection sur le plan horizontal. Transportons ensuite ces axes en $m\mu$, $m\nu$ au point m par une rotation autour de l'axe de la surface : pour avoir la tangente à la courbe d'ombre en projection horizontale il faudra construire la direction

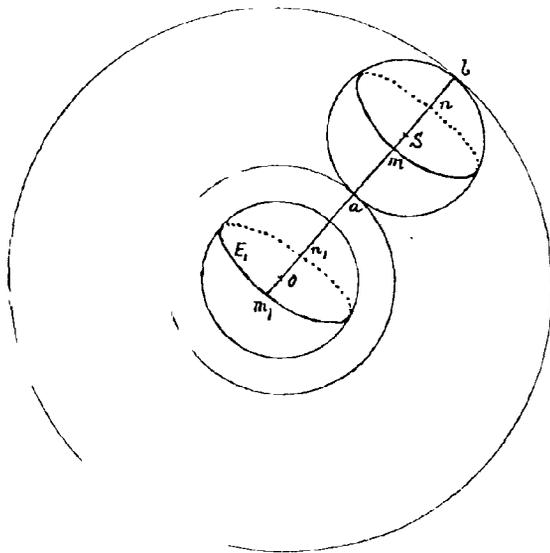
conjuguée du rayon lumineux lm par rapport à l'indicatrice projetée déterminée ainsi par ses axes.

Si l'indicatrice est hyperbolique, il suffira de tracer ses asymptotes qui sont les diagonales IT' , SS' du rectangle construit sur les axes, et de prendre la conjuguée $m\tau$ de lm relativement à ces asymptotes. Si l'indicatrice est elliptique on construira encore les diagonales du rectangle des axes et l'on prendra la symétrique par rapport

aux axes de la conjuguée du rayon lumineux relativement à ces diagonales.

173. ombre propre du tore éclairé par des rayons parallèles.

Dans le cas particulier où la surface de révolution est un tore et où les rayons sont parallèles, on peut obtenir la tangente à la courbe d'ombre en projection horizontale par une méthode toute différente qui permet de reconnaître dans la courbe d'ombre une conchoïde d'ellipse.



Nous pouvons considérer en effet le tore comme l'enveloppe d'une sphère S qui se déplace en tournant autour de l'axe O de la surface. La caractéristique de la sphère dans ce déplacement est le méridien ab du tore.

Si nous supprimons la sphère éclairée par des rayons parallèles, la courbe d'ombre propre est un grand cercle qui se projette suivant une certaine ellipse E et les points m et n où cette ellipse rencontre la caractéristique ab sont des points de la courbe d'ombre propre du tore.

Mais si nous transportons la sphère mobile au centre O du tore, l'ellipse

E se transporte dans une position E_1 et cette ellipse E_1 reste invariable lorsque la sphère S se déplace.

D'autre part il est visible sur la figure que les longueurs m_1m et n_1n sont égales à la distance constante OS . Donc les points m et n décrivent une conchoïde de l'ellipse E_1 . Or nous savons construire la tangente à cette conchoïde, nous obtiendrons donc ainsi la tangente à la courbe d'ombre propre du tore.

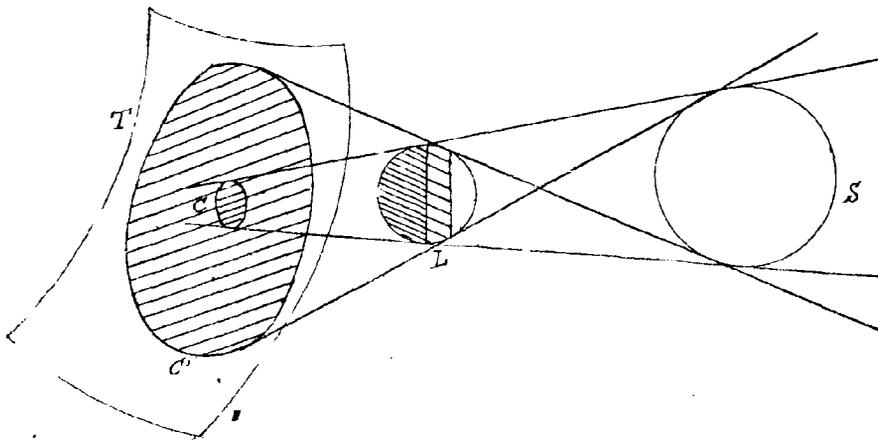
Etude détaillée de quelques surfaces spéciales.

— A. Surfaces développables. —

174) Nous avons déjà donné avec l'hélicoïde développable un exemple de surface développable définie par son arête de rebroussement : Donnons actuellement quelques exemples de surfaces développables définies d'une autre manière.

1^o Surfaces développables définies par deux surfaces directrices.

La développable est l'enveloppe des plans tangents communs aux deux surfaces. Ce sont des développables de ce genre qui limitent les régions d'ombre et de pénombre dans le cas d'un corps lumineux éclairant un corps opaque.



Prenez par exemple le cas simple de deux sphères, l'une lumineuse S , l'autre éclairée L ; la développable se compose des deux cônes circonscrits aux deux sphères et les courbes qui limitent l'ombre et la pénombre sur la sphère éclairée L seront les deux cercles de contact de ces cônes.

L'ombre portée sur une surface quelconque T se déterminera par les traces C et C' des deux cônes sur cette surface.

La courbe C limite l'ombre pure, c'est-à-dire la région que n'atteint aucun rayon lumineux issu de la sphère lumineuse S ; la région de pénombre, c'est-à-dire celle qui n'est éclairée que par une partie de S , se trouve comprise entre les courbes C et C' , et la quantité de lumière reçue va en décroissant de C' jusqu'à C .

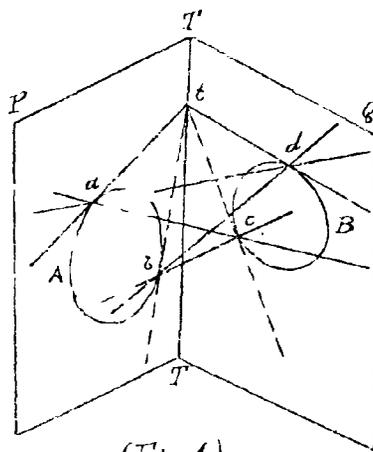
Ces problèmes de Géométrie se rencontrent en Astronomie pour l'étude des éclipses. Si S est le soleil par exemple et L la lune et si la surface T représente la sphère terrestre, on aura à un instant donné éclipse totale de soleil pour tous les points du globe situés à l'intérieur de la courbe C et éclipse partielle pour tous ceux de la région comprise entre les courbes C et C' .

Mais par suite du mouvement relatif des trois astres, ces courbes C et C' se déplacent sur la surface terrestre et ce sont leurs courbes enveloppes que l'on a à considérer pour étudier le phénomène de l'éclipse pendant toute sa durée.

2° Surfaces développables définies par deux courbes directrices. Développable circonscrite à deux coniques.

(175) La développable est l'enveloppe des plans tangents aux deux courbes. (1)

Prenez comme exemple le cas de deux coniques A et B .



(Fig. 1)

Soient P et Q les plans des deux coniques, T la droite d'intersection de ces deux plans.

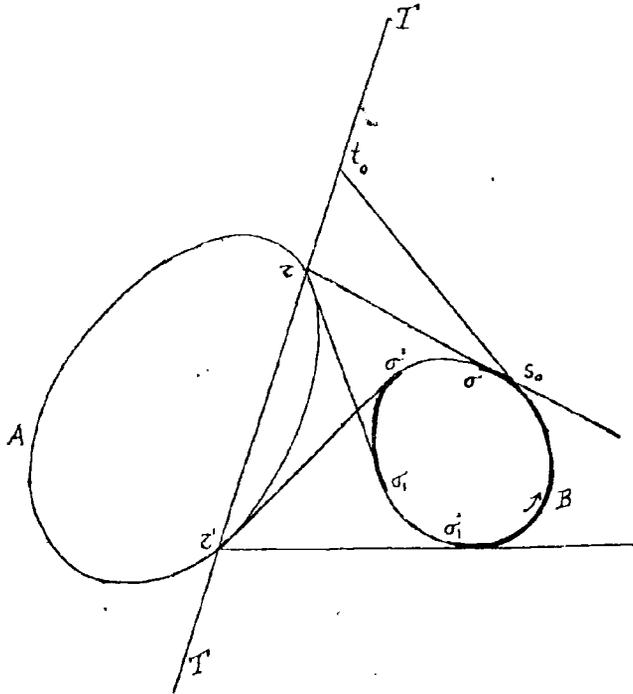
Par un point t de T menons des tangentes aux deux coniques. Nous obtiendrons généralement ainsi quatre points de contact a , b , c et d et en joignant deux à deux ceux de ces points qui appartiennent à deux coniques différentes nous aurons quatre génératrices de la développable.

Il passe donc en général deux génératrices par chaque point des deux coniques.

ces courbes ont donc des lignes doubles de la surface.

(1) Le plan est tangent à une conique gauche ou plane lorsqu'il renferme la tangente à cette conique.

Mais il peut se faire que les coniques A et B n'appartiennent pas en totalité à la surface. Nous avons supposé en effet jusqu'à présent qu'aucune des deux coniques ne rencontrait l'intersection I de leurs plans.



Supposons actuellement que la conique A rencontre en deux points z et z' cette droite.

Si l'on détermine le point t qui nous a servi à construire les génératrices en partant d'un point S de la conique B et en menant la tangente St à cette conique, et si l'on promène ce point S , à partir d'une position S_0 quelconque, sur toute la conique en la lui faisant décrire d'un mouvement continu dans un sens déterminé celui de

la flèche par exemple, on voit que, lorsque le point S dépassera la position T_1 , le point t devenant intérieur à la conique A , on cessera d'obtenir des génératrices, et il en sera de même pour tout l'arc $T_1 T_2$, puis de T_2 en T_3 , la construction des génératrices sera de nouveau possible, et elle cessera de nouveau de l'être de T_3 en T_4 . La conique B présentera donc au point de vue de la développable deux arcs utiles $T_1 T_2$ et $T_3 T_4$ et deux arcs parasites $T_2 T_3$, $T_4 T_1$ qui n'appartiendront pas à la surface.

176. Une propriété très-intéressante des points limites tels que T_1 , c'est qu'ils appartiennent à l'arête de rebroussement de la développable et qu'ils sont sur cette courbe des points de rebroussement.

Démontrons d'abord qu'ils appartiennent à l'arête de rebroussement. On peut le voir de la façon suivante

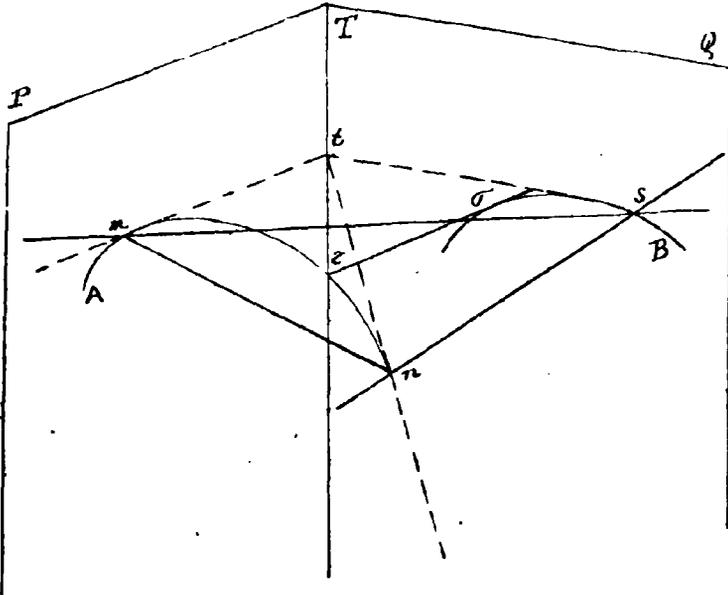
Effectuons la construction pour une position t infiniment voisine

De T . Nous obtiendrons sur la conique B un point S infiniment voisin du point limite T et par ce point passeront deux génératrices Sm, Sn qui seront infiniment voisines sur la surface puisque les points m et n sont des points infiniment voisins sur la conique A .

Or ces génératrices qui sont distinctes se rencontrent en S :

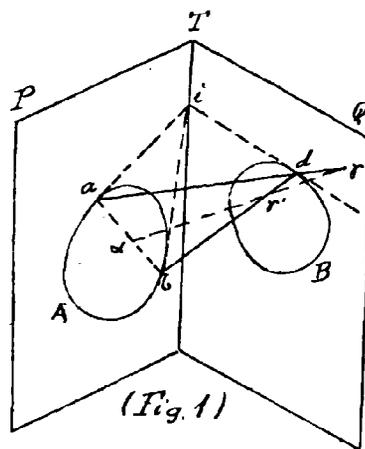
c'est donc ce point S qui représente la position de leur plus courte distance. La limite T de ce point est donc un point de l'arête de rebroussement.

Reportons nous actuellement à la première figure (Fig. 1) et remarquons qu'en général le plan α b des deux génératrices da et db qui se rencontrent en un point de la conique



B , passe constamment par le pôle α de la droite T dans la conique A lorsque le point t se déplace sur cette droite. La caractéristique

engendre donc un cône de sommet α et comme d'ail. leurs ce plan dans ses positions successives renferme les génératrices successives de la développable, cette caractéristique doit rencontrer les deux génératrices aux points f et f' ou elles touchent respectivement l'arête de rebroussement. (1)



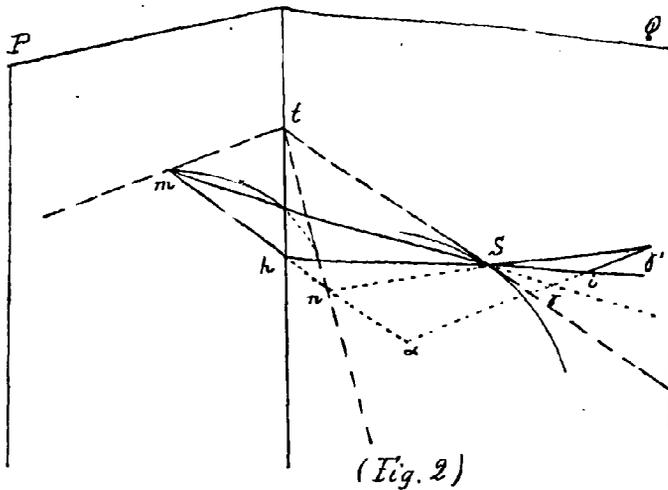
(Fig. 1)

la conique B coupe la droite T (Fig. 2) le point α tombe en dehors du

Mais dans le cas où

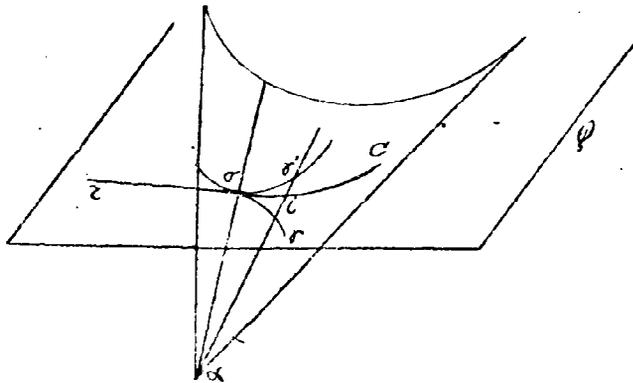
(1) Car ce plan mobile n'étant pas tangent à la développable son point de contact avec celle-ci doit être situé sur l'arête de rebroussement.

segment mn et par suite les deux points r et r' sont forcément d'un même côté de S par rapport à ce segment mn , ou si l'on préfère de part et d'autre de la trace hS du plan mSn sur le plan Q ou encore de part et d'autre de la trace i de sr' sur ce dernier plan.



Si donc on considère sur le cône de sommet S dont il a été parlé la courbe C lieu des points i et intersection de ce cône avec le plan Q , cette courbe ayant, au point T (1^{re} figure) de la page précédente) ST pour tangente (1) les deux demi-branches de l'arête de rebroussement, décrites par les points r et r' lorsqu'ils tendent vers la position limite T , sont situées de part et d'autre de la courbe C avec laquelle elles viennent de raccorder - et d'un même côté de la droite ST qui fait avec ST un angle fini.

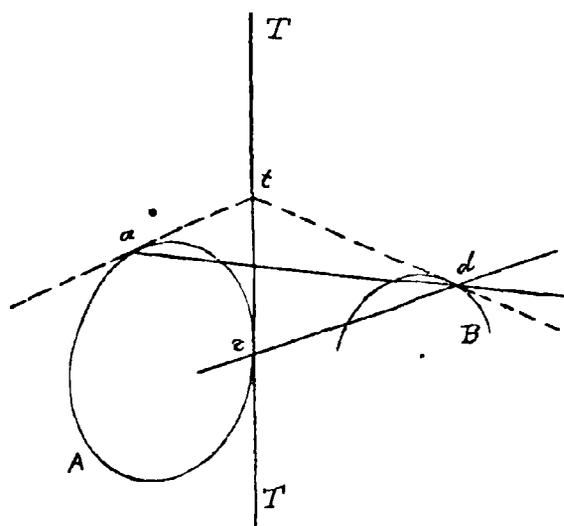
De part et d'autre de la courbe C avec laquelle elles viennent de raccorder - et d'un même côté de la droite ST qui fait avec ST un angle fini.



Cette disposition qui exclut la possibilité d'une inflexion peut être regardée comme conciliant nettement le rebroussement pour la courbe gauche considérée.

Dans le cas particulier où la conique A serait tangente à la droite T , le plan Q de la conique B devrait être regardé

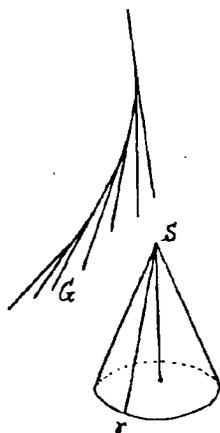
(1) Car la tangente est l'intersection du plan tangent au cône avec le plan Q et comme ST génératrice de la développable est tangente à l'arête de rebroussement de cette développable et que cette arête appartient aussi au cône, cette droite ST doit être précisément la trace sur le plan Q du plan tangent au cône



comme appartenant à la développable, car pour toutes les positions du point t , l'une des deux génératrices qui se rencontrent en un point d de la conique B est la droite du plan Q qui joint ce point au point de contact e de la conique A avec T .

3° Surfaces développables définies par un cône directeur de révolution. (Surfaces d'égalité de pente).

177, Remarques générales — Nous avons vu dans l'étude générale des développables qu'une pareille surface pouvait être définie par une courbe ou une surface directrice et par un cône directeur.



Si ce cône est de révolution la surface est dite d'égalité de pente.

Supposons en effet que l'axe du cône soit pris comme direction des verticales, les plans tangents à la surface (qui sont parallèles aux plans tangents au cône) seront tous également inclinés sur le plan horizontal, ce qui est la propriété caractéristique des surfaces d'égalité

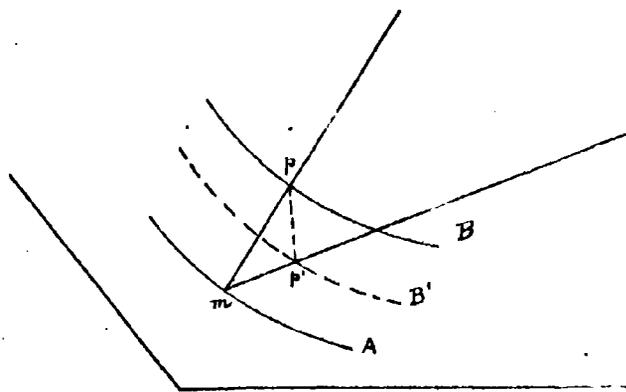
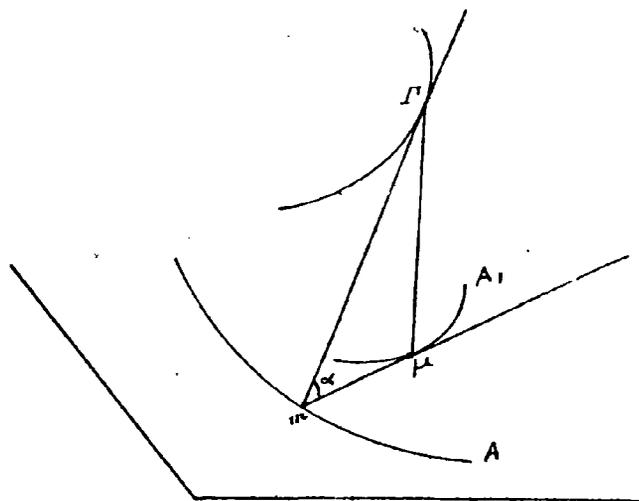
pente, et les génératrices G qui sont parallèles aux génératrices Sr du cône seront les lignes de plus grande pente de ces plans tangents et feront toutes le même angle α avec le plan horizontal.

Et il est facile de voir que réciproquement toute surface d'égalité de pente est une développable de ce genre, car le plan tangent, assujéti à être tangent à cette surface et à rester parallèle aux

plans tangents à un cône ne renferme dans son équation qu'un seul paramètre variable et ne peut prendre par conséquent qu'une seule série de positions.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que si l'on considère la trace A de la surface sur un plan horizontal, les génératrices de la développable d'égale pente se projettent horizontalement suivant les normales à cette courbe.

L'enveloppe de ces normales, c'est-à-dire la développée A_1 de la courbe A est donc la projection horizontale de l'arête de rebrousse-



ment Γ de la surface. De plus, sur le cylindre vertical qui a pour base la courbe A_1 , cette arête de rebroussement est une hélice, puisque ses tangentes font avec les génératrices du cylindre un angle constant $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

On peut remarquer encore que si l'on coupe la surface par un plan horizontal quelconque, la section B ainsi obtenue se projette horizontalement (à cause du triangle $m p p'$ qui est invariable de forme et de grandeur) suivant une courbe égale B' qui est une courbe parallèle à A .

Considérons le cône ayant la courbe B pour base et un point quelconque pour sommet; lorsque le plan sécant s'éloigne à

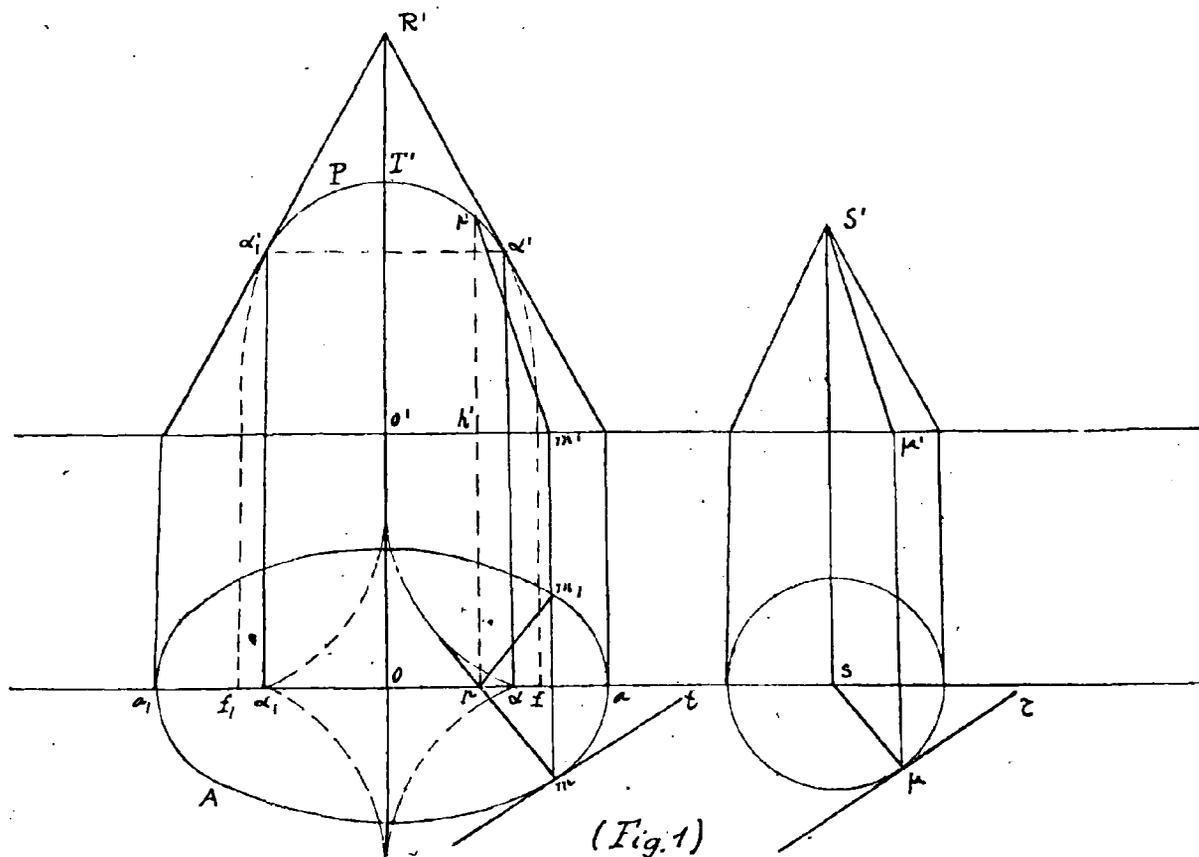
l'infini, ce cône devient parallèle au cône directeur. Ses sections horizontales deviennent donc circulaires à la limite, et l'on en conclut que la surface d'égale pente renferme un cercle à l'infini dans un plan perpendiculaire à l'axe de son cône directeur. On doit même considérer ce cercle comme une ligne double de la surface, si l'on tient compte de la seconde nappe de cette surface symétrique de la première par rapport au

plan horizontal de la courbe A et qui répond à la question aussi bien que la première lorsqu'on définit la surface d'égalité pente au moyen de cette courbe A et de son cône directeur. La considération de cette seconde nappe montre que la directrice A est elle aussi une ligne double.

178. Surface d'égalité pente ayant pour directrice une ellipse horizontale.

Supposons que la directrice A soit une ellipse.

Preons pour plan horizontal de projection le plan de cette ellipse et pour plan vertical un plan parallèle à son grand axe. Figeons en $S S'$ le cône directeur.



(Fig. 1)

La génératrice qui passe par un point m de l'ellipse directrice se projette horizontalement suivant la normale à cette courbe et elle est parallèle à la génératrice correspondante $S \mu$, $S' \mu'$ du cône directeur.

obtenue en menant à la base de ce cône une tangente μ et parallèle à la tangente mt à l'ellipse.

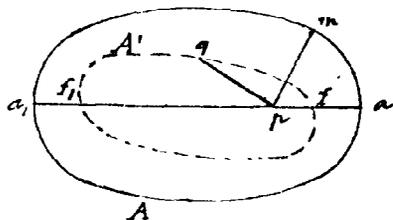
La projection verticale de la génératrice s'obtient donc très simplement en menant une parallèle à $S'\mu'$ par le relèvement m' du point m .

Cette génératrice rencontre le plan vertical de front passant par le grand axe AA_1 de l'ellipse en un point $p p'$ qui appartient également par simple raison de symétrie à la génératrice m, p du point m , symétrique de m par rapport à AA_1 .

Le lieu du point p est donc une ligne double de la surface.

Nous reconnaitrons facilement que cette ligne double est une ellipse. En effet, à cause de l'inclinaison constante α des génératrices sur le plan horizontal, la hauteur $p'h'$ du point $p p'$, égale à $mp \operatorname{tg} \alpha$, est proportionnelle à la longueur mp de la normale à l'ellipse.

Or nous avons vu (§ 100) que si l'on portait à partir du point p où la normale mp à une ellipse A rencontre le grand axe et sur une direction fixe quelconque d'ailleurs, une longueur $p q$ proportionnelle à mp , le lieu des points q ainsi construits était une seconde ellipse A' passant par les foyers de la première.



Si l'on choisit en particulier pour direction des cordes $p q$, la direction perpendiculaire à l'axe AA_1 de A , il est évident par symétrie que l'ellipse A' aura mêmes directions d'axes que l'ellipse A et les foyers F et F_1 de A seront alors des sommets.

Si l'on prend en outre pour effectuer cette construction $p q$ égal à $mp \operatorname{tg} \alpha$, l'ellipse de sommets F et F_1 que l'on obtient ainsi (fig. 2) n'est autre chose que la courbe P des points p' convenablement abaissée, puisque ses ordonnées $p q$ pour une même abscisse sont égales à celles $p'h'$ de la courbe P .

La proposition énoncée se trouve donc ainsi démontrée.

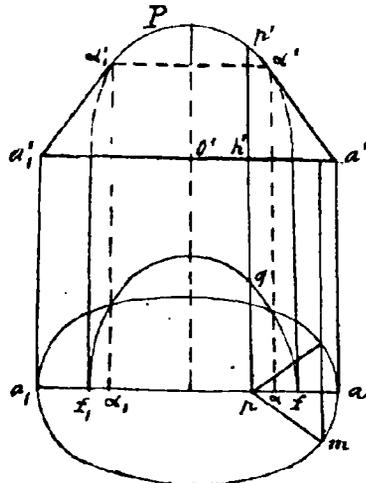
On reconnaît d'ailleurs sans peine que cette conique double P n'appartient pas entièrement à la surface. En effet quand le point m se rapproche indéfiniment du sommet A le point p tend vers une position limite qui est le centre de courbure α de l'ellipse A correspondant à ce sommet.

Le point correspondant α' limite donc l'arc utile de la conique

P qui s'étend de l'autre côté de la verticale du centre jusqu'au point α' symétrique de α , et déduit du centre de courbure α_1 relatif au sommet a_1 .

La seconde nappe de la surface d'égal pente donnerait d'ailleurs sur cette même conique P un second arc utile symétrique du premier par rapport à la ligne de terre.

Les quatre génératrices qui correspondent aux points limites sont les projections sur le plan vertical de plans debout tangents à la développable.



(Fig. 2)

Ces droites $a\alpha'$, $a'\alpha$ qui doivent être parallèles aux génératrices de contour apparent du cône directeur forment d'ailleurs le contour apparent de la surface en projection verticale. Elles sont donc tangentes à la conique P qui est une courbe tracée sur la surface.

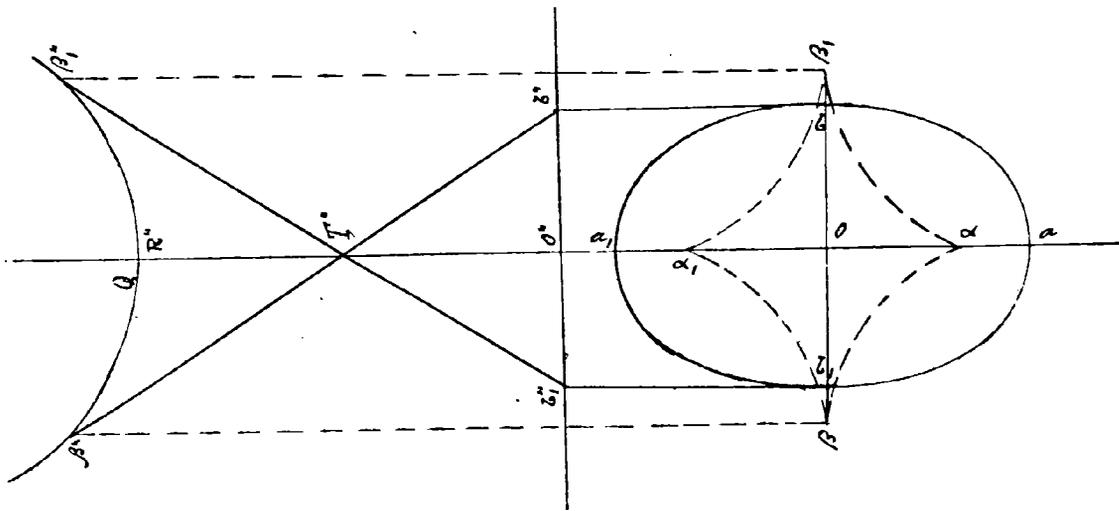
179) Nous avons défini la surface d'égal pente au moyen de la conique A et de son cône directeur. Nous aurions pu la définir également au moyen des deux coniques A et P prises comme courbes directrices.

Ainsi envisagée, la développable rentre dans le cas précédemment étudié des développables définies par deux coniques et les résultats auxquels cette étude nous a conduits relativement aux arcs utiles et aux arcs parasites, se trouvent bien vérifiés dans le cas actuel.

Nous avons démontré de plus que les points limites tels que α étaient des points de rebroussement de l'arête de rebroussement. Or comme ici l'arête de rebroussement est en projection horizontale la développée de l'ellipse, la vérification de cette propriété des points limites résulte immédiatement de la forme connue de cette

développée.

Pour terminer l'étude de cette surface nous démontrerons enfin, qu'en dehors des coniques doubles A et P et du cercle double situé à l'infini, la développable renferme encore une quatrième conique double Q située dans le plan de profil qui a pour trace horizontale le petit axe bb_1 de l'ellipse A .



Cela résulte du principe de continuité.

En effet tous les raisonnements faits pour le grand axe aa_1 de l'ellipse doivent pouvoir s'étendre à son petit axe bb_1 ,

Et comme les foyers de l'ellipse situés sur cet axe sont imaginaires la conique Q analogue à P , ayant deux sommets imaginaires doit être une hyperbole dont l'axe transverse est vertical.

En projection sur un plan de profil, on obtient donc une hyperbole Q de centre O'' disposée comme l'indique la figure ci-dessus. L'arc utile de cette hyperbole situé au-dessus du plan horizontal est limité aux points $\beta''\beta_1''$ qui correspondent aux cordes de courbure $\beta\beta_1$ de l'ellipse en ses sommets b et b_1 ; un second arc utile symétrique du premier par rapport au plan horizontal serait donné par la seconde nappe de la surface. Les génératrices de contour apparent qui sont les tangentes en β'' et β_1'' à l'hyperbole sur cette nouvelle projection font l'angle α avec le plan horizontal et se coupent en un point I'' tel que

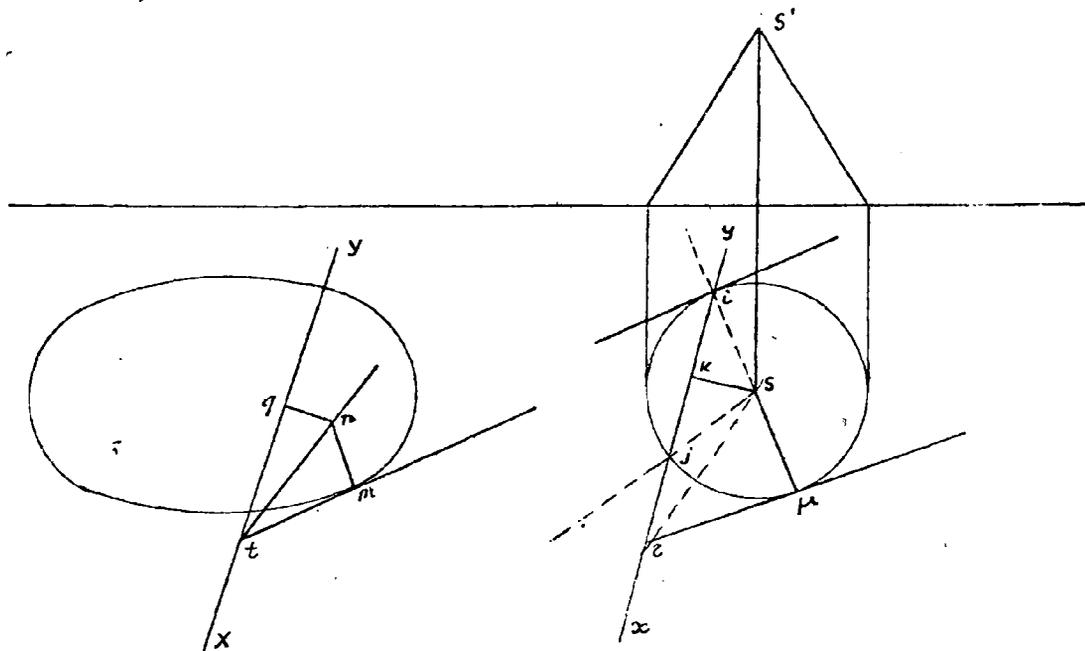
$O''T'' = O'T'$ de la première projection. Enfin le sommet R'' est le point qui se projetait en R' sur la première figure.

180. Sections planes de la surface d'égalité pente.

Nous avons vu que dans les surfaces d'égalité pente en général les sections faites par des plans horizontaux étaient des courbes parallèles à la combe directrice c'est-à-dire à l'ellipse dans le cas actuel.

La section par un plan quelconque peut se construire très-facilement de la façon suivante.

Soit XY la trace horizontale du plan sécant : pour déterminer son inclinaison, donnons nous la trace horizontale $x'y$ d'un plan parallèle mené par le sommet $S'S'$ du cône directeur.



Menons une tangente quelconque pc à la base du cône et soit t son point de rencontre avec $x'y$. Menons la tangente parallèle nt à la conique et prolongeons la jusqu'à sa rencontre en t avec XY . Joignons cS et menons par t une parallèle à cS . Le point n où cette droite rencontre la normale à l'ellipse en M est en projection horizontale un point de la section et tn est la tangente en n à cette courbe.

Pour s'en assurer il suffit de remarquer que le plan tangent

à la développable en m et le plan sécant forment une figure homothétique à celle que forment d'autre part le plan tangent au cône en μ et le plan SXY . Or ces derniers plans se coupent suivant ST , donc l'intersection des deux premiers est bien tn et comme cette droite est la trace du plan tangent à la développable sur le plan sécant, c'est bien la tangente à la courbe de section.

Si la droite XY rencontre la base du cône, il y a deux génératrices de la surface parallèles au plan sécant (1); la section a donc des points à l'infini dans les directions de ces génératrices. Les asymptotes s'obtiennent en prenant les droites d'intersection du plan sécant avec les plans tangents à la surface le long des génératrices parallèles aux génératrices Si , Sj du cône qui appartiennent au plan SXY .

Si l'on abaisse du point n la perpendiculaire nq sur XY et du point S la perpendiculaire SK sur XY , la similitude des figures donne encore

$$\frac{nq}{nm} = \frac{SK}{S\mu}$$

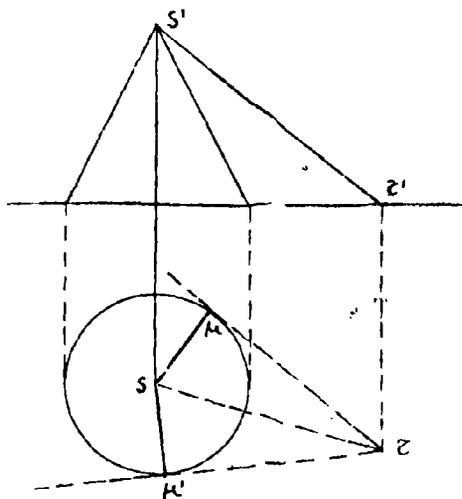
et comme ce dernier rapport est constant on voit que la courbe d'intersection est en projection horizontale le lieu des points dont les distances à la trace du plan sécant et à l'ellipse sont dans un rapport constant.

Cette propriété qui s'étend d'ailleurs aux points de l'espace puisque les distances nq et nm sont égales aux distances de l'espace multipliées par des cosinus constants, peut être également étendue à l'intersection de deux surfaces d'égal pente quelconques (le plan étant évidemment un cas particulier de ces surfaces).

181, Plan tangent parallèle à une droite donnée.

Les plans tangents à la surface étant parallèles aux plans tangents au cône directeur, si nous menons par le sommet SS' de ce cône une parallèle à la droite donnée et par la trace horizontale τ de cette parallèle deux tangentes $\tau\mu$, $\tau\mu'$ à la base

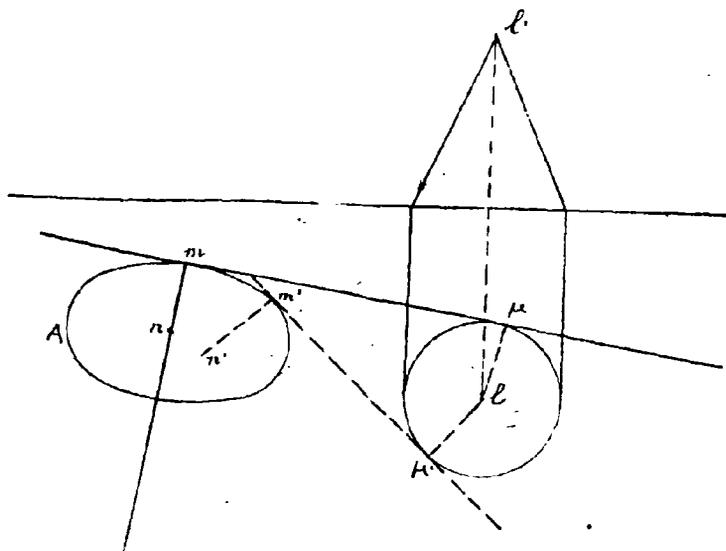
(1) il y en a quatre si l'on tient compte de la seconde nappe de la surface.



du cône, il suffira de construire les génératrices de la surface parallèles à $S\mu$ et $S\mu'$; les plans tangents à la développable le long de ces génératrices seront les plans demandés.

182, Plan tangent par un point donné.

Soit l' le point donné; transportons en ce point le sommet du cône directeur. Les plans cherchés devront être à la fois tangents à



ce cône et à la surface; leurs traces horizontales s'obtiendront donc en menant dans le plan horizontal des tangentes communes à l'ellipse base de la surface et au cercle base du cône directeur transporté. Mais il faut avoir soin de ne choisir que les tangentes telles que $m\mu$ pour lesquelles les génératrices $m n$ de la surface et μl du

cône sont inclinées du même côté de la trace $m\mu$; à moins toutefois qu'on ne tienne compte de la seconde nappe de la surface.

B. Surfaces gauches.

1^o Surfaces gauches admettant un plan directeur.

183. Remarques générales. — Le plan directeur est parallèle au plan tangent à l'infini (plan asymptotique) pour toutes les génératrices, puisque ce dernier plan est parallèle comme on l'a vu à deux génératrices infiniment voisines.

Le plan central est donc perpendiculaire au plan directeur et par suite, si l'on projette orthogonalement la surface sur un plan parallèle au plan directeur, la ligne de striction est le contour apparent de la surface.

L'hyperboloïde osculateur le long d'une génératrice est dans ce cas un parabololoïde. En effet, cet hyperboloïde peut être considéré comme la limite d'un hyperboloïde ayant en commun avec la surface réglée trois génératrices infiniment voisines, et comme ces génératrices sont parallèles à un même plan qui est le plan directeur, la proposition en résulte.

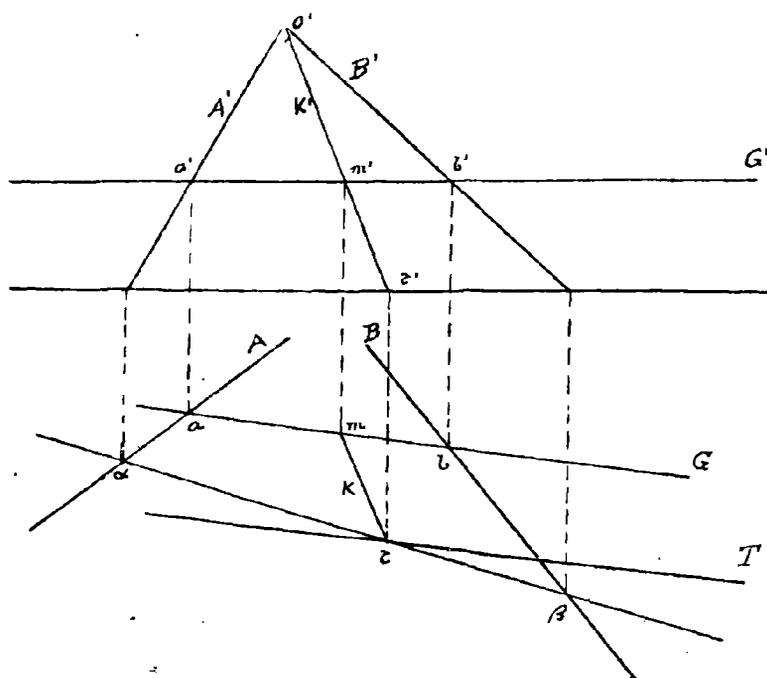
a, Parabololoïde hyperbolique.

184. Cette surface, que vous connaissez déjà, peut être définie par un plan directeur et deux directrices rectilignes; mais elle peut l'être de cette manière de deux façons différentes: le parabololoïde hyperbolique admet donc deux plans directeurs et deux systèmes de génératrices respectivement parallèles à ces deux plans. Autrement dit, la surface est doublement réglée et il passe par chacun de ses points une génératrice de chaque système; enfin chaque génératrice de l'un des systèmes rencontre toutes les génératrices du système opposé.

Je me borne à rappeler sans les démontrer ces propriétés bien connues.

185, Construction d'une génératrice.

Supposons le plan directeur horizontal et soient AA' , BB'



les projections des deux directrices. Les génératrices du système correspondant au plan directeur horizontal sont des horizontales telles que cc' en projection verticale et comme elles rencontrent les deux directrices, il est facile de construire leurs projections horizontales c .

186, Plan tangent en un point.

Cherchons le plan tangent en un point $m m'$ de cette génératrice. Ce plan sera déterminé par la génératrice cc' et par la génératrice du second système kk' qui passe en ce même point.

Or les génératrices du second système rencontrant toutes les génératrices du premier système, doivent former en projection verticale un système rayonnant autour du point c' , puisqu'il y a une génératrice debout du premier système qui se projette tout entière en ce point. Donc $o'm'$ est la projection verticale kk' de la génératrice cherchée.

Pour obtenir la projection horizontale, considérons la trace horizontale du paraboloïde qui s'obtient en joignant les traces horizontales α et β de deux directrices. La trace horizontale c' de $o'm'$ se ramène en \tilde{c} sur $\alpha\beta$ et donne ainsi la projection horizontale $m\tilde{c}$ ou k de cette seconde génératrice. Le plan tangent se trouve dès lors déterminé : la parallèle $\tilde{c}T$ menée par \tilde{c} à cc' est sa trace horizontale.

187, Point de contact avec le parabolôïde d'un plan passant par une génératrice donnée.

On obtiendra par une construction inverse de la précédente le point de contact d'un plan mené par la génératrice G du parabolôïde.

Si le plan ^{est} vertical, son point de contact est le point central et l'on peut ainsi construire par points la projection horizontale de la ligne de striction, qui est le contour apparent horizontal de la surface. C'est une parabole, puisque le cylindre circonscrit à un parabolôïde hyperbolique est toujours parabolique.

La courbe de l'espace est une courbe plane; c'est également une parabole.

188, Plan tangent parallèle à un plan donné.

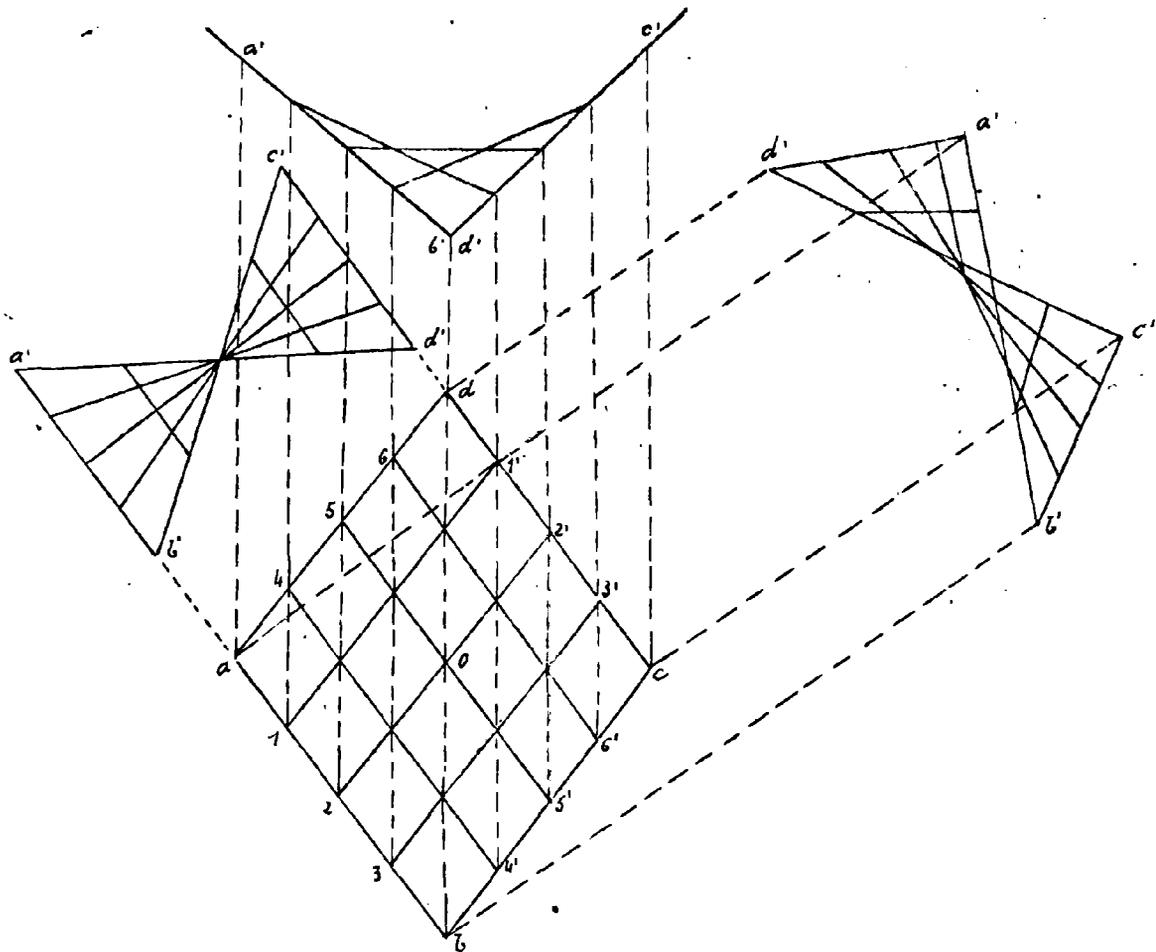
On prend la trace Q du plan donné sur le plan horizontal. La génératrice du premier système qui se trouvera dans le plan cherché sera parallèle à Q , et comme elle s'appuie sur les deux directrices A et B , elle s'obtient sans difficulté par l'intersection des plans menés par A et par B parallèlement à la droite Q .

189, Projections diverses d'une portion de parabolôïdes.

La direction de l'axe du parabolôïde étant parallèle à l'intersection des deux plans directeurs, et ces plans étant également inclinés sur les plans principaux de la surface si l'on prend pour plan horizontal de projection un plan perpendiculaire à l'axe et pour plan vertical un plan parallèle à l'un des plans principaux, les génératrices se projettent horizontalement suivant des droites également inclinées sur la direction de la ligne de terre.

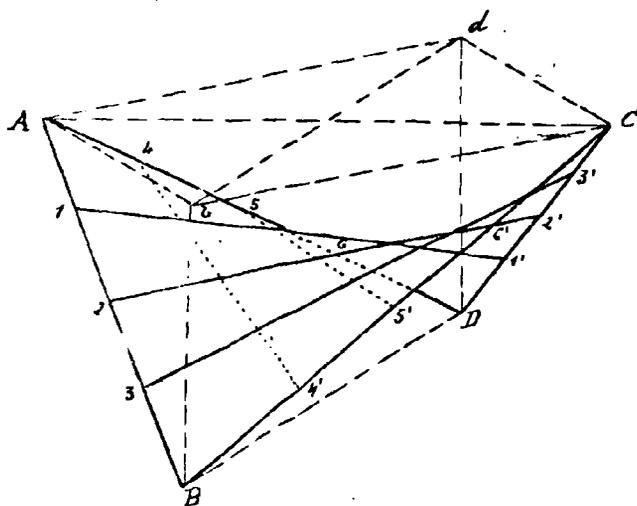
Soit O la projection de l'axe. Limitons la portion de la surface que nous voulons représenter à des génératrices également distantes de l'axe. Ces génératrices forment en projection horizontale le losange $abcd$ ayant en O le point de rencontre de ses diagonales. Les points a et c , b et d étant respectivement à la même hauteur au-dessus

On géométral de projection verticale on des points tels que $a'c'$ et $b'd'$, ces derniers confondus, et les quatre génératrices linéaires ab , bc , cd et da qui se rencontrent en a , b , c et d deux à deux forment dans l'espace un quadrilatère gauche ayant pour projection verticale les deux segments $a'b'$, $c'd'$.



Il est facile de construire en projection horizontale les génératrices de chaque système appartenant à la portion de surface considérée. Ce sont des parallèles aux côtés du losange ; on les relève ensuite sans difficulté sur la projection verticale où elles enveloppent un arc de parabole qui est le contour apparent vertical de la surface.

Ces mêmes génératrices s'obtiennent aussi très-facilement en projection sur des plans verticaux perpendiculaires ou parallèles aux plans directeurs. Dans le premier cas les génératrices ^{de l'un} des systèmes se projettent suivant des droites verticales, et celles de l'autre système suivant des droites rayonnantes. Dans le second cas les génératrices des deux systèmes (ou leurs prolongements) sont tangentes à une même parabole.



Enfin les portions de génératrices telles que 11', 22' peuvent également se tracer en perspective cavalière, fournissant ainsi une représentation perspective de la portion de surface considérée.

Il suffit d'établir en perspective le quadrilatère gauche ABCD, ce qui se fait aisément au moyen de sa projection horizontale A'B'C'D' sur le plan horizontal des points A et C. Les

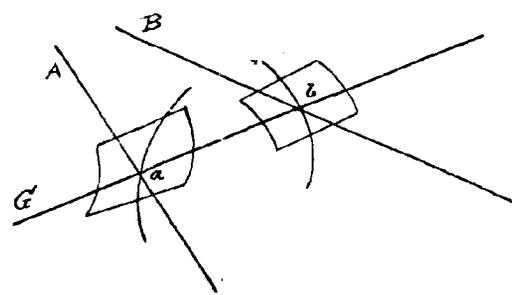
génératrices s'obtiennent ensuite en divisant les côtés du quadrilatère en parties égales et en joignant les points de division correspondants sur les côtés opposés.

190. Emploi de paraboloides de raccordement pour la détermination du plan tangent en un point d'une surface gauche à plan directeur.

Le paraboléide étant la plus simple des surfaces gauches à plans directeurs, lorsqu'on a à effectuer des constructions relatives aux plans tangents d'une pareille surface, le long d'une de ses génératrices, et il est commode de lui substituer un paraboléide de raccordement le long de cette génératrice et d'opérer au moyen des constructions très-simples que nous venons d'indiquer.

Un paraboloides de raccordement aura pour plan directeur le plan directeur de la surface - que nous supposons horizontal pour fixer les idées - et sa détermination s'achèvera en prenant pour directrices deux tangentes à la surface réglée en deux points de la génératrice considérée.

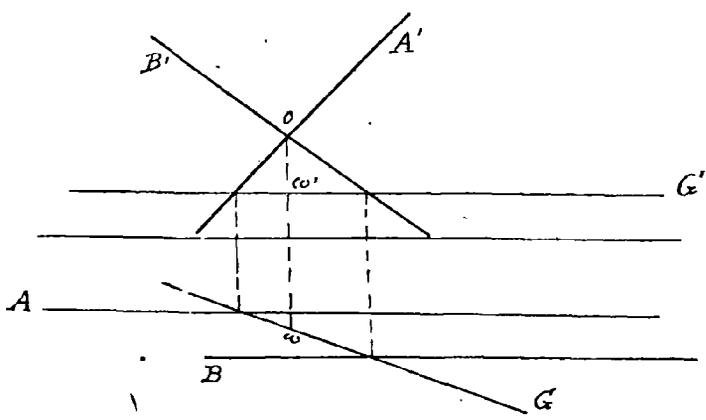
Par exemple si la génératrice s'appuie en A et B sur deux courbes directrices ou si elle est tangente en ces points à deux surfaces directrices, les plans tangents en A et B sont connus et l'on pourra



prendre comme directrices du paraboloides deux droites quelconques A et B situées dans ces plans.

Si l'on choisit deux droites de front, le paraboloides aura le plan de front pour second plan directeur et ses génératrices formeront sur chacun des deux plans de projection des systèmes de droites rayonnantes et parallèles.

directeur et ses génératrices formeront sur



Le point central sur la génératrice G sera le point $\omega \omega'$ situé sur la ligne de rayonnel passant par le point O' intersection des projections verticales A' et B' des droites directrices car en ce point $\omega \omega'$ la génératrice du système pa-

rallele au plan vertical étant verticale, le plan tangent sera vertical c'est-à-dire perpendiculaire au plan directeur correspondant de la surface.

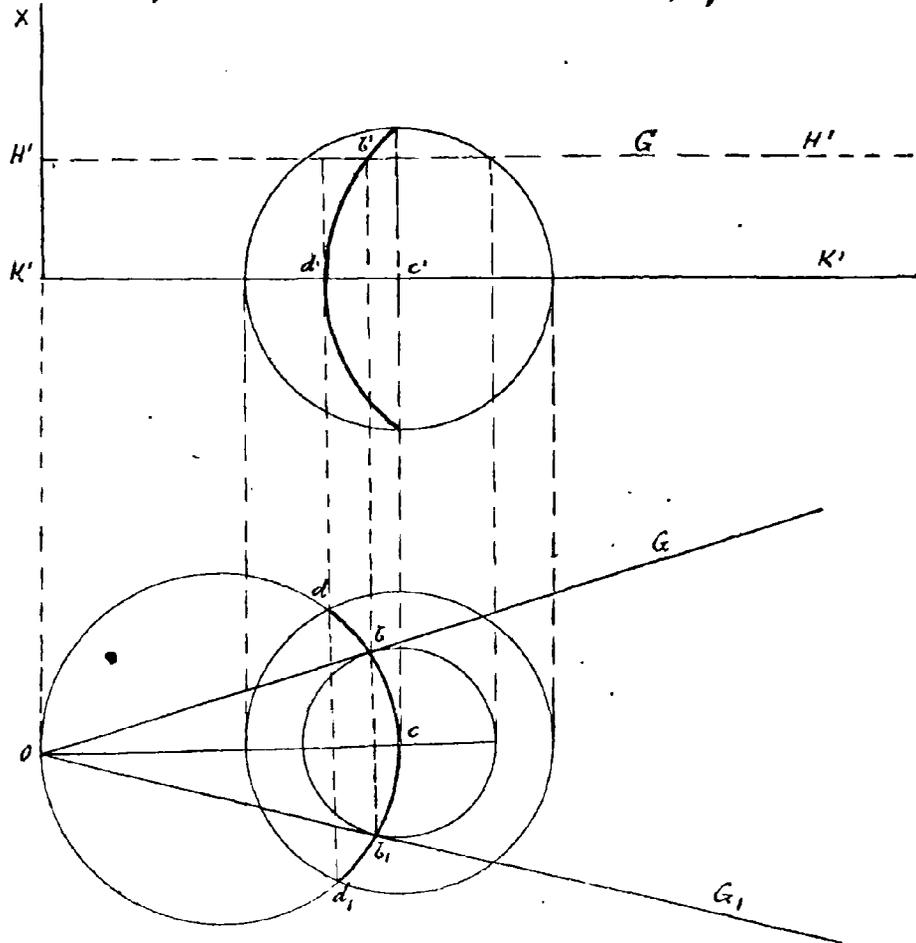
6. Conoïde droit circonscrit à la sphère.

191) Le conoïde droit circonscrit à la sphère est défini par une directrice rectiligne perpendiculaire au plan directeur et par une

Surface directrice qui est une sphère.

Le plan directeur étant toujours supposé horizontal nous prendrons comme second plan de projection un plan parallèle au plan vertical déterminé par la directrice rectiligne X et par le centre $c c'$ de la sphère.

Pour construire une génératrice, coupons par un plan horizontal $H'H'$. Nous obtenons dans la sphère un petit cercle et en menant par le point O projection horizontale de la directrice X les tangentes à la projection de ce petit cercle, nous avons les projections horizontales



G et G_1 de deux génératrices, qui se projettent verticalement en G' sur $H'H'$.

Les points de contact b et b_1 , symétriquement placés par rapport à OC se projettent verticalement en un même point b' . Ces points appartiennent en projection horizontale à une circonférence décrite sur OC comme diamètre, mais ils n'occupent que l'arc dcd_1 de cette circonférence.

La courbe de contact est donc l'intersection de la sphère avec le

cyindre de révolution à axe vertical ayant le cercle OC pour base. Cette courbe est donc du quatrième ordre, mais à cause de la symétrie, elle se projette verticalement suivant une conique dont, par symétrie également, l'horizontale $K'K'$ du point C' doit être un axe. Il est

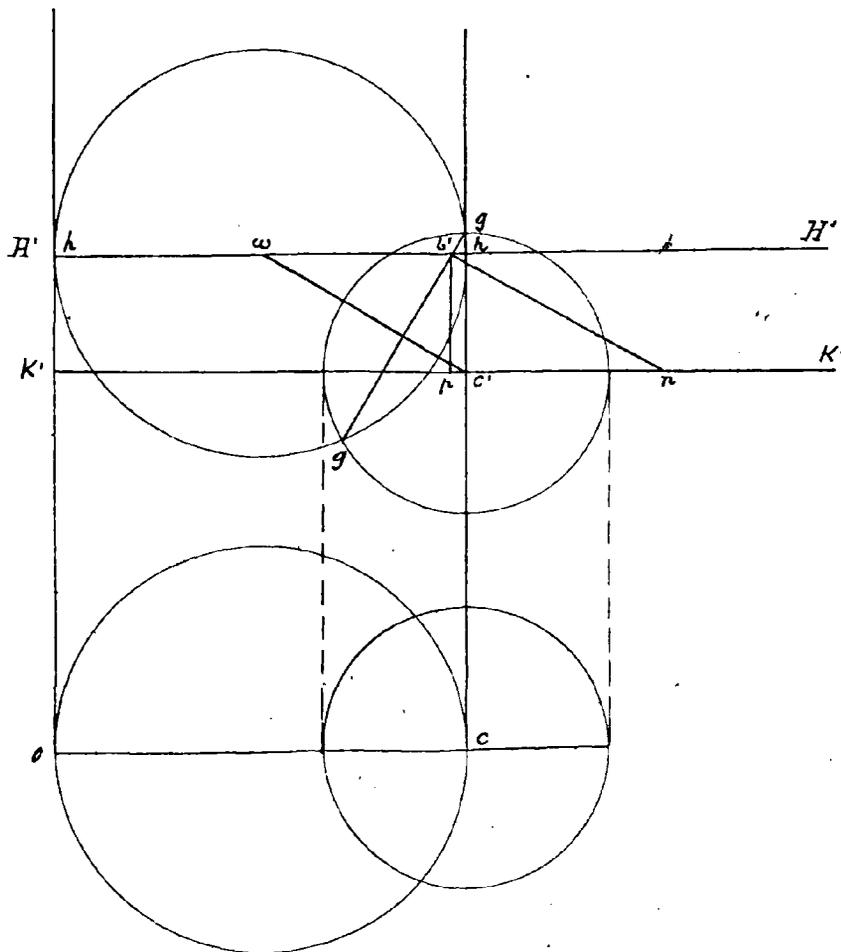
facile d'ailleurs de déterminer géométriquement la nature de cette courbe. Nous pouvons appliquer en effet à sa détermination la construction précédemment indiquée pour les surfaces de révolution dont les axes se rencontrent, en prenant comme axe de la sphère son diamètre parallèle à l'axe du cylindre.

Si l'on veut le point situé dans le plan horizontal $H'H'$ par exemple on considère la sphère circonscrite dans le cylindre le long du cercle hh . Cette sphère coupe la sphère donnée C suivant un petit cercle qui se projette verticalement suivant la droite gg .

L'intersection de cette droite avec hh est le point b' cherché et la droite gg est la tangente en ce point à la courbe de contact du conoïde (§.92).

Métons la normale $b'n$: cette droite est parallèle à la droite wc qui joint les centres des deux sphères et par suite la figure $wc'n'b'$ est un parallélogramme. Si donc on abaisse de b' la perpendiculaire $b'p$ sur l'horizontale KK on a :

$$pn = pc' + c'n = b'h + cb' = ch$$
 La sous-normale pn de la courbe lieu du point b' est donc constante,

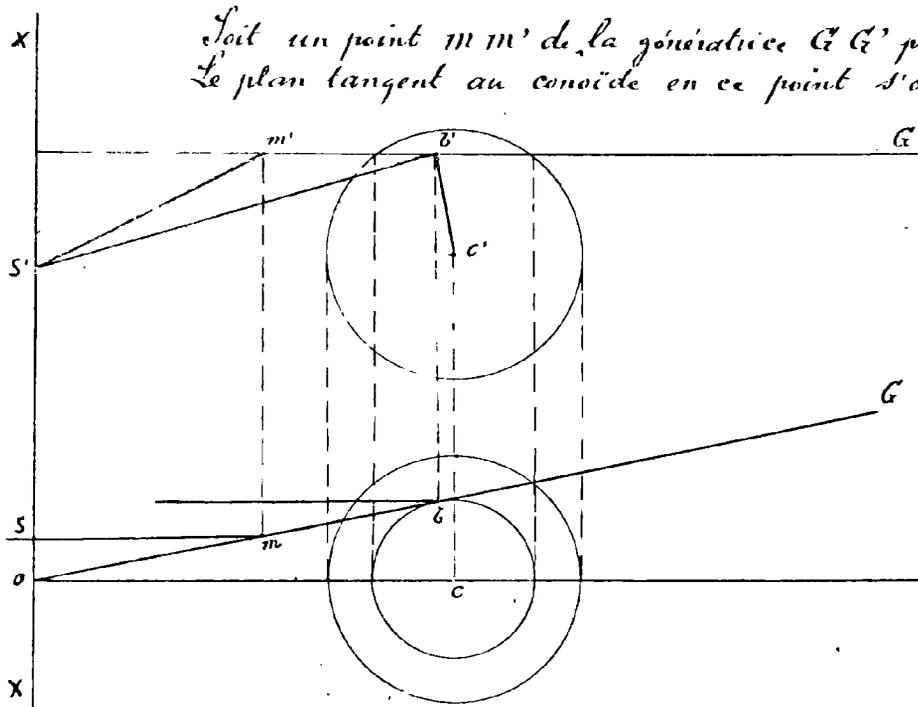


268.

cette courbe est donc une parabole.

Remarquons encore que la normale le long de la courbe de contact étant un cône, la ligne en question est une ligne de courbure du conoïde.

192) Plan tangent en un point.



Soit un point mm' de la génératrice $G G'$ précédemment construite. Le plan tangent au conoïde en ce point s'obtient sans difficulté

par la considération d'un parabolôide de raccordement. On se servira pour déterminer ce parabolôide de deux tangentes de front du conoïde, la directrice verticale et la tangente de front à la sphère en bb' , c'est-à-dire au rayon $c'b'$ en projection verticale.

Cette droite rencontre XX en un point S' et la seconde

génératrice du point mm' sera $m'S'$ en projection verticale et en projection horizontale la droite de front mS .

193) Plan tangent passant par un point ll' ou parallèle à une droite donnée : Ombre propre du conoïde.

On mène par une génératrice quelconque $G G'$ un plan passant par le point ll' ou parallèle à la droite donnée et l'on cherche son point de contact que l'on obtient par une construction très-simple inverse de la précédente, par exemple, en construisant une frontale du plan et en menant par S' une parallèle à cette frontale.

Ces constructions permettent d'obtenir par points la courbe d'ombre propre du conoïde, éclairé par des rayons divergents ou parallèles.

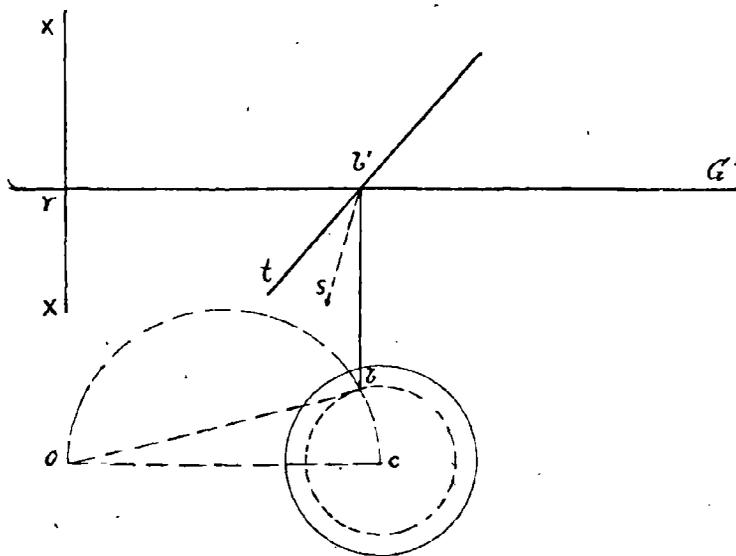
194, Plan tangent au conoïde parallèle à un plan donné.

On construira une horizontale du plan donné. Cette droite sera parallèle à la génératrice du conoïde sur laquelle se trouve le point de contact cherché. La construction s'achève ensuite sans aucune difficulté.

195, Paraboloïde osculateur.

Le paraboloïde osculateur le long d'une génératrice Ci ayant le plan horizontal pour plan directeur, il suffit d'en connaître deux génératrices non parallèles à ce plan pour le déterminer.

Cette détermination résultera donc de la connaissance en deux points Ci de la seconde asymptote de l'indicatrice. Or la directrice XX est évidemment asymptote au point γ , ou elle rencontre



la génératrice, et, au point $b'b'$ où la génératrice touche la sphère, la seconde asymptote peut être facilement construite puisque on connaît en ce point une ligne de courbe qui est la courbe de contact du conoïde avec la sphère.

Si $b't$ est la tangente à cette courbe, cette direction étant celle d'un axe de l'indi-

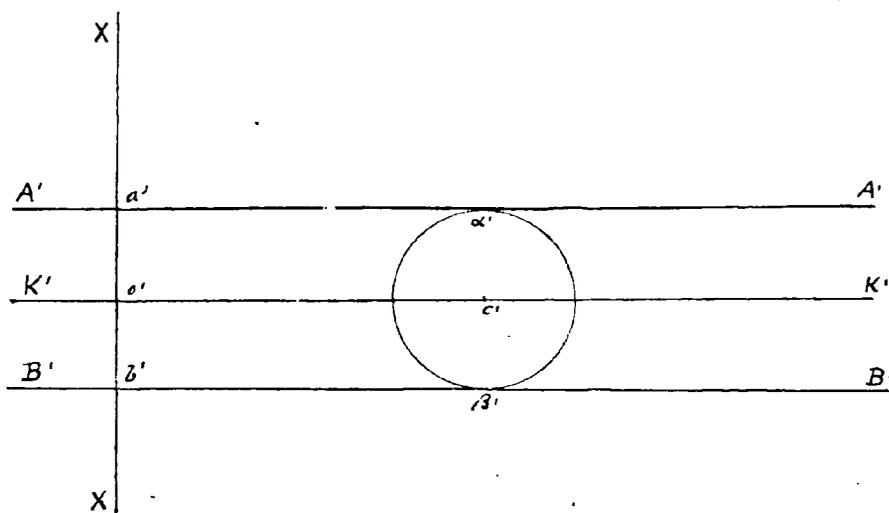
catrice, il suffira de prendre dans le plan tangent au conoïde la symétrique $b's$ de Ci par rapport à $b't$ pour avoir la seconde asymptote.

Le paraboloïde osculateur ainsi déterminé permettra de construire en chaque point la seconde asymptote de l'indicatrice et par suite d'obtenir en ce point la tangente à une courbe d'ombre propre.

Signe de striction du conoïde — C'est évidemment l'axe de la surface.

Généralités singulières — On voit par la construction même des génératrices que la surface se trouve limitée par deux plans horizontaux qui sont les plans tangents supérieur et inférieur à la sphère.

Ces plans renferment chacun une seule génératrice de la surface, et ces génératrices projetées verticalement en $A'A'$ et $B'B'$ sont des génératrices singulières, car aux deux points α' et β' où



elles touchent la sphère le plan tangent est horizontal, c'est-à-dire qu'il coïncide avec le plan tangent à l'infini. Ce sont donc deux génératrices à paramètre nul, c'est-à-dire du genre conique.

Le plan tangent est indéterminé aux points centraux α' et β' de ces génératrices.

Considérons maintenant les généra-

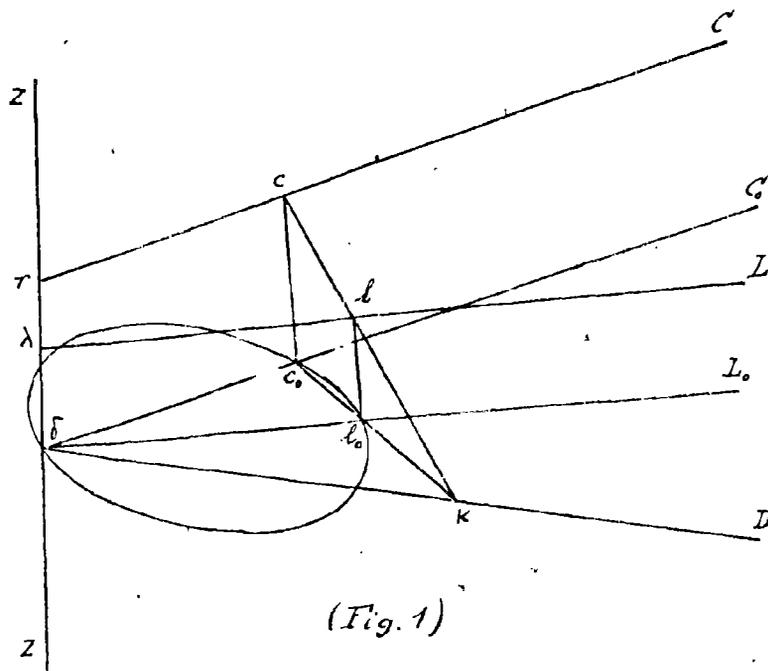
trices situées dans le plan horizontal du centre de la sphère. Ces génératrices projetées toutes deux verticalement suivant $K'K'$ sont encore des génératrices singulières, car le plan tangent est vertical au point de contact avec la sphère comme au point central O' .

On a donc là deux génératrices à paramètre infini, c'est-à-dire du genre cylindrique. Le plan tangent est indéterminé au point à l'infini sur ces génératrices.

C. Conoïde de Plucker.

196, Le conoïde de Plucker nommé aussi par certains auteurs cylindroïde peut être défini de la façon suivante.

Étant données deux droites C et D (croquis perspectif fig 1) que nous supposons horizontales pour fixer les idées et dont la perpendiculaire commune est la verticale τ ou Z , par un point c de C on mène une droite quelconque dans le plan de C et de D , la droite cK s'appuyant en K sur D par exemple, puis la perpendiculaire commune l ou L à cK et à Z .



(Fig. 1)

Cette droite L , lorsque la droite cK tourne autour de c dans le plan (CD) engendre le conoïde de Fluckher.

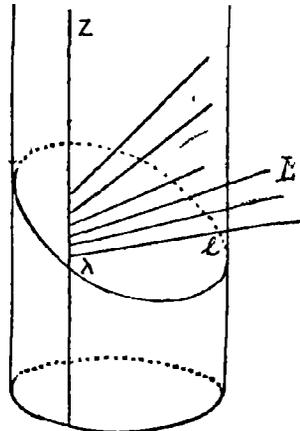
On voit d'ailleurs immédiatement que les droites C et D sont elles mêmes deux génératrices du conoïde: elles s'obtiennent en effet en donnant à cK deux positions respectivement perpendiculaires à C ou à D dans le plan (CD) .

Remarquons d'abord que la surface ainsi engendrée est un conoïde droit

ayant le plan horizontal pour plan directeur et la verticale Z pour directrice.

Projetons sur le plan horizontal de D le point c et le point l où L rencontre cK . Nous obtenons ainsi le triangle $c_0l_0f_0$ dont l'angle en l_0 est droit. Le lieu des points l_0 est donc le cercle droit décrit sur c_0f_0 comme diamètre, et par suite, le lieu des points l dans l'espace est l'ellipse du plan (CD) qui se projette horizontalement sur ce cercle, ou si l'on préfère, l'ellipse section par le plan (CD) du cylindre de révolution à axe vertical ayant le cercle en question pour base.

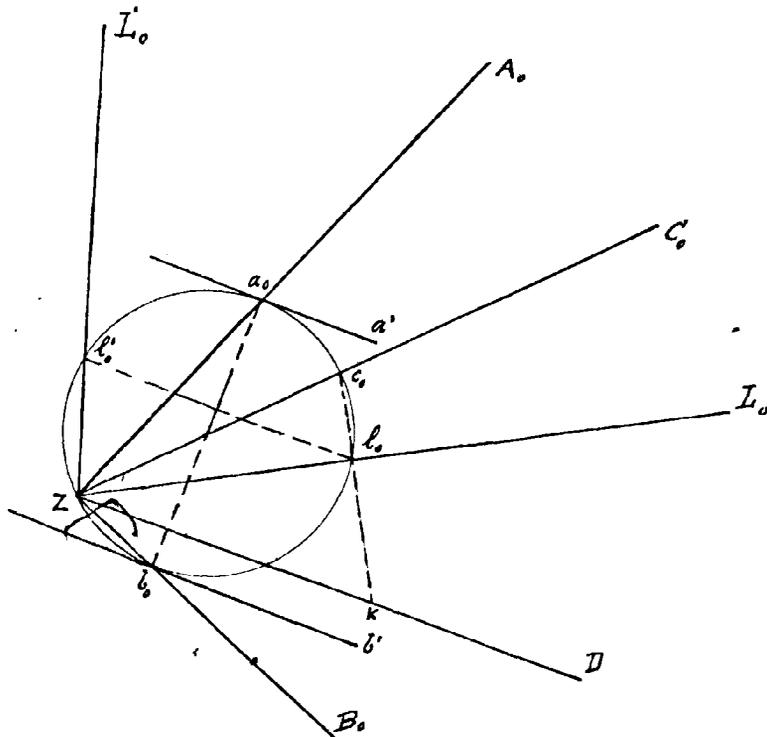
197. On peut donc obtenir le conoïde - et c'est là une autre manière de le définir - en considérant (croquis perspectif fig. 2) la section d'un cylindre de révolution par un plan et construisant les droites telles que L perpendiculaires à la direction des génératrices et s'appuyant sur deux directrices dont l'une est une génératrice Z du cylindre, et l'autre l'ellipse de section.



(Fig. 2)

Et l'on voit immédiatement par cette définition que le cône a en général deux génératrices dans un même plan horizontal et qu'il se trouve compris tout entier entre deux plans horizontaux limites, qui sont les plans horizontaux tangents à l'ellipse de section.

108. Revenons actuellement à la première figure et considérons sa projection sur le plan horizontal de D . Nous affectons de l'indice Zéro les points et les droites projetés pour les distinguer des points et des droites de l'espace.



Les points tels que l des différentes génératrices appartenant tous au plan incliné (CD) qui contient le point c et qui a la droite D pour trace horizontale, on obtiendra les deux génératrices situées dans un même plan horizontal en prenant les deux points du cercle situés sur une même parallèle à D , projections horizontales par conséquent de deux points de même cote sur l'ellipse.

C'est ainsi qu'on construira par exemple la projection de la seconde génératrice L' située dans le même plan horizontal que la génératrice L .

Les projections A_0 et B_0 des génératrices limites s'obtiendront donc en menant les tangentes $a_0 a'$ et $b_0 b'$ au cercle parallèles à D et

$$\frac{l'l_0}{c'c_0} = \frac{k'l_0}{k'c_0}$$

$$\frac{ll_0}{cc_0} = \frac{kl_0}{kc_0}$$

et comme d'ailleurs

$$c'c_0 = cc_0$$

et que

$$\frac{k'l_0}{k'c_0} = \frac{kl_0}{kc_0}$$

à cause des parallèles C_0K , C'_0K' , il en résulte que $l'l_0$ est bien égal à ll_0 comme nous l'avions annoncé.

On peut donc dire que le conoïde est le lieu des perpendiculaires communes à la verticale Z et à toutes les droites s'appuyant sur C et D .

199) Je démontrerais actuellement que le même conoïde peut être encore obtenu par les mêmes constructions en substituant aux deux directrices C et D deux génératrices E et F également inclinées sur les premières en projection horizontale de telle sorte que l'angle de E_0 et de F_0 ait mêmes bissectrices que l'angle de C_0 et de D_0 .

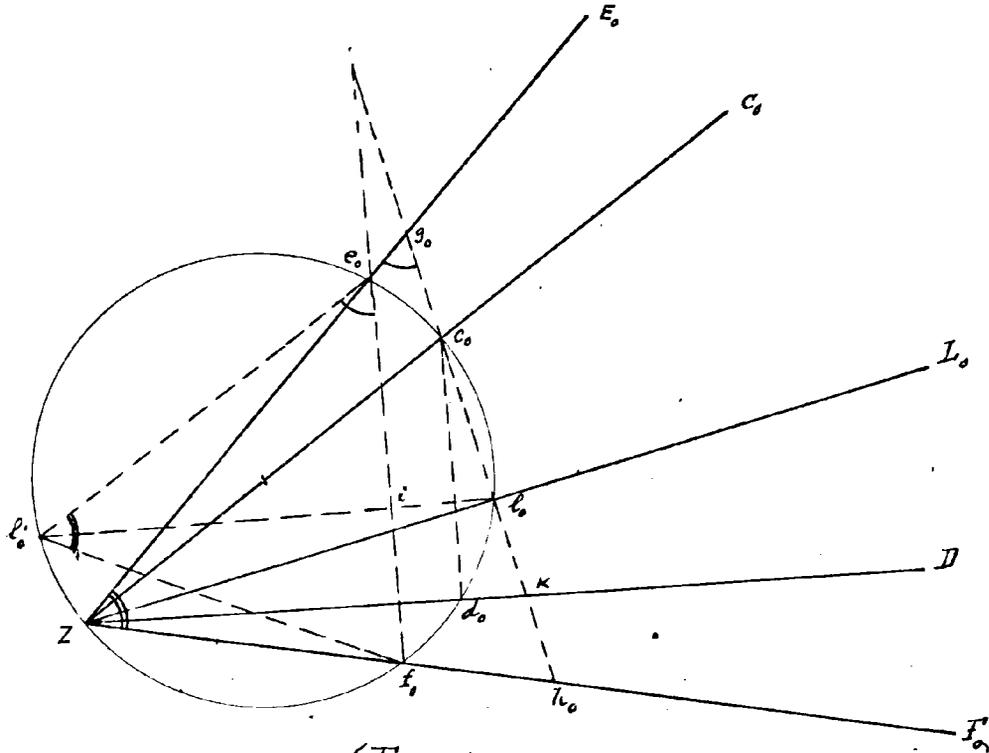
Revenons pour cette démonstration à la figure projetée horizontalement et considérons le plan vertical passant par la sécante CK qui a fourni la génératrice L . Ce plan rencontre E et F en des points g et h de l'espace (projetés en g_0 et h_0) et si nous imaginons dans ce plan vertical la droite gh s'appuyant sur E et sur F , je dis que cette sécante fournit la même génératrice L que la sécante CK .

Pour le faire voir - la projection horizontale L_0 étant évidemment la même - il suffit de prouver que le point l_0 se relève sur les deux sécantes CK et gh à la même hauteur.

Or s'il en est ainsi, en menant par l de CK dans le plan vertical C_0K une horizontale qui rencontre en g_1 et h_1 les verticales des points g et h , on doit avoir (fig. 2) la proportion

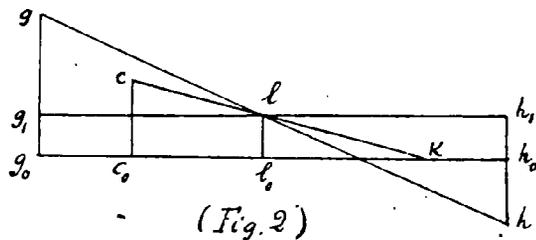
$$\frac{gg_1}{hh_1} = \frac{lg_1}{lh_1} = \frac{l_0g_0}{l_0h_0}$$

qui exprime que les trois points $g h l$ sont en ligne droite.



(Fig. 1)

Mais les points g et h sont au même niveau que les points e et f de l'ellipse, et ceux-ci étant ainsi que le point l dans le plan de l'ellipse qui a la droite D pour trace horizontale, si l'on mène par l_0 une parallèle à D qui rencontre $F_0 E_0$ en un point i , les hauteurs des points e et f au-dessus et au-dessous du plan horizontal du point l sont dans le rapport



(Fig. 2)

$i e_0$ à $i f_0$ de sorte que l'on a :

$$\frac{g g_1}{h h_1} = \frac{i e_0}{i f_0}$$

La relation précédente revient donc à celle-ci

$$\frac{i e_0}{i f_0} = \frac{l_0 g_0}{l_0 h_0}$$

qui exprime que les points i et l_0 doivent diviser les segments $e_0 l_0$ et $g_0 h_0$ dans le même rapport.

Pour démontrer cette dernière égalité prolongeons la droite $l_0 i$ jusqu'à sa seconde intersection l'_0 avec le cercle.

Il est facile de reconnaître que les triangles $e_0 l'_0 l_0$ et $g_0 z h_0$ sont semblables.

En effet leurs angles en l'_0 et en z sont d'abord égaux comme ayant visiblement même mesure dans le cercle. Et leurs angles e_0 et g_0 sont aussi égaux, comme complément dans les triangles rectangles $e_0 i l'_0$, $g_0 l'_0 z$ des angles $l'_0 l_0 e_0$ et $l'_0 z e_0$ qui ont pour mesure commune la moitié de l'arc $l_0 e_0$.

Dès lors les triangles $g_0 z h_0$ et $e_0 l'_0 l_0$ étant semblables et les droites $z l_0$ et $l'_0 i$ étant des hauteurs homologues dans ces deux triangles, elles divisent les bases $g_0 h_0$ et $e_0 l_0$ dans le même rapport, ce qui démontre la proposition énoncée.

Comme conséquence de cette démonstration, remarquons qu'on peut en particulier pour l'étude du cône remplacer les deux directrices C et D par les deux génératrices rectangulaires A et B qui limitent inférieurement et supérieurement la surface.

200. Section de la surface par un plan tangent.

Supposons donc la surface déterminée par les directrices rectangulaires A et B et reproduisons avec ces données la figure qui nous a servi pour la construction d'une génératrice L en projection horizontale, le point a_0 de A jouant ici le rôle du point c_0 de C dans la construction précédente.

Un plan P , arbitrairement mené par L sera un plan tangent à la surface et ce plan tangent sera quelconque puisque la génératrice L est quelconque elle-même.

Supposons que le point a ait été placé au point de rencontre de ce plan avec A (ce qui est toujours possible, puisque ce point peut être arbitrairement déplacé sur A comme on l'a vu).

En dehors de la génératrice L qu'il renferme, le plan P rencontre la surface suivant une courbe qui est le lieu des traces sur ce plan des autres génératrices. Cherchons à nous rendre compte de la nature de cette courbe.

Le point m_0 appartient donc au cercle des trois points $a_0 Z K$, c'est-à-dire au cercle décrit sur $a_0 K$ comme diamètre, et ce cercle représente en projection horizontale la courbe d'intersection cherchée du plan P avec la surface.

Ainsi la section d'un plan tangent quelconque dans la surface du conoïde se compose, en dehors de la génératrice non fermée toute entière dans ce plan tangent, d'une ellipse ayant pour projection horizontale un cercle passant par le pied Z de l'axe et par les projections a_0 et K des points où ce plan rencontre les directrices rectangulaires.

Le point de contact se projette au point de rencontre i_0 de la génératrice I_0 avec ce cercle; et la tangente $i_0 t_0$ au cercle en ce point est en projection la seconde asymptote de l'indicatrice.

Le point K étant d'ailleurs le milieu de l'arc $Z K i_0$, l'angle $t_0 i_0 I_0$ que fait cette tangente avec le rayon $Z i_0$ est double de l'angle que fait ce rayon lui-même avec l'axe $Z B$. Cette propriété, étant caractéristique de la lemniscate on peut en conclure que les lignes asymptotiques du conoïde se projettent suivant des lemniscates sur le plan horizontal.

Réciproquement, la détermination de la seconde asymptote de la surface en un point quelconque i peut se faire très facilement par cette remarque, et cette détermination qui entraîne comme on l'a vu la connaissance du parabolôïde osculateur, permet la construction de la tangente à la courbe d'ombre propre.

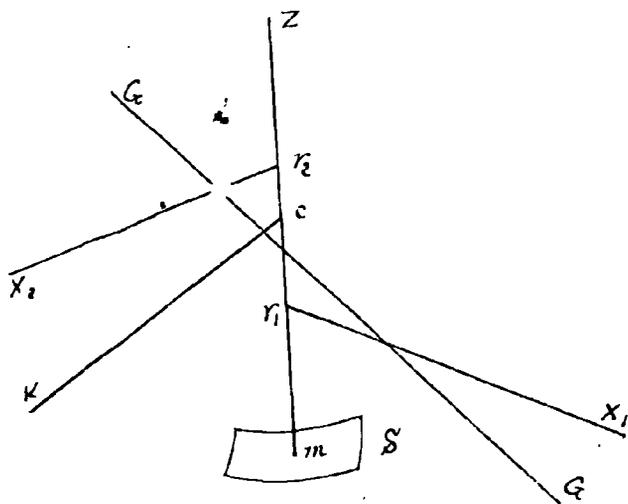
On peut remarquer enfin que les génératrices rectangulaires A et B sont des génératrices singulières du genre conique, puisque le plan tangent est visiblement horizontal tout le long de ces génératrices, excepté aux points centraux α et β où il est indéterminé.

201) Génération cinématique du conoïde de Plucker.

Si l'on imagine un cylindre de révolution roulant à l'intérieur d'un autre cylindre de révolution également et de rayon double, les points du petit cylindre situés sur une ellipse E section plane de cette surface se déplacent sur les génératrices d'un conoïde de Plucker.

En effet soit M un de ces points, m sa projection horizontale, on a vu (§ 49) que le point m décrit dans son déplacement

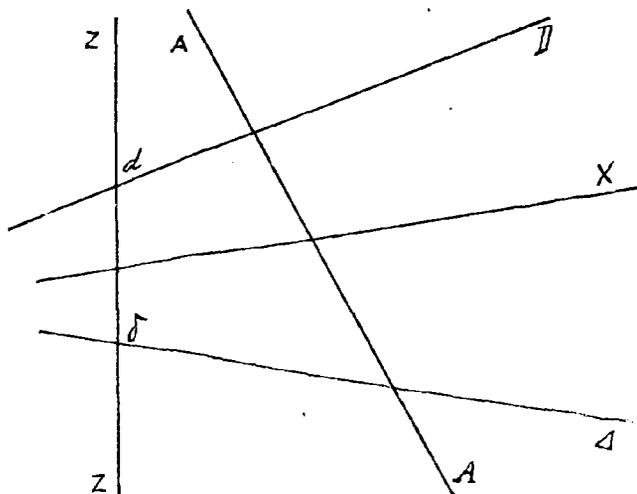
tangentes aux lignes destriction de ces normales, qui sont aussi les asymptotes des indicatrices des surfaces parallèles à la surface S qui passent en ces points.



Ainsi les asymptotes des indicatrices des surfaces parallèles aux points situés sur une normale commune appartiennent à un conoïde de Fluckner qui n'est que le conoïde précédent après rotation de 90° autour de la normale $III Z$.

Enfin le conoïde de Fluckner se rattache encore d'une façon très-remarquable à la théorie du déplacement que nous avons exposée en géométrie cinématique.

En effet, d'après le théorème de M. M. Mannheim et Schönemann démontré (S. 162) nous savons que tous les déplacements élémentaires que peut prendre à partir d'une situation donnée un système invariable de forme assujéti à quatre conditions s'obtiennent par la combinaison



de deux rotations infiniment petites s'effectuant autour de deux mêmes droites D et Δ et ne diffèrent que par la grandeur relative de ces rotations simultanées.

À chacun de ces déplacements élémentaires correspond un axe de déplacement particulier et le lieu de ces axes instantanés est un conoïde de Fluckner.

Pour le prouver menons la perpendiculaire commune à D ou Z aux droites D et Δ ,

puis une droite quelconque A s'appuyant sur D et Δ , et enfin la

perpendiculaire commune X à A et à Z .

Les deux droites X et Z sont les lignes de striction d'un parabolôide isoscèle dont D et Δ sont deux génératrices et d'après un résultat très-facile à démontrer ⁽¹⁾ ce parabolôide est le lieu des conjuguées de X dans les différents déplacements possibles.

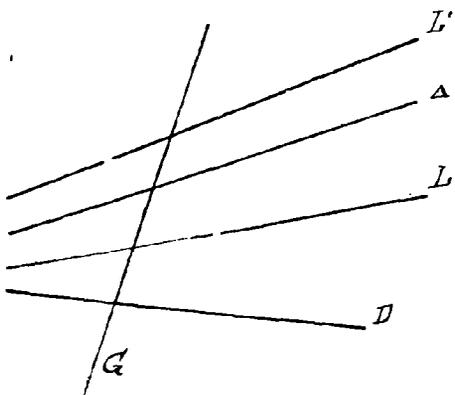
Or, parmi les génératrices de même système que X il y en a une X' rejetée à l'infini, qui est perpendiculaire à Z et à X . Si nous choisissons parmi les déplacements possibles celui pour lequel X et X' sont conjugués, X recevra par la rotation autour de X' une translation parallèle à sa propre direction et sera par conséquent l'axe instantané de ce déplacement spécial, et comme le lieu de X est un conoïde de Flucker d'après la manière même dont cette droite a été construite, la proposition énoncée se trouve démontrée et l'on reconnaît de plus que D et Δ sont deux génératrices du conoïde.

2^e Surfaces gauches admettant un cône directeur de révolution

Généralités.

(203) Nous avons déjà vu d'une façon générale comment pouvaient se construire les génératrices d'une surface gauche définie par un cône directeur et par deux courbes ou surfaces directrices.

Si nous considérons en effet une droite L appartenant à la figure mobile et l'hyperboloïde déterminé par les trois droites D , Δ et L , une génératrice quelconque de cet hyperboloïde de système opposé aux premières sera normale à la trajectoire de ses points dans tous les déplacements possibles, puisqu'elle rencontre D et Δ qui sont conjuguées dans tous ces déplacements. Rencontrant L elle rencontrera donc la conjuguée L' de L , ce qui prouve que le lieu de cette conjuguée est l'hyperboloïde considéré. Cet hyperboloïde dans le cas de notre démonstration devient un parabolôide puisque D , Δ et X (qui joue le rôle de L) sont trois droites perpendiculaires à Z .

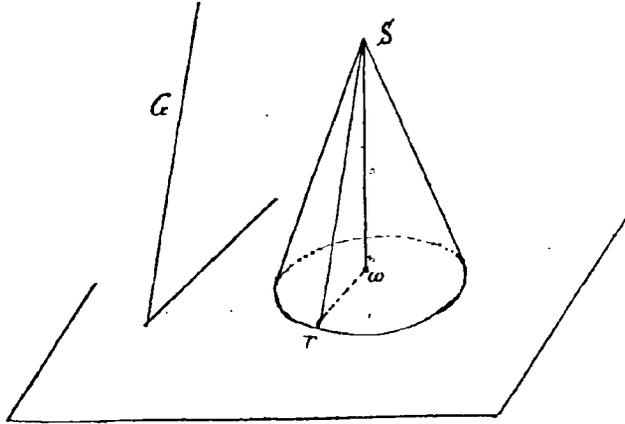


Giometrie - 1^{re} Ed. (1908-09)

21. F. =

Le cas particulier où le cône directeur est de révolution donne lieu à quelques remarques.

Preons comme plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe $S'CO$ de ce cône : le plan asymptotique le long d'une génératrice C étant parallèle au plan tangent au cône le long de la génératrice correspondante $S'g$, on voit que le plan central parallèle au plan vertical $S'CO$ est le plan projetant horizontalement la génératrice.



Par suite la ligne destriction, comme dans les surfaces gauches à plan directeur horizontal est, en projection horizontale, le contour apparent de la surface.

Le plan central étant d'ailleurs, comme on l'a vu, l'un des plans directeurs du paraboloides des normales, les génératrices de ce paraboloides de système opposé à la génératrice, c'est-à-dire les normales à la surface gauche, se projettent horizontalement suivant des droites rayonnantes. Le point autour duquel ces droites rayonnent s'obtient facilement en général par la connaissance de deux d'entre elles.

Par exemple dans le cas de deux courbes ou surfaces directrices, on connaît immédiatement le plan tangent et par suite la normale à la surface aux points où la génératrice rencontre ces courbes ou touche ces surfaces données.

Helicoïdes réglés.

(204) Un exemple très-remarquable de surfaces gauches admettant un cône directeur de révolution nous est fourni par les helicoïdes réglés, mais ces surfaces, dont nous allons faire une étude spéciale, se définissent beaucoup plus simplement au moyen du déplacement hélicoïdal.

En effet, en dehors des différents modes de génération des surfaces réglés que nous avons examinés et qui consistent à assujettir la génératrice à s'appuyer sur des courbes ou des surfaces directrices, on

peut encore définir son déplacement en supposant que cette génératrice fait partie d'une figure invariable dont le déplacement est défini par des conditions qui peuvent ne s'appliquer qu'indirectement à la génératrice elle-même.

Dans ce cas le déplacement de la génératrice résulte du déplacement général de la figure. Si ce déplacement est un déplacement hélicoïdal continu (tel que nous allons le définir), la génératrice engendre un hélicoïde réglé.

Nous avons défini le déplacement hélicoïdal élémentaire qui est le déplacement infiniment petit le plus général que puisse prendre un système invariable; c'est une rotation autour d'un certain axe, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe.

Si le déplacement hélicoïdal élémentaire se continue autour du même axe et si le rapport entre les grandeurs de la translation et de la rotation reste le même pendant les instants consécutifs, on a un déplacement hélicoïdal continu.

C'est par un déplacement de cette nature appliqué à une courbe invariable quelconque que sont définies les surfaces hélicoïdales en général, et, lorsque la courbe génératrice est une droite, l'hélicoïde réglé en particulier.

On peut remarquer que dans le déplacement hélicoïdal continu tous les points entraînés décrivent des hélices et que ces hélices ont même pas H. Ce pas est le pas du déplacement.

L'angle α de ces hélices est lié dès lors à la distance r du point décrivant à l'axe par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2\pi r} = \frac{h}{r}$$

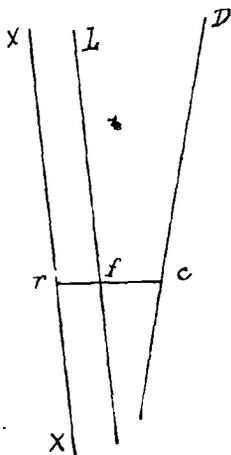
en désignant par h le pas réduit

Une autre remarque très importante, c'est que les surfaces hélicoïdales sont évidemment superposables à elles-mêmes le long de leurs génératrices consécutives.

(205) . Considérons une droite D entraînée dans un déplacement hélicoïdal continu et cherchons à résoudre les questions les plus simples qui peuvent se présenter à propos de la surface gauche qu'elle engendre.

Il est d'abord évident que cette surface a pour cône directeur un cône de révolution autour de l'axe du déplacement X , et qu'en conséquence son plan central est un plan mené par la droite D parallèlement à cet axe.

Le point central c , qui est le point de contact de ce plan, se trouve, d'après un résultat établi en géométrie cinématique, au pied de la perpendiculaire commune à X et à D .



La ligne de striction est l'hélice lieu du point c . C'est (conformément à une remarque précédente qui s'applique à toutes les surfaces gauches à cône directeur de révolution) le contour apparent de la surface en projection sur le plan horizontal.

Le parabolôïde des normales renfermant, comme on l'a vu en géométrie cinématique, l'adjointe L des plans perpendiculaires à D , le paramètre

de ce parabolôïde - qui est aussi celui de la surface pour la génératrice commune D - aura pour valeur

$$K = \frac{cf}{\text{tg}(DL)} = \frac{cf}{\text{tg}(DX)}$$

f étant le foyer du plan perpendiculaire à D mené par le point c , et ce paramètre sera évidemment le même pour toutes les génératrices.

Pour évaluer cf remarquons que le foyer f d'après sa définition doit se déplacer parallèlement à la droite D .

Si α est l'angle de cette droite avec le plan horizontal, on doit donc avoir

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{r'f}$$

d'où, en désignant par d , la distance de la droite D à l'axe du déplacement X

$$cf = d - r'f = d - h \cotg \alpha.$$

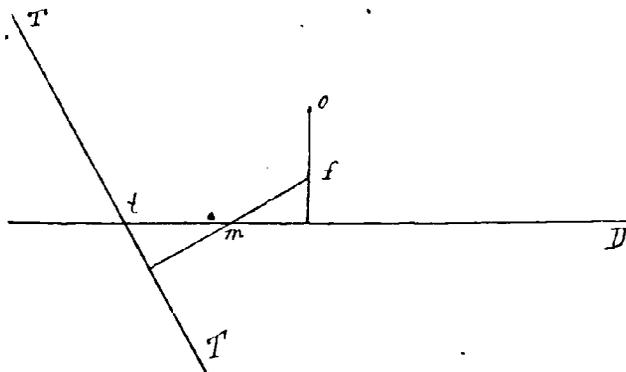
286.

On vérifie par cette construction que le plan tangent à l'infini est le plan debout mené par la génératrice.

207, Développable asymptote de l'hélicoïde réglé.

Si l'on suppose le plan asymptotique entraîné dans le déplacement hélicoïdal pendant que la droite D engendre l'hélicoïde, ce plan enveloppe évidemment un hélicoïde développable qui est la développable asymptote de l'hélicoïde gauche considéré.

208, Construction du point où un plan mené par une génératrice touche l'hélicoïde réglé.



C'est la construction inverse de la précédente. Dans ce cas, la trace T du plan tangent étant connue, il suffit d'abaisser du point f la perpendiculaire sur cette trace pour obtenir en $m m'$ le point de contact cherché.

209, Courbe de contact de l'hélicoïde réglé et d'un cylindre circonscrit.

La courbe que nous nous proposons de construire est la courbe d'ombre de l'hélicoïde éclairé par des rayons parallèles.

Remarquons que si nous considérons un plan tangent en un point quelconque d'une génératrice D , autrement dit un plan quelconque P passant par cette génératrice, et si nous supposons ce plan entraîné sans le déplacement hélicoïdal, la caractéristique C de ce plan s'obtiendra en projetant sur lui l'adjointe d'un plan quelconque perpendiculaire à sa direction.

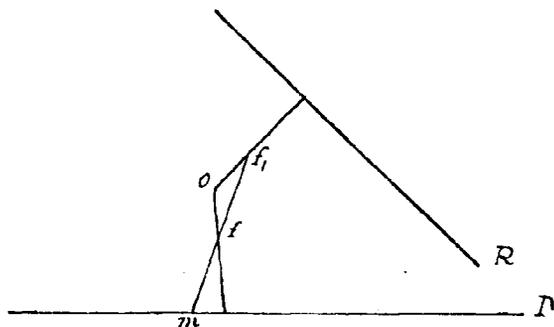
Parmi ces adjointes se trouve celle qui se projette au point f , puisqu'elle correspond à un plan perpendiculaire à D et que

le plan donné passe par D .

Mais si l'on considère une autre direction quelconque R parallèle au plan P , la même chose pourra se répéter pour l'adjointe d'un plan perpendiculaire à R .

Et comme toutes ces adjointes sont des droites verticales et que les points où elles percent le plan P appartiennent d'après ce que

nous venons de dire à la caractéristique de ce plan, on voit que la projection horizontale de cette caractéristique s'obtiendra en joignant les points f et f_1 projections de deux quelconques des adjointes considérées. ⁽¹⁾



En particulier pour les plans tangents à l'hélicoïde et parallèles au rayon lumineux, la caractéristique passera par le point f_1 ,

foyer d'un plan perpendiculaire au rayon lumineux, et comme d'ailleurs la caractéristique d'un plan qui se déplace en restant tangent à une surface passe par le point de contact de ce plan avec la surface (195), il en résulte qu'en joignant le point f_1 aux foyers analogues à f relatif à chaque génératrice on obtiendra sur les génératrices correspondantes les points d'ombre propre cherchés.

(210) Nous nous occuperons actuellement de deux surfaces particulières très-importantes, la surface de vis à filet triangulaire et la surface de vis à filet carré qui sont des cas particuliers de l'hélicoïde réglé que nous venons d'étudier d'une façon générale.

1^{re} Surface de vis à filet triangulaire.

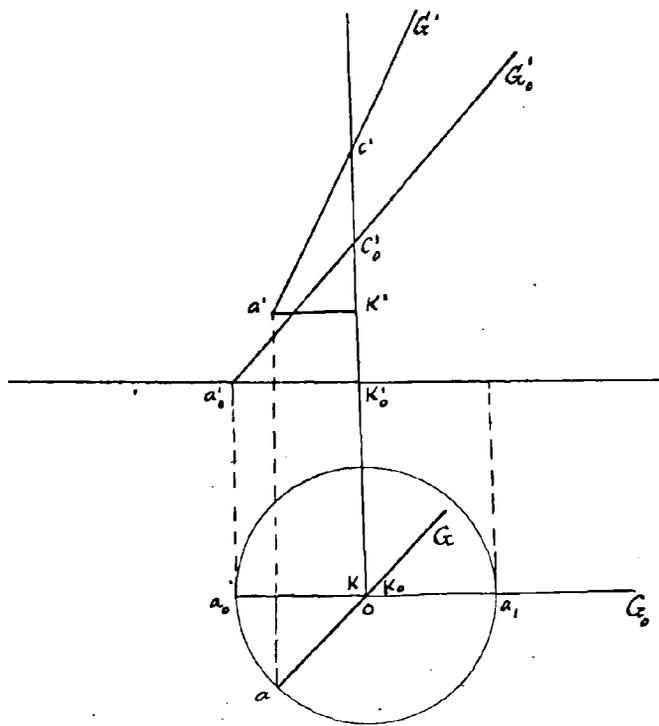
Si la génératrice de l'hélicoïde rencontre l'axe du déplacement l'hélicoïde devient une surface de vis; si l'angle de la génératrice

(1) Il résulte de cette détermination même de la caractéristique que toutes ces adjointes doivent être situées dans un même plan vertical, ce qu'il est facile de vérifier directement en remarquant qu'elles s'appuient sur la conjuguée d'une perpendiculaire (quelconque d'ailleurs) au plan P .

avec l'axe est différent de 90° la surface de vis est à fillet triangulaire ; elle est à fillet cané quand la génératrice est perpendiculaire à l'axe. Dans ces deux cas d'ailleurs, d'après les résultats généraux établis plus haut, le paramètre est égal à h et la ligne destriction se confond avec l'axe de la surface.

Occupons nous d'abord de la surface de vis à fillet triangulaire et cherchons à construire des génératrices en projection.

Soit $a'_0 c'_0$ la projection verticale de la génératrice dans sa position de front $G_0 G'_0$. Comme cette génératrice rencontre l'axe il en résulte que ces deux droites et la horizontale $a'_0 k'_0$ déterminent un triangle rectangle vertical $a'_0 k'_0 c'_0$ que l'on peut tout en le laissant invariable de forme et de grandeur entraîner avec la génératrice G_0 dans son déplacement lorsque celle-ci engendre la surface.



déplacement lorsque celle-ci engendre la surface.

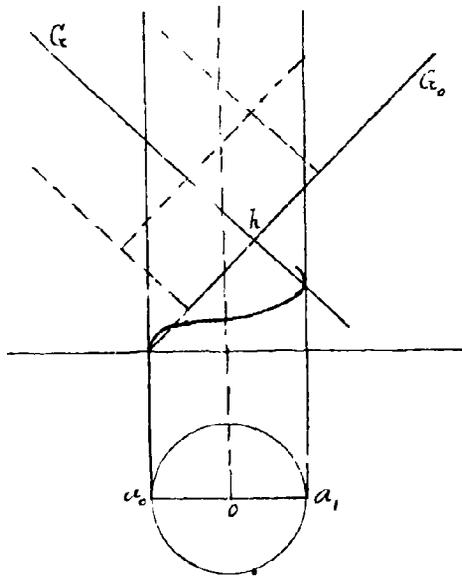
Le point a_0 de la génératrice décrit alors une hélice qui se projette horizontalement suivant un cercle de centre O et la connaissance du pas du déplacement permet de construire facilement la hauteur dont ce point s'est élevé lorsque sa projection horizontale est venue en un point quelconque a du cercle. Le point A' étant ainsi connu, le point K' de l'axe qui est au même niveau en résulte, et

le troisième sommet c' du triangle rectangle $a'k'c'$ qui s'obtient en portant sur l'axe $k'c'$ égal à $k'_0 c'_0$ détermine la génératrice $a'c'$ ou G_1 dans cette position nouvelle.

Quand le point a_0 ayant décrit la demi-circumference en projection horizontale est venu en a_1 , la génératrice redevenue de front occupe une position G_1 dont l'inclinaison sur l'axe est symétrique de celle de G_0 .

La génératrice G_1 rencontre en un point h sa position première G_0

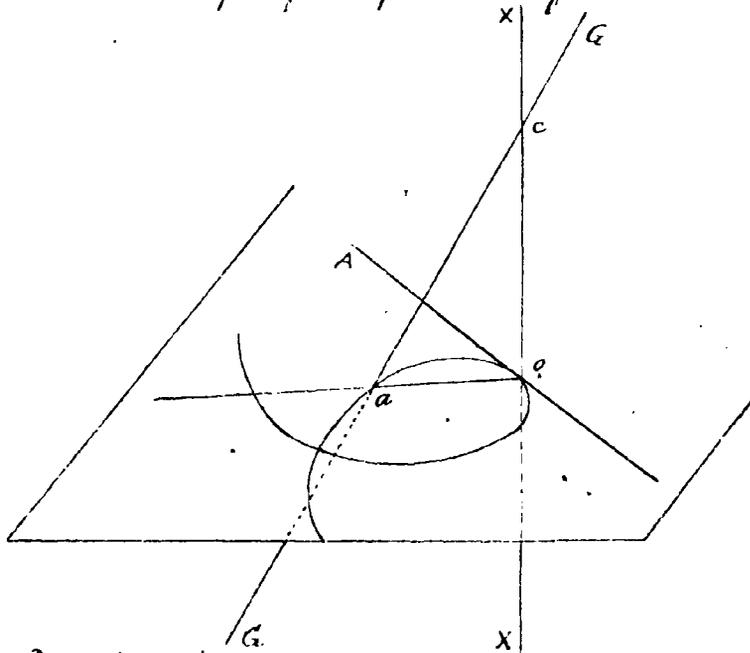
et comme les deux droites G_0 et G_1 , si on les suppose entraînées simultanément dans le déplacement engendrant toute la surface de vis, on voit que le point h décrit une hélice double qui appartient à cette surface.



Mais la génératrice G dans son déplacement indéfini occupe une succession indéfinie de situations parallèles à G_0 et à G_1 , et en répétant pour ces nouvelles génératrices ce qui a été dit pour les génératrices G_0 et G_1 , elles mêmes on reconnaît que la surface renferme une infinité d'hélices doubles divisant l'espace en une série de canaux hélicoïdaux limités par des portions de la même surface de vis et ayant un losange comme section verticale par l'axe.

211) Trace de la surface sur un plan horizontal.

Remarquons d'abord que d'après les propriétés du déplacement hélicoïdal qui fait que la surface est superposable à elle-même dans



toutes ses parties, des sections par différents plans horizontaux doivent être des courbes superposables.

Considérons celle située dans le plan horizontal de projection par exemple et supposons la décrite par la trace a de la génératrice G pendant son déplacement.

Le rayon vecteur oa étant constamment

génératrice G pendant son déplacement

73.76

proportionnel à la hauteur OC (puisque l'angle en C du triangle AOC est constant et la hauteur OC étant elle-même proportionnelle à l'angle dont tourne le plan AOC autour de l'axe OX , il en résulte que le rayon vecteur de la courbe a une longueur proportionnelle à l'angle dont il tourne et l'on reconnaît à cette propriété la Spirale d'Archimède.

Si OA est la trace du plan COA lorsque le point C est en O , et si l'on compte à partir de OA l'angle ω dont tourne le rayon vecteur, l'équation de la spirale sera :

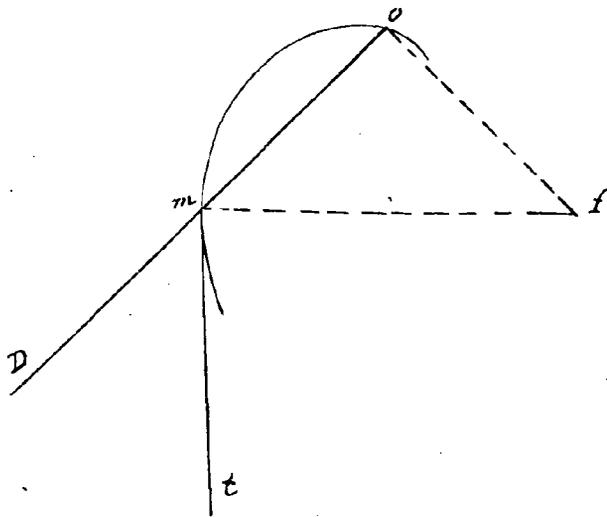
$$\rho = OC \cot \alpha = \frac{H}{2\pi} \cdot \omega \cdot \cot \alpha = h \cdot \cot \alpha \cdot \omega$$

Cette spirale a des points doubles en nombre infini qui sont les traces sur le plan horizontal des hélices doubles de la surface.

212. Plan tangent en un point de la surface.

La considération de cette spirale peut conduire à une détermination du plan tangent à la surface de vis en son point m de cette

courbe, c'est-à-dire en un point quelconque de la surface puisque les sections par des plans horizontaux différents sont toutes identiques à celle que nous avons considérée.

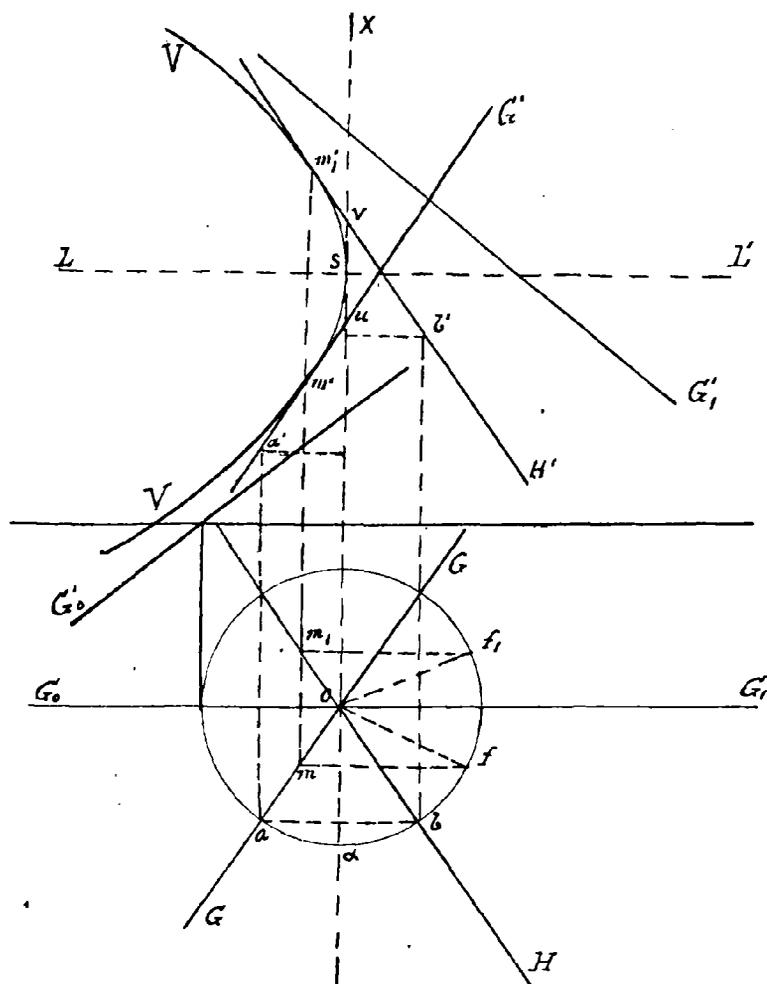


On sait en effet que dans la spirale d'Archimède la sous-normale Of est constante. La tangente à la spirale est donc la perpendiculaire mt à mf , et l'on retrouve ainsi, avec une interprétation différente, la construction à

laquelle on est conduit par l'application de la méthode de détermination du plan tangent, qui a été donnée plus haut pour les hélicoïdes réglés en général, car il est facile de vérifier que le point f de la construction actuelle coïncide avec le pied de l'adjointe dans la construction générale.

213. Contour apparent de la surface en projection sur le plan vertical.

Ce contour est l'enveloppe V des projections verticales des génératrices. Or le point où une génératrice quelconque G touche en projection verticale son enveloppe, est le point de contact d'un



plan debout mené par cette génératrice. Mais puisque la trace de ce plan est parallèle aux lignes de rappel, nous n'avons qu'à mener par le point f , foyer correspondant à la génératrice G une parallèle à la ligne de terre et nous obtenons ainsi le point m qui se relève en m' et qui est un point de la courbe de contour apparent que l'on cherche.

Le point analogue sur la génératrice située dans le plan de profil $O\alpha$ mené par l'axe est le point S où cette génératrice rencontre l'axe.

Ce point est facile à construire et l'on peut remarquer que l'horizontale $L-L'$ du point S est un axe de la courbe de contour apparent.

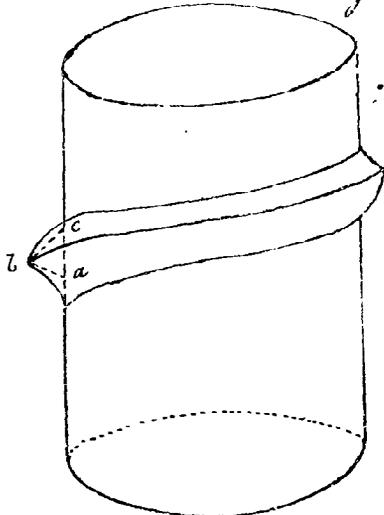
En effet la génératrice G correspond une génératrice H qui est sa symétrique par rapport à $O\alpha$ en projection horizontale et la construction même de la projection verticale H' de cette génératrice montre clairement que cette droite H' est aussi symétrique de G' par rapport à $L-L'$ (en effet les arcs αa et αb étant égaux, les hauteurs Su et Sv doivent être égales).

Les tangentes à la courbe étant ainsi symétriques deux à deux par rapport à LL' , cela suffirait pour démontrer que cette courbe est elle-même symétrique par rapport à cette horizontale. Mais la construction du point de contact m, m' de HH' , vient confirmer ce résultat.

Les génératrices de front A, A' et G, G' sont deux asymptotes de la courbe qui possède d'ailleurs un nombre infini de branches infinies.

214. Dessin d'une vis à filet triangulaire.

Une vis à filet triangulaire est un corps matériel constitué par un noyau cylindrique plein qui porte des parties saillantes hélicoïdales appelées filets engendrés par le déplacement hélicoïdal autour de l'axe du noyau d'un triangle toujours isocèle et le plus souvent équilatéral abc placé comme l'indique la figure dans un plan méridien du cylindre. Le pas du déplacement (du moins dans les vis à filet simple), est égal à la base ac du triangle.



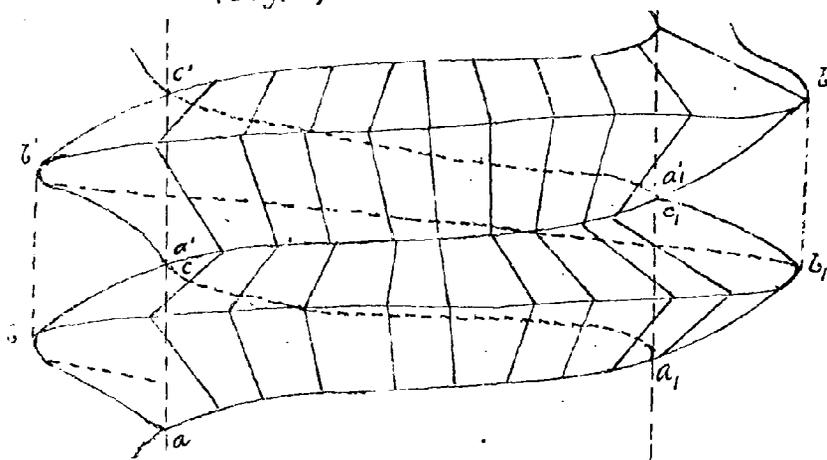
(Fig. 1)

Les points a, b et c décrivent des hélices de même pas et les côtés ab et bc engendrent des portions de surface de vis à filet triangulaire qui limitent le filet de la vis. Après une révolution complète, le triangle vient se placer dans la position

$a'b'c'$ contiguë à celle qu'il occupait d'abord (fig. 2).

Écrivons les hélices décrites par les sommets abc du triangle générateur.

Ces hélices touchent aux points tels que a, a', \dots, b, b' les génératrices de contour apparent des cylindres sur lesquelles elles sont tracées.⁽¹⁾

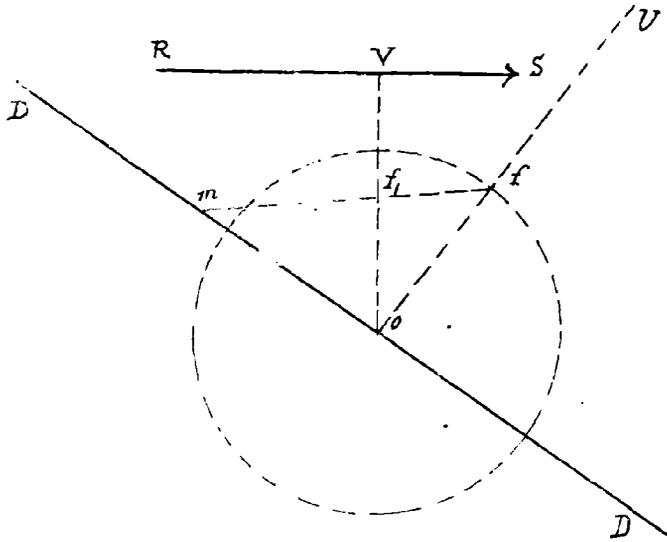


(Fig. 2)

(1) L'hélice décrite par le point c est la même que celle que décrit le point a .

Nous n'avons qu'à appliquer à la surface particulière qui nous occupe la construction donnée précédemment pour les hélicoïdes réglés en général.

Soit RS la projection horizontale du rayon lumineux et D celle



d'une génératrice. L'adjointe d'un plan perpendiculaire à RS se projette en un point I_1 de la perpendiculaire OV à RS tel que

$$OI_1 = h \cot i$$

i étant l'inclinaison du rayon lumineux sur le plan horizontal. L'adjointe

d'un plan perpendiculaire à D se projette de même en un point I de la perpendiculaire OV à D tel que

$$OI = h \cot \alpha$$

α étant l'angle des génératrices avec le plan horizontal.

En joignant $I I_1$, on a une droite qui est la projec-

tion horizontale de la caractéristique du plan mené par D parallèlement aux rayons lumineux lorsqu'on suppose ce plan entraîné dans le déplacement hélicoïdal, et comme cette caractéristique doit passer par le point de contact du plan, la rencontre $I I_1$ avec D donne en m un point de la courbe d'ombre.

Si l'on opère ainsi successivement pour les différentes génératrices de la surface, on remarquera que le point I_1 restant immobile, le point I décrit un cercle de centre O .

Un point m quelconque de la courbe s'obtiendra donc en joignant le point fixe I_1 à un point quelconque I du cercle et prenant la rencontre de cette droite avec la perpendiculaire OD à OI .

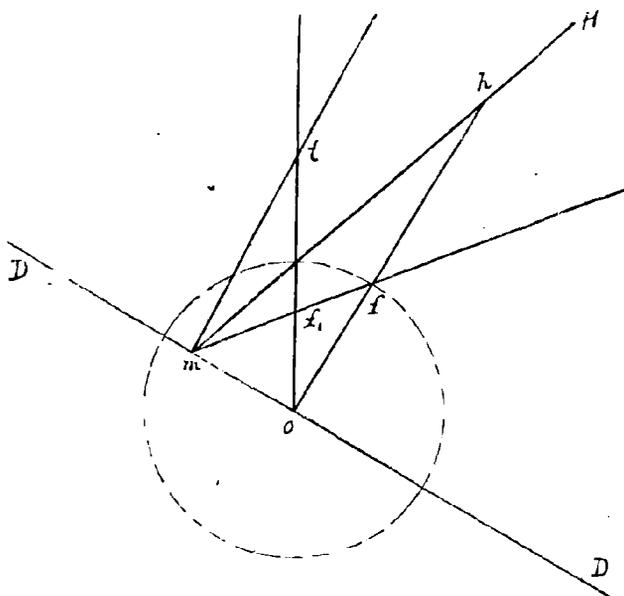
216. Tangente à la courbe d'ombre.

La tangente à la courbe d'ombre sera la conjuguée de la direction du rayon lumineux RS dans l'indicatrice de la surface au

point m , c'est-à-dire par rapport aux asymptotes de cette indicatrice.

Cherchons donc à déterminer la seconde de ces asymptotes puisque la première qui est la génératrice D nous est connue.

Pour cela nous nous servirons de deux autres directions que nous connaissons déjà et que nous savons être conjuguées par rapport à ces mêmes asymptotes.

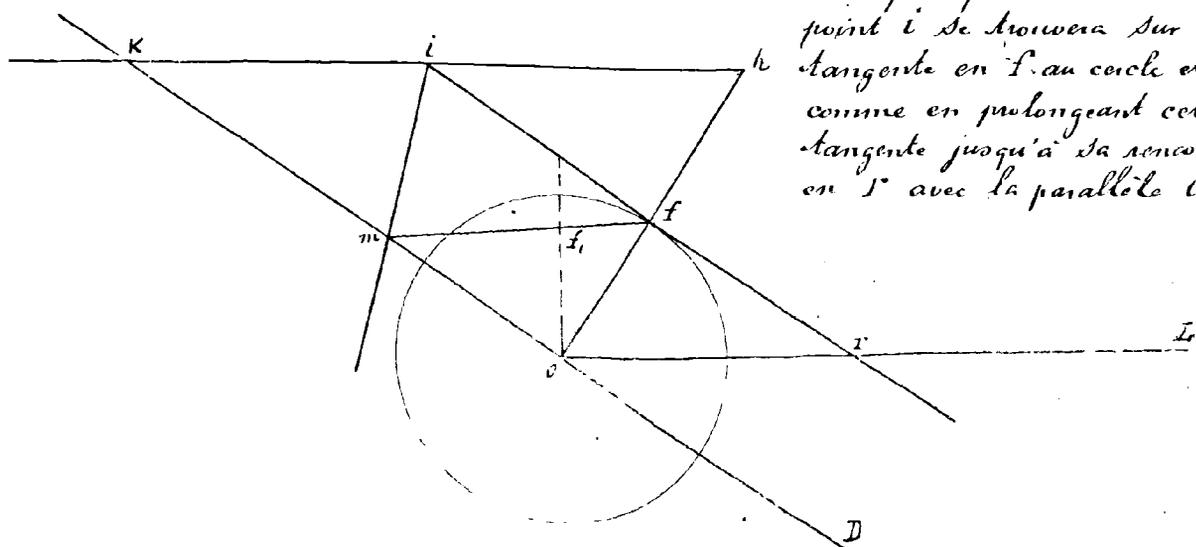


Ces directions sont la caractéristique mH du plan tangent supposé entraîné dans le déplacement hélicoïdal et la tangente mH à l'hélice que décrit son point de contact.

En prolongeant donc Of d'une longueur égale à lui-même au-delà de f nous obtiendrons un point h et mH ou H sera la seconde asymptote cherchée.

Pour avoir la tangente à la courbe d'ombre en m , il suffit maintenant de prendre la direction conjuguée de celle du rayon lumineux par rapport aux asymptotes mH , mD de l'indicatrice.

Elle s'obtiendra en joignant le point m au milieu i d'une sécante hK parallèle au rayon lumineux, c'est-à-dire perpendiculaire à Of .



Mais puisque $Of = fh$, ce point i se trouvera sur la tangente en f au cercle et comme en prolongeant cette tangente jusqu'à sa rencontre en f avec la parallèle Ol .

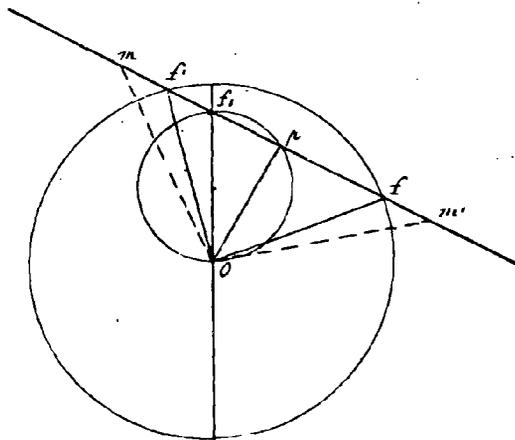
au rayon lumineux mené par O , on forme deux triangles égaux $O f i$, $h f i'$, on voit qu'en définitive le point i pourra s'obtenir simplement en menant la tangente en f au cercle, et prenant sur cette tangente le point i symétrique du point d'intersection I de cette droite avec la parallèle $O L$ à la projection horizontale du rayon lumineux : $i m$ sera la tangente à la courbe d'ombre.

Remarque — Cette construction nous a amenés à déterminer la seconde asymptote $m h$ de l'indicatrice au point m de la surface. Il est intéressant de remarquer que le point h par lequel passe cette seconde asymptote est indépendant de la position du point m sur la génératrice D . On en conclut que l'hyperboloïde osculateur de la surface, lieu des secondes asymptotes le long de D renferme la verticale du point h .

L'existence sur l'hyperboloïde osculateur d'une génératrice verticale de système opposé aux asymptotes était d'ailleurs facile à prévoir puisque l'axe de la surface de vis (qui est évidemment une asymptote de l'indicatrice en tous ses points) est déjà une génératrice verticale de cet hyperboloïde.

217) Formes diverses de la projection de la courbe d'ombre.

On peut observer d'abord, d'après la manière même dont les points de la courbe d'ombre se construisent en projection horizontale que cette courbe projetée à la droite $O I_1$ pour axe de symétrie.



En outre si l'on effectue la construction pour deux positions f et f' du point f situées sur une même corde passant par I_1 , on obtient deux points m et m' sy-

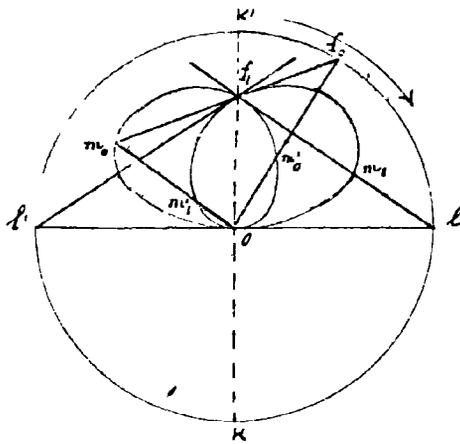
métriquement placés sur $I f'$ par rapport au point p , pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la corde et comme le lieu du point p est le cercle décrit sur $O I_1$ comme diamètre, on voit que ce cercle est une courbe

Diamétrale pour toutes les cordes passant par I_1 .

Mais en dehors de ces remarques générales, la forme de la courbe varie beaucoup avec la valeur relative des angles i et α qui mesurent l'inclinaison du rayon lumineux et celle des génératrices sur le plan horizontal.

En effet selon que i est plus grand ou plus petit que α le point I' est intérieur ou extérieur au cercle ; il est sur le cercle si $i = \alpha$.

Dans le premier cas ($i > \alpha$, I_1 intérieur au cercle) on reconnaît d'abord par la construction même que la courbe ne peut présenter aucune branche infinie, puisque l'angle en I du triangle rectangle $m I O$ ne peut jamais devenir droit.



Nous obtiendrons tous les points du lieu en faisant varier au point I' à partir d'une position initiale quelconque I_0 dans un sens déterminé la courbure entière. Lorsqu'il arrive en l , le point m vient se confondre avec I_1 et la position limite de $I_1 m$, c'est-à-dire la droite $I_1 l$ est la tangente en I_1 à cette branche de courbe.

Le point I continuant sa marche de l en k , le point

m décrit la branche de courbe $I_1 m_0 O$ et arrive en O où la courbe a pour tangente la position limite de la sécante $O m_0$, c'est-à-dire la droite $O l$.

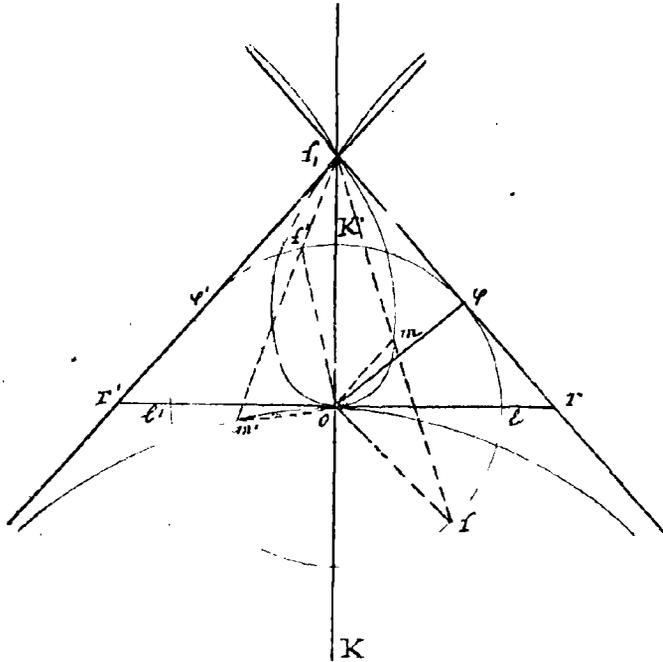
Quand I va de k en l' , le point m décrit l'arc $O m_1 I_1$ symétrique du précédent par rapport à $O I_1$, puis enfin le déplacement $l'k$ du point I fournit un arc $I_1 m_1 O$, symétrique de l'arc $I_1 m_0 O$ et tangent également en O à $O l$.

Le point I_1 est un point double de la courbe d'ombre.

Le point O est également un point double de cette courbe mais les deux branches qui s'y rencontrent y sont tangentes entre elles.

Dans le second cas ($i < \alpha$, I_1 extérieur au cercle) la courbe présente des branches infinies et les points à l'infini s'obtiennent en

Donnant à la droite f, f' les positions $f_1, \varphi, f_1, \varphi'$ tangentes au cercle. En appliquant à ce cas particulier la construction générale de la tangente, on reconnaît que les asymptotes sont les droites $f_1, \varphi, f_1, \varphi'$ elles mêmes.

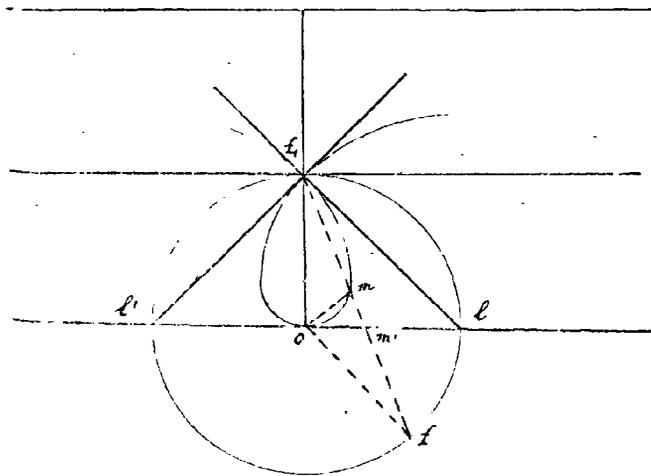


La courbe se trace d'ailleurs facilement comme dans le cas précédent on faisant décrire au point f la circonférence entière, et la forme qu'elle affecte est indiquée par la figure ci-contre. Le point f_1 est toujours un point double et les tangentes en ce point sont encore les droites qui joignent f_1 aux extrémités du diamètre ll' parallèle au rayon lumineux.

Deux branches sont comme dans le cas précédent tangentes en O au diamètre ll' , mais la seconde de ces branches est une branche

infinie située au-dessous de ll' et ses points correspondent aux positions de f sur l'arc $\varphi K' \varphi'$ du cercle.

Dans le troisième cas enfin ($i \neq \alpha, f_1$ sur le cercle) intermédiaire entre les précédentes



le point f_1 est encore point double et les tangentes f_1, l, f_1, l' en ce point sont rectangulaires, mais si l'on cherche les deux points situés sur une même sécante f_1 , le point précédemment désigné par f coïncidant constamment avec f_1 , le point m' de la courbe décrit la droite Ol qui doit être considérée toute entière comme faisant partie du lieu (c'est la limite de la

300.

Le lieu des points m et n est la strophoïde droite.

Or, puisque d'après la propriété du cercle diamétral de la courbe d'ombre le point p est dans le cas actuel le milieu de mm' , le

triangle $Om m'$ est isocèle, et par suite le triangle $im I_1$ l'est également, donc

$$im = iI_1$$

Il résulte de la définition même de la strophoïde (le point i étant le centre d'un cercle tangent en I_1 à OI_1 et passant par les points m et n , fig. de la page précédente) que

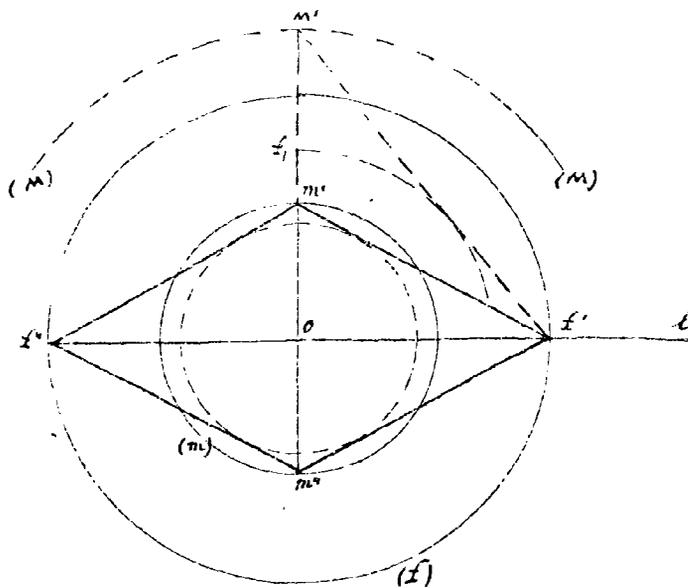
$$om \cdot on = \overline{OI_1}^2 \text{ constante.}$$

La strophoïde est donc une courbe qui peut se transformer en elle-même par inversion, c'est-à-d. dire une anallagmatique.

218. Construction des points de la courbe d'ombre situés sur une hélice de la surface.

Dans les applications les portions de surfaces de vis que l'on a à considérer étant généralement limitées par des hélices tracées sur

ces surfaces, il est utile de pouvoir déterminer les points situés sur ces hélices, car ces points sont des points limites des arcs utiles de la courbe d'ombre.



Cela revient à construire en projection horizontale les points de la courbe d'ombre situés sur un cercle (M) de centre O , ou

bien encore, étant donnés le cercle (L) et le point I_1 , à construire un triangle rectangle ayant en O le sommet de son angle droit, ses deux autres sommets sur les cercles (m) et (l) et tellement placé que son hypoténuse passe par le point I_1 .

Écartons d'abord cette dernière condition. Le triangle rectangle demandé pourra se construire aisément et de quatre manières différentes en prenant arbitrairement une direction quelconque Ol pour l'un de ses premiers côtés. On obtiendra ainsi les quatre triangles égaux $Ol'm'$, $Ol'm''$, $Ol'm'''$, $Ol'm''''$ et en les faisant tourner autour du point O jusqu'à ce que leurs hypoténuses viennent passer par le point I_1 , les sommets m' ou m'' viendront se placer dans quatre positions symétriques deux à deux par rapport à OI_1 qui seront les quatre points de la courbe d'ombre situés sur le cercle (m) .

La construction fait voir que ces points cesseraient d'être réels si le point I_1 se trouvait à l'intérieur de la circonférence ponctuelle enveloppe des hypoténuses dans leur rotation. L'hélice limite sera donc en projection horizontale le cercle (M) obtenu en construisant le point M' par une tangente menée du point I' au cercle de rayon OI_1 . Ce cercle limite n'existe comme on pouvait le prévoir que dans le cas où I_1 est à l'intérieur du cercle (l) .

Remarque — Cette construction qui est générale s'applique au cas où les rayons étant horizontaux, et perpendiculaires au plan vertical, la projection verticale de la courbe d'ombre devient la courbe de contour apparent de la vis, et elle permet de déterminer ainsi le point de cette courbe de contour apparent qui se trouve sur une hélice donnée, l'hélice limitant une portion de surface de vis par exemple. Dans ce cas les rayons étant horizontaux et perpendiculaires à la ligne de terre, l'angle i est nul et le point I_1 se trouve rejeté à l'infini dans la direction de la ligne de terre.

La solution d'ailleurs n'est pas modifiée, mais les quatre points obtenus sont alors symétriquement placés par rapport à OI_1 et Ol .

2° Surface de vis à filet carré.

(219) Quand la génératrice de la surface de vis à filet triangulaire devient perpendiculaire à l'axe, la surface, comme nous l'avons vu, prend le nom de surface de vis à filet carré.

d'un paraboléide ayant le plan horizontal comme plan directeur.

Ce paraboléide sera de raccordement avec la surface de vis le long de $G G'$, puisqu'il aura même plan tangent que la surface aux points CC' , gg' et à l'infini.

Pour avoir le plan tangent en un point mm' de la génératrice, il suffira donc de construire la seconde génératrice du paraboléide passant par ce point, ce qui se fait très-facilement en observant que le second plan directeur étant vertical, toutes les génératrices sont parallèles à gt en projection horizontale et qu'elles passent toutes en projection verticale par le point d'intersection h' de l'axe avec $g't'p$ parce que le premier plan directeur est horizontal. Comme vérification la trace horizontale qq' de la droite $m'h'$ ainsi tracée doit se trouver sur la trace horizontale du paraboléide qui est ot .

La trace horizontale du plan tangent est la parallèle qT à G par le point q .

221) Paraboléide osculateur à la surface : lignes asymptotiques.

On reconnaît facilement que le paraboléide qui vient de nous servir comme paraboléide de raccordement est précisément le paraboléide osculateur de la surface le long de la génératrice G .

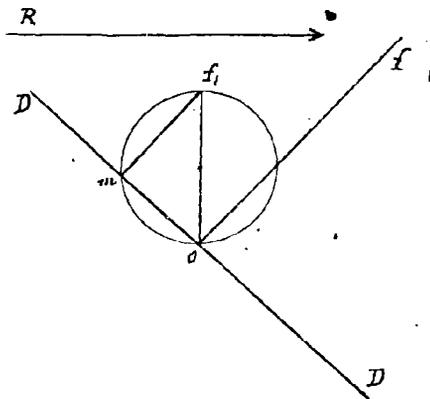
Considérons en effet le plan tangent en m par exemple et supposons le entraîné dans le déplacement hélicoïdal, sa caractéristique sera sa ligne de plus grande pente mq et comme cette droite est aussi tangente à l'hélice décrite par le point de contact m , ces deux directions qui sont confondues devant être conjuguées, elles coïncident nécessairement avec une direction asymptotique de l'indicatrice. Ainsi la génératrice mq du paraboléide est la seconde asymptote de l'indicatrice en m .

On en conclut que les asymptotes de l'indicatrice sont rectangulaires et que les rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires. Les hélices décrites par les points de la génératrice dans son déplacement hélicoïdal sont donc, avec ces génératrices elles-mêmes, les lignes asymptotiques de la surface.

222) Courbe d'ombre propre sur la surface de vis à filet carrés.

Tous supposons les rayons parallèles et nous appliquerons

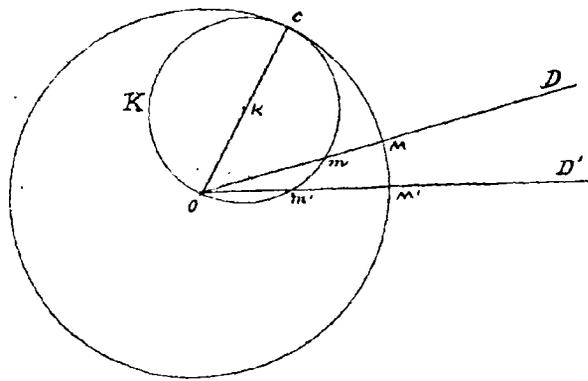
pour obtenir la projection de la courbe d'ombre propre sur le plan horizontal la construction à laquelle nous avons été conduits dans le cas de la surface de vis à filet triangulaire.



Soit D une génératrice.
Le point f_1 où se projette l'adjointe d'un plan perpendiculaire au rayon lumineux s'obtient comme dans le cas de la vis à filet triangulaire. Quant au point f , il se trouve dans le cas actuel rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à D puisque l'angle α est nul. La construction revient donc à abaisser du point f_1 une perpendiculaire sur D qu'elle rencontre au point m de la courbe cherchée.

Cette courbe est donc en projection horizontale le cercle décrit sur $O f_1$ comme diamètre. Il est facile de reconnaître que dans l'espace c'est une hélice.

En effet considérons en général une courbe H tracée sur la surface de vis et se projetant horizontalement suivant un cercle K passant par le pied O



de l'axe. Cette courbe est l'intersection de la surface avec le cylindre de révolution ayant pour base le cercle K .

Élevons également un cercle de centre O ayant pour rayon le diamètre OC du petit cercle. Si nous imaginons actuellement la génératrice D engendrant la surface de vis par son déplacement

hélicoïdal, elle rencontrera le cylindre d'axe O suivant une hélice et le cylindre d'axe K suivant la courbe H .

Mais pour un déplacement donné l'amenant de D en D' par exemple tous ses points se sont élevés d'une hauteur proportionnelle à l'arc MM' du grand cercle et proportionnelle aussi par conséquent à l'arc mm' du petit cercle qui est égal au précédent. Donc le point m qui s'élève sur le cylindre K de quantités proportionnelles à l'arc que décrit sa projection horizontale sur la base de ce cylindre, décrit bien une hélice qui n'est autre que la courbe H .

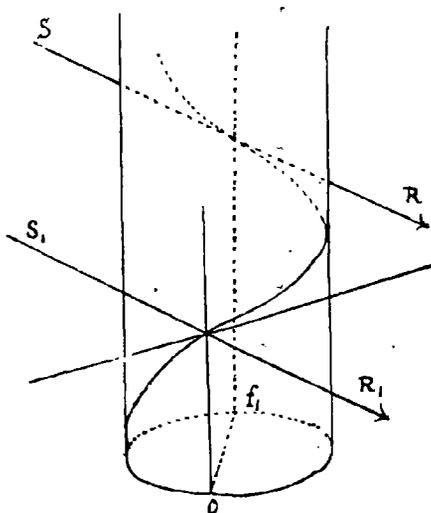
La surface de vis à filet carré renferme donc deux espèces d'hélices, les unes situées sur des cylindres de révolution ayant pour axe l'axe de la surface, les autres appartenant à des cylindres de révolution également ayant cet axe pour une de leurs génératrices.

Le pas de ces dernières hélices est d'ailleurs moitié de celui des autres ; en effet quand la génératrice D effectue sa rotation complète autour de O , le point m de l'hélice H a décrit deux spires complètes de cette hélice.

La tangente à la courbe d'ombre en projection horizontale s'obtient immédiatement puisque c'est la tangente au cercle K et comme vérification elle doit être conjuguée du rayon lumineux par rapport aux asymptotes rectangulaires de l'indicatrice, ce que l'on vérifie très-aisément.

223. Points limites de la courbe d'ombre.

En ces points nous savons que le rayon lumineux est tangent à la courbe d'ombre propre, et comme le rayon n'est pas supposé vertical, cette disposition doit se reproduire en projection horizontale.



Menons donc au cercle projection de la courbe d'ombre propre des tangentes parallèles au rayon lumineux projeté et nous obtiendrons ainsi les deux points f_1 et o_1 mais le point O doit être écarté, car on reconnaît sans peine que le contact en projection horizontale ne correspond pas à un

contact dans l'espace et tient seulement à ce que la tangente à la courbe et le rayon lumineux sont dans un même plan vertical.

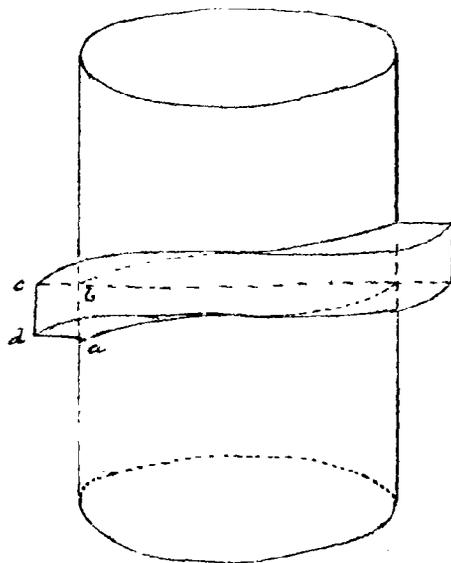
En effet les tangentes à l'hélice d'ombre H font bien avec le plan horizontal un angle égal à i , car on a pour cette hélice

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\frac{H}{2}}{\pi \sigma I_1} = \frac{h}{\sigma I_1} = \operatorname{tg} i,$$

mais il est visible qu'aux points correspondants à O et à I_1 en projection horizontale, les inclinaisons de ces tangentes sont opposées et comme le point I_1 a été déterminé de telle manière que les points qui se projettent en I_1 se déplacent dans le déplacement hélicoïdal parallèlement au rayon lumineux, c'est en ces derniers points seulement que la condition des points limites se trouve satisfaite. Ces points limites séparent sur l'hélice d'ombre propre une succession d'arcs réels d'une succession d'arcs virtuels. Les arcs réels doivent être d'ailleurs reliés entre eux par des arcs appartenant à l'ombre portée de la surface sur elle-même (voir § 169).

224, Dessin d'une vis à filet carré.

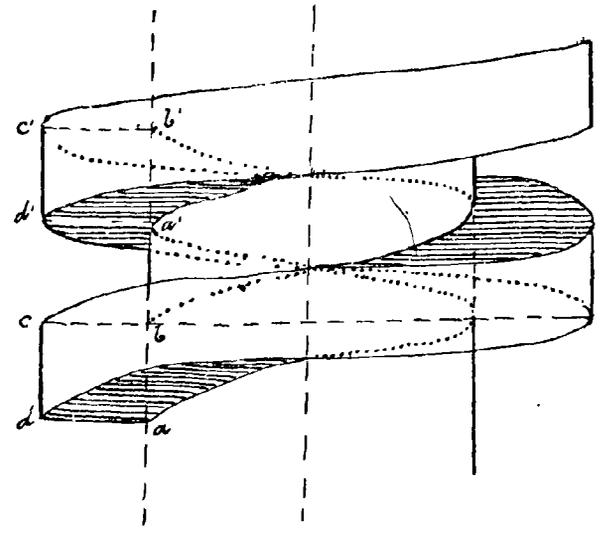
Une vis à filet carré est constituée comme une vis à filet triangulaire par un noyau cylindrique plein portant un filet hélicoïdal saillant sur sa surface. Mais ce filet est engendré dans ce cas par un rectangle, qui est souvent un carré, dont le plan est un plan méridien du cylindre formant le noyau de la vis.



Le pas du déplacement est égal d'ailleurs (dans la vis à filet simple)

au double de la hauteur ab du rectangle. Soit $abcd$ une position initiale de front de ce rectangle. Traçons les hélices décrites par les points a , b , c et d . Les deux premières sont tangentes au contour apparent du noyau, les deux autres au contour apparent du

cylindre de même axe que le noyau qui engendre le côté cd dans son déplacement.



Ces hélices se coupent deux à deux en des points projetés sur l'axe de la surface.

Une fois ces hélices tracées il est très facile de reconnaître quelles sont les parties vues du noyau de la vis et des filets qu'elles limitent. Ces filets sont formés par des portions de surfaces

cylindriques et par des portions de surfaces de vis à filet carré sur lesquelles nous avons tracé dans les parties vues quelques génératrices.

3^e Surfaces gauches Définies par trois Directrices.

A. Hyperboloïde à une nappe.

(225) Cette surface qui a été étudiée dans les cours préparatoires est engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites qui ne se rencontrent point.

Comme le parabolôïde, elle est doublement réglée, autrement dit elle admet deux systèmes de génératrices rectilignes.

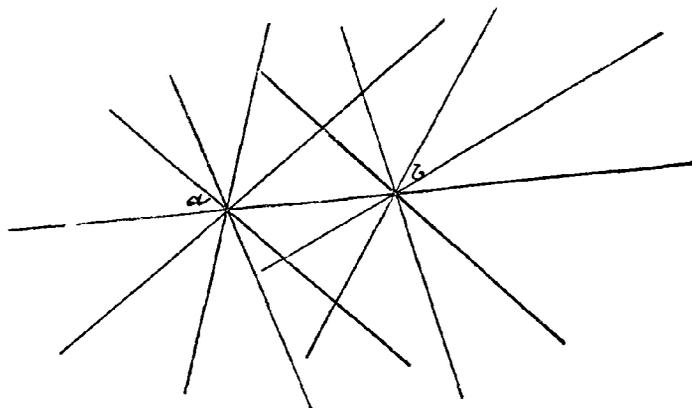
Une génératrice de l'un des systèmes rencontre toutes les génératrices de l'autre système et en particulier elle est parallèle à l'une d'elles.

A ces deux systèmes de génératrices ne correspond donc qu'un seul cône directeur.

La développable asymptote est un cône égal et parallèle au cône directeur et son sommet est le centre de la surface.

Je me borne à rappeler ces propriétés élémentaires qui vous sont déjà connues.

Si l'on projette l'hyperboloïde sur un plan perpendiculaire



à deux génératrices parallèles A et B, les génératrices du système B formeront en projection un système rayonnant autour du point a projection de A puisqu'elles doivent toutes rencontrer A dans l'espace et celles du système A formeront de même un système rayonnant autour de b projection de B.

Le cas particulier des génératrices A et B est à remarquer, car il fournit un exemple remarquable de discontinuité qui tient à ce que le point de rencontre avec la génératrice du système

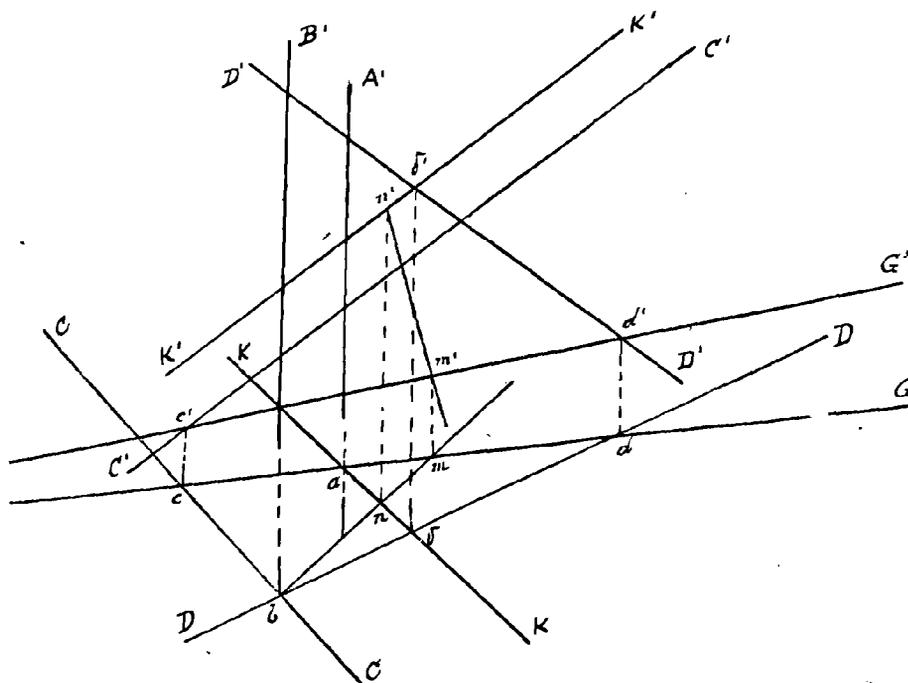
opposé se trouve rejeté à l'infini.

226, Construction d'une génératrice.

La construction d'une génératrice se fait en général sans aucune difficulté, mais elle peut se simplifier considérablement dans certains cas en tenant compte des remarques que nous venons de faire.

Supposons par exemple l'hyperboloïde déterminé par une directrice verticale $A'a$ et deux directrices quelconques C, C' et D, D' .

Les génératrices d'après ce qui vient d'être dit formeront en projection horizontale deux systèmes rayonnants, les unes autour du point a les autres autour du point b , intersection de C et de D et trace horizontale d'une verticale B' parallèle à A' et s'appuyant sur les deux autres directrices.

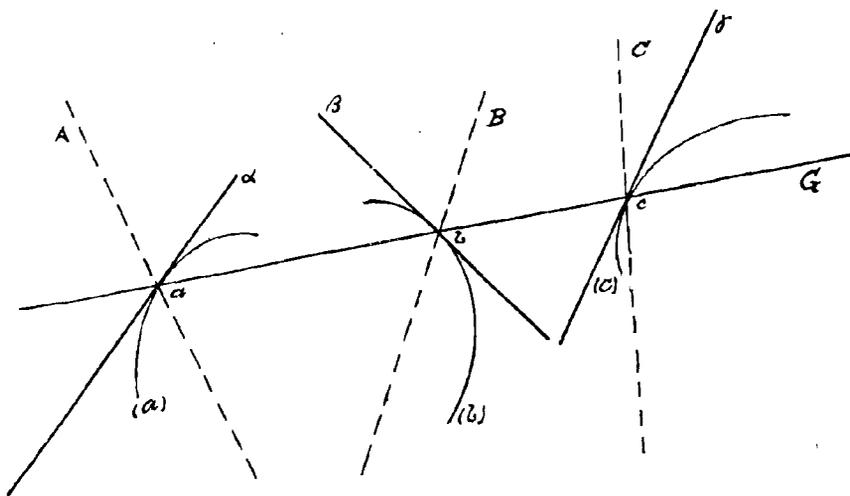


Une génératrice quelconque de système opposé à celui des directrices s'obtiendra donc en menant une droite quelconque G par a , en relevant en C' et d' ses intersections C et d avec C et D et en joignant $C'd'$ ce qui donne G' .

La considération des génératrices parallèles A' et B' fait voir d'abord que le centre se projette horizontalement au milieu ω de ab .
 Si l'on considère maintenant les génératrices parallèles CC' et KK' la droite équidistante de ces deux génératrices et située dans leur plan sera EE' et le centre se relèvera en ω' sur cette droite.

230. Emploi d'hyperboloïdes de raccordement pour la détermination du plan tangent à une surface gauche définie par trois directrices.

Soit G une génératrice d'une surface gauche définie par trois directrices (a) (b) (c) qu'elle rencontre en a , b et c .



Les tangentes $a\alpha$, $b\beta$ et $c\gamma$ à ces trois directrices définissent les plans tangents à la surface gauche aux trois points a , b et c .

On pourra donc prendre comme directrices d'un hyperboloïde de raccordement le long de G trois droites quelconques A , B et C situées

dans les plans tangents en ces points.

Pour avoir le plan tangent en un point quelconque m de la génératrice, il suffira de déterminer alors la seconde génératrice de l'hyperboloïde qui passe en ce point; pour avoir le point de contact d'un plan quelconque P , mené par la génératrice, on n'aura qu'à construire la seconde génératrice située dans ce plan et à prendre son intersection avec la génératrice donnée.

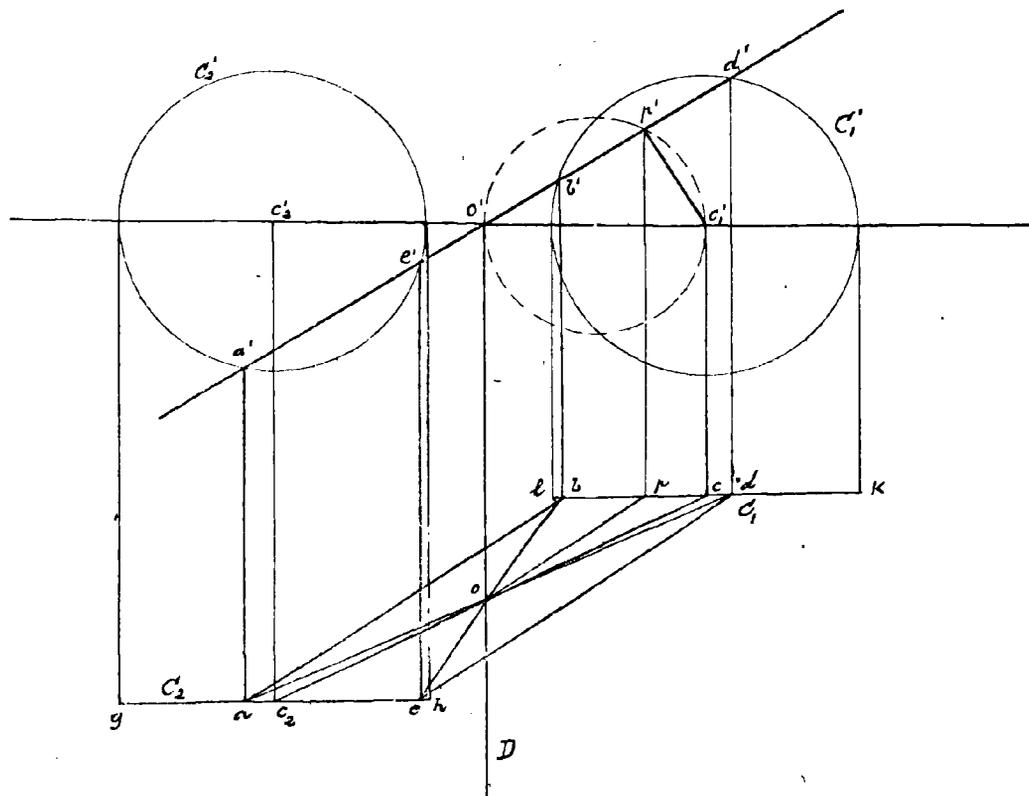
Pour effectuer ces constructions on tracera en général deux génératrices G_1 et G_2 de l'hyperboloïde de même système que G et dans le premier cas on mènera par m une droite s'appuyant sur G_1 et G_2 , dans le second cas on joindra les traces de G_1 et de G_2 sur le plan donné.

On choisira bien entendu les droites A , B et C ainsi que les génératrices auxiliaires G_1 et G_2 de manière à simplifier les constructions autant que possible.

b. Biaïis passé gauche.

(231) Comme second exemple de surface gauche définie par trois directrices nous prendrons actuellement une surface qu'on rencontre en stéréotomie et qu'on appelle le biaïis passé gauche.

Les trois directrices de cette surface sont deux circonférences égales dont les plans sont parallèles et la perpendiculaire aux plans de ces circonférences menée par le milieu de la droite qui joint leurs centres.



Prends le plan vertical de projection parallèle aux plans des deux cercles C_1 , C_2 et pour plan horizontal le plan perpendiculaire au premier mené par la ligne des centres.

Les circonférences se projettent verticalement suivant des circonférences égales ayant leurs centres sur une même horizontale et la

directrice D qui est une droite debout a pour projection verticale le point O' milieu de la distance des deux centres C' et C'' .

Toutes les génératrices rencontrant la directrice D ces droites forment en projection verticale un système rayonnant autour du point O' .

Menons par O' une sécante quelconque qui rencontre en a' et e' , b' et d' les deux cercles. A cette projection verticale correspondent en projection horizontale quatre droites :

$$ab, ed, ad, eb$$

S'appuyant sur D et sur les deux circonferences. Mais il est facile de voir, a cause de la symétrie de la figure dans le plan vertical par rapport a O' que hb étant égal a eh et hd a ga , les droites ad et eb passent en projection horizontale par le point O milieu de la ligne des centres C_1, C_2 et intersection de cette droite avec D . Ces génératrices forment donc un cône de sommet O ayant les cercles donnés pour bases : nous n'avons pas a les considérer dans la question qui nous occupe et les deux droites parallèles ab et ed doivent être seules conservées pour la génération de la surface du biais.

231, Cône directeur de la surface.

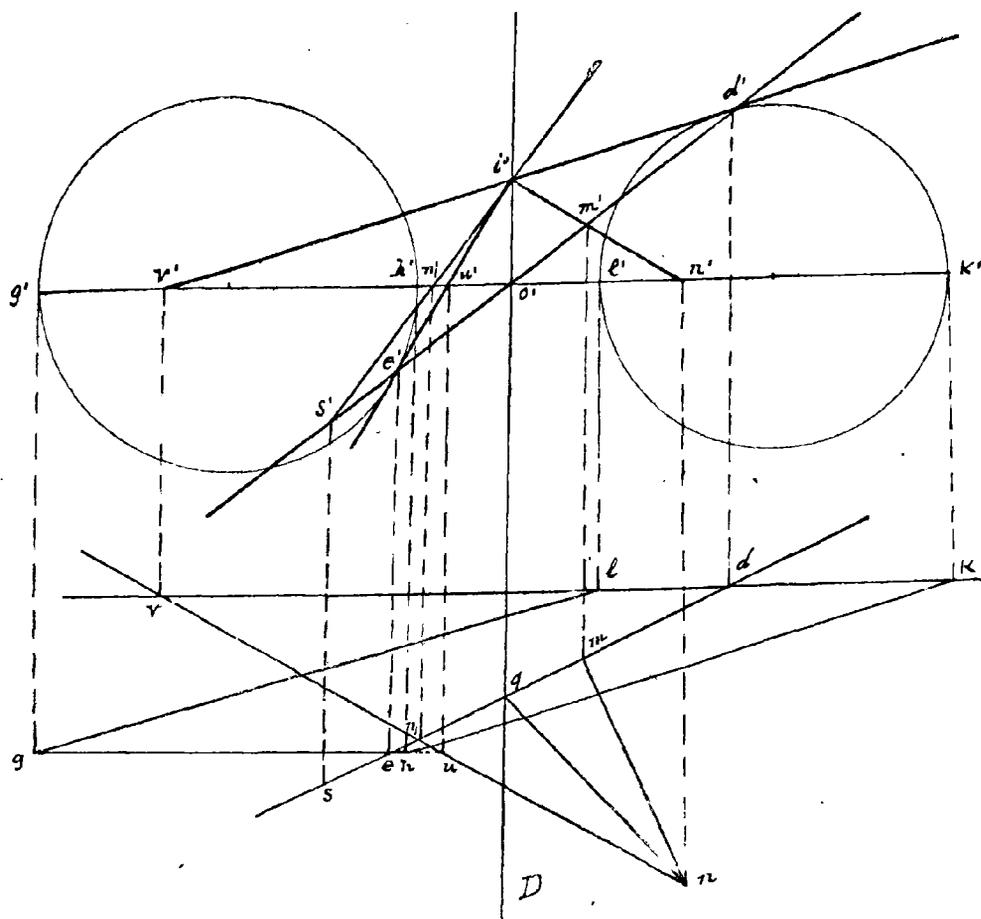
Menons par le point OO' une parallèle aux deux génératrices. Cette parallèle rencontrera le plan du cercle C_1 en un point pp' qui sera le milieu du segment $b'd$, $b'd'$. Le lieu de ce point, lorsqu'on op rera sur les différentes génératrices du biais, sera donc la circonfe-rence décrite sur $O'C_1$ comme diamètre. On voit ainsi que le cône directeur de la surface a pour trace sur un plan de front une cir-CONFERENCE DE CERCLE. On sait d'ailleurs que le plan tangent a ce cône le long d'une de ses génératrices est parallèle au plan asymptotique a la surface pour la génératrice correspondante. Le plan central pour cette génératrice pourra donc s'obtenir en menant par la génératrice un plan perpendiculaire au plan tangent correspondant au cône.

232) Plan tangent en un point de la surface.

Preons un point $m m'$, sur la génératrice $ed, e'd'$ par exemple et cherchons a déterminer le plan tangent en ce point.

Pour cela nous nous servons d'un hyperboloïde de raccordement le long de cette génératrice.

Nous déterminerons cet hyperboloïde en lui donnant comme directrices la droite D et les tangentes $e'u'$ et $d'v'$ aux deux cercles aux points ee' , dd' où la génératrice les rencontre.



Ces tangentes se rencontrent dans la projection verticale en un point u' qui, (à cause du triangle $e'u'd'$ visiblement isocèle) appartient à l'axe radical des deux cercles, c'est-à-dire au prolongement de D sur cette projection. D'ailleurs l'hyperboloïde ayant une génératrice perpendiculaire au plan vertical ses génératrices forment en projection sur ce plan un double système rayonnant et les génératrices de système opposé à ed , ed' auront pour centre de rayonnement le point u' .

Nous aurons donc en joignant $u'm'$ la projection verticale

de la seconde génératrice du point m .

Pour avoir sa projection horizontale, remarquons que la trace horizontale de l'hyperboloïde est une droite, puisque le plan horizontal renferme déjà la génératrice D . C'est donc la droite uv qui joint les traces horizontales des directrices $e'u'$, $d'v'$.

La trace n' de $i'm'$ se ramène donc en n sur uv et l'on a en joignant mn la projection horizontale cherchée.

Le plan tangent déterminé par les deux droites mn et me a donc pour trace horizontale qn .

233. Contour apparent horizontal. Génératrices singulières.

Réciproquement, étant donnée la trace horizontale qn d'un plan passant par une génératrice $e'd$, il est facile, par une construction inverse de la précédente de retrouver le point de contact mm' de ce plan.

Si nous considérons en particulier le plan vertical projetant horizontalement la génératrice, le point analogue à n, n' occupera la position n_1, n'_1 et en joignant $i'n'_1$, on obtiendra par l'intersection de cette droite avec $e'd$ le point de contact S' qui se ramènera en S sur $e'd$. Le lieu du point S ainsi construit sera la courbe de contour apparent horizontal de la surface.

Il est à remarquer d'ailleurs qu'en dehors de la courbe ainsi obtenue qui est l'enveloppe des projections horizontales des génératrices, ce contour apparent contient encore les deux génératrices singulières gl , hK le long desquelles le plan tangent est évidemment vertical, puis qu'il est vertical aux points où ces génératrices rencontrent les deux cercles directeurs.

En opérant sur le plan central précédemment déterminé, on trouverait comme point de contact le point central de la génératrice et l'on pourrait construire ainsi par points la ligne de striction.

Remarquons enfin qu'en dehors des deux génératrices gl et hK , le biais passé renferme encore deux autres génératrices singulières, celles qui se projettent verticalement suivant les tangentes menées par O' aux deux circonférences, car aux deux points où l'une de ces génératrices rencontre les cercles directeurs la surface admet le même plan tangent qui est le plan projetant verticalement la génératrice.

Application à l'optique.

Optique géométrique.

— a Théorème de Malus et de Dupin. —

(234) Le théorème suivant dû à Malus et qui a été généralisé par Dupin, joue un rôle important dans la théorie de l'optique.

Si des rayons issus normalement d'une surface A se réfractent à leur rencontre avec une surface B, ils sont encore après-réfraction normaux à une même surface. (1)

Pour le démontrer nous établissons d'abord un lemme préliminaire :

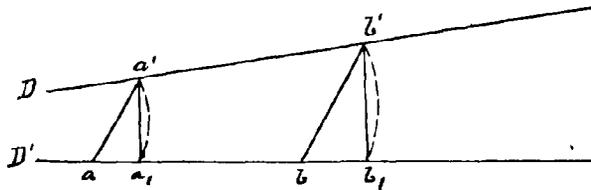
Lorsqu'un segment de droite ab de longueur finie se déplace d'une façon continue tout en changeant de longueur, la variation de longueur pour un déplacement infiniment petit qui l'amène en $a'b'$ est égale comme valeur principale à la différence algébrique des projections sur ce segment des déplacements infiniment petits de ses extrémités.

En effet considérons l'élément de surface réglée décrit par la droite indéfinie ab ou D dans son déplacement, et sur cette surface traçons à partir de a' et jusqu'à sa rencontre avec ab une trajectoire $a'a$, orthogonale aux génératrices.

Nous pouvons imaginer que pendant le déplacement un point a_1 constamment situé sur la droite décrive l'élément de courbe a_1a' que nous venons de tracer. Si nous lions invariablement au point a_1 un point b_1 pris sur la droite D en portant dans un sens convenable

(1) Les systèmes de droites assujetties à deux conditions et formant ce que l'on appelle une congruence ne sont pas généralement, normaux à une même surface, ainsi qu'on le reconnaît facilement par l'analyse. Nous avons vu dans la théorie des surfaces que les normales à une surface sont tangentes à deux surfaces dont les plans tangents en leurs points correspondants sont rectangulaires. Cette propriété géométrique remarquable est caractéristique des congruences de droites qui sont normales à une même surface.

une longueur égale à $a'b'$ sur cette droite, le point b_1 dans le déplacement viendra en b' , et sa trajectoire b, b' sera comme celle de a , une trajectoire orthogonale des génératrices car nous savons que dans le déplacement d'une figure invariable, lorsqu'une droite est normale à la trajectoire



d'un de ses points elle est normale aux trajectoires de tous ses points.

Mais le segment a, b , étant égal à a', b' l'allongement ou le raccourcissement du segment variable

peut être mesuré par la différence

$$a_1 b_1 - a b$$

ou

$$b b_1 - a a_1 \quad (1)$$

Or les triangles $a a_1 a'$, $b b_1 b'$ ont des angles a_1 et b_1 qui tendent vers 90° . Donc $a a_1$ et $b b_1$ peuvent être considérés en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, comme les projections des déplacements des extrémités du segment, et la proposition énoncée se trouve ainsi démontrée. (2)

Revenons actuellement au théorème de Malus et de Dupin et rappelons d'abord que d'après les lois de la réfraction le rayon incident et le rayon réfracté sont situés dans un même plan avec la normale à la surface B et font avec cette normale des angles i et r liés entre eux par la relation

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \lambda$$

λ étant une constante. (3)

(1) On a toujours quelle que soit la disposition des points

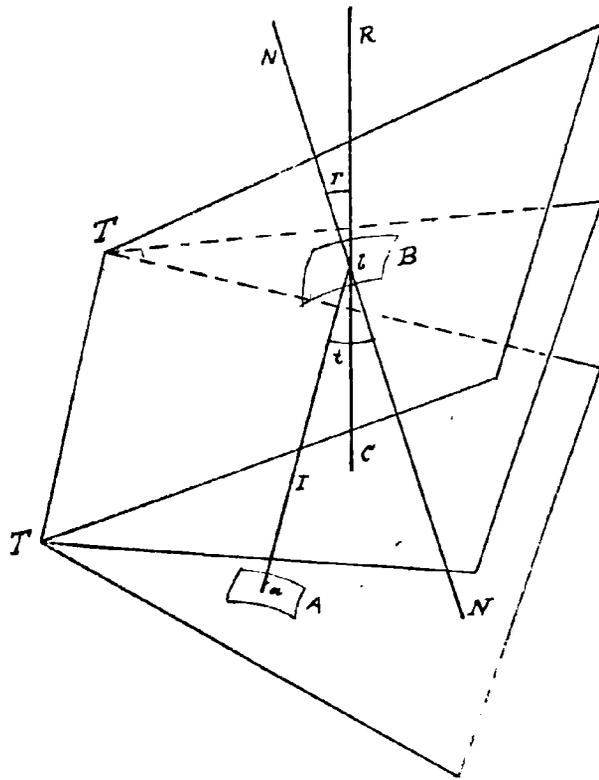
$$ab + bb_1 + b_1 a_1 + a_1 a = 0$$

c'est-à-dire $a_1 b_1 - ab = bb_1 - a a_1$

(2) On doit avoir soin d'observer que pour attribuer aux segments projetés les signes qui conviennent, il faut prendre pour angles de projection les angles de ces déplacements avec une direction déterminée sur la droite D .

(3) La valeur de la constante λ étant positive les angles i et r sont de même signe, c'est-à-dire que d'un même côté de la surface B , les droites I et R qui représentent les rayons incident et réfracté se trouvent d'un même côté de la normale.

Soit ab un rayon incident issu normalement en a de la surface A et se réfractant en b à sa rencontre avec B .



Mémons en a et b les plans tangents aux surfaces A et B . Ces deux plans se coupent suivant une droite. TT qui est perpendiculaire au plan commun du rayon incident ab , du rayon réfracté bc et de la normale N à la surface B . On peut donc mener par cette droite un plan perpendiculaire au rayon réfracté.

Soit c le point où ce plan rencontre le rayon réfracté. Les trois plans ainsi menés par la droite T étant respectivement perpendiculaires aux rayons incident et réfracté I et R et à la normale N à la surface B , les angles qu'ils comprennent entre eux sont respectivement égaux à i et à

r et les sinus de ces angles étant proportionnels à ab et à bc on a :

$$\frac{ab}{bc} = \frac{\sin i}{\sin r} = \lambda$$

ou

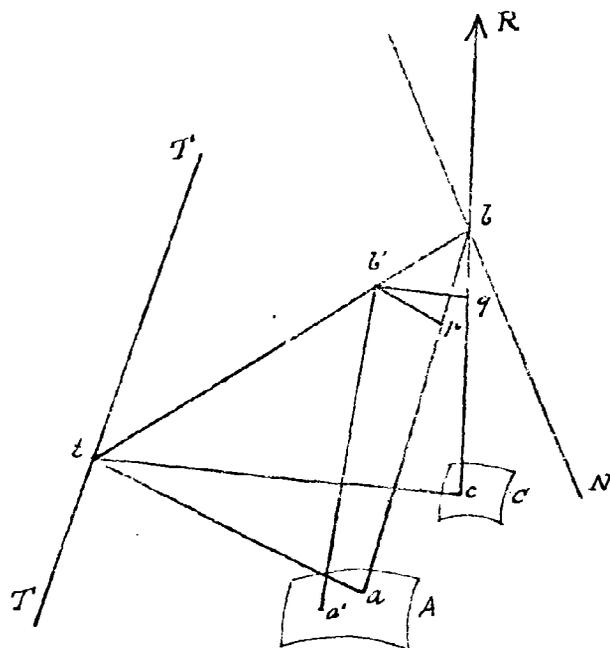
$$ab = \lambda bc$$

Comme d'ailleurs cette relation doit être constamment vérifiée quand on passe d'un rayon à un autre, en répétant pour chacun d'eux les mêmes constructions, on a aussi en désignant par la lettre d les variations infiniment petites correspondant à un même déplacement :

$$d. \overline{ab} = \lambda d. \overline{bc}$$

Considérons actuellement un rayon issu d'un point a' de A infiniment voisin de a . Ce rayon à cause de la continuité rencontrera la surface B en un point b' infiniment voisin de b et l'on pourra en

négligeant un infiniment petit du second ordre, regarder ce point comme appartenant au plan tangent à B en b . La droite bb' rencontrera donc T en un certain point t . Joignons ce point aux points C et a : les deux droites ta et tc seront respectivement



incident ab et au rayon réfracté $b'c$ de sorte que si l'on abaisse de b' des perpendiculaires $b'p$ et $b'q$ sur ces rayons, ces droites étant respectivement parallèles à ta et tc , on aura par les triangles semblables $bb'p$ et $bb'a$, $bb'q$ et $b'c$

$$\frac{b'q}{b'p} = \frac{bc}{ba} = \frac{1}{\lambda} = \frac{d(bc)}{d(ba)}$$

Mais d'après le lemme précédent $d(ba)$ doit être égal à $b'p$ puisque l'extrémité a de ce segment se déplaçant sur la surface A , c'est-à-dire normalement à sa direction, son déplacement a une

projection négligeable sur ab .

Donc on doit avoir de même

$$\overline{b'q} = d \cdot \overline{bc}$$

d'où l'on conclut, par un raisonnement réciproque de celui que nous venons de faire, que le lieu du point c est une surface C normale au rayon réfracté $b'c$.

236) Application du théorème de Malus et de Dupin à la construction de la normale à la surface podaire d'une surface.

Le théorème de Malus et de Dupin que nous venons de démontrer s'applique évidemment au cas particulier de la réflexion qui correspond à

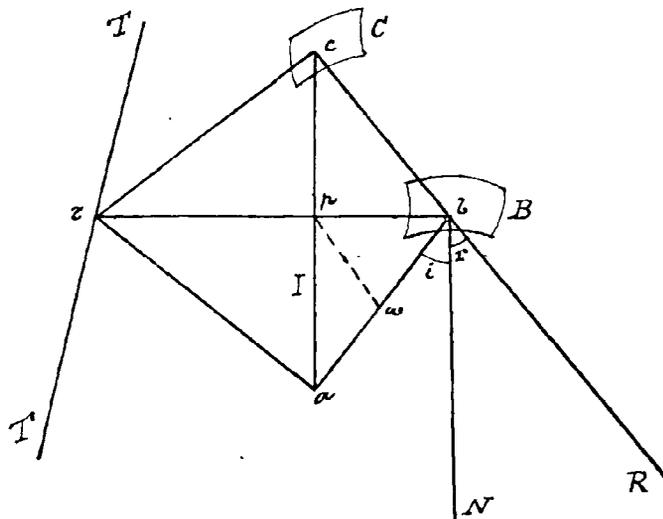
320.

à la valeur -1 de la constante λ .

Il s'applique également au cas où les rayons lumineux émanent d'un point, puisque ces rayons sont normaux alors à toute sphère ayant ce point pour centre.

Dans ce dernier cas et lorsqu'il y a réflexion la construction du point C fait voir que la surface C est homothétique à la surface podaire de la surface B par rapport au point lumineux.

Considérons en effet comme précédemment la droite T intersection



du plan tangent à B et du plan normal au rayon incident mené par le point lumineux a .

Le plan de réflexion coupe T en un point z et le point c s'obtient en abaissant de z la perpendiculaire sur le rayon réfléchi R .

Mais dans le cas actuel, les angles i et r étant égaux, la figure $zabc$ est symétrique par rapport à zb et la droite ac parallèle à N

rencontre cette droite zb en un point p qui est le milieu de ac . Ce point décrit donc une surface homothétique à la surface C par rapport au point a , et comme d'ailleurs ap est perpendiculaire sur le plan tangent à la surface B , cette surface lieu des points p est la surface podaire relative à a de la surface B .

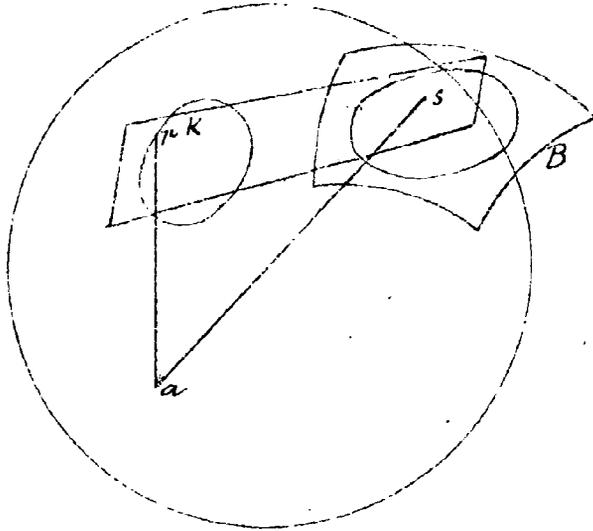
La normale à la surface podaire qui doit être parallèle à la normale à la surface C s'obtient donc en joignant le point p au milieu w de ab .

(237) Ce résultat peut se retrouver directement de la façon suivante.

Si nous considérons tous les plans tangents que l'on peut mener à la surface B par un point extérieur S , ces plans enveloppent un cône de sommet S et les points p pieds des perpendiculaires abaissées de a

Sur ces plans forment une courbe K appartenant à la surface podaire considérée et intersection de cette surface avec la sphère décrite sur aS comme diamètre.

Supposons actuellement que le point S se rapproche indéfiniment de la surface B jusqu'à venir coïncider avec un point b de cette surface, le cône s'ouvrant de plus en plus finit par se confondre avec le plan tangent en b à B et la courbe K devient une courbe évanouissante qui se réduit finalement au seul point μ , pied de la perpendiculaire abaissée de a sur le plan tangent en b . Mais la sphère qui coupe la surface podaire suivant cette courbe lui est tangente à la limite ce qui



ramène à la détermination précédente de la normale puisque ω est la position limite du centre de la sphère considérée.

b. Surface de l'onde.

238. Nous prendrons comme première définition géométrique de la surface de l'onde, celle qui se présente dans la théorie de la lumière.

Soit un ellipsoïde de centre O : on joint le centre à un point m de la surface et dans le plan de Om et de la normale $m\mu$ à l'ellipsoïde - plan que nous prenons pour plan de la fig. 2 - on élève en O une perpendiculaire Om et l'on porte sur cette perpendiculaire une longueur Op égale à

$$\frac{K^2}{Om}$$

K étant une constante.

La question serait donc résolue si la normale pq était connue. Mais au lieu de cette droite elle même nous construisons la normale à une nouvelle surface auxiliaire que nous allons définir.

Considérons le lieu d'un point m_1 , obtenu en portant sur Op une longueur Om_1 égale à Om . La relation

$$Op \cdot Om_1 = K^2$$

fait voir que les surfaces (p) et (m_1) se déduisent par inversion l'une de l'autre. Les normales à ces surfaces se rencontrent donc et sont également inclinées sur Om_1 , de sorte que la normale m_1K à la surface (m_1) est une parallèle à Op .

Cherchons donc à déterminer cette normale.

Pour cela considérons le triangle Omm_1 . Ce triangle est par construction rectangle et isocèle. En sorte que pour toutes les positions qu'il peut prendre lorsque le point m se déplace arbitrairement sur l'ellipsoïde, les angles m et m_1 de ce triangle sont des figures qui se déplacent sans changer de forme.

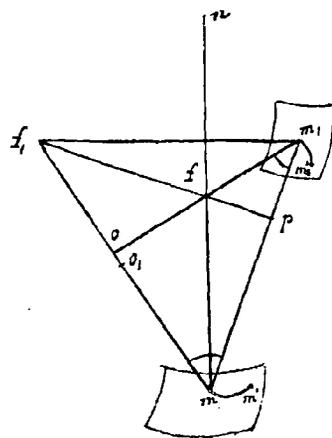
Occupons nous d'abord de l'angle m , et attribuant à son sommet un déplacement infiniment petit déterminé mm' sur l'ellipsoïde, cherchons pour ce déplacement particulier la position du foyer du plan Omm_1 . Ce foyer se trouve d'abord sur la normale mn à l'ellipsoïde qui est normale au déplacement mm' du point m quel que soit ce déplacement.

D'autre part le côté mo passant constamment par le point fixe O , il y a un point o_1 de cette droite qui vient en O pendant le déplacement : Le foyer doit se trouver également sur la normale au déplacement de ce point, c'est-à-dire sur la droite om_1 perpendiculaire à Om . Il est donc en f à l'intersection de Om_1 avec la normale à l'ellipsoïde.

Mais alors, d'après un résultat connu, la perpendiculaire fp abaissée de f sur le côté mm_1 , de l'angle m est normale

à la surface réglée qu'engendre cette droite.

Considérons actuellement l'angle invariable m , dont le plan



coïncide constamment avec le plan de l'angle précédent, et dont le déplacement, tout en étant lié à celui de l'angle m , en diffère cependant puisque le triangle om_1 , n'est pas invariable de grandeur.

Cherchons le foyer du plan $om_1 m_1$, pour le déplacement de l'angle m_1 .

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour l'angle m , on reconnaîtra que ce foyer doit se trouver sur la perpendiculaire mo à om_1 , et comme le côté $m_1 m$ de l'angle m_1 engendre la même surface réglée que le côté mm_1 de l'angle m avec lequel il coïncide d'une façon constante en tant que droite indéfinie, ce foyer se trouvera aussi sur la normale I_p à cette surface. Il sera donc en I_1 à l'intersection des deux droites I_p et mo et par suite $I_1 m_1$ sera normal à la trajectoire $m_1 m_2$ du point m_1 .

Mais d'après les constructions auxquelles nous avons été conduits les positions des points I et I_1 sont indépendantes de la trajectoire mm_2 attribuée au point m sur l'ellipsoïde et par conséquent aussi de la trajectoire $m_1 m_2$ qui en résulte pour le point m_1 .

Donc la droite $I_1 m_1$, normale à toutes les courbes tracées par le point m_1 sur la surface (m_1) est normale à cette surface. D'ailleurs les droites $m_1 o$ et $I_1 p$ étant deux hauteurs du triangle $m I_1 m_1$, $m I$ en sera la troisième hauteur et par conséquent la normale $I_1 m_1$ est perpendiculaire à mn .

Ainsi la droite OI qui donne sur le plan P le point I de la surface de l'onde s'obtient en menant par O dans le plan omn une perpendiculaire à la normale à l'ellipsoïde (!)

240 Nouvelle définition de la surface de l'onde.

De cette construction résulte une nouvelle définition de la surface de l'onde.

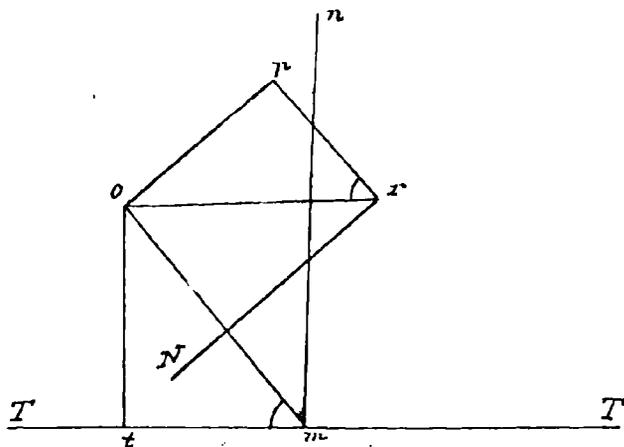
Reprenons en effet la fig. 2 et abaissons du centre O la perpendiculaire ot sur le plan tangent T à l'ellipsoïde en m . Ce plan étant debout par rapport au tableau, la droite ot est dans le plan du tableau et l'on a par les triangles rectangles semblables opt , otm

$$\frac{ot}{om} = \frac{op}{or}$$

$$\text{D'où} \quad ot \cdot or = om \cdot op = K^2$$

(1) Il est facile de reconnaître que la surface auxiliaire (m_1) est encore une surface de l'onde.

En peut donc dire qu'on obtient un point de la surface de l'onde en menant du centre de l'ellipsoïde une parallèle à la projection orthogonale du rayon OM sur le plan tangent en M et en portant sur cette droite une longueur OT inversement proportionnelle à la distance du centre à ce plan tangent.



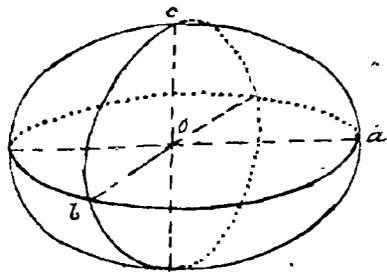
Lorsque le point de la surface de l'onde est obtenu par cette construction, le plan tangent à cette surface s'obtient en menant par ce point T le plan parallèle à OM et perpendiculaire au plan OMT : la normale est la perpendiculaire TN menée par T à OM .

Remarquons que dans cette définition comme dans la première le sens dans lequel les longueurs Op et OT doivent être portées à partir du point O n'a pas besoin d'être spécifié : la construction fournit ainsi pour un même point de l'el-

lipsoïde deux plans tangents ou deux points de la surface de l'onde symétriques par rapport à son centre.

(241) Sections de la surface de l'onde par des plans principaux.

Nous avons vu que par simple raison de symétrie la surface de l'onde devait admettre même centre et mêmes plans principaux que l'ellipsoïde. Il est facile de reconnaître la nature des sections de la surface de l'onde par ces plans principaux.



Nous aurons recours pour cette étude à la seconde définition de la surface. Soient par ordre décroissant de grandeur a, b, c les trois axes

de l'ellipsoïde, Ox, Oy et Oz leurs directions.

326.

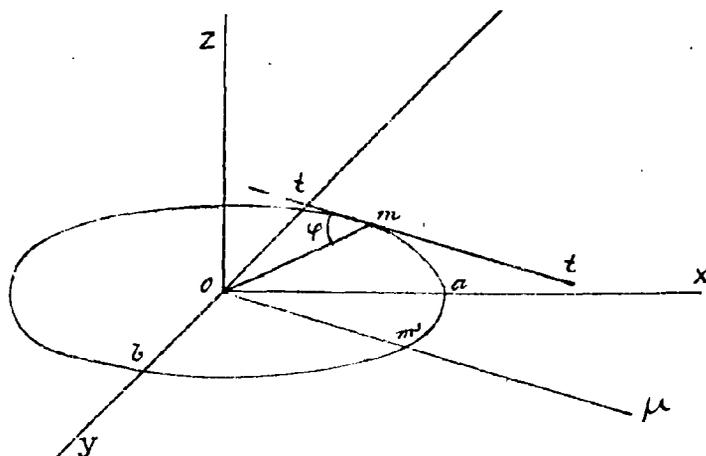
Cherchons les points de la surface de l'onde situés sur le plan OaB par exemple. Nous trouvons d'abord une infinité de points correspondant au point C , puisque la direction de la projection OC sur le plan tangent en C est indéterminée.

Ces points appartiennent à un cercle de centre O et de rayon $\frac{\kappa^2}{c}$.

Mais on a aussi dans ce plan d'autres points de la surface résultant de la considération des points de l'ellipsoïde situés sur la section principale OaB . Ces points s'obtiendront en prenant un point m de cette section, abaissant du centre la perpendiculaire Ot sur la tangente à l'ellipse m et portant sur une parallèle à mt menée par O une longueur $O\mu$ telle

$$O\mu = \frac{\kappa^2}{ot}$$

que
Soit m' le point de rencontre de $O\mu$ avec l'ellipse, les directions Om, Om' étant conjuguées dans cette courbe, si l'on désigne par φ l'angle qu'elles font entre elles, on a:
 $Om \cdot Om' \sin \varphi = ab$



et comme

$$Ot = Om \sin \varphi$$

$$Om' \cdot Ot = ab$$

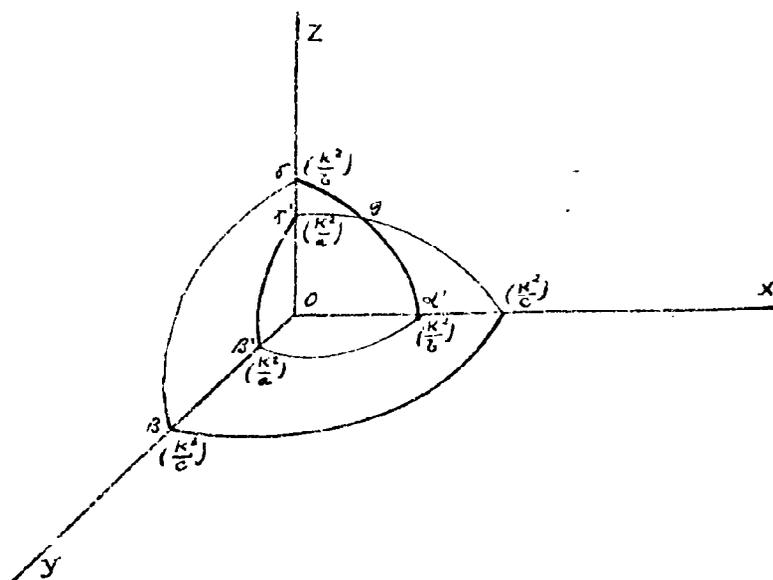
Comparant cette relation avec la valeur de $O\mu$ précédemment écrite on en conclut

$$O\kappa^2 = \frac{\kappa^2}{ab} \cdot Om'$$

Le point μ décrit donc une ellipse homothétique à la section principale OaB de l'ellipsoïde et les axes de cette ellipse égaux à $\frac{\kappa^2}{a}, \frac{\kappa^2}{b}$ sont inverses de ceux de la section de l'ellipsoïde qui leur sont perpendiculaires.

On arrive dans les trois plans principaux à des conclusions entièrement analogues. Seulement d'après les hypothèses admises sur les grandeurs relatives de a, b, c , on reconnaît que sur le plan perpendiculaire à l'axe moyen Ob la circonférence et l'ellipse se rencontrent

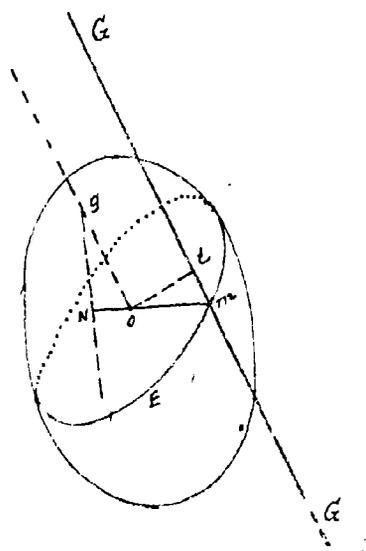
en quatre points réels tels que g tandis que la circonférence est tout entière intérieure à l'ellipse sur le plan perpendiculaire au grand axe et l'ellipse tout entière intérieure à la circonférence sur le plan perpendiculaire au petit axe.



Trace le contour $g\alpha'\beta\gamma g$: Ces deux nappes se rejoignent aux points tels que g à la façon dont se rejoignent en leur sommet commun les deux nappes d'un cône.

242, Points singuliers.

Considérons l'un des deux cylindres de révolution que l'on peut circonscrire à l'ellipsoïde et appliquons la seconde définition de la surface de l'onde à la construction des points de cette surface correspondants aux points de l'ellipsoïde situés sur la courbe de contact E avec le cylindre.



Puisque le cylindre est de révolution, le rayon OM qui va du centre O à l'un des points de E se projette sur le plan tangent

en m à l'ellipsoïde, qui est aussi le plan tangent au cylindre, suivant la gèneiatrice mG de ce cylindre. On a donc à porter sur l'axe du cylindre une longueur Og , égale au facteur K^2 près, à l'inverse de la distance Om du point O à la gèneiatrice G et comme cette distance est constante, on obtient pour tous les points de E le même point g de la surface de l'onde.

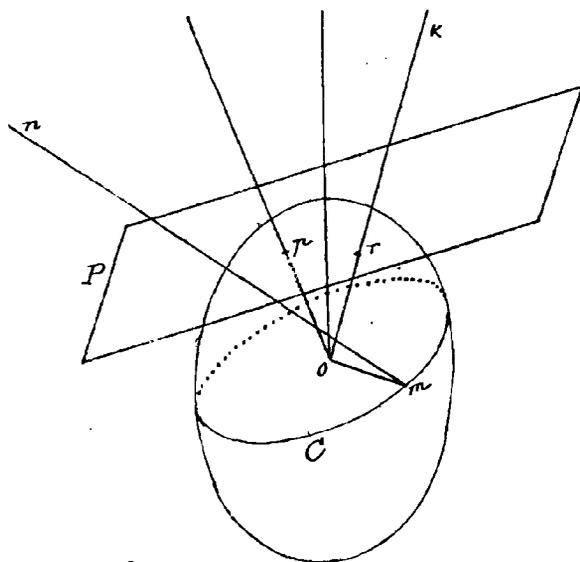
Cherchons actuellement le plan tangent en ce point.

Pour cela nous déterminerons la normale en g pour chacune des constructions qui ont fourni ce point : les normales ainsi obtenues seront d'après ce qu'on a vu les perpendiculaires gN abaissées de g sur les droites telles que Om . Ces normales forment donc un cône du second degré dont la base est le cercle lieu de N , c'est-à-dire l'intersection du plan diamétral de la courbe E avec la sphère décrite sur Og comme diamètre. Les plans tangents à la surface de l'onde enveloppent le cône supplémentaire qui est du second degré également.

Il est facile de reconnaître que les quatre points singuliers ainsi obtenus sont précisément les quatre points doubles g de la trace de la surface sur le plan principal ZOX .

243. Plans tangents singuliers.

Preons maintenant l'une des sections diamétrales circulaires C de l'ellipsoïde et cherchons par la première définition de la surface de l'onde les points de la surface qui correspondent aux points de cette section de l'ellipsoïde.



Chaque diamètre Om de cette section étant un axe de la section, pour effectuer la construction relativement au point m on aura à porter sur une perpendiculaire au plan de la section une longueur Op égale à $\frac{K^2}{Om}$ et à mener par ce point p un plan P parallèle au plan C .

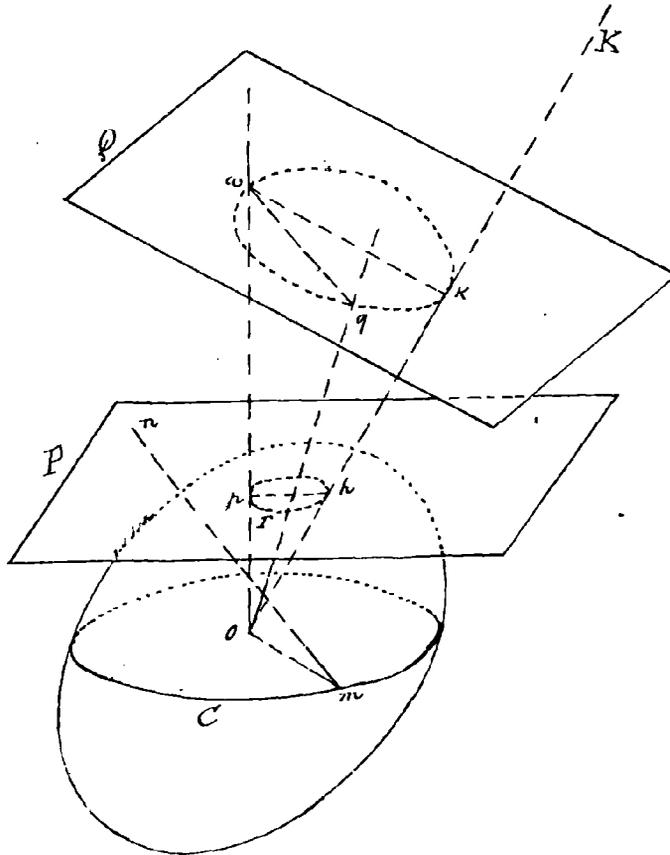
Comme les rayons Om sont tous égaux, on aura ainsi un même plan tangent à la surface de l'onde

pour tous les points m du cercle.

Pour obtenir le point de contact r relatif au point m , on devra mener par le centre O la perpendiculaire Or à la normale en m à l'ellipsoïde et prendre sa trace r sur le plan P .

Mais les normales à l'ellipsoïde aux différents points m de la section circulaire C sont aussi normales au cylindre circonscrit à l'ellipsoïde le long de cette section. Ces droites sont donc parallèles à un plan Q perpendiculaire à l'axe OK de ce cylindre, c'est-à-dire au diamètre conjugué du plan C dans l'ellipsoïde, et de plus, se projetant sur le plan C suivant les rayons Om du cercle elles rencontrent toutes la perpendiculaire Op à ce plan.

Coupons la figure par un plan Q perpendiculaire à l'axe OK du cylindre et soient q et w les points où Or et Op rencontrent ce plan. D'après ce qui vient d'être dit wq est une parallèle à la normale



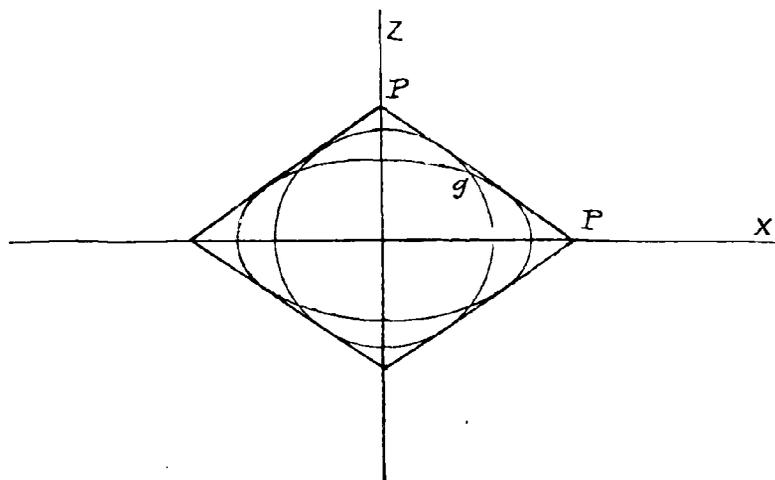
mn et par suite wq étant droit le lieu du point q est un cercle trace sur le plan Q de la sphère décrite sur ow comme diamètre.

Les points de contact r appartiennent donc à un cône du second degré de sommet O ayant dans le plan Q une base circulaire.

Mais si nous considérons le plan OWK qui renferme la droite OW perpendiculaire au plan P et la droite OK perpendiculaire au plan Q , il est clair que par rapport

au cône et au système des deux plans P et Q ce plan est un plan de symétrie et l'on voit par la considération des triangles rectangles

semblables $OK\omega$, opk situés dans ce plan que les plans P et Q sont antiparallèles par rapport au cône. Le lieu des points de contact r est donc un cercle.



A chaque section diamétrale circulaire de l'ellipsoïde correspondent deux plans tangents singuliers, ces plans sont perpendiculaires au plan principal XOZ et ont évidemment pour traces sur ce plan les tangentes commune à l'ellipse et au cercle qui forment la section principale correspondante de la surface de l'onde.

Les points singuliers dits points coniques donnent lieu au phénomène désigné en optique sous le nom de réfraction conique; un phénomène optique différent - celui de la réfraction cylindrique - se rattache au contraire à la considération des plans tangents singuliers tels que le plan P que nous venons de définir.

Surfaces topographiques.

On désigne sous le nom de Surfaces topographiques des surfaces que l'on est amené à considérer pour l'étude et la représentation du relief du sol. Ces surfaces peuvent se définir géométriquement par la condition d'avoir toujours un point et un seul sur toute droite parallèle à une direction donnée que l'on peut supposer verticale.

Il résulte de cette propriété caractéristique qu'une surface topographique doit présenter une nappe unique et continue s'étendant à l'infini dans toutes les directions autour de la verticale d'un de ses points.

Rapportée à des axes rectangulaires dont l'un OZ serait vertical, une pareille surface aurait une équation de la forme

$$z = f(x, y)$$

la fonction f n'étant susceptible pour tout système de valeurs attribuées à x et à y que d'une détermination unique et par conséquent toujours réelle.

Sans entrer dans l'étude des surfaces topographiques au point de vue spécial des applications pratiques auxquelles cette étude peut conduire, nous nous bornerons à indiquer ici quelques unes de leurs propriétés qui se rattachent directement aux théories générales exposées dans ce Cours et qui en constituent une application intéressante.

Lignes de niveau : Sommets et bas fonds : Omb.

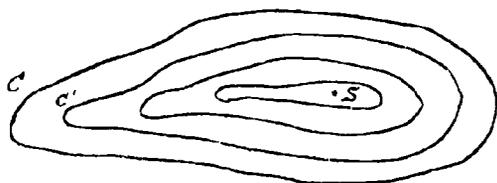
245. Si l'on coupe une surface topographique par un plan horizontal on obtient comme section une ligne continue qui est dite ligne de niveau de la surface parce que tous ses points sont à la même cote, autrement dit au même niveau au-dessus d'un plan horizontal de comparaison.

Il passe une ligne de niveau par chaque point de la surface.

Ces lignes peuvent être de forme quelconque, mais si le plan horizontal de section se déplace parallèlement à lui-même en s'élevant ou s'abaissant, la série des lignes de niveau que l'on détermine ainsi

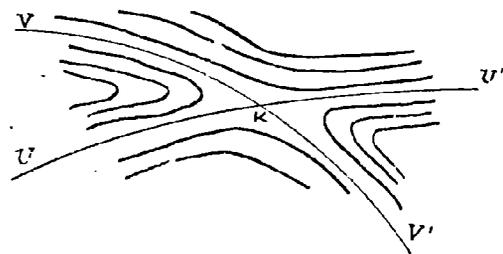
présente cette particularité que deux courbes différentes ne doivent jamais se rencontrer.

Si donc, partant d'une ligne de niveau fermée telle que C , on déplace le plan de section dans un sens convenable, on obtiendra une nouvelle ligne de niveau fermée C' intérieure à la première et ainsi de suite, de sorte que finalement pour une position du plan d'écoulement, la section se réduira à un point. En ce point S le plan tangent à la surface topographique sera horizontal, et cette



surface sera convexe puisque dans la région voisine elle se trouve entièrement située d'un même côté de son plan tangent. Le point S sera donc selon les cas plus haut ou plus bas que tous les points infiniment voisins de la surface; ce sera un sommet ou un bas fond.

Mais une surface topographique n'est pas généralement convexe en toutes ses parties et elle peut présenter des plans tangents horizontaux dans des régions à courbures opposées. Dans ce cas le plan tangent coupe la surface suivant une ligne de



K les deux branches UV' , VV' de la ligne de niveau de ce point.

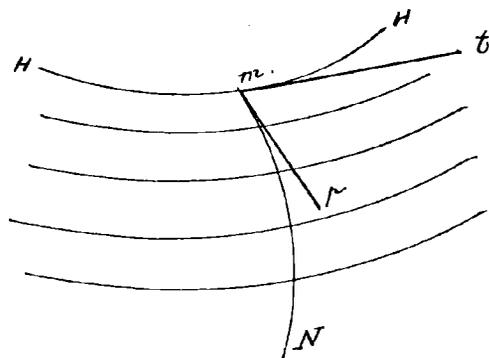
niveau qui doit avoir au point considéré K un point double. Les lignes de niveau voisines affecteront donc des formes telles que celles indiquées sur la figure, se courbant à l'intérieur des angles que forment au point

Un pareil point est un point de hauteur maximum ou minimum pour les régions infiniment voisines de la surface, selon qu'on se déplace dans l'angle $V'KV$, $V'KV'$ ou dans l'angle $V'KV$, $V'KV'$ des deux branches $VU'VV'$; on lui donne le nom de col.

Ces diverses dénominations de sommets, de bas-fonds et de cols s'expliquent d'ailleurs très-naturellement par les applications topographiques de cette étude. Un col par exemple dans le langage usuel est un point de hauteur minimum pour l'arête d'une chaîne de montagnes et de hauteur maximum pour le chemin qui la traverse.

246. Lignes de plus grande pente.

Si l'on considère les diverses lignes que l'on peut tracer sur une surface topographique autour d'un de ses points m , leurs pentés seront mesurées par l'angle que font leurs tangentes avec le plan horizontal, de sorte que les lignes qui auront la plus grande pente seront celles qui seront tangentes à la droite de plus grande pente mp du plan tangent.



Une ligne tracée sur une surface topographique et satisfaisant à la condition d'avoir en chacun de ses points la plus grande pente possible est une ligne de plus grande pente de la surface.

On voit qu'une pareille ligne est sur cette surface une trajectoire orthogonale des lignes de niveau et cette propriété se conserve en projection horizontale.

Il passe donc en général une ligne de plus grande pente et une seule par chaque point de la surface.

La tangente à la ligne de niveau H en un point $m(x, y)$ étant déterminée par

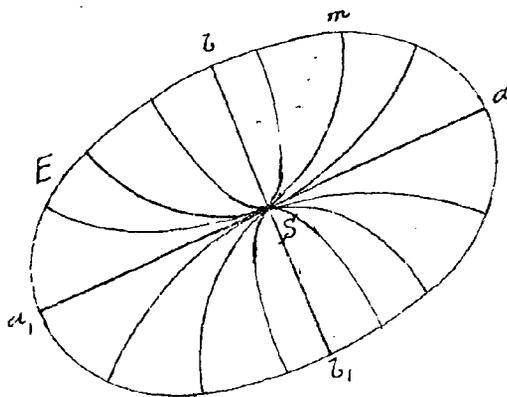
de plus grande pente.

Soient SA et SB les directions des axes de l'indicatrice au point S et m un point quelconque infiniment voisin de S , pris en dehors des axes SA et SB .

Considérons la ligne de plus grande pente P qui passe en ce point ainsi que la ligne de niveau E qu'elle traverse. Cette ligne de niveau, pour la détermination que nous avons en vue peut être confondue comme on vient de le dire avec une ellipse semblable à l'indicatrice.

En pénétrant normalement à l'intérieur de cette ellipse, la ligne de plus grande pente entrera forcément dans le secteur mSA formé par le diamètre Sm et le grand axe SA . Elle rencontrera donc une nouvelle ellipse de niveau E' intérieure à la première en un point m' où son inclinaison sur SA sera moindre qu'en m , puisque sur les deux ellipses, à cause de l'homothétie les normales aux points m et m' pris sur un même diamètre sont parallèles, tandis que la normale en m' est plus rapprochée de SA que celle en m .

D'ailleurs comme nous l'avons vu plus haut, au fur et à mesure que le niveau se rapproche de celui du point S , les dimensions des courbes de niveau doivent se réduire de plus en plus et tendre vers zéro à la limite : de sorte que le point m' tendant vers S , la sécante Sm' tend vers une tangente à la courbe, normale par conséquent à l'ellipse à laquelle appartient son point de contact. Mais pour qu'un diamètre tel que Sm' puisse devenir normal aux ellipses de la série, il faut que sa direction finale soit celle du grand axe ou du petit axe, et dans le cas actuel d'après les remarques précédentes, le petit axe doit être écarté.



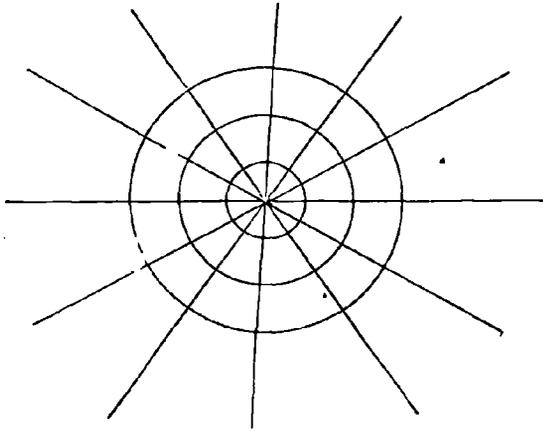
Ainsi toutes les lignes de plus grande pente qui viennent converger en un sommet (ou bas-fond) S , sont tangentes en ce point au grand axe de l'indicatrice.

Il n'y a d'exception que pour la ligne de plus grande pente déterminée par une position du point m située à l'une des extrémités b ou b_1 du petit axe de l'ellipse E ; et cette ligne de plus grande

pende coïncide avec le petit axe bb_1 de cette ellipse. Mais comme au fur et à mesure que le point m s'éloigne de a ou a_1 , pour se rapprocher de b ou b_1 , la ligne de plus grande pente concupondante présente au point S une courbure plus prononcée et un rayon de courbure de plus en plus voisin de Zéro, on est amené par continuité à regarder bb_1 comme formé de deux lignes de plus grande pente distinctes bS, b_1S rebrousant toutes deux en S de façon à s'appliquer ensuite sur elles mêmes. ⁽¹⁾

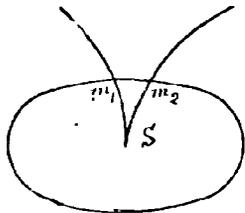
Les considérations précédentes cessent d'être applicables dans le

cas des ombilics pour lesquels l'indicatrice est un cercle. Les trajectoires orthogonales d'une série de cercles concentriques étant les diamètres de ces cercles, on voit que les différentes lignes de plus grande pente qui aboutissent en un pareil point doivent avoir autour de ce point toutes les directions possibles.



2° Cols — La surface qui est à courbures opposées traverse son plan tangent et l'indicatrice étant hyperbolique, les lignes de niveau dans leurs parties infiniment voisines du point K peuvent être confondues

(1) Ces courbes particulières cessent d'être rectilignes dès qu'on s'éloigne assez du point S pour que les lignes de niveau cessent de pouvoir être confondues avec des ellipses homothétiques. Mais il est à remarquer qu'elles ne peuvent se subdiviser



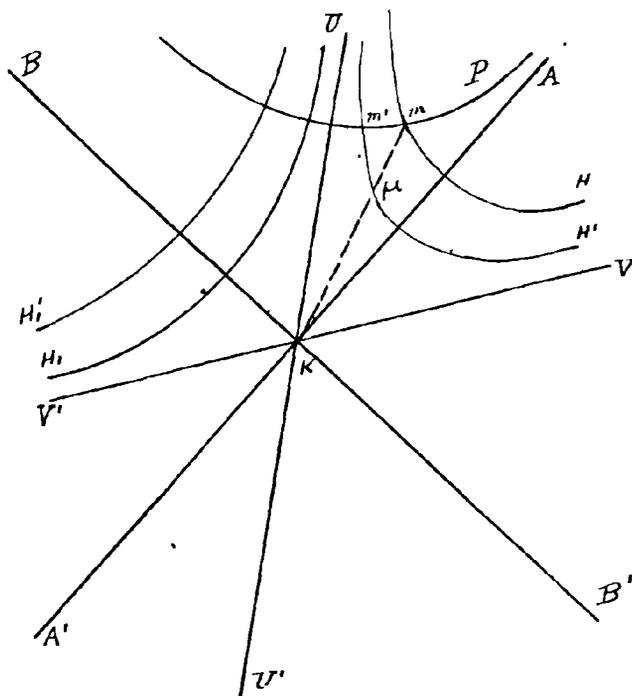
en deux branches comme cela a lieu dans un rebroussement en général. En effet ce partage en deux branches ne pourrait s'effectuer qu'en S , ce point étant le seul par lequel plusieurs lignes de plus grande pente peuvent passer, dès lors sur une ellipse de niveau infiniment voisine, il existerait deux positions m_1, m_2

voisins de b mais non confondues avec lui pour lesquelles la ligne de plus grande pente arriverait en S normalement à Sa , ce qui est impossible.

avec des hyperboles homothétiques et concentriques c'est-à-dire ayant les mêmes asymptotes, mais situées dans l'un ou l'autre des angles formés par ces asymptotes selon que la section est faite par un plan horizontal passant au-dessous ou au-dessus du point K .

Cherchons à nous rendre compte de la disposition des lignes de plus grande pente en un pareil point.

Soit m un point infiniment voisin de K et H l'hyperbole de niveau qui passe en ce point. La ligne de plus grande pente P du



point m qui traverse normalement l'hyperbole H rencontre l'hyperbole homothétique H' dont le niveau est plus voisin de celui de K en un point m' où cette hyperbole doit avoir une direction plus voisine de celle de l'asymptote KV qu'au point m où sa direction est parallèle à celle de l'hyperbole H en m . Donc la ligne de plus grande pente a une direction qui s'approche de plus en plus de la perpendiculaire à KV , et lorsque le plan horizontal devient celui du

point K elle franchit normalement cette asymptote à partir de ce moment, ce sont les hyperboles de niveau H_1 et H_1' conjuguées des premières qu'elle rencontre et qu'elle traverse à angle droit.

D'ailleurs par un raisonnement inverse de celui que nous venons de faire on reconnaît que lorsque le plan sécant horizontal s'éloigne du niveau K dans un sens ou dans l'autre, la ligne P rencontre les hyperboles en des points où leur direction est de plus en plus rapprochée de la perpendiculaire à leurs axes transverses respectifs, donc la direction de la ligne de plus grande pente tend à se rapprocher de plus en plus des directions KA et KB .

Ainsi les lignes de plus grande pente ne convergent pas aux cols comme elles le font aux bas-fonds ou sommets.

Il n'y a d'exception au raisonnement précédent que pour les lignes de plus grande pente déterminées par un point pris sur les axes KA ou KB eux-mêmes. Comme trajectoires orthogonales des hyperboles indicatrices, ces lignes seraient précisément les deux axes, mais elles cessent de se confondre avec eux dès qu'on s'éloigne assez du point K pour que les hyperboles ne puissent plus être confondues avec les lignes de niveau véritables.

Il ne passe donc en définitive aux cols d'une surface topographique que deux lignes de plus grande pente et ces deux lignes qui sont rectangulaires, ont pour direction en ces points les axes de l'indicatrice de la surface. Seulement par raison de continuité, on serait amené à considérer ces deux lignes comme résultant de la superposition de quatre lignes BKA , $A'KB'$, $B'KA'$, $A'KB$ présentant chacune au point K un point anguleux à tangentes rectangulaires.

(248) Vérification analytique des résultats précédents.

Ces différents résultats sont d'ailleurs aisément vérifiés par le calcul.

Aux sommets ou bas-fonds, les ellipses semblables aux indicatrices ont pour équation générale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2$$

les lignes de plus grande pente qui sont leurs trajectoires orthogonales ont donc pour équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{Ky}{x}$$

en désignant par K le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ des carrés des axes

Cette équation s'intègre immédiatement et donne en désignant par c une constante arbitraire

$$ly = Klx + lc$$

ou

$$y = cx^k$$

On reconnaît d'abord, le rapport K étant positif, que toutes

les courbes passent par l'origine. De plus a étant supposé le grand axe, k est supérieur à l'unité, les courbes seront donc tangentes à l'axe des x , puisqu'on aura pour l'une quelconque d'entre elles

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} cx^{k-1} = 0$$

Il n'y aura d'exception que pour la courbe

$$x=0$$

obtenue en donnant à la constante arbitraire C une valeur infinie. Pour les ombilics où $k=1$, les trajectoires orthogonales sont les droites

$$y=cx$$

et ont à l'origine toutes les directions possibles.

Enfin dans le cas des cols, le calcul précédent s'applique encore, mais à la condition de changer b^2 en $-b^2$, et d'attribuer par conséquent à k un signe négatif.

Les trajectoires orthogonales deviennent dès lors

$$y=cx^{-k}$$

ou

$$x^k y = c$$

Ces courbes ne passent pas par l'origine, sauf pour une valeur nulle de la constante C et l'on obtient dans ce dernier cas deux courbes rectangulaires respectivement tangentes aux axes de l'indicatrice.

(249) Lignes de faîtes et de Thalwegs.

On donne en topographie les noms de lignes de faîtes et de lignes de Thalwegs à des lignes très-importantes dont les premières sont les crêtes des chaînes de montagnes et séparent leurs versants et dont les secondes forment le fond des vallées et le lit des ruisseaux ou des rivières qui les suivent. Ces lignes reçoivent aussi quelquefois les noms de lignes de partage et de lignes de réunion des eaux qui s'expliquent en raison des définitions mêmes que nous venons d'en donner.

La nature et le caractère des lignes de faîtes et de thalwegs est très-facile à concevoir, mais leur détermination mathématique est assez délicate et n'a pas été obtenue jusqu'à présent d'une façon entièrement satisfaisante. Donnons nous à faire remarquer qu'au point de vue géométrique ces lignes doivent avoir des propriétés identiques. Il suffit en effet de renverser la surface en changeant le sens de l'axe des Z comme nous l'avons déjà fait à propos des bas-fonds et des sommets pour que les lignes de faîtes se changent en lignes de thalwegs et les lignes de thalwegs en lignes de faîtes.

— Fin du Cours. —

Geométrie infinitésimale.

Première partie.

Considérations générales.

Pages	
1	— Considérations générales sur la classification des sciences exactes.
3	— Définition de la continuité pour les grandeurs numériquement comparables.
4	— Limites : quantités infiniment petites.
5	— Fonctions : différents ordres d'infiniment petites.
6	— Rôle des infiniment petits en Analyse et principe fondamental de leur calcul.
7	— Application des considérations précédentes à la Géométrie.

Etude géométrique des lignes et des surfaces.

Etude des lignes.

12	— Généralités : Définition des lignes.
13	— Lignes considérées comme lieux géométriques.
13	— Lignes considérées comme trajectoires.
14	— Lignes droites et lignes courbes

Etude spéciales des courbes planes.

15	— Courbes planes considérées comme limites de polygones infinitésimaux inscrits : Définition de la longueur d'un arc de courbe.
----	---

Pages.	
16	— Éléments géométriques caractérisant la forme d'une courbe au voisinage de l'un de ses points.
17	— Éléments caractéristiques du premier ordre : tangente : normale.
18	— Remarques. 1 ^o Position de la courbe par rapport à sa tangente et à sa normale.
18	— 2 ^o Segment de sécante, compris entre la courbe et sa tangente
19	— 3 ^o Point de rencontre de deux tangentes ayant des points de contact infiniment voisins.
20	— Contact de deux courbes planes
21	— Contacts d'ordres supérieurs : courbes osculatrices et surosculatrices : cercle osculateur.
23	— Séries de courbes : enveloppes et enveloppées.
24	— Éléments caractéristiques du deuxième ordre. Courbure.
26	— Cercle de courbure : centre et rayon de courbure.
27	— Détermination de la courbure d'une courbe au moyen des éléments d'un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe.
28	— Identité du cercle de courbure avec le cercle osculateur.
28	— Détermination du rayon de courbure au moyen d'une autre expression infinitésimale.
29	— Le lieu des centres de courbure d'une courbe est l'enveloppe de ses normales.
31	— Développées et développantes : équation de courbure d'une courbe.
32	— Relation entre les équations de courbure d'une courbe et de sa développée.
34	— Développées successives d'une courbe plane.
— Points singuliers et points remarquables des courbes planes.	
35	— Distinction entre les points singuliers et les points remarquables.
37	— Points doubles : points isolés : points de rebroussement.
37	— Caractère distinctif des rebroussements de première et de seconde espèce.

Pages	
39	Points anguleux : points d'arrêt.
4	Points d'inflexion.
41	Sommette.
42	Remarque sur la disposition caractéristique des points infiniment voisins d'un point singulier ou remarquable.
43	Application des théories précédentes à la détermination des éléments caractéristiques de quelques courbes planes.
44	Rayon de courbure d'une parabole en l'un de ses points
45	Rayon de courbure des sections coniques.
46	Courbes d'œuvres.
<hr/> <h2> Géométrie cinématique plane. </h2> <hr/>	
47	Définition de la géométrie cinématique.
	Etude du déplacement d'une figure plane de forme invariable mobile sur son plan.
48	Nombre de conditions nécessaires pour fixer sur son plan la position d'une figure plane de forme donnée.
4	Déplacements d'ensemble : translation et rotation.
49	déplacement d'ensemble le plus général : centre de rotation.
50	Déplacement infiniment petit : centre instantané de rotation.
51	Théorème sur les normales aux trajectoires et les enveloppes des courbes mobiles.
52	Applications diverses.
54	Déplacement continu d'une figure de forme invariable mobile sur son plan.
54-55	Définition précise du roulement et du glissement d'une courbe mobile sur une courbe fixe : roulement simple : glissement simple : glissement simple : roulement mêlé de glissement.

Pages.	
54-55	Le déplacement le plus général d'une figure invariable peut s'obtenir par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.
56	Cas particulier du mouvement épicycloïdal et du mouvement cycloïdal.
57	Recherche des courbes du roulement dans quelques cas particuliers.
58	Déplacement elliptique.
58	Déplacement réciproque du précédent.
60	Détermination des trajectoires des points mobiles et des enveloppes des courbes mobiles lorsque les courbes du roulement sont connues.
"	1° Tangentes aux trajectoires des points mobiles. Points où les courbes mobiles touchent leurs enveloppes.
62	2° Courbure des trajectoires des points et des enveloppes des courbes mobiles.
63	Construction de Savary.
65	Conséquences de la relation et de la construction précédentes.
"	Cercle de roulement : Circonférence des inflexions.
67	Évaluation du glissement d'une courbe mobile sur son enveloppe.
	Applications.
68	a. Déplacement épicycloïdal.
69	b. Chainette.
71	c. Génération des développantes d'une courbe par le roulement d'une tangente mobile sur cette courbe considérée comme base.
72	Points singuliers et points remarquables des développantes.
75	Courbes parallèles à l'ellipse.
76	d. Application au déplacement d'une figure de forme variable présentant des éléments de forme invariable.
77	Détermination des centres de courbure de quelques courbes.
	Déplacement sur son plan d'une figure plane qui reste semblable à elle-même.
83	Centre instantané de rotation et de similitude.

83 — Point de contact d'une courbe mobile avec son enveloppe.

Etude spéciale des courbes gauches.

88 — Polygone infinitésimal inscrit dans une courbe gauche.
Longueur d'un arc de courbe.

" — Eléments caractéristiques du premier ordre : tangente ; plan normal.

89 — Contacts de divers ordres de courbes gauches.

" — Eléments caractéristiques du second ordre. Plan osculateur, courbure, axe de courbure.

90 — Distance d'un point infiniment voisin pris sur la courbe au plan osculateur de cette courbe.

91 — Autres définitions du plan osculateur.

92 — Cône directeur d'une courbe gauche.

" — Intersection du plan osculateur à une courbe gauche avec sa position infiniment voisine.

93 — Cercle osculateur et courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points.

95 — Torsion ou seconde courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points.

96 — Détermination de la torsion au moyen d'éléments infiniment petits fournis par le polygone infinitésimal inscrit dans la courbe.

97 — Plus courte distance des tangentes en deux points infiniment voisins. Théorème de Bouquet.

98 — Réciproque du précédent.

99 — L'axe de courbure d'une courbe gauche en l'un de ses points est la limite de l'intersection du plan normal en ce point avec le plan normal infiniment voisin.

100 — Elément caractéristique du troisième ordre. Sphère osculatrice.

Pages	
100	— Projections diverses d'une courbe gauche.
102	— Applications de la théorie générale des courbes gauches à l'étude de l'hélice.
"	— 1 ^o Hélice générale —
"	— Définition cinématique de l'hélice.
103	— Développement de l'hélice.
104	— Plan osculateur de l'hélice
"	— 2 ^o Hélice ordinaire. —
106	— Inflexion caractéristique et axes im-
"	— portante de l'hélice ordinaire.
"	— Rayon de courbure de l'hélice.
107	— Rayon de torsion de l'hélice.
108	— Projection orthogonale de l'hélice sur
109	— un plan parallèle à l'axe du cylindre.
111	— Perspective cavalière de l'hélice ;
	— Ombre d'une hélice sur le plan de
	— base du cylindre.

Etude des surfaces.

113	— Généralités.
"	— Définition des surfaces par le déplacement continu et la défor-
"	— mation continue d'une ligne génératrice.
114	— Surfaces considérées comme lieux géométriques.
115	— Droites tangentes à une surface.
"	—
"	— Eléments caractéristiques du premier ordre d'une sur-
"	— face en l'un de ses points. Plan tangent ; normales.
117	— Surfaces tangentes entre elles : nature de la courbe d'inter-
"	— section de deux surfaces tangentes entre elles en un point.
119	— Surfaces enveloppes et surfaces enveloppées. Caractéristiques.
121	— Quelques applications de la théorie des surfaces enveloppes.
"	— 1 ^o Tangente à la courbe d'intersection de deux
"	— surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.
123	— 2 ^o Détermination de la courbe d'ombre propre
	— ou de contour apparent d'une surface.

Surfaces réglées.

125	—	Définition et génération des surfaces réglées.
127	—	Variation du plan tangent à une surface réglée le long d'une génératrice. Formule de Chasles : paramètre de distribution : point central.
129	—	Point représentatif.
131	—	Conséquence importante de la formule de Chasles.
"	—	Ligne de striction.
132	—	Cône directeur
"	—	Raccordement de deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune.
133	—	Paraboloïdes et hyperboloïdes de raccordement d'une surface réglée le long d'une de ses génératrices.
134	—	Paraboloïde des normales.
136	—	Hyperboloïde osculateur.

Surfaces développables.

137	—	Définition et génération des surfaces développables.
139	—	Arête de rebroussement.
141	—	Développement des surfaces développables.
142	—	Transformation des figures tracées sur la développable par l'effet du développement : modification des angles infiniment petits.
144	—	Modification de la courbure pendant le développement : rayon de courbure de la transformée.
147	—	Conséquence de la relation précédente : lignes géodésiques tracées sur une développable.
"	—	Développement approximatif d'une portion de développable.
148	—	Complément à l'étude des surfaces gauches et des courbes gauches.
"	—	Développable asymptote d'une surface gauche.
"	—	Développable enveloppe des plans normaux à une courbe gauche.
150	—	Divers modes de génération des développables.
151	—	Hélicoïde développable

Jugé

- 225 — b. Surfaces parallèles.
 227 — c. Surfaces qui se coupent sous un angle constant le long de leur courbe d'intersection.

Seconde partie.

Application de la théorie générale des surfaces à la détermination des courbes d'ombre et à l'étude géométrique de quelques surfaces spéciales.

Théorie des ombres.

- 229 — Tangente à la courbe d'ombre propre.
 230 — Points virtuels et points réels : points utiles.
 231 — Points de passage.
 237 — Courbe d'ombre portée par une surface sur elle-même.
 239 — Tangente à la courbe d'ombre portée en ses points de rencontre avec une branche de la courbe d'ombre propre autre que celle dont elle est la projection.
 240 — Application à la construction des lignes d'ombre propre sur les surfaces de révolution.
 243 — Détermination de la tangente à la courbe d'ombre.
 245 — Ombre propre du tore éclairé par des rayons parallèles.

Etude détaillée de quelques surfaces spéciales.

A. Surfaces développables.

- 246 — 1^o Surfaces développables définies par deux surfaces directrices.
- 247 — 2^o ————— 2^o ————— Deux courbes directrices.
- " ————— Développable circonscrite à deux coniques.
- 251 — 3^o Surfaces développables définies par un cône directeur de révolution (surface d'égalité pente).
- " ————— Remarques générales.
- 253 ————— Surface d'égalité pente ayant pour directrice une ellipse horizontale.
- 257 ————— Sections planes de la surface d'égalité pente.
- 258 ————— Plan tangent parallèle à une droite donnée.
- 259 ————— Plan tangent par un point donné.

B. Surfaces gauches.

- 1^o Surfaces gauches admettant un plan directeur. —
- 260 ————— Remarques générales.
- " ————— a. ————— Paraboloïde hyperbolique.
- 261 ————— Construction d'une génératrice.
- " ————— Plan tangent en un point.
- 262 ————— Point de contact avec le paraboloïde d'un plan passant par une génératrice donnée.
- " ————— Plan tangent parallèle à un plan donné.
- " ————— Projections diverses d'une portion de paraboloïde.
- 264 ————— Emploi de paraboloïdes de raccordement pour la détermination du plan tangent en un point d'une surface gauche à plan directeur.

Pages.	
265	— b. Conoïde droit circonscrit à la sphère.
268	— Plan tangent en un point.
"	— Plan tangent passant par un point l'extérieur à la surface ou parallèle à une droite donnée: Ombre propre du conoïde.
269	— Plan tangent au conoïde parallèle à un plan donné.
"	— Paraboloïde osculateur.
270	— Ligne de striction.
"	— Génératrices singulières.
"	— c. Conoïde de Fluckler.
271	— Définitions diverses du conoïde.
276	— Section de la surface par un plan tangent.
278	— Génération cinématique du conoïde de Fluckler.
279	— Autres modes de génération du conoïde.
 2° Surfaces gauches admettant un cône directeur de révolution. 	
281	— Généralités.
282	— a - Hélicoïdes réglés.
285	— Plan tangent à l'hélicoïde réglé en un point donné.
286	— Développable asymptote de l'hélicoïde réglé.
"	— Construction du point où un plan mené par une génératrice touche l'hélicoïde réglé.
"	— Courbe de contact de l'hélicoïde réglé et d'un cylindre circonscrit.
287	— b - Surface de vis à filet triangulaire.
289	— Trace de la surface sur un plan horizontal.
290	— Plan tangent en un point de la surface.
291	— Contour apparent de la surface en projection sur un plan vertical.
292	— Dessin d'une vis à filet triangulaire.

293	_____	Courbe d'ombre propre sur la surface de vis à filet triangulaire.
294	_____	Tangente à la courbe d'ombre.
296	_____	Formes diverses de la projection de la courbe d'ombre.
300	_____	Construction des points de la courbe d'ombre situés sur une hélice de la surface.
301	_____ c _____	Surface de vis à filet carré. —
302	_____	Plan tangent en un point de la surface.
303	_____	Parabolôide osculateur à la surface : lignes asymptotiques.
"	_____	Courbe d'ombre propre sur la surface de vis à filet carré.
305	_____	Points limites de la courbe d'ombre.
306	_____	Dessin d'une vis à filet carré.

3° Surfaces gauches définies par trois directrices.

308	_____ a _____	Hypéroboloïde à une nappe.
309	_____	Construction d'une génératrice.
310	_____	Plan tangent en un point.
"	_____	Point de contact avec la surface d'un plan donné passant par une génératrice connue.
"	_____	Centre de la surface.
311	_____	Emploi d'hypéroboloïdes de raccordement pour la détermination du plan tangent à une surface gauche définie par trois directrices.
312	_____ b _____	Biais passé gauche. —
"	_____	Définition du biais passé gauche.
313	_____	Cône directeur de la surface.
"	_____	Plan tangent en un point de la surface.
315	_____	Contour apparent horizontal : génératrices singulières.

C. Surface de l'onde : optique géométrique.

316	—	a - Théorème de Malus et de Dupin.
319	—	Application du théorème de Malus et de Dupin à la construction de la normale à la surface podaire d'une surface donnée.
321	—	b - Surface de l'onde. Définition géométrique.
322	—	Détermination d'un point de la surface de l'onde.
324	—	Nouvelle définition de la surface de l'onde.
325	—	Sections de la surface de l'onde par ses plans principaux.
327	—	Points singuliers.
328	—	Plans tangents singuliers.

D. Surfaces topographiques.

331	—	Lignes de niveau : sommets et bas-fonds : cols.
333	—	Lignes de plus grande pente.
334	—	Dispositions particulières des lignes de plus grande pente au voisinage des points où le plan tangent à la surface est horizontal.
	—	Sommets et bas-fonds.
336	—	Cols.
338	—	Vérification analytique des résultats précédents.
339	—	Lignes de fautes et de Thalwegs.