ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori

Luigi Cremona *in Roma*	**Enrico Betti** *in Pisa*
Eugenio Beltrami *in Pavia*	**Felice Casorati** *in Pavia.*

SERIE II. - TOMO VIII.

(dal gennajo 1877 al dicembre 1877.)

MILANO.

G. BERNARDONI EDITORE-TIPOGRAFO.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO VIII.° (SERIE II.ª)

Indice.

ERRATA-CORRIGE.

Alla pag. 271 nella nota leggasi:

. . . . soluzioni:

$$n=2,\quad h=3,\quad r_i=1$$
$$n=5,\quad h=6,\quad r_i=2$$
$$n=8,\quad h=7,\quad r_i=3$$
$$n=17,\quad h=8,\quad r_i=6.$$

Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues.

(*Par* E. B. Christoffel, *à Strassburg.*)

Les belles recherches, que Mr. Hermite a publié dans le Journal de Mr. Borchardt (t. 79, p. 324) et dans le dernier cahier des Annales fondées par Clebsch (t. 10, p. 287) m'ont fait penser qu'il y aura peut-être quelque intérêt de présenter brièvement une suite de théorèmes sur un genre de questions, dont j'ai traité le cas le plus simple dans un ancien Mémoire (Journal de Mr. Borchardt, t. 55, p. 61) sur la méthode de Gauss pour l'intégration approchée numérique.

Ce qui suit se rattache encore à l'intégration numérique (prop. VII), mais d'un point de vue très-étendu; aussi l'un des exemples, que j'indiquerai à la fin de cette communication, fera voir qu'entre les fonctions, dont je vais démontrer l'existence et les principales propriétés, il y a des espèces, qui sont dignes d'être étudiées même sous un point de vue purement analytique.

Posons l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\lambda(x)\,dx}{u-x} = L(u),$$

le module de u surpassant l'unité, et $\lambda(x)$ désignant une fonction de x, soumise aux deux conditions:

A) d'admettre l'intégration entre les limites -1 et $+1$,

B) de rester réelle entre ces limites sans y changer de signe.

Ces conditions remplies, la fonction $\lambda(x)$ peut-être choisie arbitrairement. Mon ancien Mémoire suppose $\lambda(x)=1$.

Maintenant soit

$$\Pi_n(x)$$

une fonction entière de x, du degré n,

$$P_n(u)=\int_{-1}^{1}\frac{\Pi_n(u)-\Pi_n(x)}{u-x}\lambda(x)\,dx$$

$$X_n(u)=\int_{-1}^{1}\frac{\Pi_n(x)\lambda(x)\,dx}{u-x},$$

donc

$$\Pi_n(u)L(u)=P_n(u)+X_n(u).$$

Evidemment la fonction $P_n(u)$ est entière et du degré $n-1$, et comme les développements de $L(u)$, $X_n(u)$ suivant les puissances de la variable u ne peuvent contenir que les termes en $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}, \cdots$, p. e.

$$L(u)=\frac{A}{u}+\frac{A_1}{u^2}+\frac{A_2}{u^3}+\cdots,$$

on voit qu'en formant le produit de la fonction entière $\Pi_n(u)$ avec le développement de $L(u)$, $P_n(u)$ en sera la partie entière et $X_n(u)$ le reste. Il est bon d'observer que dans le développement de $\Pi_n(u)L(u)$ le coefficient de $\frac{1}{u}$ est toujours

$$=\int_{-1}^{1}\Pi_n(x)\lambda(x)\,dx.$$

Ayant égard aux conditions pour la fonction $\lambda(x)$ et aux notations précédentes, on peut énoncer les théorèmes suivants:

I. La condition, que dans le développement de la fonction $X_n(u)$ les $n+1$ premiers termes disparaissent, donne identiquement $\Pi_n=0$, $P_n=0$, $X_n=0$.

Ou autrement: le déterminant des $n+1$ premiers coefficients dans le développement de la fonction $X_n(u)$, pris suivant les coefficients de $\Pi_n(u)$, est différent de zéro.

II. On peut demander une fonction entière Π_n du degré n telle, que dans le développement de la fonction correspondante X_n seulement les n premiers termes disparaissent. La fonction Π_n existe toujours, elle est déterminée à un facteur constant près, et son degré est précisement le nombre proposé n.

Soit

$$\Pi_n(u)=a_n u^n+a'_n u^{n-1}+a''_n u^{n-2}+\cdots$$

cette fonction, et soient

$$P_n(u) = b_n u^{n-1} + b'_n u^{n-2} + \cdots$$

$$X_n(u) = \frac{B_n}{u^{n+1}} + \frac{B'_n}{u^{n+2}} + \cdots$$

les fonctions correspondantes. Le coefficient a_n reste arbitraire; lorsqu'on en dispose convenablement, les trois fonctions Π_n, P_n, X_n sont complètement déterminées.

Par cette proposition, chaque fonction $\lambda(x)$ qui vérifie les conditions A), B), donne naissance à une suite indéfinie de fonctions entières Π_0, Π_1, Π_2,... avec les fonctions correspondantes P et X, qui ont les proprietés suivantes:

III. Lorsque m, n désignent deux nombres inégaux entiers et positifs, on a

$$\int_{-1}^{1} \Pi_m(x)\Pi_n(x)\lambda(x)\,dx = 0$$

et pour $m = n$

$$\int_{-1}^{1} [\Pi_n(x)]^2\lambda(x)\,dx = a_n B_n.$$

IV. Toute fonction entière $F(u)$ peut être développée dans la forme

$$F(u) = C_0\Pi_0(u) + C_1\Pi_1(u) + C_2\Pi_2(u) + \cdots$$

et cela d'une seule manière. Lorsque le développement du produit $F(u)L(u)$ ne contient pas les termes en $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}$,... $\frac{1}{u^v}$, on a $C_0 = 0$, $C_1 = 0$,... $C_{v-1} = 0$.

V. L'équation

$$\Pi_n(u) = 0$$

n'admet que des racines simples, qui sont toutes réelles, comprises entre les limites -1 et $+1$, et différentes de ces limites.

VI. Soient

$$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_n$$

les racines de cette équation, et de même

$$\beta_1\ \beta_2 \ldots\ \beta_{n-1}$$

les racines de l'équation précédente $\Pi_{n-1}(u) = 0$. Ces racines convenablement rangées, on aura l'inégalité

$$-1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-1} < \alpha_n < 1.$$

VII. L'équation

$$\int_{-1}^{1} F(x)\lambda(x)\,dx = \sum_\alpha F(\alpha)\frac{P_n(\alpha)}{\Pi'_n(\alpha)},$$

approchée en général, est exacte pour toute fonction entière $F(x)$, dont le degré ne surpasse pas le nombre $2n-1$.

VIII. Entre les fonctions entières Π, P subsistent les relations identiques

$$\Pi_{n-1}(u)P_n(u)-\Pi_n(u)P_{n-1}(u)=a_nB_{n-1},$$

$$\frac{\Pi_n(x)\Pi_{n-1}(y)-\Pi_n(y)\Pi_{n-1}(x)}{x-y}=a_nB_{n-1}\sum_0^{n-1}\frac{\Pi_m(x)\Pi_m(y)}{a_mB_m}.$$

IX. Lorsque le module de u surpasse l'unité, on a le développement en fraction continue

$$L(u)=\cfrac{L_0}{u-\mathfrak{A}_0-\cfrac{L_1:L_0}{u-\mathfrak{A}_1-\cfrac{L_2:L_1}{u-\mathfrak{A}_2-\cdots}}}$$

et faisant, pour en former les réduites,

$$Z_0=0 \qquad Z_1=L_0 \qquad Z_{n+1}=(u-\mathfrak{A}_n)Z_n-\frac{L_n}{L_{n-1}}Z_{n-1}$$

$$N_0=1 \qquad N_1=u-\mathfrak{A}_0 \qquad N_{n+1}=(u-\mathfrak{A}_n)N_n-\frac{L_n}{L_{n-1}}N_{n-1}$$

on a

$$\Pi_n(u)=a_nN_n, \qquad P_n(u)=a_nZ_n.$$

Dans ces formules on doit mettre

$$\mathfrak{A}_0=\frac{A_1}{A_0}, \qquad \mathfrak{A}_n=\frac{a'_n}{a_n}-\frac{a'_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{a'_n}{a_n}+\frac{B'_n}{B_n}$$

$$L_0=\frac{B_0}{a_0}=A_0, \qquad L_n=\frac{B_n}{a_n}.$$

La prop. I peut-être démontrée ou par la méthode de mon ancien Mémoire, ou en formant le déterminant en question. On le trouve

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\int_{-1}^{1}\right)^{n+1}[\Pi(xx_1\ldots x_n)]^2\lambda(x)\lambda(x_1)\ldots\lambda(x_n)\,dx\,dx_1\ldots dx_n,$$

ce qui est bien différent de zéro, λ ne changeant pas de signe pendant l'intégration. De là découlent immédiatement les prop. II et IV.

Dans la prop. III la première intégrale est le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de $\Pi_m(u)\Pi_n(u)L(u) = \Pi_m(u)[P_n(u) + X_n(u)]$, donc $= 0$ pour $m < n$, ce qui suffit pour démontrer la formule pour m différent de n; la même observation donne sa valeur pour $m = n$.

Quant au théorème V on démontre d'abord que, a_n étant choisi réel, les autres coefficients de Π_n sont réels aussi. Pour celà on décompose $\Pi_n(u)$ en $\psi + i\chi$, ψ et χ ayant les coefficients réels; χ sera donc d'un degré inférieur à n. Les coefficients de $L(u)$ étant réels, les termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \cdots \frac{1}{u^n}$ disparaissent non seulement du développement de $\Pi_n \cdot L$, mais aussi dans $\chi \cdot L$. Par conséquent on a $\chi = 0$ identiquement, prop. I.

Pour achever la démonstration du théorème V, des prop. III et IV nous tirons l'équation

$$\int_{-1}^{1} y\,\Pi_n(x)\lambda(x)\,dx = 0 \qquad (y)$$

pour toute fonction entière y de x d'un degré inférieur à n.

Lorsqu'on suppose l'équation $\Pi_n(x) = 0$ avoir des racines α égales à une des limites -1 et $+1$, ou non comprises entre elles, soit z le produit de tous les facteurs $x - \alpha$ correspondants de $\Pi_n(x)$. Alors dans l'équation (y) on peut prendre

$$y = \frac{\Pi_n(x)}{z};$$

mais c'est une contradiction, le produit $y\,\Pi_n\,\lambda = \frac{\Pi_n^2}{z} \cdot \lambda$ restant réel et ne changeant pas de signe pendant l'intégration.

Lorsque α serait racine multiple de Π_n, comprise entre les limites -1 et $+1$, on prendrait

$$y = \frac{\Pi_n(x)}{(x - \alpha)^2},$$

pour tomber dans la même contradiction. Par conséquent l'équation $\Pi_n = 0$ a toutes ses racines réelles, différentes entre elles et des limites -1 et $+1$ et comprises entre ces limites.

La prop. VII est évidente par la théorie des intégrations numériques.

La première formule du th. VIII se déduit en chassant $L(u)$ des deux équations

$$\Pi_n(u)L(u) = P_n(u) + X_n(u)$$
$$\Pi_{n-1}(u)L(u) = P_{n-1}(u) + X_{n-1}(u),$$

ce qui donne

$$\Pi_{n-1}(u)P_n(u)-\Pi_n(u)P_{n-1}(u)=\Pi_n(u)X_{n-1}(u)-\Pi_{n-1}(u)X_n(u);$$

l'expression à droite étant après celà fonction entière de u, il n'en reste que le terme a_nB_{n-1}, les autres termes devant se détruire. Cette formule fait voir, que pour le th. VII la connaissance de la fonction P_n n'est pas nécessaire.

La seconde formule du th. VIII se démontre aisément par la méthode de mon ancien Mémoire ou par les formules récurrentes auxquelles nous passerons de suite; dans ce dernier cas on doit chasser le dénominateur $x-y$. En faisant dans cette formule $y=x$ et mettant pour x deux racines consécutives de l'équation $\Pi_n=0$, on prouve que les valeurs correspondantes de $\Pi_{n-1}(x)$ sont de signes opposées. En effet, dans la formule

$$\Pi'_n(\alpha)\Pi_{n-1}(\alpha)=a_nB_{n-1}\sum_0^{n-1}\frac{[\Pi_m(\alpha)]^2}{a_mB_m},$$

qu'on trouve pour une racine α, on peut supposer tous les a positifs, alors les B le seront aussi, prop. III où l'on supposera λ positif pour un instant. La quantité à droite étant donc positive, les deux facteurs à gauche ont le même signe. Mais Π'_n changeant de signe d'une racine α à l'autre, la même chose a lieu pour Π_{n-1}, prop. VI.

Pour démontrer enfin le th. IX nous remarquons d'abord, que le développement de $u\Pi_n(u)L(u)$ manque des termes en $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2},\cdots \frac{1}{u^{n-1}}$, donc le produit $u\Pi_n(u)$, ordonné suivant les fonctions Π, ne donne que les trois derniers termes. Ainsi on est conduit aux formules

$$\begin{aligned} u\Pi_n &= \alpha\Pi_{n+1}+\beta\Pi_n+\gamma\Pi_{n-1}\\ uP_n &= \alpha P_{n+1}+\beta P_n+\gamma P_{n-1}\\ uX_n &= \alpha X_{n+1}+\beta X_n+\gamma X_{n-1}. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients, dans la première de u^{n+1} et de u^n, dans la dernière de $\frac{1}{u^n}$ et $\frac{1}{u^{n+1}}$, on trouve

$$\alpha=\frac{a_n}{a_{n+1}},\qquad \gamma=\frac{B_n}{B_{n-1}},\qquad \beta=\frac{a'_n}{a_n}-\frac{a'_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{B'_n}{B_n}-\frac{B'_{n-1}}{B_{n-1}}.$$

Pour la seconde valeur de $\beta=\mathfrak{A}_n$, donnée dans le th. IX, il faut récourir à la formule

$$\Pi_nX_{n-1}-\Pi_{n-1}X_n=a_nB_{n-1};$$

le coefficient de $\frac{1}{u}$ donne $a_nB'_{n-1}+a'_nB_{n-1}=0$.

Des formules récurrentes pour les fonctions X_n, savoir

$$(u-\mathfrak{A}_0)X_0=\frac{a_0}{a_1}X_1+\frac{a_0}{a_1}A$$

$$(u-\mathfrak{A}_n)X_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}X_{n+1}+\frac{B_n}{B_{n-1}}X_{n-1}$$

on passe immédiatement au développement de $L(u)=\frac{X_0}{a_0}$ en fraction continue.

Pour en démontrer la convergence, lorsque $\mathrm{mod}\, u>1$, nous avons

$$L(u)-\frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)}=\frac{X_n(u)}{\Pi_n(u)}.$$

Mais comme les racines de l'équation $\Pi_n=0$ sont toutes comprises entre les limites -1 et $+1$, les fonctions $\frac{P_n}{\Pi_n}$ et $\frac{1}{\Pi_n}$ peuvent être développées suivant les puissances descendantes de u, toutefois qu'on a $\mathrm{mod}\, u>1$. Alors le développement de $\frac{X_n}{\Pi_n}$ commencera par le terme $\frac{B_n}{a_n u^{2n+1}}$, par conséquent le développement de $\frac{P_n}{\Pi_n}$ a les $2n$ premiers termes communs avec la série L. Soit donc

$$L(u)=\frac{A}{u}+\frac{A_1}{u^2}\cdots+\frac{A_{2n-1}}{u^{2n}}+\rho$$

$$\frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)}=\frac{A}{u}+\frac{A_1}{u^2}\cdots+\frac{A_{2n-1}}{u^{2n}}+\sigma;$$

les deux développements étant convergents, il suit que les restes ρ et σ, et de même la quantité

$$\frac{X_n}{\Pi_n}=\rho-\sigma$$

convergent vers zéro, lorsque n croit indéfiniment. Donc nous avons pour $n=\infty$

$$\lim\frac{P_n(u)}{\Pi_n(u)}=L(u),$$

ce qui démontre la convergence de la fraction continue pour toute valeur de u, dont le module surpasse l'unité.

Ajoutons quelques exemples.

Ex. 1. Prenant $\lambda(x)=1$, on retombe sur les résultats de mon ancien

Mémoire (p. 68)

$$\Pi_n(x) = \mathfrak{P}_n(x)$$
$$P_n(x) = R_n(x) = 2\left[\frac{2n-1}{1\cdot n}\mathfrak{P}_{n-1} + \frac{2n-5}{3\cdot n-1}\mathfrak{P}_{n-3} + \frac{2n-9}{5\cdot n-2}\mathfrak{P}_{n-5} + \cdots\right],$$

$\mathfrak{P}_n$ étant la fonction de Legendre.

Ex. 2. Soit $\lambda(x) = x$; la condition B) n'est pas vérifiée. Aussi on trouve

$$\Pi_{2m}(x) = \Pi_{2m+1}(x) = \frac{1}{x}\mathfrak{P}_{2m+1}(x);$$

donc pour n impair Π_n n'est pas du degré n.

Ex. 3. Soit $\lambda(x)$ la valeur absolue de x, on trouve

$$\Pi_{2m}(x) \quad = \mathfrak{P}_m(2x^2-1)$$
$$\Pi_{2m+1}(x) = \frac{1}{2x}[\mathfrak{P}_m(2x^2-1) + \mathfrak{P}_{m+1}(2x^2-1)].$$

Ex. 4. Pour $\lambda(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, a réel, on a $\Pi_0(x) = 1$, $\Pi_1(x) = x$,

$$\Pi_{n+2}(x) = \begin{vmatrix} \mathfrak{P}_{n+2}(x) & R_{n+2}(ai) + 2i\mathfrak{P}_{n+2}(ai)\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{a} \\ \mathfrak{P}_n(x) & R_n(ai) \quad + 2i\mathfrak{P}_n(ai) \quad \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{a} \end{vmatrix}.$$

Ex. 5. Dans le Journal de Mr. Borchardt (t. 63, p. 152) Mr. Mehler s'est dejà occupé du cas qui résulte en prenant

$$\lambda(x) = (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0;$$

le cas spécial $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, traité par des considérations directes, fait l'objet de la communication élégante de Mr. Hermite, Ann. de Clebsch, t. 10.

La question posée par Mr. Mehler se traite facilement par les méthodes de mon ancien Mémoire.

On trouve les équations différentielles

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2-1}{\lambda}\frac{d\lambda\Pi_n}{dx}\right| = (n+1)(n+\alpha+\beta-2)\Pi_n$$
$$\lambda\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2-1}{\lambda}\frac{dX_n}{dx}\right| = (n+1)(n+\alpha+\beta-2)X_n$$
$$\lambda\frac{d}{dx}\left|\frac{x^2-1}{\lambda}\frac{dP_n}{dx}\right| = (n+1)(n+\alpha+\beta-2)P_n - 2(\alpha+\beta-1)A\frac{d\Pi_n}{dx},$$

étant

$$A = 2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma\alpha\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

L'expression de Π_n est la suivante (voir le Mémoire de Mr. MEHLER)

$$\Pi_n(x) = \frac{d^n (x^2-1)^n \lambda(x)}{2^n n! \lambda(x) dx^n}.$$

Lorsque $\alpha+\beta=1$, ce qui suit souffre, pour $n=0$, une legère modification. Mettant à côté ce cas, on obtient

$$(x - \mathfrak{A}_n)\Pi_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \Pi_{n+1} + \frac{B_n}{B_{n-1}} \Pi_{n-1},$$

$$\mathfrak{A}_n = \frac{\beta - \alpha \cdot \alpha + \beta - 2}{\alpha + \beta + 2n - 2 \cdot \alpha + \beta + 2n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{n+1 \cdot \alpha + \beta + n - 1}{\alpha + \beta + 2n - 1 \cdot \alpha + \beta + 2n}$$

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = 2 \cdot \frac{\alpha + n - 1 \cdot \beta + n - 1}{\alpha + \beta + 2n - 2 \cdot \alpha + \beta + 2n - 1}.$$

Par là on connait encore le développement de

$$L(u) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{u-x} dx$$

en fraction continue pour $\mathrm{mod}\, u > 1$, parceque, dans le th. IX on a $L_0 = A$, $\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{B_{n+1}}{B_n}$.

Ex. 6. Soit enfin

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1 - k^2 x^2}}, \qquad 0 < k < 1,$$

et

$$w = \int_0^x \lambda(x)\, dx;$$

nous trouvons le résultat mémorable, qu'il existe une suite de fonctions $\Pi_n(x)$ doublement périodiques de w, qui donnent la relation

$$\int_{-K}^{K} \Pi_m(x) \Pi_n(x)\, dw = 0$$

toutefois que les entiers m, n sont inégaux, K désignant comme à l'ordinaire l'intégrale entière ou la valeur réelle de w pour $x=1$.

Du reste on voit bien que dans tout ce qui précède, les limites -1 et $+1$ de l'intégration ne sont choisies que pour simplifier les formules et l'énoncé de quelques propositions. Si $\lambda(x)$ admet l'intégration de $x=a$ jusqu'à $x=b$, et que $\lambda(x)$ reste réel entre ces limites sans y changer de signe, tous ces résultats sont appliquables au cas, où l'on prendrait

$$L(u)=\int_a^b \frac{\lambda(x)\,dx}{u-x},$$

avec les modifications convenables. Par conséquent le dernier exemple donne encore lieu à une seconde série de fonctions Π_n de w, en prenant $a=1$, $b=\frac{1}{k}$ au lieu des limites -1 et $+1$.

Strassburg, 7 juin 1876.

Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie.

(*Memoria del prof.* E. Bertini, *a Pisa.*)

Delle trasformazioni univoche, di cui la teoria generale è dovuta a Cremona (*), qui si considerano quelle, studiate precedentemente da Jonquieres (**), che si ottengono facendo corrispondere alle rette di un piano curve di ordine n, aventi in comune un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ e $2(n-1)$ punti semplici. La questione che si risolve è la determinazione di quelle fra queste trasformazioni di un piano in sè stesso, che sono anche involutorie, cioè tali che due punti si corrispondono in doppio modo.

1. Se un piano P è trasformato in sè stesso univocamente e involutoriamente, è evidente che il sistema dei punti e delle curve fondamentali deve essere lo stesso per le due figure. Si dica O il punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ ed $s_1\ s_2 \ldots s_{2(n-1)}$ i $2(n-1)$ punti semplici comuni alle curve corrispondenti alle rette del piano P. Le curve fondamentali sono le $2(n-1)$ rette Os e la curva d'ordine $(n-1)$ avente in O un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$ e passante per tutti i punti s. Un raggio partente da O corrisponde evidentemente ad un altro raggio pure partente da O e questi due raggi descrivono una involuzione. Ora sono da distinguere due casi (n.i 2, 9).

2. Supponiamo dapprima che ogni raggio coincida col suo corrispondente. Ciascun raggio contiene allora una involuzione di punti corrispondenti e questa dà origine a due punti uniti. Il luogo di questi punti uniti è una curva Γ punteggiata unita (cioè tale che ogni punto è unito) di ordine n. Infatti una retta arbitraria sega la propria curva corrispondente in n punti, ciascuno de' quali, pensato come appartenente alla curva, deve corrispondere ad un punto

(*) *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.* Memorie dell'Accademia di Bologna, 1863-1865.

(**) Nouvelles Annales de Mathématiques, 1864.

della retta, ed inoltre, per l'ipotesi fatta, ad un punto del raggio che lo unisce ad O: onde quegli n punti debbono essere uniti. Questa curva Γ ha inoltre manifestamente un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$ nel punto O; escludendo per ora il caso, che esamineremo in appresso (n.° 7), nel quale ogni involuzione abbia un punto unito in O.

Ciascun punto M del piano corrisponde ad un punto M' conjugato armonico di M rispetto ai due punti d'intersezione di Γ col raggio OM. Ai punti della Os_1 (per es.) deve corrispondere il punto s_1: e quindi Os_1 deve avere in s_1 due punti comuni con Γ. Cioè i punti s sono, per Γ, punti doppi o punti di contatto delle tangenti partenti da O e reciprocamente. Ma è importante osservare che un punto doppio di Γ assorbe due punti s, cioè le curve della rete si toccano in quel punto. Infatti sia s_1 doppio per Γ. Ad una retta arbitraria tirata per s_1 corrisponderà una curva C d'ordine $n-1$ che incontrerà quella retta in $n-1$ punti uniti, cioè appartenenti a Γ. Ma, poichè s_1 è doppio per Γ, di questi $n-1$ punti uno deve cadere in s_1. Dunque le curve $(s_1 O, C)$ della rete, corrispondenti alle rette per s_1, hanno un punto doppio in s_1: per conseguenza tutte le curve della rete si toccano in questo punto. Si può anzi osservare che la curva fondamentale corrispondente al punto O, passando per tutti i punti s, avrà nel punto s_1 la medesima tangente delle curve della rete. Ora quella curva è, nel nostro caso, la prima polare di O rispetto a Γ (cioè il luogo del conjugato armonico di O rispetto ai punti d'intersezione con Γ): quindi, per una proprietà nota, la tangente alle curve della rete nel punto s_1, doppio per Γ, è conjugata armonica della $s_1 O$ rispetto alle due tangenti a Γ nel punto doppio.

3. Che il caso considerato sia possibile è evidente. Data una curva Γ d'ordine n con un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$, si faccia corrispondere ad ogni punto M del piano il punto M' allineato con O e conjugato armonico di M rispetto ai punti d'intersezione del raggio OM con Γ. La trasformazione è evidentemente univoca e involutoria, e Γ curva punteggiata unita.

La stessa costruzione si può presentare sotto quest'altro aspetto. Si consideri la prima polare di O rispetto a Γ, si prenda O per punto fondamentale $(n-1)^{\text{uplo}}$ e le residue $2(n-1)$ intersezioni di Γ e della polare per punti semplici, e si faccia corrispondere ad ogni curva C della rete così determinata, la retta nella quale sono necessariamente (*) allineati gli n punti variabili di intersezione di Γ, C.

(*) Veggasi, per es., Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.* Bologna, 1862, § 42, *b*).

Se Γ è del genere p ha $n-p-2$ punti doppî d_1, d_2,... d_{n-p-2} e dal punto O si possono tirare ad essa $2p+2$ tangenti, aventi altrove i punti di contatto c_1, c_2,... c_{2p+2}. Se il genere p di Γ è $n-2$, non esistono punti d e i punti semplici fondamentali sono tutti distinti. Da questo caso generale scaturiscono (per lo stesso valore di n) tutti gli altri, pe' quali è $p<n-2$, imaginando che i punti c a due a due si accostino indefinitamente. Poichè se, per es., c_1, c_2 diventano successivi, Γ acquista nel punto c_1 due tangenti oc_1, c_1c_2 e però un punto doppio. Supponendo $p<n-2$ vale altresì la seguente proprietà.

4. Trasformiamo il piano P, nel quale si ha la detta trasformazione involutoria, quadraticamente in un altro piano Π, prendendo per triangolo fondamentale nel piano P il triangolo od_1d_2, ove d_1, d_2 sono due qualunque dei punti d. Evidentemente si otterrà nel piano Π un altra trasformazione involutoria. Per giudicare del grado di questa trasformazione, tracciamo nel piano Π una retta arbitraria R. Le corrisponderà nel piano P, per la trasformazione quadratica, una conica C' circoscritta al triangolo od_1d_2. A questa conica, per la trasformazione involutoria del piano P, corrisponderà una curva C'', dell'ordine $n-1$, passante per i punti c_1, c_2... c_{2p+2}, per i punti d_3, d_4... d_{n-p-2} nei quali avrà le stesse tangenti delle curve della rete e infine per i punti d_1, d_2, nei quali però non toccherà queste curve. L'ultima asserzione è chiara osservando che un punto d_1 rappresenta due punti fondamentali infinitamente vicini d'_1, d''_1, a cui corrispondono le due rette od'_1, od''_1. Ora la conica C', passando, per es., per d'_1, segherà od''_1 in un punto diverso da d''_1 e però la curva corrispondente C'' dovrà passare per questo punto (e non per d'_1). Alla curva C'', per la trasformazione quadratica, corrisponderà da ultimo nel piano Π una curva C''' dell'ordine $n-2$ con un punto $(n-3)^{\text{uplo}}$ passante per $2p+2$ punti semplici (corrispondenti ai punti c) e per altri $n-p-4$ punti (corrispondenti ai punti d_3, d_4,... d_{n-p-2}) ognuno de' quali rappresenterà due punti fondamentali successivi. Adunque nel piano Π l'ordine della trasformazione è $n-2$. La curva Γ è trasformata in una curva (ancora punteggiata unita e di genere p) dell'ordine $n-2$, la quale passa per que' $2p+2$ punti ed ha punti doppî negli altri $n-p-4$.

Si applichi al piano Π la stessa trasformazione e così si continui fino a che esistano punti doppî della curva punteggiata unita. Se rimane un solo punto doppio, facendo la trasformazione col porre i tre vertici del triangolo fondamentale nel punto O, in quel punto doppio e in un punto c, l'ordine della trasformazione diminuisce di 1. Si giungerà infine ad una trasformazione involutoria d'ordine $p+2$, con $2p+2$ punti semplici fondamentali distinti, avente una curva punteggiata unita Γ d'ordine $p+2$, di genere p, con un (solo) punto p^{plo} nel punto $(p+1)^{\text{uplo}}$ della trasformazione. Da questa trasformazione involutoria si possono adunque dedurre, applicando successive trasformazioni quadratiche, tutte le possibili trasformazioni involutqrie di Jonquières che ammettono una curva Γ punteggiata unita di genere p.

Così, per $p=0$, tutte le trasformazioni involutorie nascono dall'inversione quadrica (*): per $p=1$ nascono dalla trasformazione involutoria del 3° ordine che si ottiene prendendo per punto fondamentale doppio un punto O ad arbitrio di una curva generale del 3° ordine, e per punti fondamentali semplici i quattro residui punti d'intersezione di quella curva colla prima polare di O (n.° 3); ecc.

5. Per $p=0$ si può anche dire che le trasformazioni involutorie provengono dall'omologia involutoria o armonica (**). Perocchè, trasformando quadraticamente il piano P, nel quale si abbia una inversione quadrica, col porre due vertici nei punti fondamentali di essa giacenti sulla conica punteggiata unita e il terzo in un punto arbitrario di questa conica, si riconosce facilmente, con considerazioni analoghe alle precedenti, che si ottiene l'omologia armonica.

6. E alla stessa conseguenza (n.° 5) si giunge quando accada che la curva Γ punteggiata unita si spezzi in parti. Osserviamo dapprima che fra queste parti non può esserci una retta uscente da O (***): perchè ogni retta per O deve incontrare Γ (o una sua parte) in due punti, rispetto ai quali due punti corrispondenti della retta debbono essere conjugati armonici. Segue che Γ può spezzarsi solamante in due curve degli ordini r, r_1 (essendo $r+r_1=n$) aventi rispettivamente O per punto $(r-1)^{\text{uplo}}$, $(r_1-1)^{\text{uplo}}$ (onde $r-1+r_1-1=n-2$). Queste curve si segano in $r+r_1-1$ punti (oltre O), che sono punti di contatto per le curve della rete e che possono essere adoperati, come i punti d, per effettuare le successive trasformazioni quadratiche dette nel n.° 4. Per ciascuna delle quali si abbasserà di 2 l'ordine della trasformazione involutoria e di 1 rispettivamente gli ordini delle due parti di Γ.

Ora, se r, r_1 sono eguali, onde n è pari, si giungerà in questo modo a quel

(*) Hirst, Annali di Matematica, 1.ª serie, t. 7, 1865.

(**) Che è l'unica trasformazione involutoria di 1° ordine (Cfr. Staudt, *Geometrie der Lage*. Nürnberg, 1847, n.° 227).

(***) Il punto O è sempre il punto fondamentale più elevato della trasformazione che si considera.

caso particolare dell'inversione quadrica (*), nel quale la conica punteggiata unita si compone di due rette. Questa conduce all'omologia armonica, trasformando quadraticamente col situare un vertice del triangolo fondamentale in O, un altro nel punto comune alle due rette e il terzo sopra una di esse.

Se r, r_1 sono disuguali ed $r < r_1$, si giunge dapprima ad una trasformazione d'ordine $r_1 - r + 2$, per la quale Γ si compone di una retta (non passante per O) e di una curva dell'ordine $r_1 - r + 1$ con un punto $(r_1 - r)^{\text{uplo}}$ in O: e poscia, ripetendo ancora una volta la stessa operazione, si perviene ad una trasformazione involutoria d'ordine $r_1 - r$ con una sola curva unita d'ordine $r_1 - r$ e aventi in O un punto $(r_1 - r - 1)^{\text{uplo}}$; giacchè alla retta punteggiata unita viene a corrispondere il punto O. Tali trasformazioni involutorie sono appunto quelle che ci rimangono ad esaminare (cfr. n.° 2) nell'ipotesi che esista una curva punteggiata unita.

7. Consideriamo dunque una trasformazione involutoria d'ordine n, nella quale la curva punteggiata unita Γ d'ordine n abbia in O un punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ (**). A ciascun punto M corrisponde un punto M' coniugato armonico di M rispetto ad O e alla residua intersezione del raggio OM con Γ. Segue facilmente che $n-1$ punti fondamentali semplici della trasformazione sono infinitamente vicini ad O sopra le tangenti a Γ in questo punto. Gli altri $n-1$ punti fondamentali semplici non possono esistere sopra Γ; perchè debbono restare n intersezioni variabili di Γ e di una curva C della rete giacenti sulla retta corrispondente a C, e si ha precisamente

$$n^2 - \{(n-1)^2 + (n-1)\} = n.$$

Gli altri $n-1$ punti fondamentali, necessariamente successivi ad O, sono distribuiti fra i rami passanti per O di una curva della rete: ossia le curve della rete hanno, per gli $(n-1)$ rami passanti per O, contatti degli ordini r_1+1, r_2+1, $r_3+1, \ldots r_{n-1}+1$ rispettivamente, i numeri r (interi, positivi) potendo essere nulli e dovendo essere $r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} = n-1$ (***).

Trasformiamo quadraticamente un tal piano P in un altro Π. A tal fine consideriamo una tangente t_1 a Γ nel punto O, tale che i rami delle curve

(*) Hirst, l. c. n.° 15, (3), (3 a), (4), (4 a).

(**) La curva Γ in questo caso non può comporsi di parti, giacchè si dimostrerebbe, come al n.° 6, che fra queste parti non può esserci una retta per O: onde ecc.

(***) Se $n=2$ si ha quel caso particolare dell'inversione quadrica nel quale il polo è sulla conica punteggiata unita. Dei tre punti fondamentali successivi due sono su questa conica, il terzo no. In questo senso deve essere chiarita l'asserzione di Hirst [l. c. n.° 15 (5)].

della rete tangenti a t_1 abbiano un contatto d'ordine $r_1+1>1$, come è permesso, le r non potendo essere tutte nulle: ed assumiamo nel piano P una rete di coniche aventi a comune in O la tangente t_1 e passanti per un punto arbitrario A di Γ. Ad una retta di Π corrisponderà una conica di quella rete: a questa, per la trasformazione involutoria, una curva d'ordine n la quale passerà per A ed avrà nel punto O colle curve della rete gli stessi contatti di queste curve, tranne che, invece del contatto d'ordine r_1+1, avrà un contatto d'ordine r_1. Questa curva (per essere $r_1>0$) passerà adunque per i tre vertici del triangolo fondamentale del piano P e però le corrisponderà nel piano Π una curva di ordine $n-1$. Dunque nel piano Π l'ordine della trasformazione è diminuito di 1, esistendo sempre una curva unita d'ordine $(n-1)$ con un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$. Così continuando, si arriva alla inversione quadrica quando il polo è sulla conica, e da questa, nella stessa maniera, alla omologia armonica.

8. Il procedimento precedente può essere adoperato per altri casi speciali nei quali i punti che si considerano sono (o diventano per le successive trasformazioni quadratiche) infinitamente vicini al punto O. Per es., se i punti c e d del n.° 4 fossero successivi ad O, si otterrebbe sempre una diminuzione nell'ordine della trasformazione, prendendo una rete di coniche tangenti in O e passanti per un altro punto arbitrario della curva unita, ecc.

9. Esaminiamo ora l'altro caso nel quale l'involuzione detta al n.° 1 non sia formata di raggi coincidenti. Esisteranno due raggi doppî OM, ON. Osserviamo subito che amendue questi raggi non possono essere punteggiati uniti. Infatti suppongasi per un istante che ciò accada. Ogni curva della rete taglia OM, ON in due punti M, N corrispondenti a sè stessi, e però ha per corrispondente la retta MN. Se si prendono tutte le curve della rete passanti per un punto A, le rette corrispondenti MN debbono concorrere in A' corrispondente ad A: ossia M, N debbono descrivere due punteggiate prospettive. Ciò esige che per A passi una curva della rete avente per tangenti in O le OM, ON. E siccome tale proprietà deve sussistere qualunque sia A, si conclude che due punti semplici fondamentali sono successivi ad O nelle direzioni OM, ON. Queste rette sono per conseguenza rette fondamentali, e quindi i punti di ciascuna corrispondono ai punti infinitamente vicini ad un certo punto fondamentale, mentre debbono corrispondere a sè stessi per l'ipotesi fatta. Questa ipotesi è quindi assurda. Rimangono adunque due soli casi possibili:

a) Nessuno dei due raggi doppî è punteggiato unito;

b) Uno di essi è punteggiato unito.

10. Nel caso a) esistono quattro punti uniti che sono i punti doppî delle involuzioni giacenti sui due raggi doppî.

L'esistenza in questo caso di soli quattro punti uniti [invece di $n+2$ (*)] si spiega facilmente colla osservazione seguente. Consideriamo in generale un piano trasformato in sè stesso univocamente. È noto (**) che il luogo Q costituito dai punti della prima figura che sono in linea retta coi corrispondenti della seconda e con un punto (fisso) q è dell'ordine $n+1$, essendo n l'ordine della trasformazione. Infatti le congiungenti dei punti di una retta R coi punti corrispondenti inviluppano una curva della classe $n+1$ (***) e però dal punto q partono $n+1$ rette congiungenti un punto di R al suo corrispondente. Se la retta R passa per un punto O fondamentale r^{uplo} della prima figura, la curva corrispondente ad R è dell'ordine $n-r$ e quindi dal punto q partono $n-r+1$ rette congiungenti un punto di R (escluso O) al suo corrispondente: dunque O è r^{uplo} per Q. Le r tangenti a Q in questo punto r^{uplo} sono manifestamente le r rette, di cui le direzioni uscenti da O corrispondono agli r punti d'intersezione di qO colla curva fondamentale C_r corrispondente ad O. Se C_r non passa per O, queste r direzioni variano al variare di q: ma se C_r passa per O con α rami, α di quelle direzioni non mutano, cioè tutte le curve Q hanno il punto O r^{uplo} ed ivi α tangenti comuni. E poichè i punti comuni a due curve Q relative a due punti q arbitrarî, escluse le loro intersezioni sulla retta che congiunge questi punti e quelle raccolte nei punti fondamentali, sono punti uniti, segue che: — Se un punto r^{uplo} della prima figura è α^{uplo} per la curva corrispondente della seconda, assorbe $r^2+\alpha$ punti uniti delle due figure.

Nel caso nostro il punto O è $(n-2)^{\text{uplo}}$ per la sua curva corrispondente, quindi degli $n+2$ punti uniti del caso generale restano $n+2-(n-2)=4$: come vedemmo.

11. Inoltre nel caso a) (n.° 9) l'ordine n della trasformazione deve essere pari. Ciò dipende dalla proprietà generale: — Ogni trasformazione involutoria d'ordine n dispari ammette necessariamente una curva punteggiata unita. Infatti ogni retta incontra la propria curva corrispondente in n punti che a due a due si corrispondono in doppio modo. Se n è dispari, debbono quindi alcuni di quei punti (in numero dispari) essere uniti: onde ecc.

(*) Cremona, l. c. Nota II, pag. 33.
(**) Cremona, l. c. Nota II, pag. 31.
(***) Veggasi, per es., Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch*, p. 383.

12. Invece nel caso *b*) (n.° 9), nel quale si ha una retta punteggiata unita e due punti uniti, n deve essere dispari. Perchè, se fosse n pari, una retta arbitraria R incontrando la retta unita in un punto M potrebbe contenere (al più) $\frac{n-2}{2}$ coppie di punti corrispondenti distinti, cioè la retta R dovrebbe (almeno) toccare in M la propria curva corrispondente. Ne seguirebbe, per essere R arbitraria, che la retta punteggiata unita ne rappresenterebbe (almeno) due infinitamente prossime: cioè l'involuzione dei raggi intorno ad O avrebbe i due raggi doppî coincidenti: il che non può accadere. Questo ragionamento dimostra altresì che (essendo n dispari) in generale (*) una retta e la curva corrispondente si tagliano semplicemente sopra la retta punteggiata unita.

13. Le proprietà precedenti (n.° 12) scaturiscono anche da queste altre osservazioni con cui il caso *b*) si riduce al caso *a*) (n.° 9).

Trasformiamo il piano, nel quale si ha il caso *b*), quadraticamente, ponendo in esso il triangolo fondamentale con un vertice in O, l'altro in un punto M della retta punteggiata unita, e il terzo in un punto s fondamentale semplice, il quale corrisponderà ad una retta non passante per esso. Colle solite considerazioni si conclude che l'ordine della trasformazione diminuisce di uno.

Nel caso particolare che i due punti uniti, che si presentano nel caso *b*) (oltre la punteggiata unita), coincidano, il punto di coincidenza σ è evidentemente fondamentale e corrisponde alla retta passante per esso. Ma quella conclusione non è alterata anche se si pone il terzo vertice s in σ, perchè questo punto rappresenta un numero pari di punti fondamentali semplici infinitamente vicini. In vero i punti fondamentali semplici diversi da σ debbono distribuirsi in coppie (le congiungenti dei punti di una coppia col punto O essendo due raggi dell'involuzione intorno ad O e ciascuna corrispondendo al punto che giace sull'altra) e il numero totale dei punti semplici fondamentali è pari.

La nuova trasformazione che si ottiene nel modo detto è d'ordine pari e presenta il caso *a*) (n.° 9). Perchè l'ordine n della trasformazione primitiva è dispari, e i punti della retta che corrisponde quadraticamente al punto M non sono uniti, non essendo unite le direzioni uscenti da M (n.° 12).

(*) In generale; perchè intorno ad ogni punto di una curva punteggiata unita, in una trasformazione involutoria qualsiasi, si ha una involuzione di direzioni corrispondenti; onde due rette (o tutte le rette) per quel punto toccano le curve corrispondenti. Una di queste rette è la tangente in quel punto alla curva unita, l'altra è una retta diversa: ecc.

14. Se nel caso *b*) fosse stato n pari, ogni retta doveva (almeno) toccare sulla retta punteggiata unita la propria curva corrispondente: ovvero se, essendo n dispari, questo fosse accaduto; la trasformazione quadratica ora detta (n.° 13) conduceva ad un altra di ordine $n-1$, nella quale i punti della retta corrispondenti quadraticamente ad M erano uniti e le direzioni uscenti dal punto corrispondente quadraticamente ad OM, erano pure unite. Sicchè, ripetendo successivamente l'operazione, giungevamo infine ad una omologia armonica avente sulla punteggiata unita il centro di omologia: assurdo. Ciò conferma le asserzioni del n.° 12.

15. Se $n=2$, il caso *a*) (n.° 9) è l'ordinaria trasformazione involutoria che si ottiene rispetto ad un fascio di coniche, facendo corrispondere a ciascun punto il suo conjugato rispetto a questo fascio (*). Infatti dicansi u', u'' due dei punti uniti allineati con O e u'_1, u''_1 gli altri due, pure in linea retta con O: ed s_1, s'_1 i punti fondamentali (oltre O). Alla retta $u's_1$ (per es.) corrisponde una conica che si spezza formata della Os'_1 e di una retta passante per s_1 ed u'. Dunque $u's_1$ corrisponde a sè stessa e sega quindi $Ou'_1u''_1$ in un punto unito, cioè in uno dei punti u'_1, u''_1. Se ne trae che i quattro punti u formano un quadrangolo completo di cui il triangolo diagonale è $Os_1s'_1$. Con che la proprietà è dimostrata, perchè, rispetto al fascio di coniche circoscritte al quadrangolo $u'u''u'_1u''_1$, ad una retta corrisponde una conica passante per O, s_1, s'_1 e inoltre per i due punti conjugati a quelli nei quali la retta stessa sega $ou'u''$, $ou'_1u''_1$ rispetto ai punti u', u''; u'_1, u''_1 ordinatamente: la qual conica è appunto quella che corrisponde alla retta nella nostra trasformazione involutoria.

Questa trasformazione conduce all'omologia armonica facendo una trasformazione quadratica con una rete di coniche passanti per due dei tre punti O, s_1, s'_1 e per uno dei punti u. L'asse di omologia è la retta che corrisponde quadraticamente a questo punto unito (**), e il centro di omologia è

(*) Questa e l'inversione quadrica sono adunque le sole trasformazioni involutorie di 2° ordine (cfr. n.° 12). — Dalle cose dette segue anche che si hanno tre sole trasformazioni involutorie di 3° ordine, con una curva punteggiata unita di genere 0, o di genere 1, ovvero una retta punteggiata unita (in questo caso esistendo o no due punti uniti) (n.i 3, 4, 11, 12, 13).

(**) Giacchè, come si vede facilmente con considerazioni analoghe a quelle dei n.i 11, 12, in un punto unito (non appartenente ad una curva punteggiata unita) di una trasformazione involutoria qualsiasi, ciascuna retta tocca (almeno) la propria curva corrispondente: cioè le direzioni uscenti da quel punto sono unite.

il punto corrispondente quadraticamente a quello dei punti u che è esterno ai lati del triangolo fondamentale preso.

Se i punti u', u'' (per es.) cadono nello stesso punto, che sarà perciò fondamentale, è facile persuadersi che la nostra trasformazione è ottenuta rispetto ad un fascio di coniche tangenti in un punto; ovvero rispetto ad un fascio di coniche osculatrici se quel punto è successivo ad O; ecc.

Non può accadere che u', u'' sieno successivi e insieme lo sieno altresì u'_1 u''_1. Avremmo allora due punti fondamentali u u_1 (che non potrebbero essere simultaneamente successivi ad O) corrispondenti alle rette Ou, Ou_1: alle rette per u corrisponderebbero quindi le rette per u_1, e due tali rette corrispondenti dovrebbero segarsi in un punto unito; il che è contrario alla nostra ipotesi.

16. Prendiamo infine a trattare il caso a) (n.° 9) per n qualunque [pari (n.° 11)]. Diremo, come dianzi, u', u''; u'_1, u''_1 i punti uniti ed s_1, $s_2 \ldots s_{n-1}$, s'_1, $s'_2, \ldots s'_{n-1}$ i punti fondamentali semplici, essendo s_1 il punto corrispondente alla retta Os'_1, ecc. Trasformiamo quadraticamente il nostro piano P in un altro Π situando in quel piano il triangolo fondamentale con un vertice in O e gli altri in due punti s ovvero in due punti s' (o anche in un punto s e in un punto s', ma escludendo due punti omologhi, come s_1, s'_1). Si vede con facilità che l'ordine della trasformazione diminuisce di 2, avendosi nel piano Π per punti semplici fondamentali quelli corrispondenti quadraticamente ai punti s_3, $s_4, \ldots s_{n-1}$, s'_3, $s'_4, \ldots s'_{n-1}$, se s_1, s_2 (ovvero s'_1, s'_2) furono presi per punti fondamentali della trasformazione quadratica. Ripetendo l'operazione detta, si giungerà ad una trasformazione del 2° ordine, e da essa (n.° 15) all'omologia armonica.

Questa proprietà rimane anche se i punti s, s' sono infinitamente vicini ad O. Osserviamo che, essendo Os_1, Os'_1 (per es.) raggi corrispondenti dell'involuzione intorno ad O, non può accadere che i punti omologhi s_1, s'_1 si trovino successivi ad O sullo stesso ramo di curva della rete. Sopra un tal ramo possono giacere infinitamente vicini ad O dei punti s, s' tali che le loro rette corrispondenti (successive) sieno distinte dalla tangente a quel ramo. Ciò essendo, la trasformazione quadratica suddetta è possibile e conduce allo stesso risultato, prendendo una rete di coniche tangenti in O allo stesso ramo e passanti per un altro punto s od s', il quale può anche essere situato infinitamente prossimo ad O sul medesimo ramo.

17. Ci rimane ancora a discutere i casi in cui i punti u', u''; u'_1, u''_1 sieno rispettivamente successivi.

Può darsi in primo luogo che, u'_1, u''_1 essendo distinti, u', u'' cadano in un punto u, nel quale le curve della rete abbiano un contatto r^{punto}. Se

$$r = 2(n-1)$$

trasformiamo quadraticamente prendendo una rete di coniche per O e tangenti in u alle curve della rete d'ordine n. Ripetendo l'operazione, si giungerà infine alla trasformazione di 2° ordine costruita rispetto ad un fascio di coniche (n.° 15) tangenti in un punto (od osculatrici se u è successivo ad O). Se

$$r = 2(n-1) - r_1$$

si avranno r_1 punti s, s' e, siccome questi debbono essere in numero pari, r deve pure essere pari. Anzi, si vede facilmente dalla precedente relazione (nella quale anche n è pari), che dei due numeri r, r_1 uno deve essere della forma 4ρ, l'altro $4\rho_1 - 2$. Segue che possiamo operare come si è detto al n.° 16 fino ad esaurire i punti s, s' (se r_1 è multiplo di 4) e allora ricadiamo nel caso precedente $[r = 2(n-1)]$: ovvero fino a che resti un punto s e un punto s'; ma allora (essendo r multiplo di 4) possiamo, trasformando successivamente con una rete di coniche tangenti in u e passanti per O, far scomparire il punto di contatto u. In ogni caso giungiamo alla trasformazione quadratica del n.° 15: e però ecc.

Che se i punti u', u'' e insieme i punti u'_1, u''_1 coincidessero rispettivamente in due punti u, u_1, può accadere dapprima che qui le curve della rete d'ordine n abbiano rispettivamente contatti r^{punto}, r_1^{punto}, essendo

$$r + r_1 = 2(n-1).$$

Si trasforma allora con una rete di coniche per O e tangenti in uno dei punti u, u_1, per es. u, (osculatrici se il punto u è successivo ad O). L'ordine della trasformazione diminuisce di 2 e i contatti divengono $(r-4)^{\text{punto}}$, r_1^{punto}. Si ripete successivamente la stessa operazione ed è chiaro che, se r, r_1 sono pari, onde, per la relazione precedente, debbono avere la forma 4ρ, $4\rho_1 - 2$, si giunge alla trasformazione quadratica involutoria (n.° 15). Se r, r_1 sono dispari, la suddetta relazione ammetterebbe per r, r_1 rispettivamente le due soluzioni $4\rho + 1$, $4\rho_1 + 1$; $4\rho - 1$, $4\rho_1 - 1$: ma soltanto la prima risponde alle condizioni geometriche. Da essa infatti si arriva alla involuzione quadratica collo stesso procedimento ora indicato. Dalla seconda soluzione si arriverebbe ad una trasformazione del 4° ordine, avente (oltre il punto O) due punti in cui le curve della rete si osculano, e da questa ad una del 3° avente due punti u, u_1 (nell'uno de' quali le curve si osculano) corrispondenti alle rette

Ou, Ou_1 e priva di una curva punteggiata unita; la qual trasformazione non è possibile (n.° 11). Se

$$r+r_1<2(n-1)$$

esisteranno punti s, s' e possiamo applicare il procedimento del n.° 16, fino a che i punti s, s' sieno esauriti, e allora ricadiamo nel caso precedente $[r+r_1=2(n-1)]$; ovvero (se il numero dei punti s, s' non è multiplo di 4) fino a che resti un punto s e un punto s'. In questo secondo caso la trasformazione a cui saremo giunti conterrà due punti u, u_1 nei quali le curve della rete avranno ordinatamente contatti r^{punto}, r_1^{punto}: e, dicendo ancora n l'ordine di questa trasformazione, dovrà essere

$$r+r_1=2(n-1)-2.$$

Questa relazione ammette le soluzioni 4ρ, $4\rho_1$; $4\rho-2$, $4\rho_1-2$; $4\rho-1$, $4\rho_1-3$. Nel primo caso ($r=4\rho$, $r_1=4\rho_1$), trasformando quadraticamente e successivamente, come si è detto dianzi, si giunge ad una involuzione quadratica (contenente i punti corrispondenti ad s, s'). Nel secondo caso ($r=4\rho-2$, $r_1=4\rho_1-2$) si giunge, nello stesso modo, ad una trasformazione del 4° ordine con due punti u, u_1, in cui le curve della rete si toccano e due punti semplici fondamentali s, s': e, siccome questi quattro punti non possono essere simultaneamente successivi ad O, giacchè debbono giacere su rami diversi e per O passano tre soli rami di una curva della rete, possiamo sempre trasformare con una rete di coniche passanti per O e per due dei punti u, u_1, s, s'; con che si perviene di nuovo alla involuzione quadratica. Il terzo caso ($r=4\rho-1$, $r_1=4\rho-3$) è impossibile. Infatti condurrebbe, colle dette trasformazioni quadratiche, ad una trasformazione del 4° ordine, per la quale le curve della rete si osculerebbero in un punto u, passando inoltre per tre altri punti u_1, s, s': dalla quale, adoperando una rete di coniche per O e tangenti in u, si giungerebbe ad una trasformazione di 3° ordine, senza curva punteggiata unita: la qual trasformazione non esiste (n.° 11).

18. Così sono esauriti tutti i casi che si possono presentare per le trasformazioni di Jonquières involutorie. Se ne dimostra la effettiva esistenza facendo in senso inverso le trasformazioni quadratiche precedentemente indicate.

Inoltre dalle cose dette discende che: — Tutte le trasformazioni di Jonquières involutorie, escluse quelle soltanto che ammettono una curva punteggiata unita non razionale (per le quali si ha la proprietà del n.° 4), sono deducibili, con successive trasformazioni quadratiche, dall'omologia armonica.

19. È anche notevole che: — Qualsivoglia trasformazione univoca involutoria d'ordine n, la quale contiene una curva punteggiata unita d'ordine n, è necessariamente una trasformazione di Jonquieres. — Infatti, se A, A' sono due punti corrispondenti (distinti), la retta AA' incontra la propria curva corrispondente C (almeno) in A, A' e negli n punti in cui la retta AA' incontra la curva punteggiata unita. Segue che C si spezza nella AA' e in una curva d'ordine $n-1$. Dunque AA' deve passare per un punto fondamentale $(n-1)^{\text{uplo}}$ della trasformazione e però ecc.

Lo stesso ragionamento proverebbe che una trasformazione involutoria qualsiasi d'ordine n (>1) con una curva punteggiata unita d'ordine $n-1$ dovrebbe essere una trasformazione di Jonquieres: ma, per le cose esposte tale trasformazione non esiste, dunque ecc.

Pisa, luglio 1876.

Sopra una classe di forme binarie.

(*Nota del prof.* F. Brioschi, *a Milano.*)

1.° La forma binaria del quarto ordine per la quale l'invariante quadratico è nullo, si incontra in varie quistioni d'analisi e di geometria, come, per esempio, nella trasformazione di terzo ordine delle funzioni elittiche e nella ricerca dei punti di flesso di una cubica. Indicando con $f(x_1, x_2)$ la forma binaria, la condizione dell'annullarsi del suo invariante quadratico è la:

$$\tfrac{1}{2}(ff)^4 = 0$$

ed è perciò spontanea la ricerca, supponendo essere f di un ordine n qualsivoglia, di studiare le proprietà della forma f per le quali questo suo covariante d'ordine $m = 2(n-4)$ è identicamente eguale a zero.

Questo studio era tanto più opportuno in quanto che due altre forme speciali, una del sesto, l'altra del dodicesimo ordine, aventi la proprietà indicata, eransi in seguito presentate nelle belle ricerche del prof. Schwarz sulla serie ipergeometrica di Gauss (*), come ha mostrato il sig. Klein nel suo importante lavoro « *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* » (**).

Il problema enunciato più sopra fu considerato recentemente dal D.r Wedekind nei suoi « *Studien im binären Werthgebiet* » (***); ed in essi giunge a dimostrare che le forme f di ordine n per le quali $\tfrac{1}{2}(ff)^4 = 0$ si distinguono in due specie, e che per una di esse deve sussistere l'equazione:

$$nk - 6n + 12 = 0$$

essendo k un numero intero. Vale a dire le forme degli ordini 4°, 6°, 12°, vanno distinte dalle altre.

(*) *Ueber diejenigen Falle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt.* Von H. A. Schwarz. Journal für die Mathematik, Bd. 75.

(**) Mathematische Annalen, Bd. 9.

(***) Habilitationsschrift. Carlsruhe, 1876.

2.° Sieno:

$$f=(a_0,\ a_1,\ a_2,\dots\ a_n)(x_1,\ x_2)^n$$

$$\tfrac{1}{2}(ff)^4=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\dots\ \alpha_m)(x_1,\ x_2)^m$$

si hanno facilmente le:

$$\alpha_0=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,\qquad m_1\alpha_1=(n-4)(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)$$

$$m_2\alpha_2=\frac{(n-4)(n-5)}{2}(a_0a_6-4a_1a_5+7a_2a_4-4a_3^2)+(n-4)^2(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2)$$

. . . .

$$\alpha_m=a_na_{n-4}-4a_{n-1}a_{n-3}+3a^2_{n-2},\quad m_{m-1}\alpha_{m-1}=(n-4)(a_na_{n-5}-3a_{n-1}a_{n-4}+2a_{n-2}a_{n-3})$$

ed in generale:

$$m_r\alpha_r=\sum_0^{\frac{r}{2}}{}_s p_{r,s}P_{r,s};\qquad m_r\alpha_r=\sum_0^{\frac{r-1}{2}}{}_s p_{r,s}P_{r,s}$$

secondo che r è pari o dispari; essendo:

$$m_r=\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}$$

$$p_{r,s}=\frac{(n-4)(n-5)\cdots(n-s-3)}{1\cdot2\cdot3\cdots s}\cdot\frac{(n-4)(n-5)\cdots(n-r+s-3)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r-s)}$$

e:

$$P_{r,s}=a_sa_{r-s+4}-4a_{s+1}a_{r-s+3}+6a_{s+2}a_{r-s+2}-4a_{s+3}a_{r-s+1}+a_{s+4}a_{r-s}$$

salvo il caso in cui $s=\frac{r}{2}$ nel quale la espressione $P_{r,\frac{r}{2}}$ deve dividersi pel numero 2.

Il sig. Wedekind nella sua Dissertazione suppone $a_0=0$ e ricava quindi dalle $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0\dots$ i valori dei coefficienti a_3, $a_4\dots$ in funzione di a_1, a_2; e giunge così a dimostrare che nei tre casi suaccennati la forma f è esprimibile come segue:

$$\left.\begin{array}{ll} n=4 & \xi_2(\xi_1^3-\xi_2^3)\\ n=6 & \xi_1\xi_2(\xi_1^4-\xi_2^4)\\ n=12 & \xi_1\xi_2(\xi_1^{10}+11\,\xi_1^5\xi_2^5-\xi_2^{10})\end{array}\right\}\tag{1}$$

nelle quali le ξ_1, ξ_2 sono funzioni lineari di x_1, x_2.

Sono queste le espressioni che eguagliate a zero danno le equazioni denominate del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro, dopo le citate ricerche del sig. Schwarz.

Noi intendiamo trattare qui il problema nella sua generalità, e supporremo perciò $a_0=1$, $a_1=0$, ipotesi le quali non la limitano punto. Le $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$ danno quindi:

$$a_4=-3a_2^2, \qquad a_5=-2a_2a_3$$

e le forme del quarto e del quinto ordine, dotate della proprietà enunciata, saranno:

$$f=x_1^4+\ 6a_2x_1^2x_2^2+\ 4a_3x_1x_2^3-3a_2^2x_2^4$$
$$f=x_1^5+10a_2x_1^3x_2^2+10a_3x_1^2x_2^3-15a_2^2x_1x_2^4-2a_2a_3x_2^5$$

notando che per quest'ultima sostituendo nella $\alpha_2=0$ i valori superiori di a_4, a_5, si ottiene:

$$a_3^2+4a_2^3=\lambda=0.$$

Le forme binarie degli ordini 4°, 6°, 12°; si distinguono appunto da quelle di ogni altro ordine dall'essere per queste ultime $\lambda=0$ mentre non lo è per le prime. Esclusi i primi tre casi, se poniamo per gli altri:

$$a_{2i}=(-1)^{i+1}(2i-1)a_2{}^i; \qquad a_{2i+1}=(-1)^{i+1}i\,a_2{}^{i-1}a_3 \tag{2}$$

si ottengono le:

per r dispari: $\qquad P_{r,2i}=0, \qquad P_{r,2i+1}=0$ identicamente:

per r pari: $\quad P_{r,2i}=(-1)^{\frac{r}{2}}\cdot 2[(2i+1)r-4i^2]a_2^{\frac{r}{2}-1}\lambda;$

$$P_{r,2i+1}=-(-1)^{\frac{r}{2}}\cdot 2[2(i+1)r-(2i+1)^2]a_2^{\frac{r}{2}-1}\lambda$$

vale a dire anche per r pari $P_{r,2i}=P_{r,2i+1}=0$ se $\lambda=0$; cioè per questa specie di forme f i valori (2) annullano identicamente il covariante $\frac{1}{2}(ff)^4$. La relazione $\lambda=0$ dà:

$$a_3=\pm 2a_2\sqrt{-a_2}$$

e le forme f corrispondenti si trasformano nella:

$$f=\xi_1{}^{n-1}\xi_2$$

essendo:

$$\xi_1=x_1\pm x_2\sqrt{-a_2}, \qquad \xi_2=x_1\mp(n-1)x_2\sqrt{-a_2}.$$

Si osservi infine che indicando con S l'invariante quadratico di queste forme, si ha pei valori (2)

$$S=0$$

e che dalla $\lambda=0$ deducesi la:

$$4h^3+\theta^2=0$$

essendo h, θ i due covarianti degli ordini $2(n-2)$, $3(n-2)$ seguenti:

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)^2, \qquad \theta = 2(fh).$$

3.° Passiamo ora a considerare le forme f degli ordini 4°, 6°, 12° per le quali $\frac{1}{2}(ff)^4 = 0$. La forma biquadratica è, come sopra, la:

$$f = x_1^4 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 - 3a_2^2x_2^4$$

e l'invariante cubico di essa essendo eguale a $-\lambda$ si avrà la nota relazione:

$$4h^3 + \theta^2 + \lambda f^3 = 0. \tag{3}$$

Sia ora:

$$F(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1^3 - \xi_2^3)$$

e posto:

$$\xi_1 = ax_1 + bx_2; \qquad \xi_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 \tag{4}$$

determiniamo le a, b; α, β per modo che risulti:

$$F(\xi_1, \xi_2) = Cf(x_1, x_2) \tag{5}$$

essendo C una costante. Dal confronto dei coefficienti delle potenze delle x_1, x_2 nei due membri di quest'ultima equazione, se si pone:

$$a = -\rho\alpha, \qquad b = \omega\beta$$

si hanno dapprima le:

$$C = -\alpha^4(\rho^3 + 1); \qquad \omega = \frac{\rho^3 + 4}{3\rho^2}.$$

poi le due seguenti:

$$\rho^3 - 8 = -3^2\frac{\alpha^2}{\beta^2}a_2\rho^3; \qquad \rho^6 + 20\rho^3 - 8 = \tfrac{1}{2}\cdot 3^3 \cdot \frac{\alpha^3}{\beta^3}a_3\rho^6 \tag{6}$$

essendo la quinta relazione soddisfatta identicamente. Le due ultime danno per la determinazione di ρ la equazione:

$$\frac{\rho^3(\rho^3 - 8)^3}{(\rho^6 + 20\rho^3 - 8)^2} = -\frac{4a_2^3}{a_3^2}$$

dalla quale ponendo:

$$y = -3\frac{\rho^2\sqrt{-a_2}}{\sqrt{\rho(\rho^3 - 8)}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

e quindi

$$\rho^3 = \frac{8y^2}{y^2 + 9a_2}$$

si ottiene la:

$$y^4 + 6a^2y^2 + 4a_3y - 3a_2^2 = 0. \tag{7}$$

Ora per la teorica dei covarianti associati se nella:

$$F(\xi_1,\ \xi_2)$$

poniamo:

$$\xi_1 x_1 - \tfrac{1}{4}\frac{dF}{d\xi_2}x_2; \qquad \xi_2 x_1 + \tfrac{1}{4}\frac{dF}{d\xi_1}x_2$$

e:

$$F\left(\xi_1 x_1 - \tfrac{1}{4}\frac{dF}{d\xi_2}x_2,\quad \xi_2 x_1 + \tfrac{1}{4}\frac{dF}{d\xi_1}x_2\right) = (F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4)(x_1,\ x_2)^4$$

si hanno come è noto le:

$$F_0 = F, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = FH, \qquad F_3 = F\Theta$$

essendo:

$$H = \tfrac{1}{2}(FF)^2, \qquad \Theta = 2(FH).$$

Se quindi supponiamo nelle (4) (5):

$$a = \xi_1, \qquad \alpha = \xi_2; \qquad b = -\tfrac{1}{4}\frac{dF}{d\xi_2}, \qquad \beta = \tfrac{1}{4}\frac{dF}{d\xi_1}$$

si avranno le:

$$\rho = -\frac{\xi_1}{\xi_2}, \qquad C = F, \qquad a_2 = H, \qquad a_3 = \Theta$$

e la equazione (6) diverrà:

$$y^4 + 6Hy^2 + 4\Theta y - 3H^2 = 0 \tag{8}$$

la quale è soddisfatta ponendo:

$$y = -\frac{\beta}{\alpha} = -\tfrac{3}{4}\xi_1^2.$$

Dalle relazioni (6) si hanno poi i valori di H, Θ, cioè

$$H = -\tfrac{1}{16}\xi_1(\xi_1^3 + 8\xi_2^3), \qquad \Theta = \tfrac{1}{32}(\xi_1^6 - 20\xi_1^3\xi_2^3 - 8\xi_2^6).$$

Le radici della (8) si ponno quindi esprimere nel modo seguente:

$$\sqrt{y_\infty} = \tfrac{1}{2}\xi_1\sqrt{-3}, \quad \sqrt{y_0} = \tfrac{1}{2}(\xi_1 + 2\xi_2), \quad \sqrt{y_1} = \tfrac{1}{2}(\xi_1 + 2\varepsilon\xi_2), \quad \sqrt{y_2} = \tfrac{1}{2}(\xi_1 + 2\varepsilon^2\xi_2)$$

indicando con ε una radice cubica immaginaria dell'unità. Ma la equazione (7) non è che la forma biquadratica f eguagliata a zero nella quale sia sostituita y in luogo del rapporto $x_1 : x_2$. Dunque le radici quadrate delle radici della equazione che si ottiene eguagliando a zero una forma biquadratica nella quale l'invariante quadratico è nullo, sono esprimibili in funzione razionale intera di due quantità ξ_1, ξ_2; proprietà nota dalle ricerche sulla teoria delle funzioni elittiche.

4.° Per $n=6$ la funzione f è la seguente:

$$f=x_1^6+15\,a_2x_1^4x_2^2+20\,a_3x_1^3x_2^3-45\,a_2^2x_1^2x_2^4-12\,a_2a_3x_1x_2^5+(5\,a_2^3-8\,\lambda)x_2^6.$$

Essa è, come è noto, il covariante di sesto ordine di una forma biquadratica (*); infatti se con φ si indica la forma biquadratica:

$$\varphi=x_2(x_1^3+3\,a_2x_1x_2^3+a_3x_2^3)$$

si ha:

$$k=\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)^2=\tfrac{1}{16}[-x_1^4+6\,a_2x_1^2x_2^2+8\,a_3x_1x_2^3-9\,a_2^2x_2^4]$$

ed:

$$f=64(\varphi k).$$

Da questa proprietà si deduce tosto la risoluzione della $f=0$ da quella della $\varphi=0$, giacchè supponendo:

$$\varphi=x_2(x_1-e_0x_2)(x_1-e_1x_2)(x_1-e_2x_2)$$

si ottiene:

$$f=\Pi[(x_1-e\,x_2)^2-3\,x_2^2(e^2+a_2)]$$

e le radici della $f=0$ sono date dalla:

$$x_1=x_2[e\pm\sqrt{3(e^2+a_2)}]$$

nella quale si sostituiscono le e_0, e_1, e_2 in luogo di e.

Osserviamo ora che ponendo:

$$e=-\frac{\sqrt{y^3+16}}{\sqrt{y^3+4}}\sqrt{-a_2}$$

nella equazione:

$$e^3+3\,a_2e+a_3=0$$

di cui le radici sono appunto le e_0, e_1, e_2, si giunge alla:

$$\frac{(y^2+4)^3}{(y^3+16)(y^3-2)^2}=-\frac{4\,a_2^3}{a_3^2}$$

dalla quale indicando con δ il rapporto $\frac{4\,a_2^3}{a_3^2}$ si ottiene la:

$$\frac{y^3+4}{3y}=\sqrt[3]{\frac{4\,\delta}{1+\delta}}=\frac{2\,a_2}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\lambda}}$$

ossia la equazione:

$$y^3-\frac{6\,a_2}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\lambda}}y+4=0 \tag{9}$$

(*) Clebsch e Gordan: *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie.* Annali di Matematica, t. 1, pag. 73.

di cui le radici sono:

$$y_0 = -\sqrt[3]{2\left(1+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \sqrt[3]{2\left(1-\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$y_1 = -\varepsilon\sqrt[3]{2\left(1+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varepsilon^2\sqrt[3]{2\left(1-\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

$$y_2 = -\varepsilon^2\sqrt[3]{2\left(2+\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varepsilon\sqrt[3]{2\left(1-\frac{a_3}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

supposto ε una radice cubica immaginaria dell'unità. Sostituendo questi valori nella relazione:

$$x_1\sqrt{y^3+4} + x_2\sqrt{y^3+16}\cdot\sqrt{-a_2} = \pm 6x_2\sqrt{-a_2} \tag{10}$$

si avranno i valori del rapporto $x_1 : x_2$ che annullano la forma f.

Sia ora $F(\xi_1, \xi_2)$ un'altra forma del sesto ordine per la quale $\frac{1}{2}(FF)^4 = 0$ identicamente. Ponendo in essa:

$$\xi_1 x_1 - \frac{1}{6}\frac{dF}{d\xi_2}x_2, \qquad \xi_2 x_1 + \frac{1}{6}\frac{dF}{d\xi_1}x_2 \tag{11}$$

in luogo delle ξ_1, ξ_2; e supponendo:

$$F\left(\xi_1 x_1 - \frac{1}{6}\frac{dF}{d\xi_2}x_2,\ \xi_2 x_1 + \frac{1}{6}\frac{dF}{d\xi_1}x_2\right) = F(\xi_1, \xi_2) f(x_1, x_2)$$

si hanno le:

$$a_2 = H, \qquad a_3 = \Theta$$

e siccome indicando con A l'invariante quadratico di f risulta $A = -18\lambda$, sarà:

$$4H^3 + \Theta^2 = -\frac{1}{18}AF^4$$

la equazione (9) si trasformerà nella:

$$y^3 + 36\frac{H}{\sqrt[3]{6AF^4}}y + 4 = 0 \tag{12}$$

e si avrà:

$$y_0 = -\sqrt[3]{2\left(1+\frac{3\Theta}{F^2\sqrt{-\frac{1}{2}A}}\right)} - \sqrt[3]{2\left(1-\frac{3\Theta}{F^2\sqrt{-\frac{1}{2}A}}\right)}.$$

Se la $F(\xi_1, \xi_2)$ è la forma canonica:

$$F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2(\xi_1^4 - \xi_2^4)$$

si hanno le:

$$A = \frac{1}{6}, \qquad H = -\frac{1}{36}[\xi_1^8 + 14\xi_1^4\xi_2^4 + \xi_2^8]$$

e l'equazione (12) è soddisfatta dai valori:

$$y_0 = \frac{4\xi_1^2\xi_2^2}{\sqrt[3]{F^2}}, \qquad y_1 = \frac{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}{\sqrt[3]{F^2}}, \qquad y_2 = -\frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}{\sqrt[3]{F^2}}.$$

La relazione (10) dà luogo in questo caso alla relazione quadratica:

$$x_1^2(y^3+4) + 2x_1x_2\sqrt{y^3+4}\sqrt{y^3+16}\sqrt{-H} - x_2^2(y^3-20)H = 0$$

la quale, sostituendo per y il valore y_0, si trasforma nella:

$$\left(\xi_1 x_1 - \tfrac{1}{6}\frac{dF}{d\xi_2}x_2\right)\left(\xi_1 x_2 + \tfrac{1}{6}\frac{dF}{d\xi_1}x_2\right) = 0 \tag{13}$$

di cui il primo membro è il prodotto delle due espressioni (11). Analogamente se si pone:

$$\left.\begin{matrix} \xi_1 + \xi_2 = \eta_1\sqrt{2}, & \xi_1 - \xi_2 = \eta_2\sqrt{2} \\ \xi_1 + i\xi_2 = \vartheta_1\sqrt{2}, & \xi_1 - i\xi_2 = i\vartheta_2\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \tag{14}$$

dove $i = \sqrt{-1}$, essendo:

$$F(\eta_1, \eta_2) = F(\vartheta_1, \vartheta_2) = F(\xi_1, \xi_2)$$

si otterranno, dalla sostituzione delle y_1, y_2 nella relazione quadratica superiore, due prodotti della forma (13). Si avrà così il teorema:

Le radici della equazione del sesto grado che si ottiene eguagliando a zero una forma f del sesto ordine per la quale il covariante $\frac{1}{2}(ff)^4$ è identicamente nullo, sono esprimibili in funzione di due quantità ξ_1, ξ_2 nel modo seguente:

$$\frac{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{6}[\ \xi_1^4 - 5\xi_2^4] \qquad \frac{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{6}[\ \xi_2^4 - 5\xi_1^4]$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{6}[5\eta_2^4 - \eta_1^4] \qquad \frac{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{6}[5\eta_1^4 - \eta_2^4]$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{6}[5\vartheta_2^4 - \vartheta_1^4] \qquad \frac{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{6}[5\vartheta_1^4 - \vartheta_2^4]$$

nelle quali le η_1, η_2; ϑ_1, ϑ_2 hanno i valori (14).

5.° La considerazione della forma generale del 12° ordine avente la proprietà indicata offre alcuni interessanti risultati per la loro connessione colla teorica delle funzioni elittiche. Notiamo dapprima che i valori dei coefficienti della medesima, fatta astrazione dai coefficienti numerici binomiali, sono i seguenti:

$$a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4=-3a_2^2,\quad a_5=-2a_2a_3,\quad a_6=5(a_2^3-\tfrac{4}{7}\lambda)$$
$$a_7=3a_2^2a_3,\quad a_8=-a_2(7a_2^3+32\lambda),\quad a_9=-4a_3(a_2^3+20\lambda),\quad a_{10}=9a_2^2(a_2^3+56\lambda)$$
$$a_{11}=5a_2a_3(a_2^3+128\lambda),\quad a_{12}=-11a_2^6-11\cdot 4^4\cdot a_2^3\lambda+4^4\cdot 5^2\cdot\lambda^2.$$

Essa decomponesi in fattori del secondo grado affatto analogamente alla forma del sesto ordine; infatti indicando con z_∞, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 le radici della equazione:

$$\varphi=z^6+15a_2z^4+20a_3z^3-45a_2^2z^2-12a_2a_3z-\tfrac{5}{4}a_3^2 \tag{15}$$

si ottiene la:

$$f=\Pi[(x_1-zx_2)^2-x_2^2\mu(z)]$$

ponendo per z le radici della $\varphi=0$, ed essendo:

$$\mu(z)=\tfrac{5}{3}\,\frac{z^3+3a_2z+a_3}{z}.$$

Ora la equazione $\varphi=0$ è la equazione modulare corrispondente alla trasformazione del quinto ordine dell'integrale elittico (*):

$$\frac{dx}{\sqrt{x^3+3a_2x+a_3}}$$

quindi le radici dell'equazione $f=0$ sono esprimibili col mezzo di funzioni elittiche. La equazione $\varphi=0$ si può facilmente trasformare in una di quelle che hanno lo stesso gruppo dell'equazione del moltiplicatore. Si osservi infatti che ponendo:

$$u=\tfrac{1}{6}\frac{d\varphi}{dz},\qquad v=\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4}\frac{d^3\varphi}{dz^3}=z^3+3a_2z+a_3$$

si ha identicamente:

$$4\varphi=9zu-5v^2$$

quindi introducendo una nuova variabile y legata alla z dalla:

$$y=-9\frac{a_2}{m}\frac{z}{v}$$

nella quale:

$$\frac{a_2}{m}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\lambda}$$

(*) Vedi la mia Nota: *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques.* Comptes Rendus, novembre 1874.

essendo per la $\varphi = 0$:

$$9\frac{z}{\upsilon} = 5\frac{\upsilon}{u}$$

si avrà anche:

$$y = -5\frac{a_2}{m}\frac{\upsilon}{u}.$$

Così dalla:

$$y^2 = 81\frac{a_2^2}{m^2}\cdot\frac{z^2}{\upsilon^2}$$

si ottiene la:

$$y^2 = 5\cdot 9\cdot\frac{a_2^2}{m^2}\frac{z}{u}$$

dalle quali osservando essere $u = \frac{1}{6}\varphi'(z)$, si dedurranno le:

$$\Sigma y = 0 \qquad \Sigma y^2 = 0$$

le sommatorie estendendosi alle radici della trasformata in y. Inoltre si otterranno facilmente le:

$$\Sigma\frac{1}{y} = \frac{12}{5}m, \qquad \Sigma\frac{1}{y^2} = \frac{\overline{12}^2}{5^2}\cdot m^2$$

quindi:

$$\left(\Sigma\frac{1}{y}\right)^2 = \Sigma\frac{1}{y^2}$$

cioè nullo anche il coefficiente del quinto termine. La equazione trasformata sarà così la seguente:

$$y^6 + 10y^3 - 12my + 5 = 0 \tag{16}$$

di cui le radici hanno la proprietà sopra indicata.

Osservando ora che:

$$\mu(z) = -15\frac{a_2}{my}; \qquad z = -\frac{\sqrt{-a_2}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sqrt{y^3+my+10}}{\sqrt{y}} \tag{17}$$

si avrà per uno dei fattori quadratici della f la espressione:

$$x_1^2 + 2\sqrt{-a_2}\cdot\frac{\sqrt{y^3+my+10}}{\sqrt{my}}x_1x_2 - a_2\frac{y^3+my-5}{my}x_2^2$$

nella quale y è una delle radici della equazione (16).

Se con $F(\xi_1, \xi_2)$ si indica una forma del 12° ordine per la quale $\frac{1}{2}(FF)^4 = 0$

identicamente e si pongono nella medesima in luogo di ξ_1, ξ_2 le:

$$\xi_1 x_1 - \tfrac{1}{12}\frac{dF}{d\xi_2}x_2; \qquad \xi_2 x_1 + \tfrac{1}{12}\frac{dF}{d\xi_1}x_2$$

supponendo:

$$F\left(\xi_1 x_1 - \tfrac{1}{12}\frac{dF}{d\xi_2}x_2,\ \xi_2 x_1 + \tfrac{1}{12}\frac{dF}{d\xi_1}x_2\right) = F(\xi_1,\ \xi_2)f(x_1,\ x_2)$$

si hanno le:

$$a_2 = H \qquad a_3 = \Theta$$

essendo:

$$H = \tfrac{1}{2}(FF)^2, \qquad \Theta = 2(FH)$$

e siccome indicando con A l'invariante quadratico di f si ha:

$$A = \tfrac{6}{7}\cdot 3^4\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\lambda^2$$

si avrà:

$$4H^3 + \Theta^2 = \tfrac{1}{180}BF^5$$

posto:

$$B = \sqrt{\tfrac{7}{6}A}.$$

La equazione in y diverrà in questo caso la:

$$y^6 + 10y^3 - 72\frac{H}{\sqrt[3]{\frac{3}{10}BF^5}}y + 5 = 0. \tag{18}$$

È noto che la proprietà caratteristica di quelle equazioni che hanno lo stesso gruppo della equazione del moltiplicatore si è, che le radici quadrate delle loro radici si ponno esprimere nel modo seguente:

$$\sqrt{\eta_\infty} = \alpha_0\sqrt{5}; \qquad \sqrt{\eta_r} = \alpha_0 + \varepsilon^r\alpha_1 + \varepsilon^{4r}\alpha_2$$

essendo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, α_0, α_1, α_2 tre indeterminate, ed $r = 0$, 1, 2, 3, 4. La forma generale delle equazioni stesse è la:

$$(\eta - a)^6 - 4a(\eta - a)^5 + 10b(\eta - a)^3 - 4c(\eta - a) + 5b^2 - 4ac = 0$$

nella quale:

$$a = \alpha_0^2 + \alpha_1\alpha_2; \qquad b = 8\alpha_0^4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_0^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^3\alpha_2^3 - \alpha_0(\alpha_1^5 + \alpha_2^5)$$

$$c = 80\alpha_0^6\alpha_1^2\alpha_2^2 - 40\alpha_0^4\alpha_1^3\alpha_2^3 + 5\alpha_0^2\alpha_1^4\alpha_2^4 + \alpha_1^5\alpha_2^5 - \alpha_0(32\alpha_0^4 - 20\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_1^2\alpha_2^2)(\alpha_1^5 + \alpha_2^5) + \tfrac{1}{4}(\alpha_1^5 + \alpha_2^5)^2.$$

Supponendo in quest'ultima:

$$a = 0, \qquad \eta = y\sqrt[3]{b}$$

si ottiene la:

$$y^6+10y^3-4\frac{c}{\sqrt[3]{b^5}}y+5=0 \tag{19}$$

che ha la stessa forma della superiore.

La $a=0$ è soddisfatta ponendo:

$$\alpha_1=\xi_1^2, \qquad \alpha_2=-\xi_2^2 \text{ e quindi } \alpha_0=\xi_1\xi_2;$$

per questi valori le b, c diventano:

$$\left.\begin{aligned} b&=-\xi_1\xi_2(\xi_1^{10}+11\xi_1^5\xi_2^5-\xi_2^{10}) \\ c&=124\xi_1^{10}\xi_2^{10}-57\xi_1^5\xi_2^5(\xi_1^{10}-\xi_2^{10})+\tfrac{1}{4}(\xi_1^{10}-\xi_2^{10})^2 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

cioè la espressione di b è, per le ricerche dei sig.i Schwarz e Klein, la forma canonica delle forme del dodicesimo ordine aventi la proprietà indicata. Si potrà quindi porre:

$$b=-F(\xi_1, \xi_2)$$

e si dimostrerà facilmente essere:

$$c=-36H.$$

Osservando infine che per la forma canonica qui considerata è:

$$A=\frac{5^2}{3\cdot 7\cdot 8} \text{ sarà: } B=\tfrac{5}{12}$$

le equazioni (18) (19) coincideranno nella sola:

$$y^6+10y^3-\frac{144H}{\sqrt[3]{F^5}}y+5=0 \tag{21}$$

come fu già dimostrato dal prof. Klein (pag. 203 della Memoria citata).

I fattori quadratici della forma f si ponno quindi esprimere nel modo seguente:

$$x_1^2+\frac{\sqrt{10F^2-12H\eta-F\eta^3}}{\sqrt{3\eta}}x_1x_2-\frac{5F^2+12H\eta+F\eta^3}{12\eta}x_2^2$$

néi quali pongansi per η i valori dedotti dalle:

$$\sqrt{\eta_\infty}=\xi_1\xi_2\sqrt{5}, \qquad \sqrt{\eta_r}=\xi_1\xi_2+\varepsilon^r\xi_1^2-\varepsilon^{4r}\xi_2^2.$$

Sostituendo η_∞ in luogo di η trovasi facilmente che quella espressione quadratica equivale alla:

$$\frac{1}{\xi_1\xi_2}\left[\xi_1x_1-\frac{1}{12}\frac{dF}{d\xi_2}x_2\right]\left[\xi_2x_1+\frac{1}{12}\frac{dF}{d\xi_1}x_2\right]$$

e siccome ponendo:

$$\vartheta_1 = \frac{t}{\rho}[\rho\xi_2 - \varepsilon^r\xi_1]; \qquad \vartheta_2 = -\frac{1}{t\sqrt{5}}[\rho\xi_1 + \varepsilon^{4r}\xi_2]$$

nella quale $\rho = \varepsilon + \varepsilon^4$, si ha:

$$\vartheta_1\vartheta_2\sqrt{5} = \xi_1\xi_2 + \varepsilon^r\xi_1^2 - \varepsilon^{4r}\xi_2^2 = \sqrt{\eta_r}\,.$$

determinando t per modo che risulti:

$$F(\vartheta_1,\ \vartheta_2) = F(\xi_1,\ \xi_2)$$

cioè:

$$t^2 = -\frac{\rho}{\sqrt{5}}$$

si avrà per gli altri fattori quadratici la espressione:

$$\frac{1}{\vartheta_1\vartheta_2}\left[\vartheta_1 x_1 - \tfrac{1}{12}\frac{dF}{d\vartheta_2}x_2\right]\left[\vartheta_2 x_1 + \tfrac{1}{12}\frac{dF}{d\vartheta_1}x_2\right].$$

Così se nella:

$$z = -\sqrt{-a_2}\,\frac{\sqrt{y^3 + my + 10}}{\sqrt{my}}$$

si pone y_∞ in luogo di y, si ottiene la:

$$z_\infty = -\tfrac{5}{12}(\xi_1^{10} + \xi_2^{10})$$

ed analogamente per un'altra radice qualsivoglia z_r si avrà:

$$z_r = -\tfrac{5}{12}(\vartheta_1^{10} + \vartheta_2^{10}).$$

Le radici dell'equazione modulare (15) per la trasformazione del quinto ordine dell'integrale elittico sono quindi esprimibili in funzione di due indeterminate ξ_1, ξ_2 nel modo seguente:

$$z_\infty = -5\alpha, \qquad z_r = \alpha + \varepsilon^r\beta + \varepsilon^{4r}\gamma + \varepsilon^{3r}\delta + \varepsilon^{2r}\varphi$$

essendo:

$$\alpha = \tfrac{1}{12}(\xi_1^{10} + \xi_2^{10}) \qquad \begin{array}{ll} \beta = \tfrac{1}{2}\xi_1\xi_2^4(7\xi_1^5 + \xi_2^5) & \delta = \tfrac{1}{2}\xi_1^3\xi_2^2(3\xi_1^5 + 4\xi_2^5) \\ \gamma = \tfrac{1}{2}\xi_1^4\xi_2(7\xi_2^5 - \xi_1^5) & \varphi = \tfrac{1}{2}\xi_1^2\xi_2^3(3\xi_2^5 - 4\xi_1^5). \end{array}$$

Da questi valori deducesi facilmente la:

$$(z_\infty - z_0)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = \frac{\sqrt{5}}{8}F^2\cdot\psi$$

nella quale:

$$\psi = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1^4 + 2\xi_1^3\xi_2 - 6\xi_1^2\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2^3 + \xi_2^4).$$

Ora essendo identicamente, siccome ha dimostrato il sig. Klein:

$$4 \cdot 6^3 \cdot \Theta = \psi^5 - 10\psi^3 F + 45\psi F^2$$

ponendo $\psi = u\sqrt{F}$, si otterrà che la equazione del quinto grado:

$$u^5 - 10u^3 + 45u - 24\frac{a_3}{\sqrt{\frac{1}{3}\lambda}} = 0$$

di cui le radici sono le:

$$u = \frac{2}{9\sqrt{\frac{5}{3}\lambda}}(z_\infty - z_0)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)$$

ha per risolvente la equazione modulare (15) considerata superiormente.

6.° È noto che indicando con $\sqrt{y'}$, $\sqrt{y''}$ le espressioni (*):

$$\sqrt{y'} = (y^5 + 11y^2 - 12m)\sqrt{y}, \qquad \sqrt{y''} = (y^4 + 9y)\sqrt{y}$$

si ha per una qualsivoglia delle radici della equazione (16), la relazione:

$$20(m^3 - 1)\frac{d\sqrt{y}}{dm} = 2m^2\sqrt{y} + m\sqrt{y'} + \sqrt{y''}$$

dalla quale e dalla (16) si ottengono le:

$$20(m^3 - 1)\frac{d\sqrt{y'}}{dm} = 10[2\sqrt{y} + m^2\sqrt{y'} + m\sqrt{y''}]$$

$$20(m^3 - 1)\frac{d\sqrt{y''}}{dm} = 18[2m\sqrt{y} + \sqrt{y'} + m^2\sqrt{y''}].$$

Posto quindi:

$$20(m^3 - 1)\frac{d\sqrt{y}}{dm} = a_1\sqrt{y} + b_1\sqrt{y'} + c_1\sqrt{y''}$$

si deducono le:

$$\left.\begin{aligned} \overline{20}^2(m^3 - 1)^2\frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} &= a_2\sqrt{y} + b_2\sqrt{y'} + c_2\sqrt{y''} \\ \overline{20}^3(m^3 - 1)^3\frac{d^3\sqrt{y}}{dm^3} &= a_3\sqrt{y} + b_3\sqrt{y'} + c_3\sqrt{y''} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

dove:

$$a_1 = 2m^2, \qquad b_1 = m, \qquad c_1 = 1$$

(*) Le formole generali pel caso in cui a non $= 0$ sono date in una mia Nota pubblicata in questi Annali, t. 1, pag. 222.

come sopra, ed:

$$a_2 = -30m^2 a_1 + 24m(m^3-1) \qquad a_3 = -4\cdot 289\, m(m^3-1)a_1 - 90m^2 a_2 + 440(m^3-1)^2$$

$$b_2 = -30m^2 b_1 + 2(m^3-1) \qquad b_3 = -4\cdot 289\, m(m^2-1)b_1 - 90m^2 b_2$$

$$c_2 = -30m^2 c_1 \qquad c_3 = -4\cdot 289\, m(m^3-1)c_1 - 90m^2 c_2.$$

Le relazioni (22) conducono evidentemente alla equazione differenziale lineare del terzo ordine seguente:

$$200(m^3-1)\frac{d^3\sqrt{y}}{dm^3} + 900m^2\frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} + 578m\frac{d\sqrt{y}}{dm} - 11\sqrt{y} = 0 \tag{23}$$

mentre formando il quadrato della prima di esse, tenendo presente la equazione (16), si ha:

$$\overline{10}^2\cdot(m^3-1)\left(\frac{d\sqrt{y}}{dm}\right)^2 = y^3 + my + 10$$

per la quale dalla (17) deducesi la:

$$10\sqrt{m^3-1}\cdot\frac{d\sqrt{y}}{dm} = -\frac{3z\sqrt{z}}{\sqrt{z^3+3a_2z+a_3}}\cdot$$

Confrontando ora le equazioni (16) (21) si ha:

$$m = \frac{12H}{\sqrt[3]{F^5}} \tag{24}$$

da cui:

$$m^3 - 1 = -3\cdot\overline{12}^2\cdot\frac{\Theta^2}{F^5}\cdot \tag{25}$$

Supponiamo nell'una e nell'altra di queste equazioni:

$$\xi_1 = \xi\xi_2$$

e derivando la prima logaritmicamente rispetto ad m si avrà:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{3FH}(3FH' - 5HF')\frac{d\xi}{dm}$$

posto $F' = \dfrac{dF}{d\xi}$, $H' = \dfrac{dH}{d\xi}\cdot$ Ma essendo:

$$\Theta = 2(FH) = \tfrac{1}{30}(5HF' - 3FH')$$

sarà anche:

$$\frac{1}{m} = -10\frac{\Theta}{FH}\frac{d\xi}{dm}\cdot \tag{26}$$

Le equazioni (24) (25) (26), rammentando essere $b = -F(\xi)\xi_2^{12}$ conducono facilmente alla:

$$\frac{10}{\sqrt{3}}\sqrt{m^3-1}\cdot\frac{d\xi}{dm} = \frac{\sqrt[6]{b}}{\xi_2^2}$$

ma:

$$\sqrt{y_\infty} = \frac{\alpha_0\sqrt{5}}{\sqrt[6]{b}} = \frac{\xi\xi_2^2\sqrt{5}}{\sqrt[6]{b}}$$

si avrà quindi la interessante relazione:

$$2\sqrt{\tfrac{5}{3}(m^3-1)}\cdot\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dm} = \frac{1}{\sqrt{y_\infty}}. \tag{27}$$

Formando il differenziale secondo del logaritmo di ciascuno dei membri di questa equazione, si giunge dopo una facile calcolazione alla:

$$[\xi]_m = \frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\sqrt{y}}{dm}\right)^2 - \sqrt{y}\frac{d^2\sqrt{y}}{dm^2} - \frac{3m^2}{2(m^3-1)}\sqrt{y}\frac{d\sqrt{y}}{dm} - \frac{3}{40(m^3-1)}\right] + \frac{27m^4}{8(m^3-1)^2} - \frac{3m}{m^3-1}$$

posto:

$$[\xi]_m = \frac{\frac{d\xi}{dm}\frac{d^3\xi}{dm^3} - 3\left(\frac{d^2\xi}{dm^2}\right)^2}{2\left(\frac{d\xi}{dm}\right)^2}$$

ed y in luogo di y_∞.

Ora dalle (22) si ha che, indicando con P la espressione moltiplicata per $\frac{1}{y}$ nella equazione differenziale superiore, si ottiene:

$$P = -\frac{11my}{200(m^3-1)}$$

quindi sarà:

$$[\xi]_m = \frac{27m^4}{8(m^3-1)^2} - \frac{611m}{200(m^3-1)}. \tag{28}$$

La espressione P conduce tosto alla:

$$\frac{dP}{dm} + \frac{3m^2}{m^3-1}P = -\sqrt{y}\left[\frac{d^3\sqrt{y}}{dm^3} + \frac{9m^2}{2(m^3-1)}\frac{d^2\sqrt{y}}{dx^2} + \frac{3m}{m^3-1}\frac{d\sqrt{y}}{dm}\right]$$

mentre pel valore superiore di P si ha:

$$\frac{dP}{dm} + \frac{3m^2}{m^3-1}P = -\frac{11\sqrt{y}}{200(m^3-1)}\left[2m\frac{d\sqrt{y}}{dm} + \sqrt{y}\right]$$

e quindi eguagliando i secondi membri si giungerà nuovamente alla equazione (23).

Trasformiamo ora la equazione (28) ponendo:

$$m^3 = x;$$

faremo uso perciò della relazione generale facilmente dimostrabile:

$$[\xi]_x = [m]_x + [\xi]_m \left(\frac{dm}{dx}\right)^2$$

per la quale essendo:

$$[m]_x = \frac{4}{9x^2}, \qquad [\xi]_m \left(\frac{dm}{dx}\right)^2 = \frac{3}{8(1-x)^2} + \frac{611}{1800\,x(1-x)}$$

si otterrà:

$$[\xi]_x = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(1-x)} \tag{29}$$

essendo:

$$\lambda = \tfrac{1}{3}, \qquad \mu = \tfrac{1}{5}, \qquad \nu = \tfrac{1}{2}.$$

Questo risultato, al quale può giungersi anche direttamente per mezzo della teorica delle forme binarie, ha qui una singolare importanza giacchè dimostra che la risoluzione della equazione (16) può ottenersi mediante le serie ipergeometriche di Gauss.

Il prof. Kummer ha dimostrato già da lungo tempo (*) come si possa esprimere mediante quelle serie l'integrale della equazione differenziale del terzo ordine:

$$[\xi]_x = \frac{A'\xi^2 + B'\xi + C'}{2\xi^2(1-\xi)^2} - \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2}.$$

Ora nel caso qui considerato si hanno le:

$$A' = 0, \qquad B' = 0, \qquad C' = 0$$

$$A = \mu^2 - 1, \qquad B = 1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2, \qquad C = \lambda^2 - 1$$

perciò ponendo:

$$\begin{aligned} A &= (\alpha - \beta)^2 - 1 & A' &= (\alpha' - \beta')^2 - 1 \\ B &= 4\alpha\beta - 2\gamma(\alpha + \beta - 1) & B' &= 4\alpha'\beta' - 2\gamma'(\alpha' + \beta' - 1) \\ C &= \gamma(\gamma - 2) & C' &= \gamma'(\gamma' - 2) \end{aligned}$$

si otterranno per le α, β,... i seguenti valori:

$$\alpha = \tfrac{41}{60}, \qquad \beta = \tfrac{29}{60}, \qquad \gamma = \tfrac{2}{3}$$

$$\alpha' = 2, \qquad \beta' = 1, \qquad \gamma' = 2.$$

(*) *De generali quandam aequatione differentiali tertii ordinis*, pag. 6.

Indicando con F una funzione ipergeometrica, l'integrale della equazione (29), rammentando essere:

$$F(2,\,1,\,2,\,\xi)=\frac{1}{1-\xi}$$

sarà quindi:

$$\xi=\frac{a\upsilon_1+b\upsilon_2}{c\upsilon_1+d\upsilon_2} \tag{30}$$

nella quale espressione a, b, c, d sono costanti a determinarsi, e le υ_1, υ_2 sono come è noto, due serie ipergeometriche integrali particolari dell'equazione differenziale del secondo ordine (*):

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{d\upsilon}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\upsilon=0. \tag{31}$$

Dal valore superiore di ξ si deduce tosto:

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{(ad-bc)\left(\upsilon_2\frac{d\upsilon_1}{dx}-\upsilon_1\frac{d\upsilon_2}{dx}\right)}{(a\upsilon_1+b\upsilon_2)(c\upsilon_1+d\upsilon_2)}$$

ed essendo per un noto teorema di Abel:

$$\upsilon_2\frac{d\upsilon_1}{dx}-\upsilon_1\frac{d\upsilon_2}{dx}=Cx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}=Cx^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

dove C è una costante, si otterrà dalla equazione (27):

$$\sqrt{y}=D(1-x)(a\upsilon_1+b\upsilon_2)(c\upsilon_1+d\upsilon_2)$$

indicando D una costante.

Le radici di una equazione del sesto grado (16) avente lo stesso gruppo di quello del moltiplicatore nella trasformazione del quinto ordine delle funzioni elittiche e per la quale $a=0$, si possono quindi esprimere per mezzo di due integrali particolari dell'equazione (31), ossia per mezzo di serie ipergeometriche di Gauss.

A questo risultato si giunge anche direttamente partendo dalla equazione differenziale lineare del terzo ordine stabilita più sopra, ossia dalla:

$$5400x^2(1-x)\frac{d^3\sqrt{y}}{dx^3}+2700x(4-7x)\frac{d^2\sqrt{y}}{dx^2}+6(200-1389x)\frac{d\sqrt{y}}{dx}+11\sqrt{y}=0.$$

(*) Kummer: *Ueber die hypergeometrische Reihe.* Crelle, Band. 15, pag. 52.

Infatti ponendo dapprima:

$$\sqrt{y}=(1-x)Y$$

si ottiene la:

$$\frac{d^3Y}{dx^3}+3p\frac{d^2Y}{dx^2}+\left(\frac{dp}{dx}+p^2+4q\right)\frac{dY}{dx}+2\left(2pq+\frac{dq}{dx}\right)Y=0$$

nella quale sono:

$$p=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)},\qquad q=-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)};$$

in secondo luogo sostituendo ad Y il prodotto UV si giunge alla equazione:

$$U[Q'+2pQ]+V[P'+2pP]+3[PV'+QU']=0$$

posto:

$$P=\frac{d^2U}{dx^2}+p\frac{dU}{dx}+qU,\qquad Q=\frac{d^2V}{dx^2}+p\frac{dV}{dx}+qV$$

la quale è appunto soddisfatta dalle $P=0$, $Q=0$.

Notiamo infine come la proprietà indicata dalla equazione (30) pel rapporto $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ della forma canonica di Schwarz del dodicesimo ordine sussiste anche pel rapporto $\frac{x_1}{x_2}$ di qualunque forma binaria $f(x_1, x_2)$ del dodicesimo ordine per la quale il covariante $(ff)^4$ sia identicamente nullo.

Ottobre 1876.

Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperelittiche (*).

(*Memoria di* A. Clebsch, *traduzione con note ed aggiunte di* F. Brioschi.)

§ 13.

Determinazione delle soluzioni le quali passano dalla prima alla seconda classe e reciprocamente.

Esaminiamo ora il modo di comportarsi di una soluzione u'', v'' che era di prima classe rispetto ad u, v; ma che non era congiunta in un Triplo con u', v'. Nell'ordinamento relativo ad u, v considero i tripli conjugati, uno dei quali contiene la soluzione u', v' e dei quali un secondo contiene la soluzione u'', v''. Essi sono caratterizzati mediante un sistema m, t e precisamente in guisa che, ponendo:

$$\eta = m(\xi + t)$$

la soluzione u'', v'' riesce determinata mediante ξ_1 ed:

$$\eta_1 = \varepsilon^i \cdot m(\xi_1 + t)$$

dove i è eguale o diverso da zero, secondo che la soluzione u'', v'' nel suo triplo era o no coordinata alla soluzione u', v' nel triplo di questa. Questi due casi devonsi trattare separatamente.

1.° Sia i diverso da zero. In questo caso porrò dapprima $i = 1$; per passare al caso $i = 2$ non si avrà infine che da rimpiazzare ε con ε^2, e siccome $\varepsilon(\varepsilon - 1)$ muta in pari tempo di segno, cambiare i segni di v' e di v''. Si hanno

(*) Continuazione e fine, vedi Annali di Matematica, t. 7, pag. 257.

le equazioni (§ 2):

$$\left.\begin{aligned}
u' &= u-\xi^2-m\xi(\xi+t)-m^2(\xi+t)^2\\
u'' &= u-\xi_1^2-\varepsilon m\xi_1(\xi_1+t)-\varepsilon^2 m^2(\xi_1+t)^2\\
2\upsilon' &= \varepsilon(\varepsilon-1)\{[\xi+2m(\xi+t)]u-[\xi^3+2m\xi^2(\xi+t)+2m^2\xi(\xi+t)^2+m^3(\xi+t)^3]\}\\
2\upsilon'' &= \varepsilon(\varepsilon-1)\{[\xi_1+2\varepsilon m(\xi_1+t)]u-[\xi_1^3+2\varepsilon m\xi_1^2(\xi_1^2+t)+2\varepsilon^2 m^2\xi_1(\xi_1+t)^2+m^3(\xi_1+t)^3]\}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Inoltre si possono anche rappresentare u, υ per mezzo delle espressioni m, ξ, ξ_1, t contenenti sette costanti indipendenti. Infatti le due equazioni:

$$2\upsilon=3u\xi-\xi^3+\eta^3$$
$$2\upsilon=3u\xi_1-\xi_1^3+\eta_1^3$$

risolte rispetto ad u, υ danno:

$$3u=\xi^2+\xi\xi_1+\xi_1^2-\frac{\eta^3-\eta_1^3}{\xi-\xi_1}$$
$$2\upsilon=\xi\xi_1(\xi+\xi_1)-\frac{\eta^3\xi_1-\eta_1^3\xi}{\xi-\xi_1}$$

ovvero eseguendo la divisione dopo aver sostituito ad η, η_1 i loro valori:

$$\eta=m(\xi+t),\qquad \eta_1=\varepsilon m(\xi_1+t)$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned}
3u &= (\xi^2+\xi\xi_1+\xi_1^2)(1-m^3)-3m^3t(\xi+\xi_1)-3m^3t^2\\
2\upsilon &= \xi\xi_1(\xi+\xi_1)(1-m^3)-3m^3t\xi\xi_1+m^3t^3.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Profittando delle equazioni (6) (7) si ottengono le seguenti decomposizioni:

$$\left.\begin{aligned}
\upsilon'+\upsilon'' &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(u'-u'')(1-\varepsilon^2 m)[(\xi+t)(1-\varepsilon m)-(\xi_1+t)(1-m)]\\
\upsilon'-\upsilon'' &= (\varepsilon-1)\frac{u'-\varepsilon^2u''}{1-\varepsilon^2 m}\{\varepsilon m^2t-\tfrac{1}{3}(1-\varepsilon)[\xi(1+m+m^2)-\varepsilon^2\xi_1(1+\varepsilon m+\varepsilon^2m^2)]\}\\
u'-\varepsilon u'' &= -\varepsilon^2[(\xi+t)(1-\varepsilon m)-(\xi_1+t)(1-m)]\{\varepsilon m^2t-\tfrac{1}{3}(1-\varepsilon)[\xi(1+m+m^2)\\
&\qquad -\varepsilon^2\xi_1(1+\varepsilon m+\varepsilon^2m^2)]\}.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Queste equazioni insegnano, che la soluzione u'', υ'' rispetto alla soluzione u', υ' è della prima classe, e si ha così il teorema:

Se la soluzione u', υ' è della 1ª classe rispetto ad u, υ e se lo è anche u'', υ''; se però u'', υ'' non appartiene allo stesso triplo che u', υ', ed anche riferendo al triplo u', υ' i rimanenti (§ 9), u'', υ'' non riesce nel proprio triplo coordinata alla soluzione u', v'; allora u'', v'' sarà anche di prima classe rispetto ad u', v'.

2.° Se invece sia $i=0$, così che, invece delle equazioni (6), debbansi porre le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u-\xi^2-m\xi(\xi+t)-m^2(\xi+t)^2 \\ u'' &= u-\xi_1^2-m\xi_1(\xi_1+t)-m^2(\xi_1+t)^2 \\ 2v' &= \varepsilon(\varepsilon-1)\{[\xi+2m(\xi+t)]u-[\xi^3+2m\xi^2(\xi+t)+2m^2\xi(\xi+t)^2+m^3(\xi+t)^3]\} \\ 2v'' &= \varepsilon(\varepsilon-1)\{[\xi_1+2m(\xi_1+t)]u-[\xi_1^3+2m\xi_1^2(\xi_1+t)+2m^2\xi_1(\xi_1+t)^2+m^3(\xi_1+t)^3]\} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

si avranno le decomposizioni:

$$\left.\begin{aligned} u'-u'' &= (\xi_1-\xi)[(\xi_1+\xi)(1+m+m^2)+mt(1+2m)] \\ u'-\varepsilon u'' &= [(\xi-\varepsilon^2\xi_1)(1+m+m^2)-\varepsilon^2(1-\varepsilon)m(m+1)t] \\ &\quad [\tfrac{1}{3}(\xi-\varepsilon\xi_1)(1-m)(1-\varepsilon)-(\xi+\varepsilon^2\xi_1)+\varepsilon mt] \\ u'-\varepsilon^2 u'' &= [(\xi-\varepsilon\xi_1)(1+m+m^2)-\varepsilon(1-\varepsilon^2)m(m+1t] \\ &\quad [\tfrac{1}{3}(\xi-\varepsilon^2\xi_1)(1-m)(1-\varepsilon^2)-(\xi+\varepsilon\xi_1)+\varepsilon^2 mt] \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} v'-v'' &= -\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi_1-\xi_2)[(\xi-\varepsilon^2\xi_1)(1+m+m^2)-\varepsilon^2(1-\varepsilon)m(m+1)t] \\ &\qquad [(\xi-\varepsilon\xi_1)(1+m+m^2)-\varepsilon(1-\varepsilon^2 m(m+1)t] \\ v'+v'' &= \varepsilon(\varepsilon-1)[(\xi_1+\xi)(1+m+m^2)+mt(1+2m)] \\ &\qquad [\tfrac{1}{3}(\xi-\varepsilon\xi_1)(1-m)(1-\varepsilon)-(\xi+\varepsilon^2\xi_1)+\varepsilon mt] \\ &\qquad [\tfrac{1}{3}(\xi-\varepsilon^2\xi_1)(1-m)(1-\varepsilon^2)-(\xi+\varepsilon\xi_1)+\varepsilon^2 mt]. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

La soluzione u'', v'' è dunque di seconda classe rispetto ad u', v', e si ha quindi il teorema:

Se u', v' sia di prima classe rispetto ad u, v e parimente lo sia u'', v'' mentre però appartenga ad un altro triplo; e se inoltre nel riferimento dei tripli l'uno all'altro la soluzione u'', v'' sia coordinata alla soluzione u', v'; allora u'', v'' sarà di seconda classe rispetto ad u', v'.

Quindi altresì:

In luogo di una soluzione u, v ponendone a base un'altra, che sia della prima classe rispetto a quella; otto soluzioni passano dalla 1ª classe alla 2ª e reciprocamente.

Ritorniamo alle equazioni (8). Per ridurle a totale coincidenza colle equazioni (1) del § 2, bisogna considerare in luogo della soluzione u'', v'' la soluzione $\varepsilon u''$, $-v''$ che ne diversifica solo apparentemente. Allora, difatti, le equazioni (8) prendono la forma:

$$\left.\begin{aligned} v'+(-v'') &= (\Xi-\varepsilon H)(u'-\varepsilon\cdot\varepsilon u'') \\ v'-(-v'') &= (\Xi-\varepsilon^2 H)(u'-\varepsilon^2\cdot\varepsilon u'') \\ u-\varepsilon u'' &= (\Xi-\varepsilon H)(\Xi-\varepsilon^2 H) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} \Xi-\varepsilon H &= (\varepsilon-1)\left\{\frac{\varepsilon m^2 t}{1-\varepsilon^2 m}-\tfrac{1}{3}(1-\varepsilon)[\xi(1-\varepsilon m)-\varepsilon^2\xi_1(1-m)]\right\} \\ \Xi-\varepsilon^2 H &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(1-\varepsilon^2 m)[(\xi+t)(1-\varepsilon m)-(\xi_1+t)(1-m)]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

All'incontro ponendo, come superiormente erasi previsto, nelle equazioni (8) ε^2 in luogo di ε e cambiando i segni di v', e v'', si ottiene dapprima:

$$v'+v''=\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(u'-u'')(1-\varepsilon m)[(\xi+t)(1-\varepsilon^2 m)-(\xi_1+t)(1-m)]$$

$$v'-v''=\varepsilon(\varepsilon-1)(u'-\varepsilon u'')\left\{\frac{m^2 t}{1-\varepsilon m}+\tfrac{1}{3}(1-\varepsilon)[\xi(1-\varepsilon^2 m)-\varepsilon\xi_1(1-m)]\right\}$$

$$\begin{aligned} u-\varepsilon^2 u''=-\,&[(\xi+t)(1-\varepsilon^2 m)-(\xi_1+t)(1-m)]\{m^2 t+\tfrac{1}{3}(1-\varepsilon) \\ &[\xi(1+m+m^2)-\varepsilon\xi_1(1+\varepsilon^2 m+\varepsilon m^2)]\} \end{aligned}$$

equazioni che si possono porre sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} v'+v'' &= (\Xi'-\varepsilon H')(u'-\varepsilon\cdot\varepsilon^2 u'') \\ v'-v'' &= (\Xi'-\varepsilon^2 H')(u'-\varepsilon^2\cdot\varepsilon^2 u'') \\ u-\varepsilon^2 u'' &= (\Xi'-\varepsilon H')(\Xi'-\varepsilon^2 H') \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

nelle quali quindi:

$$\left.\begin{aligned} \Xi'-\varepsilon H' &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(1-\varepsilon m)[(\xi+t)(1-\varepsilon^2 m)-(\xi_1+t)(1-m)] \\ \Xi'-\varepsilon^2 H' &= \varepsilon(\varepsilon-1)\left\{\frac{m^2 t}{1-\varepsilon m}+\tfrac{1}{3}(1-\varepsilon)[\xi(1-\varepsilon^2 m)-\varepsilon\xi_1(1-m)]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Queste equazioni scaturiscono immediatamente dalle (13) sostituendo ε^2, $-\Xi'$, $-H'$ alle ε, Ξ, H.

Sono le coppie di espressioni lineari Ξ, H; Ξ', H'; ecc. quelle che, se si piglino le mosse dalla soluzione u', v', prendono il posto delle espressioni precedentemente indicate con ξ, η, e sono quindi le soluzioni della nuova equazione Hessiana, a cui conduce il problema di trasformazione contenuto nella equazione:

$$2v' = 3u'\Xi - \Xi^3 + H^3. \tag{16}$$

Voglio ora mostrare come si connettano le soluzioni della nuova equazione Hessiana con quelle della precedente, e come in particolare le grandezze m', che compajono in luogo di m, sieno legate alle m da una relazione assai semplice.

Anzitutto conosciamo già una soluzione della equazione (16); è quella il cui triplo corrispondente contiene la soluzione u, v posta originariamente a base. Per essa, in conformità delle (5), bisogna porre in luogo di Ξ, H le:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi+2\eta) = & \eta' &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi-\eta) = \\ &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}[\xi+2m(\xi+t)] & &= \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}[\xi-m(\xi+t)]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Approfittando di queste espressioni dalle (13) (15) si ricavano le:

$$\left.\begin{aligned} \Xi - \xi' &= \frac{(1-m)^2}{3}(\xi_1-\varepsilon\xi) - \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}\cdot\frac{m(1-m)(1+\varepsilon m)}{1-\varepsilon^2 m}t \\ \Xi' - \xi' &= -\frac{(1-m)^2}{3}(\xi_1-\varepsilon^2\xi) - \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}\cdot\frac{m(1-m)(1+\varepsilon^2 m)}{1-\varepsilon m}t \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ed:

$$\left.\begin{aligned} \eta' - \varepsilon H &= \frac{m+2}{m-1}(\xi'-\Xi) \\ \eta' - \varepsilon^2 H' &= \frac{m+2}{m-1}(\xi'-\Xi'). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Ponendo dunque:

$$m' = \frac{m+2}{m-1} \qquad T = -\varepsilon(\varepsilon-1)\frac{(1+m+m^2)\xi+m(1+m)t}{m+2} \tag{20}$$

si hanno le:

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= m'(\xi'+T) \\ H &= \varepsilon^2 m'(\Xi+T) \\ H' &= \varepsilon m'(\Xi'+T). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Introducendo nelle (18) per ξ, ξ_1 i loro valori in t, μ, ν [vedi § 7 equaz.[i] (40)], col porre per le ξ appartenenti a tre tripli conjugati:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{m^3 t + \mu + \nu}{1 - m^3} \\ \xi_1 &= \frac{m^3 t + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\nu}{1 - m^3} \\ \xi_2 &= \frac{m^3 t + \varepsilon^2\mu + \varepsilon\nu}{1 - m^3} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

quelle equazioni si cambiano nelle seguenti, essenzialmente semplificate:

$$\left.\begin{aligned} \Xi - \xi' &= \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{3} \frac{1 - m}{1 + m + m^2} (\nu - mt) \\ \Xi' - \xi' &= \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{3} \frac{1 - m}{1 + m + m^2} (\mu - mt). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Da queste equazioni rilevasi, che, nel passaggio da ξ_1 a ξ_2, e quindi nella permutazione di μ e ν, ha luogo soltanto uno scambio di Ξ con Ξ'. Consideriamo ora pertanto le nove soluzioni che appartengono a tre tripli conjugati, in uno dei quali compare la qui prescelta soluzione u', v'. Ordinate rispetto a questo triplo, che relativamente ad u, v, è caratterizzato dai sistemi:

$$\xi, \quad \eta = m(\xi + t); \qquad \xi, \quad \varepsilon\eta; \qquad \xi, \quad \varepsilon^2\eta,$$

le soluzioni degli altri due tripli riescono caratterizzate da:

$$\begin{aligned} &\xi_1, \quad \eta_1 = m(\xi_1 + t); \qquad \xi_1, \quad \varepsilon\eta_1; \qquad \xi_1, \quad \varepsilon^2\eta_1 \\ &\xi_2, \quad \eta_2 = m(\xi_2 + t); \qquad \xi_2, \quad \varepsilon\eta_2; \qquad \xi_2, \quad \varepsilon^2\eta_2. \end{aligned}$$

Ponendo ora a base la soluzione ξ, η giusta quanto precede (§ 12) entrerà per u', v' nel primo triplo la soluzione u, v e verrà caratterizzata da ξ', η', di guisa che le soluzioni di un primo triplo saranno ora date da:

$$\xi', \quad \eta' = m'(\xi' + T); \qquad \xi', \quad \varepsilon^2\eta'; \qquad \xi', \quad \varepsilon\eta'.$$

Dagli altri due fra i precedenti tripli esce ogni volta la prima soluzione, che diviene di seconda classe; le altre sono adesso caratterizzate da:

$$\begin{aligned} &\Xi, \quad \varepsilon^2 m'(\Xi + T); \qquad \Xi', \quad \varepsilon m'(\Xi' + T) \\ &\Xi', \quad \varepsilon^2 m'(\Xi' + T); \qquad \Xi, \quad \varepsilon m'(\Xi + T). \end{aligned}$$

Si ha dunque il seguente teorema:

Da due tripli, che erano conjugati col triplo u', v', le soluzioni corrispondenti alla stessa u', v' escono dalla prima classe; le altre costituiscono coppie di soluzioni di nuovi tripli, però in maniera che in un nuovo triplo non compajano nè soluzioni del medesimo triplo antico, nè due soluzioni coordinate nell'egual modo rispetto ad u', v' nei tripli antichi. Questi nuovi tripli sono di nuovo conjugati al nuovo triplo prodotto dall'entrata di u, v in quello che prima conteneva u', v'; e precisamente le rimanenti soluzioni dei tre nuovi tripli sono fra loro coordinate esattamente come nei tripli antichi.

Osserviamo inoltre quanto segue. Partendo da una soluzione u, v, ed ammettendo come nota una soluzione di prima classe u', v', si ottennero le quattro coppie di tripli, che erano conjugate a quello contenente u', v', per mezzò di una equazione del quarto grado in m (§ 5), la quale, mediante una sostituzione lineare, si trasformò nella risolvente biquadratica dell'equazione Hessiana. Se invece si pone a base u', v', e si adopera u, v come soluzione nota di prima classe, i nuovi tripli saranno dati da una equazione biquadratica in m', che si potrà di nuovo trasformare con una sostituzione lineare, nella nuova equazione Hessiana. Le quattro radici della equazione in m' sono legate (20) alle quattro della equazione in m dalla semplice relazione lineare:

$$m' = \frac{m+2}{m-1}$$

che è anche reciproca (*). Quindi le radici delle equazioni Hessiane sono similmente legate ciascuna a ciascuna linearmente. E però l'invariante assoluto dell'equazione Hessiana non si cambia, pigliando le mosse, invece che da u, v, da un'altra soluzione; e ciò non si ristringe alle soluzioni di prima classe rispetto ad u, v; giacchè le soluzioni di seconda classe entrano a poco a poco in quelle di prima classe. Infatti trovammo precedentemente che $\frac{i^3}{j^2}$ per questa equazione ha sempre il valore zero. Nasce ora la domanda, quali siano le soluzioni di seconda classe che entrano a completare i nuovi tripli conjugati dianzi formati. Esse sono caratterizzate per mezzo delle espressioni lineari:

$$\Xi, \quad m'(\Xi + T); \qquad \Xi', \quad m'(\Xi' + T)$$

e se si indicano con U, U' le funzioni di secondo grado che in esse tengono

(*) Vedi Nota 7ª.

il posto di U, si avrà:

$$U = u' - \Xi^2 - m'\Xi(\Xi + T) - m'^2(\Xi + T)^2$$
$$U' = u' - \Xi'^2 - m'\Xi'(\Xi' + T) - m'^2(\Xi' + T)^2.$$

Ma pel paragrafo (12) si ha in pari tempo:

$$u = u' - \xi'^2 - m'\xi'(\xi' + T) - m'^2(\xi' + T)^2$$

introducendo per tanto il valore di u' cavato da questa equazione, si ha:

$$U - u = (\xi' - \Xi)[(\xi' + \Xi)(1 + m' + m'^2) + m'(2m' + 1)T]$$
$$U' - u = (\xi' - \Xi')[(\xi' + \Xi')(1 + m' + m'^2) + m'(2m' + 1)T]$$

ed introducendo i valori di ξ', Ξ, Ξ', T, m', si otterrà con breve calcolazione:

$$U - u = -\frac{1}{1 - m^3}(\nu - mt)(\mu + m\nu + mt^2)$$

$$U' - u = -\frac{1}{1 - m^3}(\mu - mt)(\nu + m\mu + mt)^2.$$

Ma queste giusta il § 10, sono due soluzioni di seconda classe rispetto ad u, v, la cui relazione alla soluzione di prima classe qui designata con u', v' si può facilmente stabilire. Paragonando un triplo di prima classe (rispetto ad u, v) con un flesso di una curva del terzo ordine, bisogna confrontare un sistema di tripli conjugati, caratterizzato da m, t, μ, ν, con un lato di un triangolo dei flessi, passante per quel flesso: sopra esso lato giacciono due vertici di triangoli di flessi, che corrispondono alle precedenti soluzioni di seconda classe.

Pigliando le mosse non dalla soluzione u, v ma da un'altra u', v', quattro soluzioni di seconda classe continuano ad appartenere alla seconda classe. Esse corrispondono a quattro vertici dei triangoli dei flessi, opposti a quattro lati aventi un flesso comune; cioè quello il cui triplo corrispondente contiene la soluzione u, v. Si riconoscerà che anche queste quattro soluzioni formano un quadruplo (§ 12), reciprocamente coordinate al quadruplo al quale appartengono u, v ed u', v'. I novanta quadrupli si dividono quindi in 45 coppie, e la scoperta dei quadrupli dipende dunque da una equazione del 45° grado. Ma per vedere ciò, dobbiamo porre in più chiara luce alcune proprietà dei quadrupli.

§ 14.

Coppie di quadrupli. — Risolventi dei gradi 45 e 27.

È stato dimostrato (§ 9) che le singole soluzioni di tre tripli conjugati sono sempre tra loro coordinate stabilmente. Partendo da u, v ed indicando queste soluzioni giusta il § 9, corrispondentemente al loro coordinamento, con:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1_a & 1_c & 1_b \\ 2_a & 2_b & 2_c \\ 3_a & 3_b & 3_c \end{array}\right\} \tag{1}$$

i sei sistemi (che corrispondono ai termini di un determinante, quando si considerino i nove numeri precedenti come gli elementi di un determinante)

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 1_a & 2_b & 3_c & \qquad & 1_a & 2_c & 3_b \\ 1_b & 2_c & 3_a & & 1_c & 2_b & 3_a \\ 1_c & 2_a & 3_b & & 1_b & 2_a & 3_c \end{array}\right\} \tag{2}$$

vengono completati a quadrupli ciascuno mediante una fra due soluzioni α, β le quali rispetto ad u, v sono di seconda classe, e corrispondono ai vertici di un triangolo dei flessi, mentre i tripli conjugati conducono al lato di un triangolo dei flessi che li congiunge (§ 13). Infatti, se si pone a base, invece di u, v una soluzione derivante da una di quelle sei combinazioni, allora secondo il paragrafo precedente, α o β formerà colle rimanenti un triplo, il che costituisce il carattere di un quadruplo. Se le nove prime soluzioni vengono espresse mediante le formole 1 — 5 § 9, le ultime due saranno date dalle formole (§ 10, 8)

$$u' = -\frac{m}{1-m^3}(\mu^2 - \nu t) \qquad u'' = -\frac{m}{1-m^3}(\nu^2 - \mu t). \tag{3}$$

Cambiando m in εm ed $\varepsilon^2 m$ le soluzioni (1) riescono permutate circolarmente nel senso orizzontale, mentre u'^3, u''^3 non si mutano; ed in pari tempo i tre primi gruppi in (2) si permutano fra loro, e similmente gli ultimi. Si ha dunque il teorema:

Scrivendo le soluzioni di tre tripli conjugati rispetto ad u, v secondo il loro coordinamento, in schema di determinante; quei collegamenti a tre a tre, che corrispondono a termini positivi del determinante, vengono completati a quadrupli mediante una medesima soluzione di 2ª classe; e similmente mediante un'altra soluzione quelli che corrispondono a termini negativi.

Le 40 soluzioni formano in generale $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ coppie. Di queste $\frac{40 \cdot 27}{2} = 540$ sono così fatte che una soluzione di una coppia è di prima classe rispetto all'altra, e reciprocamente; e le altre $\frac{40 \cdot 12}{2} = 240$ così fatte, che una soluzione di una coppia è di seconda classe rispetto all'altra e reciprocamente.

Supponendo u, v a base, alla prima classe appartengono le seguenti coppie:

1.º u, v unita alle sue 27 soluzioni di prima classe, ciò che da 27 coppie;

2.º ogni due soluzioni dello stesso triplo, donde $3 \cdot 9 = 27$ coppie;

3.º ogni due soluzioni prese da tripli conjugati non coordinati tra loro; $18 \cdot 12 = 216$ coppie;

4.º una soluzione di seconda classe, corrispondente ad un vertice di un triangolo dei flessi, e ciascuna soluzione di prima classe presa da un sistema di tripli conjugati, il quale corrisponde ad un lato dei flessi passante per quel vertice, $12 \cdot 2 \cdot 9 = 216$ coppie.

Rimangono ancora da cercare $540 - 2 \cdot 27 - 2 \cdot 216 = 54$ coppie di prima classe. Nelle precedenti 486 coppie ogni soluzione di prima classe compare già 27 volte, cioè una volta sotto il numero 1; due volte sotto il numero 2; $4 \cdot 4 = 16$ volte sotto il numero 3; $2 \cdot 4 = 8$ volte sotto il numero 4. Le 54 coppie mancanti di prima classe non possono dunque essere formate che da soluzioni di seconda classe.

Le 12 soluzioni che appartengono alla seconda classe rispetto ad u, v formano 66 coppie. Di queste 12 corrispondono ai vertici dello stesso triangolo, 54 a vertici di triangoli diversi. Giusta il paragrafo precedente due soluzioni di seconda classe corrispondenti ai vertici dello stesso triangolo, ove si ponga a base un'altra soluzione, compajono come soluzioni coordinate di due tripli, e stanno dunque fra loro nel reciproco rapporto di soluzioni di seconda classe. Le altre 54 coppie stanno quindi necessariamente fra loro nel rapporto di prima classe; e si ha il teorema:

Due soluzioni di seconda classe stanno tra loro nel reciproco rapporto di soluzioni di seconda o di prima classe, secondoche corrispondano ai vertici di uno stesso o di diversi triangoli.

E si può notare il teorema che spontaneamente emerge da ciò che precede: Una soluzione di seconda classe sta nel rapporto di seconda classe a quel sistema conjugato di nove soluzioni di prima classe, del quale il lato di triangolo è opposto al vertice di essa.

Ponendo a base una soluzione di seconda classe, si riconosce facilmente i tripli di prima classe che con ciò si formano. Pel teorema dato al principio di questo paragrafo si ottengono $3 \cdot 2 = 6$ tripli dello schema 2, e propriamente dai due precedenti sistemi conjugati, i cui lati di flesso passano pei vertici corrispondenti alla soluzione di seconda classe prescelta.

In tal modo vengono usate 18 soluzioni precedenti di 1ª classe; le restanti 9 riescono adesso di 2ª classe, e per ciò i 3 tripli mancanti si devono comporre di precedenti soluzioni di 2ª classe. Ma dalle 11 rimanenti soluzioni di 2ª classe non si possono in realtà separare che tre sistemi, ciascuno di tre, che possano divenire tripli di 1ª classe, cioè le cui tre soluzioni stiano nella reciproca relazione di 1ª classe. Per ogni vertice di un triangolo di flessi passano tre rette (linee armoniche) che contengono ciascuna tre altri vertici, ed in maniera che i 4 vertici di una retta appartengono ai 4 diversi triangoli. A questi tre sistemi, ciascuno di tre vertici, corrispondono i tre sistemi di soluzioni di 2ª classe, che nel nuovo ordinamento divengono tripli di 1ª classe.

Finalmente è ora assai facile, di definire i 90 quadrupli. Secondo il primo ordinamento sono i seguenti:

1.° u, v con un triplo di 1ª classe; 9 quadrupli;

2.° ogni quattro soluzioni di 2ª classe, che corrispondono ai vertici dei triangoli sopra una retta armonica; 9 quadrupli;

3.° ogni soluzione di 2ª classe con tre soluzioni non coordinate tra loro e prese da tripli conjugati di 1ª classe, il cui lato di flessi passa pel vertice appartenente alla soluzione di 2ª classe; $2 \cdot 3 \cdot 12 = 72$ quadrupli.

Questi 90 quadrupli, essendo coordinati tra loro a due a due, formano 45 coppie.

Infatti ad ogni quadruplo è coordinato un determinato altro (si rammenti quanto è esposto sul finire del precedente paragrafo) per modo che ogni soluzione dell'uno è di 2ª classe rispetto ad ogni soluzione dell'altro. Di tal maniera, nella precedente enumerazione dei quadrupli, a ciascun quadruplo sotto il n.° 1 ne corrisponde uno sotto il n.° 2. Ma i quadrupli compresi sotto il n.° 3 formano 36 coppie. Scegliendo uno qualsiasi dei 72 quadrupli n.° 3, è facile di trovarne il conjugato, soltanto riflettendo che ogni soluzione dell'uno dev'essere di 2ª classe rispetto ad ogni soluzione dell'altro. Laonde le soluzioni di

2^a classe che compajono in entrambi devono corrispondere a vertici dello stesso triangolo; e quindi i due sistemi di soluzioni di 1^a classe, che compajono nei quadrupli, devonsi prendere da due sistemi conjugati di tripli, corrispondenti a lati dello stesso triangolo. Essendo dato il primo sistema, e contenendo esso soluzioni dei tripli i, k, h, si trova facilmente il sistema che gli appartiene, osservando gli schemi i^{mo}, k^{mo}, h^{mo} del § 9 e cercando quelle tre soluzioni, le quali in questi sono coordinate alla soluzione ogni volta data nel sistema. Così si trova per es. rispetto ad 1_a, 2_b, 3_c le soluzioni 7_a, 8_a, 9_a; rispetto a 1_a, 2_c, 3_c le soluzioni 4_a, 5_a, 6_a, ecc.

I 90 quadrupli conducono dunque ad una risolvente del grado 45, che possiede la equazione data del grado 40. Ma, come ha mostrato il sig. Jordan, la equazione di grado 45 possiede pure una risolvente di grado 27, alla quale perciò tutto infine si riduce. La esistenza di questa equazione di grado 27 si riconosce col mettere in luce che le 40 radici si possono ordinare in 5 coppie di quadrupli in 27 maniere.

Anzitutto è chiaro, che in qualsiasi ordinamento di tal fatta deve comparire una coppia di quadrupli contenente la soluzione u, v. Quindi si può cominciare l'ordinamento coll'impiegare una delle 9 coppie di quadrupli contenenti u, v e dividendo le 32 restanti soluzioni in 4 coppie di quadrupli. Le rimanenti 8 soluzioni di 2^a classe formano allora infatti quattro paja di vertici di triangolo e possono dunque appartenenere a 4 coppie di quadrupli. La prima coppia di quadrupli sia data mediante la soluzione u, v e mediante la soluzione 1_a, 1_b, 1_c (§ 9). Bisogna dimostrare, che si possono scegliere le restanti quattro coppie di quadrupli ancora in tre maniere differenti, riescendo così possibili $9 \cdot 3 = 27$ ordinamenti.

Ora ciò si dimostra facilmente col soccorso degli schemi del § 9. Le quattro coppie di quadrupli rimanenti devono contenere le 24 rimanenti soluzioni di 1^a classe, 2_a, 2_b, $2_c, \ldots$ 9_a, 9_b, 9_c in maniera, che in ciascuna coppia di quadrupli compaja ogni soluzione presa da due sistemi di tre tripli conjugati, e che questi due sistemi corrispondano a due lati di un triangolo, il cui terzo lato passa pel flesso corrispondente al triplo 1.

Dunque queste coppie di quadrupli devono contenere separatamente una soluzione presa dalle seguenti quattro coppie di sistemi due a due conjugati:

$$\begin{array}{llllll}
4, & 5, & 6; & 7, & 8, & 9 \\
2, & 5, & 8; & 3, & 6, & 9 \\
2, & 6, & 7; & 3, & 4, & 8 \\
2, & 4, & 9; & 3, & 5, & 7.
\end{array}$$

Si trova subito che le soluzioni di prima classe per la prima di queste quattro coppie di quadrupli si ponno sciegliere ancora in tre maniere, e che perciò quelle delle altre quattro restano allora affatto determinate, con che tutto è dimostrato. I tre gruppi così scaturienti di soluzioni di prima classe che appartengono alle quattro coppie di quadrupli sono i seguenti:

I.°	II.°	III.°
$4_a,\ 5_b,\ 6_c;\ \ 7_a,\ 8_c,\ 9_b$	$4_b,\ 5_c,\ 6_a;\ \ 7_b,\ 8_a,\ 9_c$	$4_c,\ 5_a,\ 6_b;\ \ 7_c,\ 8_b,\ 9_a$
$2_a,\ 5_c,\ 8_b;\ \ 3_a,\ 6_b,\ 9_c$	$2_b,\ 5_a,\ 8_c;\ \ 3_b,\ 6_c,\ 9_a$	$2_c,\ 5_b,\ 8_a;\ \ 3_c,\ 6_a,\ 9_b$
$2_b,\ 6_a,\ 7_c;\ \ 3_b,\ 4_c,\ 8_a$	$2_c,\ 6_b,\ 7_a;\ \ 3_c,\ 4_a,\ 8_b$	$2_a,\ 6_c,\ 7_b;\ \ 3_a,\ 4_b,\ 8_c$
$2_c,\ 4_b,\ 9_a;\ \ 3_c,\ 5_a,\ 7_b$	$2_a,\ 4_c,\ 9_b;\ \ 3_a,\ 5_b,\ 7_c$	$2_b,\ 6_a,\ 7_c;\ \ 3_b,\ 4_c,\ 8_a$.

Con queste considerazioni resta dimostrata la riduzione della data equazione di 40° grado dapprima ad una del grado 45°; poi ad una del grado 27°. Nasce la domanda a quali problemi algebrici conduca questa riduzione. A questa ricerca penso di ritornare in altra occasione (*).

(*) **Le Note al prossimo fascicolo.**

Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler

(*par Mr.* EDOUARD LUCAS, *professeur au lycée Charlemagne, à Paris*).

Les développements des fonctions circulaires, et notamment de la tangente, de la cotangente, de la sécante et de la cosécante de l'arc x, en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x, et ceux des fonctions hyperboliques correspondantes, conduisent à la connaissance de nombres analogues à ceux de BERNOULLI et d'EULER, dont l'étude est fort importante dans le calcul intégral, dans le calcul inverse des différences, et dans l'arithmétique supérieure. L'emploi du calcul symbolique permet de simplifier considérablement la théorie de ces nombres, et de généraliser les formules qui les renferment. Tel est l'objet du présent Mémoire.

§ 1. Lemmes préliminaires sur l'emploi des symboles.

1. Si l'on a la relation

$$f(x) = b_0 a_n x^n + \frac{n}{1} b_1 a_{n-1} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} b_2 a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 b_n,$$

ou, sous la forme symbolique

$$f(x) = (ax+b)^n,$$

on a aussi, comme on le vérifie aisément

$$f'(x) = na(ax+b)^{n-1}.$$

Remarque. — Il faut avoir soin, dans ce calcul, de ne jamais oublier l'exposant zéro, que l'on doit remplacer, dans chaque cas, par le coefficient correspondant dont l'indice est nul.

2. Si l'on a les formules symboliques

$$f(x)=e^{ax}=a_0+a_1\frac{x}{1}+a_2\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+a_n\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}+\cdots$$

$$f(x)=\cos ax=a_0-a_2\frac{x^2}{1\cdot 2}+a_4\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots,$$

$$f(x)=\sin ax=a_1\frac{x}{1}-a_3\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+a_5\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots,$$

on a aussi, respectivement, les formules symboliques

$$f'(x)=a\,e^{ax},$$

$$f'(x)=-a\sin ax,$$

$$f'(x)=+a\cos ax,$$

et, de même, pour un certain nombre d'autres fonctions.

3. Si l'on a les formules symboliques

$$A=e^{ax},\qquad B=e^{bx},\qquad C=e^{cx},$$

et, si l'on a, de plus,

$$C=AB,$$

les coefficients a, b, c, sont liés entre eux par la relation symbolique

$$c_n=(a+b)^{(n)},$$

en sorte que l'on peut poser l'identité symbolique

$$e^{ax}\times e^{bx}=e^{(a+b)x}.$$

En désignant par p_n et q_n les nombres des arrangements de p lettres ou de q lettres, n à n, on a ainsi

$$(1+x)^p=e^{px},$$

$$(1+x)^q=e^{qx},$$

$$(1+x)^{p+q}=e^{(p+q)x},$$

et, par suite, la formule symbolique

$$[p+q]_n=(p+q)^n,$$

dans laquelle on suppose $p_0=1$.

4. Si l'on désigne par $C^n{}_m$ le nombre des combinaisons de m objets pris n à n, on a la formule

$$C^n{}_m=C^{n-p}_{m-p}[C+1]^{(p)},$$

en ne considérant, comme exposants, que les indices supérieurs, et la formule

$$C_{m-p}^{n-p} = C^n{}_{m-p}(C-1)_{(p)},$$

en ne considérant comme exposants que les indices inférieurs (*).

§ 2. Sur la sommation des puissances semblables des nombres naturels.

5. Soit, en général, une fonction entière $\Delta f(x)$ égale à la différence d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n;$$

en remplaçant successivement x par 1, 2, 3,... $(x-1)$, et, en additionnant, on obtient, après avoir posé

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (x-1)^n,$$

la formule

$$f(x) - f(1) = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \cdots + a_n S_0,$$

ou, symboliquement,

$$f(x) - f(1) = \Delta f(S), \tag{1}$$

en ayant soin de ne pas oublier l'exposant zéro de S.

Faisons, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $(x-1)^n$, ou à x^n, nous obtenons les deux formules

$$(x-1)^n = S^n - (S-1)^n, \tag{2}$$

$$x^n - 1 = (S+1)^n - S^n, \tag{3}$$

et, par addition et soustraction, les deux formules

$$x^n + (x-1)^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n, \tag{4}$$

$$x^n - (x-1)^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n, \tag{5}$$

qui permettent de calculer les sommes S, par voie récurrente, et de deux en deux.

Faisons encore, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$, nous obtenons l'équation

$$(2x-1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n, \tag{6}$$

qui a été donnée par Mr. Gilbert, au moyen de l'analyse infinitésimale (**).

(*) Nouvelle Correspondance Mathématique, t. 2, p. 70 et suiv.
(**) Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. 8, 1869, p. 437.

Enfin, si l'on fait, dans la formule (1),

$$f(x) = (x+a)(x+a+1)\cdots(x+a+n-1),$$

on obtient

$$\left.\begin{aligned}(x+a)(x+a+1)\cdots(x+a+n-1)-(a+1)(a+2)\cdots(a+n)\\ = n(S+a+1)(S+a+2)\cdots(S+a+n-1),\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

et, pour $a=0$,

$$x(x+1)\cdots(x+n-1)-1\cdot2\cdot3\cdots n = n(S+1)(S+2)\cdots(S+n-1). \quad (8)$$

6. On tire du système des n équations obtenues en remplaçant successivement n par $1, 2, 3, \dots n$, dans la formule (3),

$$1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot S_{n-1} = \begin{vmatrix} x^n, & C_n^{n-2}, & C_n^{n-3}, \dots & C_n^1, & 1 \\ x^{n-1}, & C_{n-1}^{n-2}, & C_{n-1}^{n-3}, \dots & C_{n-1}^1, & 1 \\ x^{n-2}, & 0, & C_{n-2}^{n-3}, \dots & C_{n-2}^1, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^2, & 0, & 0, \dots & C_2^1, & 1 \\ x, & 0, & 0, \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

Le déterminant du second membre s'annulle pour $x=0$, et pour $x=1$; donc S_n est divisible, quel que soit l'entier n, par le produit $x(x-1)$ ou par S_1. La formule (2) conduit à un déterminant analogue; inversement, on peut obtenir l'expression de $C_n{}^{n-p}$ à l'aide de déterminants contenant les sommes $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots$ des $(x-1), (2x-1), \dots (nx-1)$, premiers nombres.

7. On obtient des déterminants d'ordre moitié moindre, en employant l'une des relations (4), (5) et (6). La relation (6) donne, par exemple, en posant $2x-1=y$, et pour les valeurs impaires de l'exposant:

$$1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)2^{2n+1}S_{2n} = \begin{vmatrix} y^{2n+1}, & C_{2n+1}^{2n-2}, & C_{2n+1}^{2n-4}, \dots & C_{2n+1}^4, & C_{2n+1}^2, & 1 \\ y^{2n-1}, & C_{2n-1}^{2n-2}, & C_{2n-1}^{2n-4}, \dots & C_{2n-1}^4, & C_{2n-1}^2, & 1 \\ y^{2n-3}, & 0 & C_{2n-3}^{2n-4}, \dots & C_{2n-3}^4, & C_{2n-3}^2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^3, & 0, & 0, \dots & 0, & C_3^2, & 1 \\ y, & 0, & 0, \dots & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Le déterminant s'annulle pour $x=\frac{1}{2}$, donc S_{2n} est divisible par S_2; on voit, de plus, que S_{2n} est une fonction impaire de $\left(x-\frac{1}{2}\right)$, et que, par suite, le quotient $\frac{S_{2n}}{S_2}$ est une fonction paire de la même quantité.

La formule (6) conduit à un déterminant analogue, pour les valeurs paires de l'exposant, et donne l'expression de S_{2n+1}. La comparaison des deux déterminants donne la relation

$$\frac{\partial S_{2n+1}}{\partial x}=(2n+1)S_{2n}.$$

On en déduit que S_{2n+1} est une fonction paire de $\left(x-\frac{1}{2}\right)$, et, de plus, que S_{2n+1}, est divisible par $x^2(x-1)^2$, ou par S_3.

Enfin, on peut obtenir plus généralement S_n en fonction d'un déterminant contenant au moins $(n+1)$ fonctions arbitraires de x; il suffit, pour cela, de considérer $(n+1)$ équations semblables à l'équation (1).

§ 3. Sur les nombres de Bernoulli.

8. On peut poser symboliquement l'équation

$$nS_{n-1}=(x+B)^n-B^n, \tag{11}$$

dans laquelle on remplacera les exposants de B par des indices, et B_0 par l'unité. Ces coefficients B sont appelés Nombres de Bernoulli, parce que Jacques Bernoulli les a remarqués le premier, comme formant le coefficient du dernier terme, dans les sommes des puissances paires. La comparaison de la formule (9), et de la formule (7), donne

$$1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot B_{n-1}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} C_n^{n-2}, & C_n^{n-3},\ldots & C_n^1, & 1 \\ C_{n-1}^{n-2}, & C_{n-1}^{n-3},\ldots & C_{n-1}^1, & 1 \\ 0, & C_{n-2}^{n-3},\ldots & C_{n-2}^1, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0,\ldots & C_2^1, & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

On peut trouver ainsi un grand nombre de formules analogues, mais on peut encore calculer directement les coefficients B de la manière suivante. En changeant x en $x+1$ dans l'équation (11), on obtient, par différence, l'identité

$$nx^{n-1}=(x+B+1)^n-(x+B)^n, \tag{13}$$

qui a lieu pour toutes les valeurs entières positives de x, et, par suite, quelle que soit la valeur de x. En particulier, pour $x=0$, $x=\pm 1$, $x=-\frac{1}{2}$, et, par addition et soustraction, on a les relations récurrentes

$$\left.\begin{aligned}(B+1)^n-B^n&=0,\\ B^n-(B-1)^n&=n(-1)^{n-1},\\ (B+1)^n-(B-1)^n&=n(-1)^{n-1},\\ (B+2)^n-(B+1)^n&=n,\\ (2B+1)^n-(2B-1)^n&=2n(-1)^{n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

La première de ces relations, que l'on peut obtenir en faisant $x=1$, dans la relation (11), a été indiquée par Moivre (*). On peut encore obtenir les nombres B au moyen de déterminants déduits des équations (13) et (14); on a d'ailleurs, pour les premiers coefficients,

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\cdots;$$

les coefficients d'indice impair sont nuls, à l'exception de B_1, ainsi que cela résulte de la troisième et de la cinquième des équations (14). La formule (12) fait voir que $1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot B_{n-1}$ est un nombre entier.

Enfin, on déduit encore de la formule (11) l'égalité

$$\frac{\partial S_n}{\partial x}=nS_{n-1}+B_n, \tag{15}$$

qui permet de trouver rapidement S_n par voie d'intégration, en calculant chaque fois la constante, par l'une des conditions $S_n=1$ pour $x=2$, et $S_n=0$ pour $x=1$.

9. La formule (13) peut être généralisée de la manière suivante, en observant que le premier membre est la dérivée de x^n, et le second la différence symbolique de $(x+B)^n$. On a donc

$$f(x+B+1)-f(x+B)=f'(x), \tag{16}$$

(*) Lacroix: *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral,* t. 3, n.° 84.

ainsi qu'il est facile de le vérifier, en développant $f(x)$ suivant les puissances croissantes de x.

Prenons, par exemple, la factorielle

$$f(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1),$$

nous avons

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n-1};$$

d'autre part,

$$f(x+B+1)-f(x+B)=n(x+B+1)(x+B+2)\cdots(x+B+n-1);$$

par suite,

$$\frac{B+x+1}{x+1}\cdot\frac{B+x+2}{x+2}\cdots\frac{B+x+n-1}{x+n-1}\cdot\frac{n}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n-1}. \quad (17)$$

Pour $x=1$, nous obtenons

$$\frac{B+2}{2}\cdot\frac{B+3}{3}\cdots\frac{B+n}{n}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right], \quad (18)$$

et, pour $x=0$, en changeant n en $n+1$,

$$(B+1)(B+2)\cdots(B+n)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{n+1}. \quad (19)$$

On déduit de la relation (16), dans l'hypothèse de $x=0$, la formule

$$f(B+1)-f(B)=f'(0). \quad (20)$$

Faisons, dans cette dernière formule, la supposition

$$f(x)=e^{xz},$$

il vient

$$e^{Bz}(e^z-1)=z,$$

et, par suite,

$$\frac{z}{e^z-1}=e^{Bz}. \quad (21)$$

Ce développement, bien connu, demeure convergent pour les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à 2π.

Si nous faisons, dans la même formule,

$$f(x)=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)z, \text{ ou } f(x)=\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)z,$$

nous obtenons

$$\frac{z}{2}\operatorname{cotg}\frac{z}{2}=\cos Bz, \qquad -\frac{z}{2}=\sin Bz. \tag{22}$$

Le dernier résultat coïncide avec $B_3=B_5=B_7=\cdots=0$, et $B_1=-\frac{1}{2}\cdot$

10. La formule (16) est encore susceptible d'une certaine généralisation. On peut, en effet, par l'introduction d'une nouvelle variable y, l'écrire sous la forme

$$\Delta_{x=1}f(x+B,\ y)=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}; \tag{23}$$

si l'on applique cette formule à la fonction $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$ considérée par rapport à y, on a, de même,

$$\Delta^2_{x=1,\,y=1}f(x+B,\ y+B')=\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}, \tag{24}$$

et, pour une fonction de trois ou d'un plus grand nombre de variables,

$$\Delta^3_{x=1,\,y=1,\,z=1}f(x+B,\ y+B',\ z+B'')=\frac{\partial^3 f(x,\ y,\ z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\cdot \tag{25}$$

On ne réduira pas les B avec les B' et avec les B'', mais lorsque le développement symbolique du premier membre sera effectué, on remplacera B^n, B'^n, B''^n par B_n. On aura ainsi les relations concernant les produits deux à deux, trois à trois, etc.,... des nombres de Bernoulli.

En faisant $f(x)$ égal à $(x+y)^n$, on a, par exemple,

$$(B+B'+2)^n-2(B+B'+1)^n+(B+B')^n=0; \tag{26}$$

de même,

$$(B+B'+B''+3)^n-3(B+B'+B''+2)^n+3(B+B'+B''+1)^n-(B+B'+B'')^n=0, \tag{27}$$

et ainsi de suite.

11. Considérons la série de x quantités

$$u_1, \qquad u_2, \qquad u_3,\ldots \qquad u_p,\ldots \qquad u_x,$$

et formons une table de multiplication, en écrivant successivement les uns au dessous des autres les produits des termes de cette série, par ceux de la série

$$v_1, \qquad v_2, \qquad v_3,\ldots \qquad v_p,\ldots \qquad v_x;$$

la somme des termes de la table sera égale au produit des sommes des deux séries, que nous désignerons par U_x et V_x, ainsi qu'on le voit en faisant l'addition par lignes ou par colonnes.

D'autre part, en prenant seulement les p premiers termes de la table qui se trouvent dans la $p^{ième}$ ligne, et les $p-1$ premiers de la $p^{ième}$ colonne, on a, pour expression de leur somme

$$u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p,$$

et, par suite, en faisant la somme de ces expressions de $p=1$ à $p=x$, on a la formule

$$U_x V_x - \sum_{p=1}^{p=x}(u_p V_p + v_p U_p) + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p = 0. \tag{28}$$

Considérons, de même, une troisième série de quantités,

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \ldots \quad w_p, \ldots \quad w_x,$$

et plaçons les unes au dessus des autres les tables obtenues en multipliant tous les termes de la première table, successivement par tous les termes de la troisième série. Nous formerons ainsi un cube, sorte de Table de multiplication à trois entrées, et le compartiment ayant pour coordonnées p, q, r contiendra le produit $u_p v_q w_r$.

Cela posé, considérons successivement les cubes ayant, à partir de l'origine, $1, 2, 3, \ldots p$ unités de côté, et cherchons la somme des termes qu'il faut ajouter au $(p-1)^{ième}$ cube pour obtenir le $p^{ième}$. Elle a pour expression

$$(u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p)(W_p - w_p) + w_p U_p V_p,$$

et, puisque la somme des termes de toutes les tables est égale au produit des sommes des trois séries, on a

$$\left.\begin{aligned} U_x V_x W_x - \sum_{p=1}^{p=x} u_p V_p W_p - \sum_{p=1}^{p=x} v_p W_p U_p - \sum_{p=1}^{p=x} w_p U_p V_p & \\ + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p W_p + \sum_{p=1}^{p=x} v_p w_p U_p + \sum_{p=1}^{p=x} w_p u_p V_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p w_p = 0. & \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Dans le cas où les trois séries sont identiques, on a

$$U_x^3 - 3\sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^2 + 3\sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p^3 = 0. \tag{30}$$

On a, de même, par induction, la formule générale

$$U_x^n - C_n^1 \sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^{n-1} + C_n^2 \sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sum_{p=1}^{p=x} u_p^n = 0. \tag{31}$$

12. Si l'on fait dans la formule précédente $u_p = 1$, et si l'on désigne par S'_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres, on obtient la formule symbolique

$$x^n + (S'-1)^n - S'^n = 0,$$

qui coïncide avec la formule (2), si l'on remplace x par $x-1$ et S' par S. Quant à l'expression de S'_n en fonction de x, elle se déduit de celle de S_n donnée dans la formule (11), en changeant simplement le signe de B_1.

Faisons maintenant dans la formule (28),

$$u_p = p^m, \qquad v_p = p^n,$$

nous obtenons ainsi,. en supposant $B_1 = +\frac{1}{2}$ la relation symbolique

$$S'_m S'_n + S'_{m+n} = S'^m \frac{(S'+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S'^n \frac{(S'+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1}. \tag{32}$$

qui exprime $S'_m S'_n$ en fonction linéaire des sommes S'.

On obtient ainsi, comme cas particuliers, pour $m = n$, et pour S ou pour S', à cause de la disparition de B_1,

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 &= S_3, \\ S_2^2 &= \frac{2}{3} S_5 + \frac{1}{3} S_3, \\ S_3^2 &= \frac{1}{2} S_7 + \frac{1}{2} S_5, \\ S_4^2 &= \frac{2}{5} S_9 + \frac{2}{3} S_7 - \frac{1}{15} S_5, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

La première de ces formules est fort ancienne; la troisième est due à Jacobi, qui l'a indiquée dans une remarque, sur un passage d'un lettre de Schumacher à Gauss (*).

(*) *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters.* — Vierter Band. Altona, 1862.

Inversement, on déduit des formules (33), les relations,

$$\left.\begin{aligned}
2S_3 &= 2S_1^2, \\
2S_5 &= 3S_2^2 - S_1^2, \\
2S_7 &= 4S_3^2 - 3S_2^2 + S_1^2, \\
2S_9 &= 5S_4^2 - \frac{20}{3}S_3^2 + \frac{11}{2}S_2^2 - \frac{11}{6}S_1^2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

et, sous forme de déterminant, on a, par exemple,

$$2S_{13} = -\begin{vmatrix}
2S_1^2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\
3S_2^2, & C_3^2 B_2, & 1, & 0, & 0, & 0, \\
4S_3^2, & 0, & C_4^2 B_2, & 1, & 0, & 0, \\
5S_4^2, & 0, & C_5^4 B_4, & C_5^2 B_2, & 1, & 0, \\
6S_5^2, & 0, & 0, & C_6^4 B_4, & C_6^2 B_2, & 1, \\
7S_6^2, & 0, & 0, & C_7^6 B_6, & C_7^4 B_4, & C_7^2 B_2
\end{vmatrix}. \tag{35}$$

13. L'équation (32) donne en faisant $m=1$, $n=2q+1$ et en posant

$$\frac{S_{2q+1}}{S_1^2} = Q_{2q+1}, \qquad y = 2S_1 = x(x-1),$$

la formule

$$yQ_{2q+1} - 2Q_{2q+3} = Q\frac{(Q+B)^{2q+2} - B^{2q+2}}{q+1}; \tag{36}$$

on obtient ainsi, en faisant successivement $q = 1, 2, 3, \dots$ les résultats suivants,

$$\left.\begin{aligned}
Q_3 &= 1, \\
Q_5 &= \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}, \\
Q_7 &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}, \\
Q_9 &= \frac{2}{5}y^3 - \frac{3}{3}y^2 + \frac{6}{5}y - \frac{3}{5}, \\
Q_{11} &= \frac{1}{3}y^4 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{17}{6}y^2 - \frac{10}{3}y + \frac{5}{3}, \\
Q_{13} &= \frac{2}{7}y^5 - \frac{5}{3}y^4 + \frac{82}{15}y^3 - \frac{236}{21}y^2 + \frac{1382}{105}y - \frac{691}{105}, \\
Q_{15} &= \frac{1}{4}y^6 - \frac{6}{3}y^5 + \frac{28}{3}y^4 - \frac{88}{3}y^3 + \frac{359}{6}y^2 - 70y + 35, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

On calcule ainsi rapidement les sommes S_{2q+1}. L'équation (32) donne encore, en faisant $m=2$ et $n=2q+1$, et en posant

$$\frac{S_{2q}}{S_2}=Q_{2q},$$

la formule

$$y^2 Q_{2q+1}=Q^2\frac{(Q+B)^{2q+2}-B^{2q+2}}{2q+2}+Q^{2q+2}\frac{2Q^2+1}{3}, \tag{38}$$

dans le développement de laquelle on supposera B_1 égal à zéro.

On a ainsi successivement, les résultats

$$\left.\begin{aligned}
3Q_2 &= 3,\\
5Q_4 &= 3y-1,\\
7Q_6 &= 3y^2-3y+1,\\
9Q_8 &= 3y^3-6y^2+\frac{27}{5}y-\frac{9}{5},\\
11Q_{10} &= 3y^4-10y^3+17y^2-15y+5,\\
13Q_{12} &= 3y^5-15y^4+41y^3-\frac{472}{7}y^2+\frac{2073}{35}y-\frac{691}{35},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

et, plus particulièrement,

$$5Q_9=(y-1)(2y^2-3y+3), \tag{40}$$

$$11Q_{10}=(y-1)(3y^3-7y^2+10y-5). \tag{41}$$

14. Il résulte immédiatement de la formule (11) que les rapports

$$\frac{S_n}{x} \text{ et } \frac{S_{2n-1}}{x^2},$$

ont respectivement pour valeurs

$$B_n \text{ et } \frac{2n-1}{2}B_{2n-2},$$

quand x tend vers zéro. Si l'on introduit ces hypothèses dans les formules précédentes qui contiennent S, on obtient un grand nombre de formules correspondantes pour les nombres de Bernoulli. Ainsi, par exemple, la formule (32) devient

$$B_{m+n}=B^m\frac{(B+B')^{n+1}-B'^{n+1}}{n+1}+B^n\frac{(B+B')^{m+1}-B'^{m+1}}{m+1}. \tag{42}$$

On ne réduit pas les B avec les B'; mais, après le développement du second membre, on remplace B^n et B'^n par B_n. En particulier, si l'on fait $m=1$, et $n=2q-1$, on obtient la formule

$$2qB_{2q}=B[(B+B')^{2q}-B'^{2q}], \tag{43}$$

et, pour $m=0$ et $n=2q-1$, on obtient la formule suivante

$$(2q-1)B_{2q}+(B+B')^{2q}=0, \tag{44}$$

qui a été donnée par Mr. Worontzoff (*) et par Mr. Le Paige (**).

La formule (35) donne encore, après avoir divisé par x^2,

$$13B_{12}=-\begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 3B_2^2, & C_3^2B_2, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & C_4^2B_2, & 1, & 0, & 0, \\ 5B_4^2, & 0, & C_5^4B_4, & C_5^2B_2, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & C_6^4B_4, & C_6^2B_2, & 1, \\ 6B_6^2, & 0, & 0, & C_7^6B_6, & C_7^4B_4, & C_7^2B_2. \end{vmatrix} \tag{45}$$

§ 4. De la somme des puissances alternées des nombres naturels.

15. En désignant par x un nombre pair, on a

$$n[1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(x-1)^{n-1}]=(x+B)^n-B^n,$$

$$n\left[1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+\left(\frac{x}{2}-1\right)^{n-1}\right]=\left(\frac{x}{2}+B\right)^n-B^n;$$

multiplions par 2^n tous les termes de la seconde égalité, et retranchons de la première, nous obtenons la formule

$$2n[1^{n-1}-2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(x-1)^{n-1}]=P^n-(x+P)^n, \tag{46}$$

en supposant

$$P_n=2(2^n-1)B_n. \tag{47}$$

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. 15, janvier 1876.

(**) Bulletins de l'Académie royale de Belgique, t. 41, mai 1876.

nous avons ainsi

$$P_0 = 0, \qquad P_1 = -1, \qquad P_2 = +1, \qquad P_4 = -1, \qquad P_6 = +3,$$
$$P_8 = -17, \qquad P_{10} = +155, \qquad P_{12} = -2073, \ldots$$

et P_{2n+1} est nul, en même temps que B_{2n+1}.

Il résulte immédiatement de la définition des coefficients P, que l'on a la formule symbolique

$$\frac{1}{2} f(P) = f(2B) - f(B). \tag{48}$$

Ainsi, par exemple, la formule

$$\frac{x}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} - x \cot x,$$

nous donne

$$-\frac{x}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \cos 2Bx - \cos Bx,$$

et, par suite,

$$-x \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \cos Px, \tag{49}$$

formule connue dont nous donnerons plus loin une démonstration directe.

16. Si, dans la formule (46), on change x en $x+2$, on obtient, par soustraction, la formule

$$(x+P+2)^n - (x+P)^n = 2n[x^{n-1} - (x+1)^{n-1}], \tag{50}$$

qui s'applique pour toutes les valeurs paires de x, et, par suite, pour des valeurs quelconques. On obtient, en généralisant, la formule suivante dans laquelle f désigne une fonction quelconque

$$f(x+P+2) - f(x+P) = 2[f'(x) - f'(x+1)], \tag{51}$$

et, avec la notation des différences,

$$\Delta_{x=2} f(x+P) = -2\Delta_{x=1} \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

On obtient encore, comme au paragraphe précédent,

$$\Delta^2_{x=2,y=2} f(x+P,\ y+P') = (-2)^2 \Delta^2_{x=1,y=1} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}; \tag{52}$$

dans le cas de trois variables

$$\Delta^3_{x=2,y=2,z=2} f(x+P,\ y+P',\ z+P'') = (-2)^3 \Delta^3_{x=1,y=1,z=1} \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z}, \tag{53}$$

et ainsi de suite.

17. Faisons $x=0$, dans la formule (51), nous obtenons

$$f(P+2)-f(P)=2[f'(0)-f'(1)], \tag{54}$$

et, en particulier, pour $f(x)$ successivement égal à x^n, $(x-1)^n$, $(x-2)^n, \ldots$,

$$\left.\begin{array}{ll} (P+2)^n-P^n=-2n, & (P+1)^n-(P-1)^n=2n(-1)^{n-1}, \\ P^n-(P-2)^n=2n[(-2)^{n-1}-(-1)^{n-1}], & (P+2)^n-(P-2)^n=2n[(-2)^{n-1}-(-1)^{n-1}-1], \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{55}$$

On tire de la première des relations (55), en remarquant que P est nul, et en remplaçant successivement n par 2, 3, 4,... n,

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot P_{n-1}=-\begin{vmatrix} n, & 2C_n^2, & 2^2C_n^3,\ldots & 2^{n-2}C_n^{n-1}, \\ n-1, & 1C_{n-1}^1, & 2C_{n-1}^2,\ldots & 2^{n-3}C_{n-1}^{n-2}, \\ n-2, & 0, & 1C_{n-2}^1,\ldots & 2^{n-4}C_{n-2}^{n-3}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 4, & 0, & 0,\ldots & 2^2C_4^3, \\ 3, & 0, & 0,\ldots & 2C_3^2, \\ 2, & 0, & 0,\ldots & 1C_2^1. \end{vmatrix} \tag{56}$$

La seconde et la quatrième des relations (55) donneraient, de la même manière, un déterminant d'ordre moitié moindre.

18. Dans l'hypothèse

$$f(x)=(x+a)(x+a+2)\cdots(x+a+2n),$$

la formule (54) nous donne,

$$\left.\begin{array}{c} (n+1)(P+a+2)(P+a+4)\cdots(n+a+2n) \\ =a(a+2)\cdots(a+2n)\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+2n}\right] \\ -(a+1)(a+3)\cdots(a+2n+1)\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{a+2n+1}\right]. \end{array}\right\} \tag{57}$$

et, par exemple, pour $a=0$,

$$\left.\begin{array}{c} (n+1)(P+2)(P+4)\cdots(P+2n)=2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) \\ -1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right]. \end{array}\right\} \tag{58}$$

et, pour $a = -1$

$$\left.\begin{array}{c}(n+1)(P+1)(P+3)\cdots(P+2n-1) = \\ -1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right]-2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n).\end{array}\right\} \quad (59)$$

Posons maintenant dans la formule (54), $f(x) = e^{xz}$, nous obtenons

$$e^{Pz} = -\frac{2z}{1+e^z}; \tag{60}$$

si nous posons $f(x) = \sin(x-1)z$, nous obtenons

$$\cos Pz = -z\,\mathrm{tg}\frac{z}{2}, \tag{61}$$

et si nous posons $f(x) = \cos(x-1)z$,

$$\sin Pz = -z. \tag{62}$$

Cette dernière formule confirme le résultat $P_1 = -1$ et $P_{2n+1} = 0$.

§ 5. De la somme des puissances semblables des nombres impairs.

19. Si l'on désigne par T_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres impairs, on déduit du développement

$$(2x-1)^n = 2^n x^n - C_n^1 2^{n-1} x^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} x^{n-2} + \cdots + (-1)^n,$$

en y remplaçant successivement x par 1, 2, 3,… x, et en ajoutant, la formule symbolique

$$T^n = (2S'-1)^n; \tag{63}$$

on voit ainsi que les symboles T et $2S'-1$ peuvent être remplacés l'un par l'autre, dans les formules. Inversement, du développement

$$(2x)^n = (2x-1)^n + C_n^1(2x-1)^{n-1} + C_n^2(2x-1)^{n-2} + \cdots + 1,$$

on déduit la formule symbolique

$$(2S')^n = (T+1)^n, \tag{64}$$

et l'on pourra remplacer les symboles $T+1$ et $2S'$ l'un par l'autre.

On peut encore exprimer T_n en fonction de T_{n-1}, T_{n-2},…; soit en effet, la formule

$$f(y+2) - f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n;$$

remplaçons successivement y par les x premiers nombres impairs, et ajoutons, il vient

$$f(2x+1)-f(1)=f(T+2)-f(T). \tag{65}$$

On en déduira aisément un très-grand nombre de résultats semblables à ceux que nous avons exposés dans les paragraphes précédents, mais nous ne nous occuperons que des coefficients de x dans le développement de T_n; ces coefficients apparaissent encore dans un certain nombre de séries trigonométriques.

20. On a les deux formules

$$2n[1^{n-1}-2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(2x-1)^{n-1}]=P^n-(2x+P)^n,$$
$$n[1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+(2x-1)^{n-1}]=(2x+B)^n-B^n,$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$4R_n=2B_n-P_n, \tag{66}$$

on a, aisément, la formule

$$nT_{n-1}=(2x+R)^n-R^n. \tag{67}$$

Si l'on remplace P en fonction de B dans l'expression de R, on a

$$R_n=B_n(1-2^{n-1}), \tag{68}$$

et, plus généralement,

$$f(z+R)=f(z+B)-\frac{1}{2}f(z+2B). \tag{69}$$

On trouve ainsi pour les nombres R les valeurs suivantes

$$R_0=\frac{1}{2}, \quad R_1=0, \quad R_2=-\frac{1}{6}, \quad R_4=+\frac{7}{30}, \cdots$$

21. Posons dans l'expression de T_{n-1}, l'égalité $y=2x+1$, et remplaçons y par $y+1$, nous obtenons, par différence, la relation

$$ny^{n-1}=(y+R+1)^n-(y+R-1)^n, \tag{70}$$

et, plus généralement

$$f'(y)=f(y+R+1)-f(y+R-1). \tag{71}$$

Faisons, dans cette dernière, $y=0$, il vient

$$f'(0)=f(R+1)-f(R-1), \tag{72}$$

et pour les hypothèses successives $f(x)=e^{xz}$, $f(x)=\sin xz$, $f(x)=\cos xz$, il vient

$$e^{Rz} = \frac{z}{e^z - e^{-z}}, \qquad \cos Rz = \frac{z}{2} \operatorname{coséc} z, \qquad \sin Rz = 0. \tag{73}$$

On aurait pu obtenir encore la seconde de ces formules par la relation

$$\operatorname{coséc} z = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{z}{2},$$

ou bien

$$\operatorname{coséc} z = -\frac{\cos Pz}{2z} + \frac{\cos Bz}{z} = \frac{2}{z} \cos Rz. \tag{74}$$

La convergence de ces diverses séries a lieu pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à π (*).

22. On trouvera pour les nombres R un grand nombre de formules analogues à celles qui ont été données pour les nombres B et pour les nombres P; nous indiquerons, particulièrement, les suivantes

$$\frac{(R+z+2)(R+z+4)\cdots(R+z+2n)}{(z+1)\quad(z+3)\cdots\quad(z+2n-1)} = \frac{z+2n+1}{2n+2}\left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \cdots + \frac{1}{z+2n+1}\right] \tag{75}$$

et, successivement, pour z égal à 0, $+1$, -1,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R+2}{1} \cdot \frac{R+4}{3} \cdot \frac{R+6}{5} \cdots \frac{R+2n}{2n-1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}, \\ &\frac{R+3}{2} \cdot \frac{R+5}{4} \cdot \frac{R+7}{6} \cdots \frac{R+2n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n+2}, \\ &(R+1)(R+3)(R+5)\cdots(R+2n-1) = \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

23. On peut encore exprimer T_n en fonction du dernier terme $z = 2x - 1$, et on obtiendra la formule

$$2n\, T_{n-1} = (z + 2B)^n - 2R_n, \tag{77}$$

dans laquelle on supposera $B_1 = +\frac{1}{2}\cdot$ Maintenant, si l'on fait dans la formule (28), les hypothèses

$$u_p = (2p-1)^m, \qquad v_p = (2p-1)^n,$$

on obtient

$$T_m T_n + T_{m+n} = T^m \frac{(T+2B)^{n+1} - 2R^{n+1}}{2(n+1)} + T^n \frac{(T+2B)^{m+1} - 2R^{m+1}}{2(m+1)}, \tag{78}$$

(*) J. A. Serret: *Traité de Trigonométrie,* 5ᵉ édition, p. 265 et 312.

et l'on exprime ainsi le produit $T_m T_n$ en fonction linéaire des sommes T. De plus, dans l'hypothèse $z=0$, $2_n T_{n-1}$ devient égal à P_n, et on obtient alors de nouvelles relations entre les nombres B et P, car les nombres R disparaissent de l'équation (78).

§ 6. De la somme des puissances alternées des nombres impairs.

24. Si l'on pose

$$\tau_n = -1^n + 3^n - 5^n + \cdots + (4x-1)^n, \tag{79}$$

on a

$$2\tau_n = (4x+E)^n - E^n; \tag{80}$$

les nombres E sont déterminés par l'identité

$$2[(4x+3)^n - (4x+1)^n] = (4x+E+1)^n - (4x+E)^n, \tag{81}$$

obtenue en changeant x en $x+1$ dans la relations (80), et en prenant les différences des résultats. Si l'on pose $y=4x$, on a l'identité

$$2[(y+3)^n - (y+1)^n] = (y+E+1)^n - (y+E)^n, \tag{82}$$

qui a lieu, non seulement pour les valeurs entières de y égales à un multiple de 4, mais pour toutes les valeurs de y. On a, pour $y=-1$,

$$(E+2)^n - (E-2)^n = 2[1-(-1)^n], \tag{83}$$

et, par conséquent, la rélation

$$(E+2)^{2n} - (E-2)^{2n} = 0, \tag{84}$$

qui indique que E_{2n+1} est nul. Les premiers coefficients E, que Mr. Sylvester a désignés sous le nom de Nombres d'Euler (*), ont les valeurs suivantes:

$$E_0=1,\quad E_2=-1,\quad E_4=+5,\quad E_6=-61,\quad E_8=1385,\quad E_{10}=-50521,\ldots$$

25. La relation (82) donne aisément la relation plus générale

$$f(y+E+4) - f(y+E) = 2[f(y+3) - f(y+1)], \tag{85}$$

et, pour $y=0$,

$$f(E+4) - f(E) = 2[f(3) - f(1)]. \tag{86}$$

(*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 25, p. 161.

Si l'on pose, en particulier, $f(x)$ égale à e^{xz}, on obtient le développement

$$e^{Ez} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \tag{87}$$

qui reste convergent pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. En changeant, dans cette formule, z en zi, i désignant $\sqrt{-1}$, on a encore,

$$\operatorname{séc} z = e^{Eiz}. \tag{88}$$

On déduit encore de la formule (87), l'identité

$$e^{Ez} e^z + e^{Ez} e^{-z} = 2;$$

donc, d'après le lemme 3, et pour n différent de zéro,

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0. \tag{89}$$

En donnant à n des valeurs paires, on en déduit que les nombres E sont entiers et impairs (*).

26. On peut démontrer aussi simplement que P_n est entier et impair. En effet, la formule (60) donne l'identité

$$e^{Pz}(1 + e^z) = -2z;$$

donc, d'après le lemme 3, et pour $n > 1$,

$$P^n + (P+1)^n = 0. \tag{90}$$

En supposant n pair et égal à $2q$, et les nombres P_n entiers et impairs, pour n inférieur à $2q$, on a la congruence

$$2P_{2q} + 2^q - 2 \equiv 0, \qquad (\text{Mod. } 2),$$

puisque la somme des coefficients de rang impair dans la puissance $2q$ du binôme, est égal à $2^q - 2$, en exceptant les extrêmes. Cette congruence montre immédiatement que P_{2q} est aussi entier et impair.

27. Cette propriété de P_n entier et impair, peut-être généralisée de la manière suivante, et il est facile de démontrer que le nombre Q_n défini par la relation

$$Q_n = a(a^n - 1)B_n, \tag{91}$$

(*) E. Catalan: *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler.* Mémoires de l'Académie de Belgique, t. 37, pag. 9 de l'Extrait.

est aussi un nombre entier, quel que soit l'entier a. On retrouve les résultat précédent dû à Mr. CATALAN, si a est égal à 2.

Mr. CLAUSEN et Mr. STAUDT ont, en effet, découvert en même temps cette expression

$$B_{2n} = A_{2n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \cdots - \frac{1}{\lambda}, \tag{92}$$

dans laquelle A_{2n} représente un nombre entier, et les dénominateurs α, β, $\gamma, \ldots$ λ, tous les nombres premiers tels que $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1, \ldots$ $\lambda - 1$, soient diviseurs de $2n$ (*).

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (92) par $a(a^{2n} - 1)$, le premier membre devient égal à Q_{2n}; chacune des fractions du second devient un nombre entier, car si $\alpha - 1$ est un diviseur de $2n$, le binôme $\alpha^{2n} - 1$ est divisible par $a^{\alpha-1} - 1$; et, si α est premier, le binôme $a(a^{\alpha-1} - 1)$ est divisible par α, d'après le théorème de FERMAT.

On pourrait d'ailleurs donner de cette propriété de Q_n une autre démonstration, indépendante du théorème que nous venons de rappeler.

28. Mr. HERMITE a indiqué une méthode de calcul des nombres entiers A, que nous allons démontrer plus simplement, tout en la généralisant (**). Cette méthode conduit à la connaissance d'un gran nombre de fonctions numériques, venant se joindre à toutes celles dont la théorie des fonctions elliptiques a donné l'origine et les propriétés.

Désignons par $f(x)$ une fonction de degré $2n$

$$f(x) = a_0 x^{2n} + \frac{2n}{1} a_1 x^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{2n-2} + \cdots,$$

dans laquelle les coefficients a_0, a_1, $a_2, \ldots$ sont des nombres entiers, mais arbitraires, et posons

$$\varphi_r = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} \left[\frac{d^r f(x+1)}{dx^r} - \frac{d^r f(x)}{dx^r} \right];$$

la formule (16) devient

$$f'(x) = B_0 \varphi_0 + B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 + B_4 \varphi_4 + \cdots \tag{93}$$

(*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 21, p. 372. — *Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend.*

(**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 81, p. 93. — *Extrait d'une lettre de Mr. Hermite à Mr. Borchardt.*

Si nous portons, dans cette équation, les valeurs successives des coefficients B données par le théorème de STAUDT, nous obtiendrons, en posant encore,

$$\sum_1 = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_4\varphi_4 + \cdots - f'(x), \tag{94}$$

et, pour p premier,

$$\sum_p = \frac{1}{p}\,[\varphi_{p-1} + \varphi_{2p-2} + \varphi_{3p-3} + \cdots], \tag{95}$$

la formule suivante, pour le calcul des nombres A,

$$\sum_1 = \sum_2 + \sum_3 + \sum_5 + \sum_7 + \cdots, \tag{96}$$

dans laquelle les $\sum$ se rapportent à tous les nombres premiers jusqu'à $2n+1$. Les termes qui forment $\sum_p$ proviennent de ceux qui contiennent le facteur $\frac{1}{p}$, et par suite des nombres B dont l'indice est un multiple de $p-1$. Tous ces nombres sont évidemment entiers; car, d'une part, les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ représentent des nombres entiers, pour des valeurs entières quelconques de x, et d'autre part, si la somme des fractions

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \cdots + \frac{1}{\lambda},$$

est un nombre entier, lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ désignent des nombres premiers différents, les fractions qui forment cette somme, sont aussi des nombres entiers.

On retrouve les deux propositions de Mr. HERMITE, en supposant simplement $f(x) = (x+1)^{2n+1}$. On a, ainsi,

$$A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = A_{10} = A_{12} = 1, \qquad A_{2n+1} = 0,$$

et

$$A_{14} = +2, \quad A_{16} = -6, \quad A_{18} = +56, \quad A_{20} = -518, \quad A_{22} = +6193,$$
$$A_{24} = -86579, \quad A_{26} = +1425518, \ldots$$

§ 7. Relations mutuelles entre les nombres B, P, R, E, et les intégrales définies correspondantes.

29. Nous avons vu, précédemment, que si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \cdots + (x-1)^n &= S_n, \\ 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \cdots + (2x-1)^n &= \sigma_n, \\ 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + \cdots + (2x-1)^n &= T_n, \\ 1^n - 3^n + 5^n - 7^n + \cdots - (4x-1)^n &= -\tau_n, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

on a les formules symboliques

$$\left.\begin{aligned} n S_{n-1} &= (x+B)^n - B^n, & 2n\sigma_{n-1} &= (2x+P)^n - P^n, \\ n T_{n-1} &= (2x+R)^n - R^n, & 2\tau_n &= (4x+E)^n - E^n, \end{aligned}\right\} \quad (98)$$

dans lesquelles on remplace les exposants de B, P, R, E, après le développement, par des indices. On a, d'ailleurs, pour déterminer ces coefficients, les relations de récurrence

$$\left.\begin{aligned} &f(x+B+1)-f(x+B)=f'(x), \\ &f(x+P+2)-f(x+P)=2f'(x)-2f'(x+1), \\ &f(x+R+2)-f(x+R)=f'(x+1), \\ &f(x+E+4)-f(x+E)=2f(x+3)-2f(x+1). \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Ces coefficients proviennent encore de la somme des inverses des puissances, semblables ou alternées, de tous les nombres entiers, ou de tous les nombres impairs. On a, en effet,

$$\left.\begin{aligned} S_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1\cdot2\cdot3\cdots(2n)}(-1)^{n-1}B_{2n}, \\ T_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\cdots = \frac{\pi^{2n}}{1\cdot2\cdot3\cdots(2n)}R_{2n}, \\ \sigma_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots = \frac{1}{4}\,\frac{\pi^{2n}}{1\cdot2\cdots(2n)}(-1)^n P_{2n}, \\ \tau_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\frac{1}{7^{2n}}+\cdots = \frac{1}{2^{2n+2}}\,\frac{\pi^{2n+1}}{1\cdot2\cdots(2n)}(-1)^n E_{2n}. \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Les relations de récurrence qui précèdent, et dans lesquelles f désigne une fonction quelconque, donnent les développements

$$\left.\begin{aligned} \cos Bz &= \frac{z}{2}\operatorname{cotg}\frac{z}{2}, \\ \cos Pz &= -z\operatorname{tang}\frac{z}{2}, \\ \cos Rz &= \frac{z}{2}\operatorname{coséc} z, \\ \cos Ez &= \operatorname{séc} z, \end{aligned}\right\} \quad (101) \qquad \text{et} \qquad \left.\begin{aligned} e^{Bz} &= \frac{z}{e^z-1}, \\ e^{Pz} &= -\frac{2z}{e^z+1}, \\ e^{Rz} &= \frac{z}{e^z-e^{-z}}, \\ e^{Ez} &= \frac{2}{e^z+e^{-z}}, \end{aligned}\right\} \quad (102)$$

dont on connait les conditions de convergence. Ces développements donnent lieu, au moyen du calcul des résidus, aux expressions de B, P, R, E, par des intégrales définies prises entre les limites 0 et ∞, ou 0 et 2π, et conduisent à des formules analogues aux formules

$$B_{2n} = \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1}, \qquad \text{et} \qquad E_{2n} = \pm\, 2^{2n+2} \int_0^\infty \frac{t^{2n}\,dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}, \tag{103}$$

données par Plana, et Mr. Catalan, pour les nombres B et E.

Par conséquent, si l'on profite des relations qui existent entre les fonctions circulaires, ou entre les fonctions hyperboliques correspondantes, en obtient un grand nombre de formules nouvelles contenant, en même temps, ces coefficients, ou les intégrales définies dont nous venons de parler.

ERRATA-CORRIGE.

Pag. 39 linea 12 leggasi:

$$[\xi]_m = \frac{2\dfrac{d\xi}{dm}\dfrac{d^3\xi}{dm^3} - 3\left(\dfrac{d^2\xi}{dm^2}\right)^2}{2\left(\dfrac{d\xi}{dm}\right)^2}$$

" 40 linea 18 leggasi:

$$[\xi]_x = \frac{A'\xi^2 + B'\xi + C'}{2\xi^2(1-\xi)^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 - \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2}$$

" 42 linea 4 leggasi pel coefficiente di $\dfrac{dY}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} + 2p^2 + 4q.$$

Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

(*Von* E. B. Christoffel, *in Strassburg.*)

Ich erlaube mir, den Lesern der Annali in dieser und einer folgenden Abhandlung Untersuchungen über eine Gattung von Problemen vorzulegen, welche mit der Lehre von den integrirenden Factoren der linearen partiellen Differentialgleichungen im genauesten Zusammenhange stehen, und zwar so, dass neue Fortschritte in dieser Theorie sich nur auf die Kenntniss jener Probleme und der Hülfsmittel für ihre Lösung gründen können.

In den gegenwärtigen Abhandlungen sind indessen Erörterungen nach dieser Richtung nicht beabsichtigt. Die Untersuchung der mit linearen partiellen Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten empfiehlt sich, auch abgesehen von den angegebenen Zwecken, zunächst dadurch, dass sie eine tiefere Einsicht in die Natur der zu untersuchenden Differentialgleichungen gewährt, ausserdem aber in manchen Fällen durch den reichen Inhalt ihrer Resultate.

Ich halte es daher für angemessen, vor allen Dingen an einigen Beispielen zu zeigen, worin die Aufgabe solcher Untersuchungen besteht und wie dieselben durchzuführen sind, aber auf die Fragen, durch welche ich ursprünglich zu meinen Untersuchungen veranlasst worden bin, bei dieser Gelegenheit nicht einzutreten.

Die Aufgaben welche ich behandeln werde, sind der Mechanik entnommen, und betreffen die Fortpflanzung von Stössen durch continuirliche Mittel von beliebiger Begrenzung. In der Mechanik wird bewiesen, dass die Wirkung eines Stosses auch durch stetig beschleunigende Kräfte hervorgebracht werden kann, welche nur kurze Zeit hindurch, aber während derselben sehr heftig wirken. Auf Grund dieses einleuchtenden Resultates pflegt man auf Untersuchungen über Stosskräfte zu verzichten, ohne sich jedoch mit den an ihre Stelle gesetzten, so ausserordentlich wirksamen Kräften weiter zu beschäftigen. Damit wird eines der fruchtbarsten Gebiete der Mechanik unbemerkt bei Seite gesetzt, und zugleich mit einem Anschein von Berechtigung die Uebung eingeführt, dass man bei mechanischen Problemen, selbst wenn offenbare Unstetigkeiten vorliegen, sich nicht um die Bedingungen kümmert, zu denen dieselben Veranlassung geben.

Ein sehr nahe liegendes Beispiel hierfür findet sich in der Lehre von den gespannten Saiten. Die Formeln, welche sich für die Transversalbewegung einer Saite unter der Voraussetzung ergeben, dass die Saite allenthalben stetig gebogen ist, werden unbedenklich auf den Fall angewandt, wo die Saite Ecken darbietet (Theorie der gezupften Saite); wenn man sich überhaupt auf Gründe hierfür einlässt, werden dieselben in den Eigenschaften der Fourier'schen Reihen gefunden. Und doch hat diese Frage mit den Fourier'schen Reihen gar nichts zu thun, indem sie vielmehr von zwei neuen Bedingungen abhängt, einer mechanischen für den Stoss, welchen ein von der Ecke überschrittenes Element der Saite erleidet, und einer phoronomischen, welche die beim Stosse eintretenden Unstetigkeiten so beschränkt, dass sie den Zusammenhang der Saite nicht aufheben (*). Mit Hülfe dieser Bedingungen kann man, wie ich es seit einer Reihe von Iahren in meinen Vorlesungen zu thun pflege, beweisen, dass allerdings das Vorhandensein von Ecken auf die Schlussformeln für die Transversalbewegung keinen Einfluss hat, aber dies beruht nicht auf den Eigenschaften der Fourier'schen Reihen, sondern darauf, dass die erwähnten Unstetigkeiten solche sind, welche sich mit dem Fortbestehen der seit Euler so oft behandelten linearen partiellen Differentialgleichung vertragen.

Ich verzichte auf die Ausführung dieses sehr einfachen Beispiels, und behandle in der vorliegenden Arbeit die Fortpflanzung von Stössen durch eine Flüssigkeit, selbstverständlich unter den vereinfachenden Voraussetzungen, durch welche alle Bedingungsgleichungen linear werden. Die Anwendung der nachfolgenden Principien auf die vollständigen Grundgleichungen der Hydrodynamik

(*) Unter den gewöhnlichen vereinfachenden Voraussetzungen und in den üblichen Zeichen (Poisson, Méc., II, N.° 484) fordert die erste Bedingung dass $c\frac{\partial y}{\partial t}+a^2\frac{\partial y}{\partial x}$, die andere dass $c\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}$ zu beiden Seiten der Ecke denselben Werth haben soll; c ist die Geschwindigkeit mit welcher die Ecke zu grössern x fortrückt.

führt zu Resultaten, welche darauf hinzudeuten scheinen, dass bei der üblichen Beurtheilung der in bewegten Flüssigkeiten wirkenden Kräfte principielle Fehler vorliegen.

I.

Die mechanischen Bedingungen für den Stoss zwischen Flüssigkeitstheilchen.

1.

Das Verfahren, durch welches man zu den mechanischen Bedingungen für den Stoss zwischen Flüssigkeitstheilchen gelangt, verdanken wir Riemann, welcher diese Aufgabe in seiner Abhandlung über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite gelöst hat.

Sei Σ eine Unstetigkeitsfläche innerhalb einer Flüssigkeit, also eine Fläche, zu deren beiden Seiten der Druck p, die Dichtigkeit ρ und die, nach den zueinander senkrechten Richtungen der wachsenden xyz geschätzten Geschwindigkeits componenten uvw verschiedene Werthe haben.

Wir unterscheiden die beiden Seiten von Σ, indem wir die eine als die positive $\overset{+}{\Sigma}$, die andere als die negative $\overset{-}{\Sigma}$ bezeichnen. Dieselbe Bezeichnung soll auch für die angrenzenden Werthe u, v,... benützt werden.

Ueber einem Elemente $\partial\Sigma$ dieser Fläche wird die Normale errichtet; wir zählen in ihr Abscissen N, die von der negativen nach der positiven Seite hin wachsen, und bezeichnen die Winkel, welche der positive Schenkel dieser Normale mit den positiven Axen der xyz bildet, durch $\alpha\beta\gamma$.

Wenn die Unstetigkeitsfläche Σ keine stehende ist, sondern im Raume fortschreitet, mit oder ohne Gestaltsänderung, so ist dadurch allein weder die Gestaltsänderung eines Theiles von Σ, noch die Bewegung eines einzelnen Punktes μ von Σ bestimmt; wir wählen letztere so, dass die Normale von Σ in dem mit Σ fortschreitenden Punkte μ fortwährend zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, und μ selbst seinen Ort nach der Stetigkeit ändert. Dann ist die Bewegung und Gestaltsänderung eines Elements $\partial\Sigma$ dieser Fläche unzweideutig bestimmt: sie geht so von Statten, dass (1) die Ortsänderung eine stetige ist und (2) die an $\partial\Sigma$ entlang vorhandenen Normalenrichtungen unverändert bleiben.

Wenn $\partial\Sigma$ fortschreitet, wird es entweder die auf seiner positiven Seite angrenzenden Flüssigkeitstheilchen überholen, oder von den auf der negativen Seite befindlichen überholt werden. Der Fall wo beide Flüssigkeitsschichten nur längs $\partial\Sigma$ gleiten, kann nach Belieben dem ersten oder zweiten Falle als Grenzfall zugeordnet werden.

Ist

$$\omega$$

die positive oder negative Geschwindigkeit, mit welcher $\partial\Sigma$ zu grössern N fortschreitet,

$$\Omega = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$$

die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit in der nämlichen Richtung strömt, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, jenachdem $\omega - \overset{+}{\Omega}$ positiv oder negativ ist.

Im ersten Falle überholt $\partial\Sigma$ in der Zeit ∂t die Flüssigkeitsmenge $\overset{+}{\rho}(\omega - \overset{+}{\Omega})\partial t\partial\Sigma$; dieselbe bleibt hinter $\partial\Sigma$ zurück und berechnet sich dort $= \overset{-}{\rho}(\omega - \overset{-}{\Omega})\partial t\partial\Sigma$, wenn sie das Volumen $(\omega - \overset{-}{\Omega})\partial t\partial\Sigma$ ganz ausfüllt, d. h. sich nicht spaltet.

Im zweiten Falle dringt in derselben Zeit durch $\partial\Sigma$ von der negativen Seite her die Masse $\overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)\partial t\partial\Sigma$; dieselbe eilt $\partial\Sigma$ voran und drückt sich dann aus durch $\overset{+}{\rho}(\overset{+}{\Omega} - \omega)\partial t\partial\Sigma$, voraus gesetzt dass die Flüssigkeitstheilchen bei $\partial\Sigma$ nicht ausser Berührung treten.

In beiden Fällen haben wir

$$\overset{+}{\rho}(\overset{+}{\Omega} - \omega) = \overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega} - \omega) \tag{1}$$

als Bedingung für die Continuität der Flüssigkeit.

Im ersten Falle hat die von $\partial\Sigma$ überschrittene Flüssigkeitsmenge in der Richtung der wachsenden x vorher die Geschwindigkeit $\overset{+}{u}$, nachher die Geschwindigkeit $\overset{-}{u}$; diese Componente erleidet also eine plötzliche Vermehrung $\overset{-}{u} - \overset{+}{u}$. Im zweiten Falle ist $\overset{-}{u}$ die Componente vor, $\overset{+}{u}$ dieselbe nach dem Stosse, also $\overset{+}{u} - \overset{-}{u}$ die Zunahme der Componente. In beiden Fällen ist das Product aus der Masse und der Zunahme der Geschwindigkeits componente während der Zeit ∂t gleich $\overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)\partial t\partial\Sigma(\overset{+}{u} - \overset{-}{u})$, also das Mass der beschleunigenden Kraft

$$\overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega} - \omega)(\overset{+}{u} - \overset{-}{u})\partial\Sigma.$$

Von den zwischen den Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kräften berücksichtigen wir nur den hydraulischen Druck p. Dann wirkt auf diese Masse, abgesehen von Kräften die einander bis auf unendlich kleine Differenzen aufheben, (1) in $\partial\overset{+}{\Sigma}$ der Druck $\overset{+}{p}\partial\Sigma$ gegen die Richtung der wachsenden N; seine Componente nach grössern x ist also $-\overset{+}{p}\cos\alpha\,\partial\Sigma$; (2) in $\partial\overset{-}{\Sigma}$ wirkt der Druck $\overset{-}{p}\partial\Sigma$ zu grössern N, was die Componente $\overset{-}{p}\cos\alpha\,\partial\Sigma$ gibt. Die Componente des Ueberdrucks ist also

$$(\overset{-}{p}-\overset{+}{p})\cos\alpha\,\partial\Sigma,$$

und dies ist dem vorigen Ausdrucke gleich.

Für den Stoss, den die von $\partial\Sigma$ überschrittenen Flüssigkeitstheilchen im nämlichen Augenblicke erfahren, erhalten wir also die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{u}-\overset{-}{u})+(\overset{+}{p}-\overset{-}{p})\cos\alpha=0\\ \overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{v}-\overset{-}{v})+(\overset{+}{p}-\overset{-}{p})\cos\beta=0\\ \overset{-}{\rho}(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{w}-\overset{-}{w})+(\overset{+}{p}-\overset{-}{p})\cos\gamma=0;\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

es bedarf keiner Erläuterung, welche Glieder noch hinzukommen, wenn man ausser dem Drucke p noch andere Kräfte berücksichtigen will.

2.

Unsere nächste Aufgabe ist nun diese, die vorstehenden Bedingungsgleichungen durch geeignete Vernachlässigungen auf lineare zu reduciren, da die hier beabsichtigten Untersuchungen lineare Bedingungen fordern. Es wird sich zeigen, dass hierbei verschiedene Fälle zu unterscheiden sind, die sich nach den Werthen von ω richten.

Sei ρ_0 die constante Dichtigkeit im ungestörten Zustande und

$$\rho=\rho_0(1+s),$$

also s die Condensation. Unter der Voraussetzung, dass s sehr klein bleibt, setze ich wie üblich

$$p=p_0+\rho_0 a^2 s,$$

wo p_0 den Druck im ungestörten Zustande bedeutet. Hier ist a eine positive

Constante und erfahrungsmässig von sehr beträchtlicher Grösse. Die Bedingungsgleichungen des vorigen art. gehen über in:

$$\omega(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})=(1+\overset{+}{s})\overset{+}{\Omega}-(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}(1+\overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{u}-\overset{-}{u})+a^2(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})\cos\alpha=0\\(1+\overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{v}-\overset{-}{v})+a^2(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})\cos\beta=0\\(1+\overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{w}-\overset{-}{w})+a^2(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})\cos\gamma=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

während

$$\Omega=u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma \tag{3}$$

ist.

Ich vernachlässige alle Grössen von der Ordnung $\frac{1}{a}$, und beschränke die Untersuchung auf den Fall, wo s, su, sv, sw also auch $s\Omega$ solche Grössen sind. Es ist hiernach nicht gefordert, dass auch u, v, w sehr klein bleiben; ausgeschlossen sind nur sehr beträchtliche Geschwindigkeiten, z. B. solche, die mit der Zahl a vergleichbar sind.

Unter diesen Voraussetzungen lehrt die Gleichung (1), dass ω eine Grösse von der Ordnung a ist, wenn es nicht $=0$ und $\overset{+}{\Omega}$ nicht $=\overset{-}{\Omega}$ ist. Bei der Reduction der vorstehenden Bedingungen auf lineare müssen also drei Fälle unterschieden werden:

α) der Hauptfall, wo weder $\omega=0$ noch $\overset{+}{\Omega}=\overset{-}{\Omega}$ ist; dann ist ω von der Ordnung a;

β) der Fall, wo ω nicht $=0$ aber $\overset{+}{\Omega}=\overset{-}{\Omega}$, und

γ) der Fall, wo $\omega=0$ ist.

α) Im ersten Falle gibt die Gleichung (1)

$$\omega(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})=\overset{+}{\Omega}-\overset{-}{\Omega},$$

die erste Gleichung (2) kann geschrieben werden

$$(1+\overset{+}{s})\left(1-\frac{\overset{-}{\Omega}}{\omega}\right)\cdot\omega(\overset{+}{u}-\overset{-}{u})=a^2(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})\cos\alpha,$$

und gibt also

$$\omega(\overset{+}{u}-\overset{-}{u})=a^2(\overset{+}{s}-\overset{-}{s})\cos\alpha.$$

Wir schreiben von hier an:

$$\overset{+}{u}-\overset{-}{u}=U,\qquad \overset{+}{v}-\overset{-}{v}=V,\qquad \overset{+}{w}-\overset{-}{w}=W,\qquad \overset{+}{s}-\overset{-}{s}=S,\tag{A}$$

und nennen S den Condensationsstoss, UVW die Componenten des Geschwindigkeitsstosses. Die Bedingungsgleichungen reduciren sich auf die folgenden:

$$\omega S = U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma \tag{B}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega U &= a^2 S\cos\alpha\\ \omega V &= a^2 S\cos\beta\\ \omega W &= a^2 S\cos\gamma.\end{aligned}\right\}\tag{C}$$

3.

Bevor wir zu den Folgerungen aus diesen Bedingungen übergehen, müssen wir noch die beiden andern, minder wichtigen Fälle erledigen.

β) Ist ω von Null verschieden, aber

$$\overset{+}{\Omega}=\overset{-}{\Omega},$$

so folgt aus (2) mittelst der Factoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

$$\overset{+}{s}=\overset{-}{s}$$

oder in der ursprünglichen Form $\overset{+}{p}=\overset{-}{p}$, also weiter $(1+\overset{-}{s})(\overset{-}{\Omega}-\omega)(\overset{+}{u}-\overset{-}{u})=0$, $u\cdot s\cdot w$, mithin, wenn überhaupt Unstetigkeiten stattfinden, $\overset{-}{\Omega}=\omega$.

Im diesem Falle ist also die zu Σ senkrechte Geschwindigkeit Ω der angrenzenden Flüssigkeit zu beiden Seiten dieselbe, und dies ist zugleich die Geschwindigkeit ω, mit welcher Σ in der nämlichen Richtung fortschreitet. Druck und Dichtigkeit sind stetig, nur die Componenten der Tangentialgeschwindigkeit haben zu beiden Seiten von Σ ungleiche Werthe.

Da hiernach kein Flüssigkeitstheilchen durch Σ hindurchtritt, so findet auch kein Stoss zwischen Flüssigkeitstheilchen statt; Σ ist die Grenze zwischen zwei Flüssigkeitsmassen, die in ihrer Bewegung einander folgen und, solange dieser Vorgang dauert, längs einander gleiten, ohne sich zu vermischen.

γ) Wenn dagegen $\omega=0$, also die Unstetigkeitsfläche eine stehende ist, so haben wir zunächst

$$(1+\overset{+}{s})\overset{+}{\Omega}=(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega}U+a^2S\cos\alpha=0\\(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega}V+a^2S\cos\beta=0\\(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega}W+a^2S\cos\gamma=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

mithin wegen der drei letzten Gleichungen auch

$$(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega}(\overset{+}{\Omega}-\overset{-}{\Omega})+a^2S=0. \tag{3}$$

Setzt man nun, um (1) zu befriedigen,

$$\overset{+}{\Omega}=\mu\sqrt{\frac{1+\overset{-}{s}}{1+\overset{+}{s}}},\qquad \overset{-}{\Omega}=-\mu\sqrt{\frac{1+\overset{+}{s}}{1+\overset{-}{s}}},$$

so folgt

$$(1+\overset{-}{s})\overset{-}{\Omega}=\mu\sqrt{1+\overset{+}{s}\cdot 1+\overset{-}{s}},\qquad \overset{+}{\Omega}-\overset{-}{\Omega}=-\frac{\mu S}{\sqrt{1+\overset{+}{s}\cdot 1+\overset{-}{s}}},$$

also aus (3)

$$(\mu^2-a^2)S=0.$$

Ist nun (1) $S=0$ aber μ, also auch $\overset{-}{\Omega}$ nicht $=0$, so folgt $U=0$ $V=0$ $W=0$, d. h. dann finden längs Σ gar keine Unstetigkeiten statt. Ist (2) $S=0$ und $\mu=0$, so ist $\overset{+}{\Omega}=\overset{-}{\Omega}=0$, und dann verhält sich Σ wie eine unbewegliche, undurchdringliche Wand, an welcher die Flüssigkeit zu beiden Seiten vorbeiströmt. Ist (3) S nicht $=0$, so folgt $\mu=\pm a$; $\overset{+}{\Omega}$ und $\overset{-}{\Omega}$ werden von der Ordnung a, also strömt die Flüssigkeit durch die ruhende Fläche Σ mit einer Normalgeschwindigkeit, welche verhältnissmässig nur wenig von a verschieden ist. Geschwindigkeiten von solcher Grösse müssen bei unsern Untersuchungen ausgeschlossen werden.

Der einzige mit unsern Untersuchungen verträgliche Fall einer stehenden Unstetigkeitsfläche ist also der, wo $S=0$, d. h. Druck und Dichtigkeit stetig, und die Normalgeschwindigkeit Ω zu beiden Seiten der Fläche $=0$ ist. Diese Bedingungen ergeben sich für $\omega=0$ auch aus (B) und (C).

4.

Schafft man aus (B) die Grössen UVW weg, so bleibt $S(\omega^2 - a^2) = 0$. Ist $S = 0$, so geben die Gleichungen (C) entweder $\omega = 0$, und dann ist Σ eine stehende Unstetigkeitsfläche und wegen (B) $\overset{+}{\Omega} = \overset{-}{\Omega}$, oder es folgt $U = 0$ $V = 0$ $W = 0$, und dann finden längs Σ gar keine Unstetigkeiten statt.

Ist aber S von Null verschieden, so folgt

$$\omega^2 = a^2 \tag{1}$$

und nun folgt aus (C)

$$\left.\begin{aligned} U &= \omega S \cos\alpha \\ V &= \omega S \cos\beta \\ W &= \omega S \cos\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Der Stoss, den ein von $\partial\Sigma$ überschrittenes Flüssigkeitstheilchen erleidet, ist demnach senkrecht zu $\partial\Sigma$ und, nach den wachsenden N geschätzt, $= \omega S$. Um seine Richtung auf die in der Flüssigkeit selbst herrschenden Verhältnisse zu beziehen, sei für einen Augenblick die Richtung der wachsenden N diejenige, in welcher $\partial\Sigma$ wirklich fortschreitet, also $\omega = a$; dann folgt aus (2) $\overset{+}{\Omega} - \overset{-}{\Omega} = aS$. Sodann ist bei unsern Untersuchungen Ω numerisch kleiner als a, also überholt $\partial\Sigma$ die auf seiner positiven Seite liegenden Flüssigkeitstheilchen. Dieselben treten also während des Stosses aus der Normalgeschwindigkeit $\overset{+}{\Omega}$ und dem Drucke $\overset{+}{p} = p_0 + \rho_0 a^2 \overset{+}{s}$ über in die Normalgeschwindigkeit $\overset{-}{\Omega}$ und den Druck $\overset{-}{p} = p_0 + \rho_0 a^2 \overset{-}{s}$; sie erlangen also nach der Richtung der wachsenden N die Geschwindigkeitsvermehrung $\overset{-}{\Omega} - \overset{+}{\Omega} = \frac{1}{\rho_0 a}(\overset{-}{p} - \overset{+}{p})$. Ist $\overset{-}{p}$ der grössere Druck, so ist dieser Stoss positiv, also zu grössern N, mithin von $\overset{-}{p}$ nach $\overset{+}{p}$ gerichtet; ist umgekehrt $\overset{+}{p}$ der grössere Druck, so wirkt der Stoss nach den kleinern N, also von $\overset{+}{p}$ nach $\overset{-}{p}$ hin. Beides zusammen gibt den Satz:

Wird ein Flüssigkeitstheilchen von $\partial\Sigma$ überschritten, so erleidet es im nämlichen Augenblicke einen Stoss ωS; derselbe ist senkrecht zu $\partial\Sigma$ und wirkt stets vom grössern nach dem kleinern Drucke hin.

5.

Für die Unstetigkeitsfläche Σ hat sich nur das in der Gleichung $\omega^2 = a^2$ ausgesprochene Gesetz ergeben; dasselbe lehrt, dass jede Tangentialebene von Σ nach der Richtung ihrer Normale mit der constanten Geschwindigkeit $\pm a$ fortschreitet.

Die Anfangslage Σ_0 von Σ kann daher willkürlich angenommen werden, und jede spätere Lage von Σ gibt sich als Parallelfläche von Σ_0 zu erkennen.

Um dies näher zu begründen, und zugleich für die folgenden Untersuchungen die nöthigen Vorbereitungen zu treffen, sei

$$t = f(\xi \eta \zeta) \tag{Σ}$$

die Gleichung der Unstetigkeitsfläche zur Zeit t, indem wir von hier an die Coordinaten eines der Fläche Σ angehörigen, also mit t sich ändernden Punktes μ stets durch $\xi \eta \zeta$ bezeichnen werden, während xyz die Coordinaten eines beliebigen Punktes bedeuten. Für unsere Untersuchung brauchen wir die partiellen Derivirten dieser Function t von ξ, η, ζ.

Da, bei passender Wahl von k, $\frac{\partial f}{\partial \xi} = k \cos\alpha$, $\frac{\partial f}{\partial \eta} = k \cos\beta$, $\frac{\partial f}{\partial \zeta} = k \cdot \cos\gamma$ ist, so ist das vollständige Differential von $t: \partial t = k(\cos\alpha\, \partial\xi + \cos\beta\, \partial\eta + \cos\gamma\, \partial\zeta)$. Die Grösse k bestimmt sich aus einem besondern Falle. Lässt man nämlich μ in der Richtung der wachsenden N, also mit der Geschwindigkeit ω fortrücken, und sind dann $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ die Zunahmen der Coordinaten während der Zeit ∂t, so ist die entsprechende Zunahme von N gleich

$$\cos\alpha\, \partial\xi + \cos\beta\, \partial\eta + \cos\gamma\, \partial\zeta = \omega\, \partial t;$$

folglich ist $k = \frac{1}{\omega}$, und allgemein

$$\partial t = \frac{1}{\omega}(\cos\alpha\, \partial\xi + \cos\beta\, \partial\eta + \cos\gamma\, \partial\zeta),$$

mithin

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega},$$

von welchen Formeln im Folgenden vielfacher Gebrauch gemacht werden wird.

Mittelst derselben nehmen die Gleichungen (B) (C) des art. 2 die Form an

$$S = U\frac{\partial t}{\partial \xi} + V\frac{\partial t}{\partial \eta} + W\frac{\partial t}{\partial \zeta} \tag{B}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= a^2 S\frac{\partial t}{\partial \xi} \\ V &= a^2 S\frac{\partial t}{\partial \eta} \\ W &= a^2 S\frac{\partial t}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

und geben, weil S von Null verschieden sein soll,

$$a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2\right] = 1 \tag{t}$$

als partielle Differentialgleichung der Fläche Σ; sie ist nichts Anderes, als die Gleichung $\omega^2 = a^2$, in anderer Form geschrieben.

Es ist nunmehr leicht zu verificiren, dass Σ Parallelfläche zu Σ_0 ist; dazu reicht es aus, dass das Normalensystem von Σ während der Fortbewegung dieser Fläche ungeändert bleibt. Sei Σ_1 die Fläche in welche Σ bis zur Zeit $t + \partial t$ übergegangen ist, μ_1 der Punkt in welchem Σ_1 von der über Σ in μ errichteten Normale N geschnitten wird, N_1 die Normale von Σ_1 in μ_1; es soll verificirt werden, dass N_1 mit N identisch ist.

Von μ bis μ_1 nehmen die Coordinaten zu um $\delta\xi = \omega\partial t\cdot\cos\alpha$, $\delta\eta = \omega\partial t\cdot\cos\beta$, $\delta\zeta = \omega\partial t\cdot\cos\gamma$; sind also $\cos\alpha_1 = \cos\alpha + \delta\cos\alpha$, $\cos\beta_1 = \cos\beta + \delta\cos\beta$, $\cos\gamma_1 = \cos\gamma + \delta\cos\gamma$ die Cosinus zwischen N_1 und den positiven Axen, so folgt

$$\begin{aligned} \delta\cos\alpha &= \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\cos\alpha}{\partial\zeta}\delta\zeta \\ &= \omega\partial t\left[\cos\alpha\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\xi} + \cos\beta\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\eta} + \cos\gamma\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\zeta}\right] \end{aligned}$$

Nun ist

$$\cos\alpha = \omega\frac{\partial t}{\partial\xi}, \quad \cos\beta = \omega\frac{\partial t}{\partial\eta}, \quad \cos\gamma = \omega\frac{\partial t}{\partial\zeta},$$

und in unserm Falle ω constant; also folgt weiter

$$\delta\cos\alpha = \omega^3\partial t\left[\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi^2} + \frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial t}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 t}{\partial\xi\partial\zeta}\right]$$

oder

$$\delta\cos\alpha = \frac{1}{2}\omega^3\partial t\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right)^2\right],$$

mithin $\delta\cos\alpha = 0$ und ebenso $\delta\cos\beta = 0$, $\delta\cos\gamma = 0$. Iede Normale von Σ ist also auch Normale von Σ_1, also folgt der Satz:

> Solange die Unstetigkeitsfläche Σ im Innern der Flüssigkeit fortschreitet, bleibt sie orthogonale Trajectorie eines festen Normalensystems $\mathfrak{N}$, in welchem sie sich zu grössern N mit der unveränderlichen Geschwindigkeit $\omega = \pm a$ fortbewegt. Dieses Normalensystem ist bestimmt durch die Anfangslage Σ_0 von Σ, und diese kann willkürlich angenommen werden.

Ein Element $\Delta\Sigma$ der Unstetigkeitsfläche durchläuft also ein unveränderliches, unendlich dünnes Normalenbündel $\Delta\mathfrak{N}$, dessen senkrechter Querschnitt es bleibt.

Ieder Punkt μ von Σ durchläuft endlich einen Strahl des Normalensystems $\mathfrak{N}$.

Der vorstehende Satz enthält die vollständige Integration der Differentialgleichung (t) für einen unbegrenzten Raum, und zwar in der vollkommensten Form, nämlich frei von den Nebenumständen welche eintreten, wenn man sich nicht mit der Integration dieser Gleichung begnügt, sondern ausserdem noch die Hülfsmittel vorschreibt, mit denen dieselbe durchgeführt werden soll. In der That setzt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für einen unbegrenzten Raum voraus, dass man eine durchaus verfügbare Fläche Σ_0 annimmt, welche der Zeit t_0 entspricht, und dann auf jeder Normale von Σ_0 in vorgewählter Richtung von ihrem Fusspunkte aus die Strecke $a(t-t_0)$ abträgt. Der Ort aller Endpunkte $\xi\eta\zeta$ ist die gesuchte Fläche Σ, und durch die Gesammtheit aller Flächen Σ wird der unbegrenzte Raum so nach den Werthen von t geordnet, wie es die Differentialgleichung (t) verlangt. Die Darstellung der hiermit gefundenen Lösung in analytischer Form setzt voraus, dass man diese Construction ausserdem noch in Formeln überträgt und aus diesen die Gleichung von Σ herleitet. Diese Aufgabe wird in der analytischen Geometrie vielfach besprochen, und hat mit der Integration der Gleichung (t) offenbar nichts zu thun.

In den art. 10, 11 werden wir die Integration dieser Gleichung auch für begrenzte Räume mit Berücksichtigung der durch unsere Aufgabe geforderten Grenzbedingung ausführen.

II.

Die mit dem Fortbestehen der partiellen Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

6.

Damit sind die Folgerungen erschöpft, welche sich aus den nach Riemann hergeleiteten mechanischen Unstetigkeitsbedingungen ergeben. Für die vollständige Kenntniss der Gesetze, nach denen sich ein Stoss durch das Innere der Flüssigkeit fortpflanzt, bedarf es noch der Bestimmung von S, für welche die vorangehenden Bedingungen nicht ausreichen.

Dieselbe kann sich nur aus dem Umstande ergeben, dass die hydrodynamischen Grundgleichungen ausserhalb der Unstetigkeitsfläche Σ und jederzeit zu beiden Seiten derselben bis an sie hinan gelten.

Um diese Gleichungen auf lineare reduciren zu dürfen reicht es aus, dass auch noch die nach den Coordinaten xyz genommenen Derivirten von $uvws$ Grössen erster Ordnung sind. Dann erhält man, wie bekannt, für die von uns beabsichtigte erste Annäherung die linearen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Hier tritt nun der merkwürdige Umstand ein, dass die Ermittelung von $S=\overset{+}{s}-\overset{-}{s}$ nicht die Integration dieser Differentialgleichungen erfordert, sondern sich daraus ergibt, dass dieselben beiderseits bis an Σ hinan bestehen bleiben müssen.

Ist $U=\overset{+}{u}-\overset{-}{u}$ längs Σ nicht constant, so ist es unmöglich, dass die ersten Derivirten von u dort alle stetig sind; dasselbe gilt von v, w und s. Für unsere Zwecke ist es unerlässlich, für die Unstetigkeiten der Derivirten einer

Function eine Bezeichnung einzuführen, welche es möglich macht, mit solchen Grössen zu rechnen. Ich schreibe, indem alle Variabeln auf die Fläche Σ bezogen werden,

$$\frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial t}-\frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial t}=\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right],\quad \frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial x}-\frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial x}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial y}-\frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial y}=\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial z}-\frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial z}=\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right],$$

ebenso für höhere Derivirten und jede andere Function.

Dann lauten die Bedingungen, denen die längs Σ nothwendig eintretenden Unstetigkeiten der ersten Derivirten von $uvws$ genügen müssen, damit durch sie das Fortbestehen der Differentialgleichungen (d) nicht aufgehoben werde, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0\\
&\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]=0\\
&\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial y}\right]=0\\
&\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial z}\right]=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

und das vorhin erwähnte merkwürdige Resultat besteht nun darin, dass diese Bedingungen (D) die Bestimmung von S liefern ohne dass hierzu die Integration des Systems (d) erforderlich ist.

7.

Aber dies setzt die Kenntniss einer Klasse von Unstetigkeitsbedingungen voraus, welche ich als die phoronomischen bezeichne, und die ich, durch rein geometrische Betrachtungen geleitet, zuerst für die transversal schwingende Saite, dann für Aufgaben der hier vorliegenden Art entdeckt habe.

Dieselben werden am befriedigendsten auf folgendem Wege hergeleitet, der ihre wahre Bedeutung vollständig erkennen lässt und mit den nöthigen Modificationen stets zum Ziele führt.

Sei p irgend eine Function von $txyz$, welche an Σ entlang unstetig ist, und sei dort

$$\overset{+}{p}-\overset{-}{p}=P. \qquad (1)$$

Um diese Gleichung richtig zu verstehen, muss man bemerken, dass sie nicht bloss längs einer einzelnen Fläche Σ, sondern in dem ganzen Grössengebiete $(\Sigma\Sigma)$ gilt, welches von Σ im Laufe der Zeit t der Gleichung

$$t = f(\xi\eta\zeta) \qquad (\Sigma\Sigma)$$

gemäss erzeugt wird.

Dieses Grössengebiet $(\Sigma\Sigma)$ kann aufgefasst werden als ein geometrischer Raum von drei Dimensionen $\xi\eta\zeta$, aber schichtenweise nach den Werthen von t geordnet; es ist der Inbegriff aller Werthsysteme $t\xi\eta\zeta$, welche der Gleichung der fortschreitenden Unstetigkeitsfläche genügen, und trennt in demjenigen Gebiete G von vier Dimensionen, dessen Punkte die vier unabhängigen Variabeln $txyz$ repräsentiren, die beiden Theile $\overset{+}{G}$ und $\overset{-}{G}$ von einander, in denen p durch $\overset{+}{p}$ und $\overset{-}{p}$ bezeichnet wurde. In dem von der Flüssigkeit erfüllten geometrischen Raume kommen die hier zu untersuchenden Vorgänge nicht auf einmal zur Anschauung, sondern nach den Werthen von t geordnet: im Gebiete G ist die Erscheinung ihrem ganzen Verlaufe nach abgeschlossen vorhanden.

Das Gebiet $(\Sigma\Sigma)$, innerhalb dessen die Gleichung (1) stattfindet, bildet also einen Schnitt durch G; an dem selben entlang ist t Function von $\xi\eta\zeta$, aber letztere sind unabhängig variabel. Die Grösse P hat eine Bedeutung nur längs dieses Schnittes, und ist daher Function von $\xi\eta\zeta$; die Grössen $\overset{+}{p}$ und $\overset{-}{p}$ sind Functionen von $txyz$, und längs $(\Sigma\Sigma)$ ex-und implicite Functionen von $\xi\eta\zeta$, vermöge der Substitution

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta, \qquad t = f(\xi\eta\zeta).$$

Spart man diese bis zuletzt auf, so ergibt sich aus (1), indem man z. B. nach ξ differentiirt,

$$\frac{\partial \overset{+}{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overset{-}{p}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \overset{+}{p}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{p}}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

Dies ist eine von den in Rede stehenden, phoronomischen Unstetigkeits bedingungen; die übrigen ergeben sich auf dieselbe Weise, so dass wir mit Anwendung der im vorigen art. festgestellten Bezeichnung zum folgenden, sehr einfachen Princip gelangen.

Ist eine Function p von $txyz$ längs Σ unstetig und, indem P eine Function von $\xi\eta\zeta$ allein bedeutet, dort

$$\overset{+}{p} - \overset{-}{p} = P,$$

so bestehen zwischen den Unstetigkeiten der ersten Derivirten von p die Relationen

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta}=\frac{\partial P}{\partial \zeta}$$

Nimmt man also z. B. $P=0$, so erhält man ohne Weiteres die Bedingungen für die mit der Stetigkeit einer Function verträglichen Unstetigkeiten ihrer ersten Derivirten.

8.

Nun hatten wir [art. 2 (A)] gesetzt

$$\overset{+}{u}-\overset{-}{u}=U,\qquad \overset{+}{v}-\overset{-}{v}=V,\qquad \overset{+}{w}-\overset{-}{w}=W,\qquad \overset{+}{s}-\overset{-}{s}=S.$$

Betrachten wir $UVWS$ als Functionen von $\xi\eta\zeta$, so erhalten wir die folgenden zwölf phoronomischen Unstetigkeitsbedingungen:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]=\frac{\partial P}{\partial \xi}-\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi},\quad \left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]=\frac{\partial P}{\partial \eta}-\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta},\quad \left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{\partial P}{\partial \zeta}-\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} \qquad (1)$$

für p, $P=u$, U; v, V; w, W; s, S; zu ihnen kommen die vier Bedingungen (D)

$$\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0 \qquad (2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]=0,\qquad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial y}\right]=0,\qquad \left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+a^2\left[\frac{\partial s}{\partial z}\right]=0. \qquad (3)$$

Benutzt man hier die Gleichungen (1) für $p=s$, $P=S$, so gehen die drei letzten Gleichungen über in

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi}-a^2\frac{\partial S}{\partial \xi}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]=a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta}-a^2\frac{\partial S}{\partial \eta}$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]=a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta}-a^2\frac{\partial S}{\partial \zeta}.$$

Die Gleichungen (1) und (3) liefern also die Unstetigkeiten aller ersten Derivirten von $uvws$ ausgedrückt durch $\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]$. Insbesondere wird

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial U}{\partial \xi}+a^2\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi}-a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\frac{\partial V}{\partial \eta}+a^2\frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta}-a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\frac{\partial W}{\partial \zeta}+a^2\frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}-a^2\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2.$$

Führt man dies in die allein noch zu berücksichtigende Gleichung (2) ein, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{\partial W}{\partial \zeta}+a^2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi}+\frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta}+\frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)$$
$$+\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]\left\{1-a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2\right]\right\}=0.$$

Aber hier verschwindet der Factor von $\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]$ vermöge der mechanischen Bedingungen unserer Aufgabe, also ergibt sich nichts über den Werth der unbekannten Grösse $\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right]$, welche durch die gegenwärtigen Bedingungen nicht bestimmt wird, sondern statt dessen die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial \eta}+\frac{\partial W}{\partial \zeta}+a^2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi}+\frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta}+\frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0$$

als einzige, für das Fortbestehen der partiellen Differentialgleichungen (d) erforderliche Beschränkung der Unstetigkeiten von uvw und s.

9.

In diese Gleichung führen wir nun die Werthe [art. 5 (C)

$$U=a^2S\frac{\partial t}{\partial \xi},\qquad V=a^2S\frac{\partial t}{\partial \eta},\qquad W=a^2S\frac{\partial t}{\partial \zeta}$$

ein, dann ergibt sich, mit Weglassung des Factors a^2, für S die Differentialgleichung

$$2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \xi}+\frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \eta}+\frac{\partial S}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)+S\left(\frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta^2}\right)=0.$$

Für die Integration dieser Gleichung ist es am zweckmässigsten, wieder die Werthe

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\cos\gamma}{\omega}$$

einzuführen. Beachtet man, dass ω constant und

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial S}{\partial \eta}\cos\beta + \frac{\partial S}{\partial \zeta}\cdot\cos\gamma = \frac{\partial S}{\partial N}$$

ist, so ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$2\frac{\partial S}{\partial N} + S\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\xi} + \frac{\partial\cos\beta}{\partial\eta} + \frac{\partial\cos\gamma}{\partial\zeta}\right) = 0,$$

zu deren Integration nur erforderlich ist, den Factor von S in seiner Abhängigkeit von N darzustellen. Sei zur Abkürzung

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\xi} + \frac{\partial\cos\beta}{\partial\eta} + \frac{\partial\cos\gamma}{\partial\zeta} = P.$$

Sodann sei $\mathfrak{V}$ ein beliebiges Volumen innerhalb des Normalensystems $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ seine Oberfläche, $\lambda\mu\nu$ seien die Winkel, welche die über dem Elemente $\partial\mathfrak{S}$ dieser Fläche nach Aussen errichtete Normale n mit den positiven Axen bildet. Dann ist nach bekannten Sätzen:

$$\int P\partial\mathfrak{V} = \int\cos\theta\cdot\partial\mathfrak{S},$$

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

also θ der Winkel zwischen n und der Richtung der wachsenden N in einem durch $\partial\mathfrak{S}$ gehenden Strahle des Normalensystems $\mathfrak{N}$.

Sei $\Delta\mathfrak{N}$ ein Theil dieses Normalensystems und $\mathfrak{V}$ das Volumen, durch welches $\Delta\mathfrak{N}$ von Σ_0 bis Σ dringt. Sind $\Delta\Sigma_0$, $\Delta\Sigma$ die Schnitte von $\Delta\mathfrak{N}$ mit diesen beiden Flächen, so besteht $\mathfrak{S}$ aus $\Delta\Sigma$, $\Delta\Sigma_0$ und der zwischen ihnen liegenden geradlinigten Oberfläche M des Normalenbündels $\Delta\mathfrak{N}$. Der Theil des $\int\cos\theta\partial\mathfrak{S}$, welcher von M herrührt, ist $=0$, da in jedem Elemente dieser Fläche $\theta = 90^\circ$ ist. In jedem Elemente von $\Delta\Sigma$ fällt n mit der Richtung der wachsenden N zusammen, also ist dort $\theta = 0$ und der von $\Delta\Sigma$ herrührende Theil des Integrals $= \Delta\Sigma$ selbst. In $\Delta\Sigma_0$ fällt überall n mit der Richtung der abnehmenden N zusammen; dort ist also $\theta = 180^\circ$, mithin der entsprechende Theil des Integrals $= -\Delta\Sigma_0$.

Ueber dieses Volumen erstreckt, ist also das

$$\int P \partial \mathfrak{V} = \Delta\Sigma - \Delta\Sigma_0.$$

Lassen wir nun N variiren, aber das Normalenbündel $\Delta\mathfrak{N}$ ungeändert, so ist $\Delta\Sigma$ in seiner Abhängigkeit von N vollkommen bestimmt, und es folgt indem man nach N differentiirt:

$$\int P \partial \Delta\Sigma = \frac{\partial \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Nun gibt es innerhalb $\Delta\Sigma$ einen Mittelwerth (P) von P, so dass dieses Integral $=(P)\Delta\Sigma$ wird; dann folgt

$$(P) = \frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Dieser Mittelwerth wird vollkommen bestimmt, wenn wir $\Delta\Sigma$ in ein Element der Fläche Σ übergehen lassen, und dann wird

$$P = \frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Ist also $\xi\eta\zeta$ derjenige Punkt, in welchem ein bestimmter Strahl des Normalensystems $\mathfrak{N}$ die Fläche Σ trifft, und $\Delta\mathfrak{N}$ ein unendlich dünnes, jenen Strahl enthaltendes und unveränderlich festgelegtes Normalenbündel, $\Delta\Sigma$ sein Querschnitt mit Σ, so ist für jenen Punkt

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos\beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \zeta} = \frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N}.$$

Man kann hier an Stelle des unendlich kleinen Querschnitts $\Delta\Sigma$ endliche Grössen, die Hauptkrümmungshalbmesser von Σ einführen; aber dies nimmt den nächstfolgenden Untersuchungen ihre Anschaulichkeit, während es sich später (art. 14) als geradezu zweckwidrig heraus stellt.

Die Differentialgleichung für S lautet jetzt:

$$2\frac{\partial S}{\partial N} + S\frac{\partial \log \Delta\Sigma}{\partial N} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \log S\sqrt{\Delta\Sigma}}{\partial N} = 0.$$

Also fordert sie, dass $S\sqrt{\Delta\Sigma}$ längs $\Delta\mathfrak{N}$ constant bleiben soll, ohne irgend eine Vorschrift darüber zu enthalten, wie S sich von einem unendlich dünnen Normalenbündel zu einem unendlich benachbarten ändern soll.

Ist demnach $\Delta\Sigma_0$ der Querschnitt von $\Delta\mathfrak{N}$ auf Σ_0, S_0 der Werth von S in $\Delta\Sigma_0$, so folgt

$$S\sqrt{\Delta\Sigma} = S_0\sqrt{\Delta\Sigma_0},$$

während S_0 an Σ_0 entlang willkürlich angenommen werden kann.

Damit sind nun auch

$$U = \omega S\cos\alpha, \qquad V = \omega S\cos\beta, \qquad W = \omega S\cos\gamma$$

bestimmt, und es zeigt sich, was bei der Berücksichtigung von Anfangsbedingungen (art. 15) massgebend ist, dass nur über die Anfangslage Σ_0 der Unstetigkeitsfläche, das Vorzeichen von $\omega = \pm a$, nämlich die Fortpflanzungsrichtung und den Anfangswerth S_0 von S nach Belieben verfügt werden kann.

Ausserdem können wir das folgende Resultat aussprechen:

> Es sei $\Delta\mathfrak{N}$ ein unendlich dünnes Normalenbündel der Unstetigkeitsfläche, $\Delta\Sigma$ sein Querschnitt mit Σ. Solange $\Delta\Sigma$, während es dieses Normalenbündel durchläuft, auf keinen Begrenzungstheil der Flüssigkeit trifft, bleibt der Stoss, den ein Flüssigkeitstheilchen in dem Augenblicke erleidet, wo es von $\Delta\Sigma$ überschritten wird, zur Quadratwurzel aus $\Delta\Sigma$ umgekehrt proportional.

III.

Reflection des Stosses an starren Wänden von beliebiger Gestalt.

10.

Bis auf die Berücksichtigung von Anfangsbedingungen, für welche die Hülfsmittel im Vorangehenden enthalten sind, ist hiermit die Untersuchung für eine unbegrenzte Flüssigkeit abgeschlossen. Um zu zeigen, wie Grenzbedingungen bei Untersuchungen dieser Art zu behandeln sind, setze ich nun voraus, dass die Flüssigkeit in beliebiger Weise an starre, d. h. unbewegliche und undurchdringliche Wände grenzt, und bemerke nur noch, dass den hier zu entwickelnden Hülfsmitteln auch solche Fälle zugänglich sind, wo die Flüssigkeit mit elastischen festen Körpern in Berührung stehen würde.

Sei $\mathfrak{S}$ eine starre Wand, an welche die Flüssigkeit grenzt, $\lambda\mu\nu$ seien die Winkel welche die über $\mathfrak{S}$ von der Flüssigkeit abwärts errichtete Normale n mit den positiven Axen der xyz bildet.

Die Grenzbedingung damit die Flüssigkeitstheilchen, welche an $\mathfrak{S}$ grenzen, weder durch diese Fläche dringen noch sich von ihr abheben können, lautet

$$u \cos\lambda + v \cos\mu + w \cos\nu = 0.$$

Erleidet also ein solches Flüssigkeitstheilchen eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung, deren vollständige Componenten UVW sind, so folgt für diese die Grenzbedingung

$$U \cos\lambda + V \cos\mu + W \cos\nu = 0.$$

Zerlegt man daher den Stoss, den ein solches Theilchen erleidet, in eine zu $\mathfrak{S}$ normale und eine tangentiale Componente, so muss erstere $=0$ sein.

Sei $\Delta\mathfrak{S}$ das Flächenelement, in welchem das Normalenbündel $\Delta\mathfrak{N}$ die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ trifft. Wenn $\Delta\Sigma$ bei $\Delta\mathfrak{S}$ eintrifft, so erleiden die an $\Delta\mathfrak{S}$ grenzenden Theilchen einen zu $\Delta\Sigma$ senkrechten Stoss, dessen zu $\Delta\mathfrak{S}$ senkrechte Componente nur dann $=0$ ist, wenn $\Delta\mathfrak{S}$ von $\Delta\Sigma$ senkrecht geschnitten wird.

In allen übrigen Fällen kann die obige Grenzbedingung nur befriedigt werden, wenn durch den einfallenden Stoss mindestens ein neuer, reflectirter Stoss hervorgerufen wird, und diese sämmtlichen Stösse gleichzeitig erfolgen, damit ihre zu $\Delta\mathfrak{S}$ senkrechten Componenten einander aufheben können.

Bevor wir aus der obigen Grenzbedingung weitergehende Folgerungen ziehen können, müssen wir die Anzahl und Richtung der reflectirten Stösse ermitteln.

Unsere nächste Aufgabe besteht also darin, zu untersuchen, wie viel Unstetigkeitsflächen aus einer einfallenden durch Reflection erzeugt werden und nach welchen Gesetzen dies geschieht. Diese Aufgabe ist identisch mit der Integration der für die Unstetigkeitsflächen gefundenen Differentialgleichung

$$a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2\right] = 1 \qquad (t)$$

für einen Raum mit festen Begrenzungen, also unter Hinzufügung der nunmehr zu entwickelnden Grenzbedingung.

Sei Σ die einfallende, Σ' eine reflectirte Unstetigkeitsfläche. Da ein an $\mathfrak{S}$ grenzender materieller Punkt die Stösse, welche diesen Unstetigkeitsflächen entsprechen, gleichzeitig erleiden muss, so folgt dass Σ und Σ' die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ in derselben Kurve schneiden müssen. Sei l diese Kurve,

$$t = f(\xi\eta\zeta) \qquad (\Sigma)$$

die Gleichung der einfallenden,

$$t' = f'(\xi\eta\zeta) \qquad (\Sigma')$$

die Gleichung einer reflectirten Unstetigkeitsfläche.

Nimmt man für $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten eines Punktes von l, so müssen diese Gleichungen für t und t' denselben Werth liefern; längs l erhalten wir also $t = t'$. Aber dies gilt nicht bloss für eine einzelne Kurve l, sondern für das ganze Stück der Grenzfläche $\mathfrak{S}$, welches von l im Verlaufe der Zeit überstrichen wird, d. h. durch welches Strahlen des Normalensystems $\mathfrak{N}$ dringen.

Die Grenzbedingung für die Reflection einer Unstetigkeitsfläche lautet also

$$t - t' = 0 \tag{$\mathfrak{S}$}$$

oder $f(\xi\eta\zeta) - f'(\xi\eta\zeta) = 0$, in dem Sinne, dass dies entweder die Gleichung der vollständigen Grenzfläche $\mathfrak{S}$, oder doch wenigstens des von l überstrichenen Stückes derselben sein muss. Die Functionen t und t' müssen ausserdem der Gleichung (t) genügen.

Um die Folgerungen aus dieser Grenzbedingung zu ziehen, brauchen wir die vollständigen Differentiale von t und t'; ersteres ist

$$\partial t = \frac{1}{\omega}(\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta),$$

und ω ist $= +a$ oder $= -a$, jenachdem Σ in der Richtung ($\alpha\beta\gamma$) der wachsenden N oder in der umgekehrten Richtung fortschreitet.

Um für t' die analoge Formel ohne Zweideutigkeit aufstellen zu können, müssen wir auch bei Σ' eine positive und eine negative Seite unterscheiden. Die Winkel welche die auf der positiven Seite errichtete Normale mit den positiven Axen der xyz bildet, heissen $\alpha'\beta'\gamma'$; in dieser Normale werden Abscissen N' gezählt, die von der negativen Seite der Fläche nach der positiven hin wachsen.

Welche Seite von Σ' man als die positive betrachten will, steht frei; ich wähle sie so, dass Σ' und Σ ihre Normalensysteme im nämlichen Sinne durchlaufen, so dass N' mit N zugleich zu oder abnimmt. Dann wird

$$\partial t' = \frac{1}{\omega}(\cos\alpha'\,\partial\xi + \cos\beta'\,\partial\eta + \cos\gamma'\,\partial\zeta)$$

und zwar hat ω hier dieselbe Bedeutung wie in ∂t.

Soll nun der Punkt $\xi\eta\zeta$ eine unendlich kleine Verschiebung längs der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ ausführen, so müssen die Zunahmen seiner Coordinaten der Gleichung

$$\cos\lambda\,\partial\xi + \cos\mu\,\partial\eta + \cos\nu\,\partial\zeta = 0$$

genügen; die Grenzbedingung $t - t' = 0$ gibt vermöge der vorstehenden Formeln

$$(\cos\alpha - \cos\alpha')\partial\xi + (\cos\beta - \cos\beta')\partial\eta + (\cos\gamma - \cos\gamma')\partial\zeta = 0.$$

Da beide Gleichungen dieselbe Beziehung zwischen $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ ausdrücken, so gibt es einen Factor $2k$ so dass:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = 2k\cos\lambda, \qquad \cos\beta - \cos\beta' = 2k\cos\mu, \qquad \cos\gamma - \cos\gamma' = 2k\cos\nu$$

wird.

Wenn nun N_1 die auf der negativen Seite von Σ' errichtete Normale bedeutet, und mit den Axen die Winkel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bildet, so sind dies die Neben winkel von $\alpha'\beta'\gamma'$, und dann folgt

$$k\cos\lambda = \frac{\cos\alpha + \cos\alpha_1}{2}, \qquad k\cos\mu = \frac{\cos\beta + \cos\beta_1}{2}, \qquad k\cos\nu = \frac{\cos\gamma + \cos\gamma_1}{2},$$

also liegen N, N_1 und die Normale n der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ in derselben Ebene, und n halbirt den Winkel zwischen N und N_1. Dies ist das gewöhnliche Reflectionsgesetz für Strahlen.

Bezeichnen wir daher durch

$$\theta$$

den Einfallswinkel, d. i. den Winkel zwischen N und n, so geben die letzten Formeln durch Multiplication mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$

$$k = \cos\theta.$$

Also ist

$$\cos\alpha' = \cos\alpha - 2\cos\theta\cos\lambda$$

$$\cos\beta' = \cos\beta - 2\cos\theta\cos\mu$$

$$\cos\gamma' = \cos\gamma - 2\cos\theta\cos\nu.$$

Durch die Normale N der einfallenden Unstetigkeitsfläche Σ und die Normale n der reflectirenden Fläche $\mathfrak{S}$ ist also die Normale N' der reflectirten Unstetigkeitsfläche vollkommen bestimmt, und es wird daher nur eine einzige Unstetigkeitsfläche Σ' durch Reflection erzeugt.

11.

Aber dies beruht auf einer Voraussetzung, welche noch zu verificiren ist, nämlich auf dem Satze von Malus:

> Wird ein Normalensystem $\mathfrak{N}$ an einer Fläche $\mathfrak{S}$ nach dem gewöhnlichen Gesetze reflectirt, so bilden die reflectirten Strahlen stets ein neues Normalensystem $\mathfrak{N}'$.

D. h. ist das einfallende Strahlensystem $\mathfrak{N}$ so beschaffen, dass es eine Fläche Σ gibt, welche alle Strahlen des Systems senkrecht schneidet, so hat das reflectirte Strahlensystem $\mathfrak{N}'$ dieselbe Eigenschaft.

Zur Verification dieses schönen Lehrsatzes stellen wir die Formeln zusammen, welche die Gleichung der Fläche Σ' ersetzen. Sei Σ_0 eine Fläche des einfallenden Systems, $\mu_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ ein beliebiger Punkt derselben, zu welchem die Winkel $\alpha\beta\gamma$ der Normale gehören. Diese treffe $\mathfrak{S}$ im Punkte $p(xyz)$ und im Abstande N von μ_0, so dass

$$x=\xi_0+N\cos\alpha,\qquad y=\eta_0+N\cos\beta,\qquad z=\zeta_0+N\cos\gamma$$

wird.

Die Normale n von $\mathfrak{S}$ im Punkte p bilde mit den Axen die Winkel $\lambda\mu\nu$. Dann gelten für die Richtungswinkel $\alpha'\beta'\gamma'$ des aus N durch Reflection entstehenden Strahles die Formeln des vorigen art. Trägt man auf diesem Strahle in der Reflectionsrichtung die Strecke $p\mu'=N'$ auf, so hat der Endpunkt μ' die Coordinaten

$$\xi=x+N'\cos\alpha',\qquad \eta=y+N'\cos\beta',\qquad \zeta=z+N'\cos\gamma'.$$

Fügt man zu diesen Formeln die Bedingung, dass für alle Lagen des Punktes μ_0

$$N+N'=\omega t$$

sein soll, so ersetzen diese Formeln mit Hinzuziehung der Gleichungen von Σ_0 und $\mathfrak{S}$ offenbar die Gleichung der reflectirten Fläche Σ', nur ist zu verificiren, dass diese alle reflectirten Strahlen senkrecht schneidet.

Benutzen wir zur Abkürzung Bezeichnungen wie die folgende

$$\cos\alpha'\partial\xi+\cos\beta'\partial\eta+\cos\gamma'\partial\zeta=\Sigma\cos\alpha'\partial\xi,$$

so ist

$$\Sigma\cos\alpha\,\partial\xi_0=0 \tag{1}$$

weil N auf Σ_0,

$$\Sigma\cos\lambda\,\partial x=0 \tag{2}$$

weil n auf $\mathfrak{S}$ senkrecht ist, und es ist zu beweisen, dass aus $\partial t=0$ die Relation $\Sigma\cos\alpha'\partial\xi=0$ folgt.

Nun erhalten wir

$$\Sigma\cos\alpha'\partial\xi=\Sigma\cos\alpha'\partial x+\partial N',$$

ferner wegen (2)

$$\Sigma\cos\alpha'\partial x=\Sigma\cos\alpha\,\partial x,$$

und wegen (1)

$$\Sigma \cos\alpha\,\partial x = \partial N,$$

also schliesslich

$$\Sigma \cos\alpha'\,\partial\xi = \partial N + \partial N' = \omega\,\partial t,$$

woraus der zu bestätigende Satz folgt.

Für unsere Untersuchung haben wir also den Satz:

Trifft die Unstetigkeitsfläche Σ auf eine unbewegliche und für die Flüssigkeit undurchdringliche Wand $\mathfrak{S}$, so entsteht durch Reflection eine und auch nur eine einzige Unstetigkeitsfläche Σ', welche $\mathfrak{S}$ in derselben Kurve schneidet wie Σ. Sie ist bestimmt durch die Eigenschaft dass ihr Normalensystem $\mathfrak{N}'$ aus dem Normalensystem $\mathfrak{N}$ von Σ durch Reflection an $\mathfrak{S}$ hervorgeht: die Reflection erfolgt nach dem gewöhnlichen Gesetze.

Man kann dieses Resultat auch in der folgenden Form aussprechen.

Soll die partielle Differentialgleichung

$$a^2\left[\left(\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right)^2\right] = 1 \qquad (t)$$

für das Innere eines Raumes $(\xi\eta\zeta)$ integrirt werden, an und in welchem Grenzflächen $\mathfrak{S}$ vorhanden sind, und zwar in der Weise, dass (1) die Integration bis an eine solche Fläche hinan, aber nie über dieselbe hinaus fortschreitet, und (2) die Werthe von t an einer solchen Fläche stetig in einander übergehen, ohne abzubrechen, so entspricht der allgemeinen Lösung eine durch diesen Raum fortschreitende Fläche Σ, welche in folgender Weise entsteht. Man nehme innerhalb jenes Raumes eine Fläche Σ_0 nach Belieben an, bilde ihr Normalensystem bis an die Flächen $\mathfrak{S}$, setze dasselbe dort durch Reflection nach dem gewöhnlichen Gesetze fort, und wiederhole dies, so oft Strahlen eines solchen Normalensystems auf eine Fläche $\mathfrak{S}$ treffen. Dann entsteht ein durch die Fläche Σ_0 und die Grenzflächen $\mathfrak{S}$ bestimmtes, gebrochnes Normalensystem $\mathfrak{N}$, und die Fläche Σ entsteht, indem man die orthogonale Trajectorie des Systems $\mathfrak{N}$ dasselbe mit der Geschwindigkeit a bis zur Zeit t durchlaufen lässt.

12.

Es wirft sich nun die Frage auf, ob specielle Eigenschaften des einfallenden Normalensystems $\mathfrak{N}$ sich bei jeder Annahme über die reflectirende Fläche $\mathfrak{S}$ auf das reflectirte Normalensystem $\mathfrak{N}'$ übertragen, z. B. die Frage, ob durch Reflection eines gewöhnlichen Strahlenbüschels nur eine bestimmte Klasse von Normalensystemen erzeugt werden könne. Wenn solche Beziehungen zwischen dem einfallenden und dem reflectirten Normalensystem stattfänden, was nicht der Fall ist, so würden sie zu den Reflectionsgesetzen gehören.

Sei unter der Voraussetzung, dass Σ das Normalensystem $\mathfrak{N}$ in einer bestimmten Richtung durchlaufe und Σ_0 die der Zeit $t=0$ entsprechende Anfangslage von Σ ist, $at=\varphi(\xi\eta\zeta)$ die Gleichung von Σ, also die Function φ Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2=1.$$

Dann gehört das nämliche Normalensystem $\mathfrak{N}$ auch zur Unstetigkeitsfläche

$$\omega(t-t_0)=\varphi(\xi\eta\zeta) \tag{Σ}$$

nur entspricht die specielle Lage Σ_0 jetzt dem Zeitpunkte $t=t_0$, und Σ durchläuft $\mathfrak{N}$ in der frühern oder der umgekehrten Richtung, jenachdem $\omega=+a$ oder $=-a$ genommen wird.

Sei ebenso ein zweites Normalensystem $\mathfrak{N}'$ gegeben durch seine Trajectorie Σ' und, bei bestimmter Fortschrittsrichtung die Gleichung der letztern $at'=\varphi'(\xi\eta\zeta)$, mithin auch φ' Lösung der obigen Differentialgleichung; Σ'_0 sei die Anfangslage von Σ'.

Dann gehört das Normalensystem $\mathfrak{N}'$ auch zur Unstetigkeitsfläche

$$\omega'(t'-t'_0)=\varphi'(\xi\eta\zeta); \tag{Σ'}$$

nur ist Σ'_0 die Lage derselben zur Zeit $t'=t'_0$, und Σ' schreitet fort in der ursprünglichen oder der umgekehrten Richtung, jenachdem man $\omega'=a$ oder $=-a$ nimmt.

Soll nun $\mathfrak{N}'$ aus $\mathfrak{N}$ durch Reflection an einer Fläche $\mathfrak{S}$ hervorgehen, somüssen t und t' als Functionen von $\xi\eta\zeta$ längs dieser Fläche der Grenzbedingung $t'=t$ genügen, d. h. dies ist die Gleichung einer solchen Fläche $\mathfrak{S}$.

Wenn also das Normalensystem $\mathfrak{N}$ an der Fläche

$$t'_0 + \frac{\varphi'}{\omega'} = t_0 + \frac{\varphi}{\omega} \qquad (\mathfrak{S})$$

nach dem gewöhnlichen Gesetze reflectirt wird, so entsteht das Normalensystem $\mathfrak{N}'$. Schreibt man diese Gleichung in der Form $\varphi' - \frac{\omega'}{\omega}\varphi = \omega'(t_0 - t'_0)$, so erkennt man, dass es zwei Schaaren von Flächen $\mathfrak{S}$ gibt welche $\mathfrak{N}'$ durch Reflection von $\mathfrak{N}$ erzeugen. In der ersten ist $\omega' = \omega$, in der andern $\omega' = -\omega$; die Gleichungen der beiden Flächenschaaren lauten

$$\varphi' - \varphi = \tau_1 \qquad (\mathfrak{S}_1)$$

$$\varphi' + \varphi = \tau_2, \qquad (\mathfrak{S}_2)$$

wo τ_1, τ_2 Parameter sind. Wo eine Fläche $\mathfrak{S}_1$ von einer Fläche $\mathfrak{S}_2$ geschnitten wird, reflectiren sie die dort einfallende Unstetigkeitsfläche, also den dort einfallenden Strahl nach entgegengesetzten Richtungen; also wird $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}_2$ senkrecht geschnitten, wie man mittelst der Gleichungen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ auch direct verificirt. Wir haben also den folgenden Satz:

Iedes Normalensystem kann aus jedem andern, soweit sie einander durchdringen, dadurch erzeugt werden, dass man das eine an einer geeigneten Fläche $\mathfrak{S}$ nach dem gewöhnlichen Gesetze reflectiren lässt (*).

Es gibt zwei Schaaren $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ reflectirender Flächen, welche dies leisten. Zwei Flächen derselben Schaar reflectiren die Trajectorie des einfallenden Normalensystems nach derselben Richtung, aber zu verschiedenen Zeiten; für die Flächen der zweiten Schaar ist die Reflectionsrichtung die umgekehrte wie für die Flächen der ersten Schaar. Eine Fläche der ersten Schaar wird von einer Fläche der andern Schaar nie anders als orthogonal geschnitten.

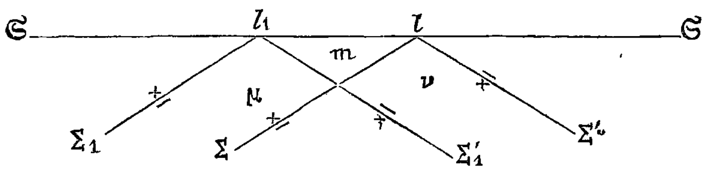
Wendet man die Grenzbedingung $t' = t$ auf den Fall an, wo die Unstetigkeitsflächen Σ, Σ' in zwei durch $\mathfrak{S}$ getrennten Räumen mit ungleichen Geschwindigkeiten a, a' fortschreiten, so ergibt sich zunächst der Satz von Malus, dass auch durch Brechung nach dem gewöhnlichen Gesetze aus einem Nor-

(*) Diesen Theil des Satzes hat Herr Kummer mir schon im Iahre 1861 mitgetheilt; auf welchem Wege Herr Kummer zu dem selben gelangt war, habe ich nicht in Erfahrung gebracht.

malensystem $\mathfrak{N}$ stets ein Normalensystem $\mathfrak{N}'$ hervorgeht; sodann erhält man den Satz, dass zwei beliebig gewählte Normalensysteme $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, soweit sie einander durchdringen, auf unendlich viele Arten durch Brechung nach dem gewöhnlichen Gesetze auseinander hervorgehen. Mit Benutzung der oben angewandten Bezeichnungen lautet die Gleichung der brechenden Fläche $\varphi' - \lambda\varphi = \mu$, wo μ und $\lambda = \pm \frac{a'}{a}$ willkürliche Parameter sind. In der Dioptrik würde also der Zahlenwerth von λ durch die Farbe des Lichtes bestimmt sein, welches nach den Normalensystemen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ fortschreiten soll, sein Zeichen durch die Richtung, nach welcher es in das System $\mathfrak{N}'$ gebrochen werden soll.

13.

Hiermit sind die geometrischen Gesetze für die Reflection der Unstetigkeitsfläche Σ an der starren Wand $\mathfrak{S}$ vollständig ermittelt, und wir können nun zu den mechanischen Gesetzen für den dort erfolgenden Stoss übergehen.



Gehen die einfallende und die reflectirte Unstetigkeitsfläche während der Zeit ∂t aus der Lage Σ, Σ' über in die Lage Σ_1, Σ'_1, so erleiden folgende in unendlicher Nähe von $\mathfrak{S}$ befindliche Flüssigkeitstheilchen plötzliche Aenderungen ihrer Geschwindigkeit.

1) Solche Theilchen μ, welche von Σ, aber nicht von Σ' überschritten werden. Dieselben erleiden einen Stoss, für den die früher entwickelten Gesetze gelten.

2) Dasselbe gilt von denjenigen Theilchen ν, welche von Σ' aber nicht von Σ überschritten werden.

3) Ganz anders verhält es sich mit den die Fläche $\mathfrak{S}$ berührenden Theilchen m, über welche Σ und Σ' hinweggegangen sind. Ein solches Theilchen hat zwei Stösse nacheinander erfahren, den ersten als es von Σ, den zweiten als es von Σ' überschritten wurde.

Sei längs Σ':

$$\overset{+}{u}-\overset{-}{u}=U', \qquad \overset{+}{v}-\overset{-}{v}=V', \qquad \overset{+}{w}-\overset{-}{w}=W', \qquad \overset{+}{s}-\overset{-}{s}=S'.$$

Befand m sich ursprünglich auf der positiven Seite von Σ, so befindet es sich nach Ablauf der Zeit ∂t auf der negativen Seite von Σ'; in Folge des ersten Stosses hat es also parallel zur x— axe die Geschwindigkeitsvermehrung $\overset{-}{u}-\overset{+}{u}=-U$, in Folge des zweiten Stosses die Geschwindigkeitsvermehrung $-U'$ erlangt. Beide Stösse zusammengenommen geben für die plötzlichen Zunahmen seiner Geschwindigkeitscomponenten die Werthe $-(U+U')$, $-(V+V')$, $-(W+W')$; und da der hieraus resultirende Stoss senkrecht zur Grenzfläche $=0$ sein muss, so folgt:

$$(U+U')\cos\lambda+(V+V')\cos\mu+(W+W')\cos\nu=0.$$

Befand m sich vor dem Stosse auf der negativen Seite von Σ, so sind alle Geschwindigkeitsvermehrungen mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, was an der vorstehenden Formel nichts ändert.

Nun haben wir

$$U=\omega S\cos\alpha, \qquad V=\omega S\cos\beta, \qquad W=\omega S\cos\gamma$$
$$U'=\omega S'\cos\alpha', \qquad V'=\omega S'\cos\beta', \qquad W'=\omega S\cos\gamma'$$

und $\Sigma\cos\alpha\cos\lambda=\cos\theta$, $\Sigma\cos\alpha'\cos\lambda=-\cos\theta$. Führt man diese Werthe ein, so folgt $\omega(S-S')\cos\theta=0$, also ist an der Grenzfläche $\mathfrak{S}$:

$$S'=S.$$

Der Condensationsstoss S überträgt sich demnach ohne Unstetigkeit vom einfallenden auf das reflectirte Normalensystem, und dadurch ist die Fortpflanzung des Stosses in letzterm völlig bestimmt.

14.

Um dieses Resultat vollständig auszuführen, sei wieder $\Delta\mathfrak{N}$ das einfallende, $\Delta\mathfrak{N}'$ das aus ihm durch Reflection hervorgehende unendlich dünne Normalenbündel. Ihre Querschnitte sollen im Allgemeinen $\Delta\Sigma$, $\Delta\Sigma'$, an der Grenzfläche $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma'_1$ heissen. Sind S_1, S'_1 die Werthe von S, S' in $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma'_1$, so haben wir

$$S'_1=S_1; \tag{1}$$

und weil nach dem Reflectionsgesetze $\Delta\Sigma_1$, $\Delta\Sigma'_1$ mit $\Delta\mathfrak{S}$, dessen senkrechte Projectionen sie sind, den selben Winkel θ bilden,

$$\Delta\Sigma'_1 = \Delta\Sigma_1, \tag{2}$$

also $S'_1\sqrt{\Delta\Sigma'_1} = S_1\sqrt{\Delta\Sigma_1}$.

Nun ist längs $\Delta\mathfrak{N}$

$$S = S_0\sqrt{\frac{\Delta\Sigma_0}{\Delta\Sigma}},$$

also $S_1\sqrt{\Delta\Sigma_1} = S_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}$; ferner ist längs $\Delta\mathfrak{N}'$: $S'\sqrt{\Delta\Sigma'} = S'_1\sqrt{\Delta\Sigma'_1}$, also $= S_1\sqrt{\Delta\Sigma_1} = S_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}$, mithin

$$S' = S_0\sqrt{\frac{\Delta\Sigma_0}{\Delta\Sigma'}}.$$

Dies ist dieselbe Formel wie für S, und so haben wir, wenn wir alles zusammen fassen, den Satz:

Sei $\mathfrak{N}$ das gebrochne Normalensystem, welches aus dem Normalensystem der urprünglichen Unstetigkeitsfläche Σ_0 durch wiederholte Reflectionen an den starren Wänden $\mathfrak{S}$ hervorgeht. Die Unstetigkeitsfläche Σ durchläuft dieses Normalensystem $\mathfrak{N}$ als orthogonale Trajectorie desselben mit der constanten Geschwindigkeit a, indem ihre Theile an den Grenzflächen zugleich mit $\mathfrak{N}$ reflectirt werden. Wenn ein Element $\Delta\Sigma$ dieser Fläche ein Flüssigkeitstheilchen überschreitet, so erleidet dasselbe einen Condensationsstoss S und einen vom grössern zum kleinern Drucke wirkenden, zu $\Delta\Sigma$ senkrechten Geschwindigkeitsstoss aS. Beide Stösse bleiben längs des nämlichen unendlich dünnen (gebrochenen) Normalenbündels zur Quadratwurzel aus seinem Querschnitte $\Delta\Sigma$ umgekehrt proportional, indem der Proportionalitätsfactor auch bei der Reflection nicht geändert wird.

Das Wesen dieses Satzes beruht darauf, dass für S' dieselbe Formel gilt wie für S dass also beide dem selben Gesetze folgen. Dies würde nicht mehr zu erkennen sein, wenn man in art. 9 und von da ab statt des allerdings unendlich kleinen Querschnittes $\Delta\Sigma$ eines unveränderlichen Normalenbündels die Hauptkrümmungshalbmesser von $\Delta\Sigma$ eingeführt hätte.

15.

Es bedarf zum Abschlusse unserer Untersuchung nur noch des Nachweises, welche Unstetigkeiten sich aus einem willkürlich gewählten Anfangszustande entwickeln, da der weitere Verlauf derselben ermittelt ist.

Seien für $t=0$ längs Σ_0 die Werthe von $\overset{+}{u}-\overset{-}{u}$, $\overset{+}{v}-\overset{-}{v}$, $\overset{+}{w}-\overset{-}{w}$, $\overset{+}{s}-\overset{-}{s}$ willkürlich gegeben und gleich

$$U_0 V_0 W_0 S_0.$$

Ich zerlege diese Werthe in folgender Weise

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 + U_2 + U_3 \\ V_0 &= V_1 + V_2 + V_3 \\ W_0 &= W_1 + W_2 + W_3 \\ S_0 &= S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned}$$

und wähle die einzelnen Summanden so, dass

$$U_1 = a S_1 \cos\alpha \qquad V_1 = a S_1 \cos\beta \qquad W_1 = a S_1 \cos\gamma \tag{1}$$

$$U_2 = -a S_2 \cos\alpha \qquad V_2 = -a S_2 \cos\beta \qquad W_2 = -a S_2 \cos\gamma \tag{2}$$

$$U_3 \cos\alpha + V_3 \cos\beta + W_3 \cos\gamma = 0, \qquad S_3 = 0 \tag{3}$$

wird; $\alpha\beta\gamma$ bedeuten die Winkel der Normale auf der positiven Seite von Σ_0, und bestimmen für das ganze gebrochne Normalensystem $\mathfrak{N}$ die Richtung der wachsenden N. Dies gibt

$$\begin{aligned} a(S_1 - S_2)\cos\alpha + U_3 &= U_0 \\ a(S_1 - S_2)\cos\beta + V_3 &= V_0 \\ a(S_1 - S_2)\cos\gamma + W_3 &= W_0. \end{aligned}$$

Wenn daher

$$U_0 \cos\alpha + V_0 \cos\beta + W_0 \cos\gamma = P_0 \tag{4}$$

gesetzt wird, so folgt $a(S_1 - S_2) = P_0$, mithin

$$U_3 = U_0 - P_0 \cos\alpha, \qquad V_3 = V_0 - P_0 \cos\beta, \qquad W_3 = W_0 - P_0 \cos\gamma, \tag{5}$$

und

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(S_0 + \frac{P_0}{a}\right], \qquad S_2 = \frac{1}{2}\left(S_0 - \frac{P_0}{a}\right), \tag{6}$$

wodurch nun auch U_1 $V_1 \ldots$ V_2 bestimmt sind.

Aus diesem Anfangszustande entwickeln sich also drei Unstetigkeiten.

Den Unstetigkeitswerthen $U_1 V_1 W_1 S_1$ entspricht eine von Σ_0 ausgehende und zu grössern N, den Werthen $U_2 V_2 W_2 S_2$ ebenso eine zu kleinern N fortschreitende Unstetigkeitsfläche. Es gehen also von Σ_0 in entgegengesetzten Richtungen zwei Unstetigkeitsflächen Σ_1, Σ_2 aus, deren Anfangslage Σ_0 ist, und für welche die Anfangswerthe S_1, S_2 von S gegeben sind; die Erscheinungen welche an ihnen im Laufe der Zeit erfolgen, sind durch den letzten Lehrsatz bestimmt.

Ausserdem aber findet noch eine Unstetigkeit statt, welche den Anfangswerthen $U_3 V_3 W_3 S_3$ entspricht. Wegen (3) gibt dies den im art. 3 (β) behandelten Fall, wo zwei aneinander grenzende Flüssigkeitsmassen sich mit einander fortbewegen, aber so, dass die eine längs der andern gleitet, ohne dass Flüssigkeitstheilchen von der einen zur andern übergehen; Σ_0 ist die Grenzfläche zwischen beiden Massen zur Zeit $t=0$. Der weitere Verlauf dieser Erscheinung hängt von der ganzen Flüssigkeitsbewegung, also von den Differentialgleichungen d. (art. 6) und den Bedingungen D. für die mit ihnen verträglichen Unstetigkeiten ab. Die Untersuchung der letztern allein liefert in diesem Falle keine Bestimmungen über die Umgestaltung der Fläche Σ_0.

Strassburg, 18 August 1876.

Ueber die quadratische Gleichung, von welcher die Hauptaxen eines Kegelschnittes im Raume abhängen.

(*Von* C. F. Geiser, *in Zürich.*)

Wenn ein Kegelschnitt im Raume als Durchschnitt einer Fläche zweiten Grades und einer Ebene gegeben ist, so werden bekanntlich die reziproken Quadrate seiner Hauptaxen proportional zu den Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

insofern die Glieder zweiten Grades in der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichung der Fläche durch

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

und die Glieder ersten Grades in der Gleichung der Ebene durch

$$ax + by + cz, \text{ wo } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ist, gegeben sind. Wird die Gleichung (1) nach Potenzen von λ entwickelt, so findet man

$$-(a^2 + b^2 + c^2)\lambda^2 + \mathfrak{A}\lambda + \mathfrak{B} = -\lambda^2 + \mathfrak{A}\lambda + \mathfrak{B} = 0 \qquad (2)$$

wo

$$\mathfrak{A} = (a_{22} + a_{33})a^2 + (a_{33} + a_{11})b^2 + (a_{11} + a_{22})c^2 - 2a_{23}bc - 2a_{31}ca - 2a_{12}ab \qquad (3)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} = (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})a^2 + (a_{31}^2 - a_{33}a_{11})b^2 + (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})c^2 \\ + 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})bc + 2(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{23})ca + 2(a_{33}a_{12} - a_{31}a_{32})ab \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ist. Die Realität der Wurzeln der Gleichung (2) ist nachgewiesen, sobald man zeigen kann, dass sich ihre Discriminante in eine Summe von Quadraten zerlegen lässt und man weiss dann zugleich, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die beiden Wurzeln und damit auch die Axen des Kegelschnittes einander gleich seien.

Von diesem Gesichtspunkte aus hat zuerst Hesse (*) das Problem der Kreisschnitte einer Fläche zweiten Grades analytisch behandelt, indem er die verlangte Zerlegung ausführte mit Hülfe von Relationen, welche Jacobi zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution aufgefunden hatte. Eine neue Lösung hat Herr Henrici (**) gegeben, indem er die Gleichung (1) auf die dem analogen ebenen Problem entsprechende Form

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}-\lambda & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

zurückführte. Endlich hat Herr Bauer (***) eine dritte Herleitung des Resultates veröffentlicht, welche die Bedingungen für die Existenz eines Kreisschnittes in einfacher Weise hervortreten lässt.

Wenn ich denselben Gegenstand von einem andern Gesichtspunkte aus behandle und den eingeschlagenen Weg an dieser Stelle darlege, so geschieht diess, weil ich glaube: dass die Möglichkeit der Zerlegung der Discriminante in eine Summe von Quadraten einfacher zur Evidenz gebracht werden kann, sobald einmal das Entsprechende für die Hauptaxengleichung der Flächen zweiten Grades geleistet ist und weil ferner die Ausdehnung auf einen Raum von n Dimensionen sich unmittelbar ergibt.

I.

Sind x, y, z die Coordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes der Fläche

$$F_2 = \varphi(x, y, z) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{5}$$

und der Ebene

$$E = ax + by + cz + d = 0 \tag{6}$$

(*) Crelle's Journal, Bd. 60, pag. 305.
(**) Idem, Bd. 64, pag. 187.
(***) Idem, Bd. 71, pag. 46.

so kann man durch ihn eine Normale zu E legen welche durch die Gleichungen

$$\xi = x + a\rho, \qquad \eta = y + b\rho, \qquad \zeta = z + c\rho \tag{7}$$

gegeben ist, wobei ρ einen variabeln Parameter bedeutet. Wenn diese Normale für jeden Punkt des Schnittes K von E und F_2 construirt wird, so erhält man einen Cylinder Γ, dessen Gleichung in den Coordinaten ξ, η, ζ sich findet, indem man aus den Gleichungen 5, 6 und 7 die Grössen x, y, z, ρ eliminirt. Die Glieder zweiten Grades in diesem Eliminationsresultat erscheinen in der Form

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \varphi\{\xi - a(a\xi + b\eta + c\zeta), \quad \eta - b(a\xi + b\eta + c\zeta), \quad \zeta - c(a\xi + b\eta + c\zeta)\} \\ &= \varphi(\xi, \eta, \zeta) - \{\varphi'(a)\xi + \varphi'(b)\eta + \varphi'(c)\zeta\}(a\xi + b\eta + c\zeta) + \varphi(a, b, c)(a\xi + b\eta + c\zeta)^2 \\ &= A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{23}\eta\zeta + 2A_{31}\zeta\xi + 2A_{12}\xi\eta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left|\begin{aligned} a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c &= \tfrac{1}{2}\varphi'(a) = A \\ a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c &= \tfrac{1}{2}\varphi'(b) = B \\ a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c &= \tfrac{1}{2}\varphi'(c) = C \end{aligned}\right| \qquad \varphi(a, b, c) = \varphi = aA + bB + cC \tag{9}$$

so ergeben sich die Coeffizienten von Φ in folgender Art als ganze Functionen der a, b, c und der Coeffizienten von φ:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= a_{11} - 2aA + a^2\varphi & \qquad A_{23} &= a_{23} - (bC + cB) + bc\varphi \\ A_{22} &= a_{22} - 2bB + b^2\varphi & A_{31} &= a_{31} - (cA + aC) + ca\varphi \\ A_{33} &= a_{33} - 2cC + c^2\varphi & A_{12} &= a_{12} - (aB + bA) + ab\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

II.

Die Axen des Cylinder Γ hängen von der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

deren Wurzeln λ_0, λ_1, λ_2 proportionel zu den reziproken Quadraten der Axen sind. Eine Wurzel der Gleichung (11) ist $\lambda_0 = 0$, weil der Cylinder als spezieller Fall des Paraboloids sich darstellen lässt; die beiden andern führen ebenso wie die Gleichung (1) auf die Axen des Kegelschnittes K, der ja als Hauptschnitt des Cylinders angesehen werden kann. Es sind also die Wurzeln λ_1 und λ_2 den Wurzeln der Gleichung (1) proportional. Entwickelt man (11) nach Potenzen von λ in

$$-\lambda^3 + \mathfrak{A}'\lambda^2 + \mathfrak{B}'\lambda + \mathfrak{C}' = 0 \tag{12}$$

so wird

$$\mathfrak{A}' = A_{11} + A_{22} + A_{33} = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \varphi = (a_{11} + a_{22} + a_{33})(a^2 + b^2 + c^2) - \varphi = \mathfrak{A} \tag{13}$$

Hieraus wird geschlossen dass λ_1 und λ_2 mit den Wurzeln von (1) nicht nur proportional, sondern mit ihnen identisch sind, so dass also auch

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$$

oder

$$A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{12}^2 - A_{22}A_{33} - A_{33}A_{11} - A_{11}A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} \tag{14}$$

was mit einiger Rechnung sich direct aus den Gleichungen (10) ableiten lässt. Dass $\mathfrak{C}' = 0$ sei, folgt zunächst aus $\lambda_0 = 0$, dann aber aus dem folgendem System von Gleichungen, welches wir aus (10) ableiten:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}a + A_{12}b + A_{13}c = 0 \\ A_{21}a + A_{22}b + A_{23}c = 0 \\ A_{31}a + A_{32}b + A_{33}c = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

dessen Determinante verschwinden muss, weil a, b, c nicht gleichzeitig verschwinden können.

Die Discriminante von (1) ist

$$\Delta_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2,$$

diejenige von (11) kann durch

$$\Delta_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \mathfrak{B}^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

ausgedrückt werden, zerlegt man also Δ_2 in eine Summe von Quadraten, so ist die Zerlegung auch für Δ_1 ausgeführt, da durch Division mit B^2 jedes Quadrat wieder zu einen Quadrat wird.

III.

Die von Herrn Kummer zuerst gegebene Zerlegung der Discriminante Δ_2 von (11) hat Hesse (*) in die Form gebracht

$$\left.\begin{aligned}\Delta_2 &= A_{111}^2 + 2\{A_{120}^2 + A_{102}^2 + A_{012}^2 + A_{210}^2 + A_{201}^2 + A_{021}^2\} + 6\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\} \\ &= A_{111}^2 + (A_{120} - A_{102})^2 + (A_{012} - A_{210})^2 + (A_{201} - A_{021})^2 + 15\{A_{300}^2 + A_{030}^2 + A_{003}^2\}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
&A_{300} = A_{31}B_{21} - A_{21}B_{31}; \quad A_{030} = A_{12}B_{32} - A_{32}B_{12}; \quad A_{003} = A_{23}B_{13} - A_{13}B_{23} \\
&A_{111} = A_{33}B_{22} - A_{22}B_{33} + A_{11}B_{33} - A_{33}B_{11} + A_{22}B_{11} - A_{11}B_{22} \\
&A_{120} = A_{32}B_{22} - A_{22}B_{32} + A_{11}B_{32} - A_{32}B_{11} + A_{12}B_{31} - A_{31}B_{12} \\
&A_{102} = A_{23}B_{11} - A_{11}B_{23} + A_{33}B_{23} - A_{23}B_{33} + A_{21}B_{13} - A_{13}B_{21} \\
&A_{012} = A_{13}B_{33} - A_{33}B_{13} + A_{22}B_{13} - A_{13}B_{22} + A_{23}B_{12} - A_{12}B_{23} \\
&A_{210} = A_{31}B_{22} - A_{22}B_{31} + A_{11}B_{31} - A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} - A_{21}B_{32} \\
&A_{201} = A_{21}B_{11} - A_{11}B_{21} + A_{33}B_{21} - A_{21}B_{33} + A_{12}B_{31} - A_{31}B_{12} \\
&A_{021} = A_{12}B_{33} - A_{33}B_{12} + A_{22}B_{12} - A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} - A_{32}B_{13}
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

während die B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12} die Unterdeterminanten von

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

sind. Zwischen diesen Unterdeterminanten existirt aber die nachfolgende Reihe von Relationen, die sich aus dem Gleichungssystem (15) ableiten lassen:

$$\left.\begin{aligned} a:b:c &= B_{11}:B_{12}:B_{13} \\ &= B_{21}:B_{22}:B_{23} \\ &= B_{31}:B_{32}:B_{33}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Bedeutet also λ eine noch unbestimmte Grösse, so ist

$$\left.\begin{aligned} B_{11} &= a^2\lambda; \qquad & B_{23} &= bc\lambda \\ B_{22} &= b^2\lambda; & B_{31} &= ca\lambda \\ B_{33} &= c^2\lambda; & B_{12} &= ab\lambda. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

(*) Anal. Geometrie des Raumes I[te] Auflage, pag. 320.

Daraus berechnet sich

$$\lambda = B_{11} + B_{22} + B_{33} = A_{22}A_{33} - A_{23}^2 + A_{33}A_{11} - A_{31}^2 + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = -\mathfrak{B}. \quad (20)$$

IV.

Die Ausdrücke, deren Quadratsumme gleich Δ_2 ist, sind homogene lineare Functionen der $A_{11}\ldots$ sowohl als der $B_{11}\ldots$ und da die letztern alle nach (19) und (20) den Factor $-\mathfrak{B}$ enthalten, so kann aus Δ_2 der Factor $\mathfrak{B}^2$ abgesondert werden. Damit erhält man Δ_1 direct als eine Summe von Quadraten, indem man in der rechten Seite von (16), nachdem dort die Werthe aus (17) eingeführt sind, die B_{11}, B_{22}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, B_{12} successive durch a^2, b^2, c^2, bc ca, ab ersetzt. Es wird so:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1^2 &= A'^2_{111} + 2\{A'^2_{120} + A'^2_{102} + A'^2_{012} + A'^2_{210} + A'^2_{201} + A'^2_{021}\} + 6\{A'^2_{300} + A'^2_{030} + A'^2_{003}\} \\ &= A'^2_{111} + (A'_{120} - A'_{102})^2 + (A'_{012} - A'_{210})^2 + (A'_{201} - A'_{021})^2 + 6\{A'^2_{300} + A'^2_{030} + A'^2_{003}\} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

wo jetzt noch die A' zu berechnen sind. Diese erscheinen alle aus zwei Theilen zusammengesetzt, von denen der erste vom zweiten Grade, der zweite vom vierten in a, b, c ist; aber die Ausdrücke werden sofort homogen, wenn man jeweilen die erstern mit $a^2 + b^2 + c^2$ multiplicirt.

Führt man jetzt, Herrn Henrici (*) folgend, die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} L &= (a_{22} - a_{33})abc - a_{23}a(b^2 - c^2) + a_{31}b(b^2 + c^2) - a_{12}c(b^2 + c^2) \\ M &= (a_{33} - a_{11})abc - a_{31}b(c^2 - a^2) + a_{12}c(c^2 + a^2) - a_{23}a(c^2 + a^2) \\ N &= (a_{11} - a_{22})abc - a_{12}c(a^2 - b^2) + a_{23}a(a^2 + b^2) - a_{31}b(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' &= a\{a_{11}(b^2 - c^2) + a_{22}(c^2 + a^2) - a_{33}(a^2 + b^2)\} + 2a_{31}c(a^2 + b^2) - 2a_{12}b(c^2 + a^2) \\ M' &= b\{a_{22}(c^2 - a^2) + a_{33}(a^2 + b^2) - a_{11}(b^2 + c^2)\} + 2a_{12}a(b^2 + c^2) - 2a_{23}c(a^2 + b^2) \\ N' &= c\{a_{33}(a^2 - b^2) + a_{11}(b^2 + c^2) - a_{22}(c^2 + a^2)\} + 2a_{23}b(c^2 + a^2) - 2a_{31}a(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

so wird zunächst

$$\left.\begin{aligned} &A'_{300} = aL, \quad A_{030} = bM, \quad A'_{003} = cN; \quad A'_{111} = aL' + bM' + cN' \\ &A'_{201} = cL + aM'; \quad A'_{120} = aM + bN'; \quad A'_{012} = bN + cL' \\ &A'_{210} = bL + aN'; \quad A'_{021} = cM + bL'; \quad A'_{102} = aN + cM'. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Im Weitern aber lassen sich Relationen zwischen den L, M, N, L', M', N'

(*) L. c., pag. 191.

ableiten, vermittelst deren sich Δ_1^2 als Summe von sechs Quadraten in der Form

$$\Delta_1^2 = L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2 \tag{23}$$

darstellt. Die Gleichung (23) hat den Vortheil, dass sie die Discriminante von (1) auch dann noch ergibt, wenn a, b, c nicht mehr der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ unterworfen, sondern willkürlich gelassen werden, während in diesem Falle auf der linken Seite von (21) noch der Factor $a^2 + b^2 + c^2$ hinzuzufügen ist, insofern die Werthe aus (22) berücksichtigt sind.

V.

Die gefundenen Resultate lassen sich unmittelbar verallgemeinen, resp. auf einen Raum von n Dimensionen ausdehnen. Die Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \vdots & a_{2n} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \vdots & a_{3n} & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn}-\lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \vdots & a_n & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

wo

$$a_{k\lambda} = a_{\lambda k}, \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 1$$

während sowohl die $a_{k\lambda}$ als die a_μ reell sind, stimmt bis auf den hinzutretenden Factor λ überein mit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} & \vdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} & \vdots & A_{n2} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33}-\lambda & \vdots & A_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \vdots & A_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

insofern die A als Coefficienten derjenigen quadratischen Form $\sum A_{k\lambda}\xi_k\xi_\lambda$ gewählt werden, die aus $\sum a_{k\lambda}x_k x_\lambda$ hervorgeht, indem man ρ und die x mit Hülfe der Gleichungen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots a_nx_n = 0, \qquad \xi_\mu = x_\mu + a_\mu\rho$$

eliminirt. Da nun von der Gleichung (25) bekannt ist, dass sie immer reelle Wurzeln hat, so hat auch (24) immer reelle Wurzeln; da ferner nach Herrn Borchardt die Discriminante der Gleichung (25) in eine Summe von Quadraten zerlegt werden kann, so ist diess auch für die Discriminante von (24) der Fall lässt man die Voraussetzung fallen, dass $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a^2_n=1$ sei, so ist allerdings die Discriminante vorerst mit $a_1^2+a_2^2+\cdots a^2_n$ zu multipliciren, damit die Verallgemeinerung von (21) eine Zerlegung in Quadrate ergibt; denn es müsste der Nachweis erst noch geliefert werden, dass auch die Gleichung (23) einer Ausdehnung auf n Dimensionen fähig ist.

Ich bemerke noch, dass wenn a eine beliebige differenzirbare Function von $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ darstellt, wo die x als rechtwinklige Coordinaten in einem linearen Raume von n Dimensionen erscheinen und wenn die a_μ die ersten, die $a_{k\lambda}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten von a nach den x sind: die Wurzeln der Gleichung (24) als Krümmungsradien der $(n-1)$ fachen Mannigfaltigkeit a in einem beliebigen Punkte derselben auftreten. Aus der Realität der Wurzeln folgt unmittelbar die Realität der Krümmungsradien, die Herr Kronecker (*) auf einem andern Wege dargethan hat.

Nachschrift. In der oben citirten Abhandlung des Herrn Henrici ist die Discriminante Δ_1 in eine Summe von zwei Quadraten zerlegt, was Hesse zu der Frage veranlasste, ob auch Δ_2 bei Zulassung beliebiger reeller Werthe der $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{31}, A_{12}$ in Gleichung (11) als Summe von zwei Quadraten dargestellt werden könne. Da diese Frage in der neulich erschienenen dritten Auflage seiner analytischen Geometrie wiederholt ist, so benutze ich den hier sich bietenden Anlass, den Grund anzugeben, aus welchem sie verneint werden muss.

Ich habe nämlich in dem Aufsatze: « Zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades (**) die Zerlegung von Δ_2 in eine Quadratsumme auf die analoge Zerlegung des Ausdruckes zurückgeführt, welcher gleich Null gesetzt die gemeinschaftliche Developpable eines Ellipsoids und des unendlich entfernten imaginären Kreises im Raume ergibt. Es müsste nun auch, wenn es für Δ_2 möglich wäre, der letztere Ausdruck in zwei Quadrate rationaler Functionen der Coordinaten zerlegbar, also die Developpable in zwei Flächen niederer Ordnung auflösbar sein, was bekanntlich im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Zürich den 30ten Oct. 1876.

(*) Berliner Monatsberichte, August 1869.
(**) Crelle's Journal Bd. 82, pag. 47.

Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata.

(*Memoria del prof.* Ulisse Dini, *a Pisa.*)

1. In questi ultimi tempi si incominciò a dubitare di un teorema che pure trovavasi enunciato in tutti i migliori trattati di calcolo differenziale, quello cioè che ogni funzione finita e continua di una variabile reale x, in qualunque intervallo, tolti tutt'al più alcuni punti eccezionali, ammettesse sempre una derivata determinata e finita.

Esaminata accuratamente la questione, i geometri tedeschi pei primi hanno dovuto convincersi che il teorema poteva dirsi tutt'altro che rigoroso, e già Hankel nel suo pregevole lavoro sulle funzioni oscillanti, dette degli esempj di funzioni, che sebbene finite e continue in tutto un intervallo, nei punti dello stesso intervallo corrispondenti a valori razionali di x non avevano mai una derivata finita e determinata, mentre l'avevano invece nei punti corrispondenti ai valori irrazionali di x, o almeno non poteva asserirsi in modo assoluto la non esistenza della derivata in questi punti.

I risultati di Hankel, per quanto non sempre le sue dimostrazioni possano dirsi scevre da obbiezione, erano già dunque più che sufficienti per infirmare il teorema sulla esistenza della derivata in generale, quando il sig. Du Bois Reymond, valendosi, come egli dice, di alcune comunicazioni avute gentilmente dal sig. Weierstrass, pubblicò nel vol. 79 del Giornale di Crelle una sua Memoria sulla classificazione delle funzioni arbitrarie di argomenti reali, nella quale si trova dimostrato che la funzione ben semplice rappresentata dalla serie trigonometrica di Fourier $\sum a^n \cos(b^n x\pi)$ ove a è una costante positiva minore dell'unità, e b è un numero dispari tale che si abbia $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ non ha mai una derivata determinata e finita.

Con ciò resta dunque completamente infirmato il teorema della esistenza in generale della derivata delle funzioni continue; ed essendo ben semplice la serie data dal sig. Du Bois Reymond, non è più il caso di dire che la sospettata mancanza della derivata nelle funzioni continue dovesse soltanto provenire dalla eccessiva generalità introdotta nel concetto di funzione; ed è forza invece riconoscere che la continuità sola anche per funzioni semplici (quando risultano da un numero infinito di operazioni da farsi sulla variabile) non è sufficiente ad assicurare la esistenza della derivata neppure soltanto in generale; e d'ora innanzi quando a date funzioni si voglia applicare il calcolo differenziale, oltre alla continuità, converrà come condizione esplicita ammettere anche quella della esistenza della derivata.

Le considerazioni che seguono, suggeritemi specialmente dalla lettura del bel lavoro del sig. Du Bois Reymond, mi conducono a nuove e infinite classi di funzioni che, per quanto dotate di espressione analitica e finite e continue, pure non ammettono mai una derivata determinata e finita. Fra queste funzioni si troverà poi come caso particolare quella studiata dal sig. Du Bois Reymond.

2. Prendiamo a considerare una serie $\sum u_n(x)$ ove le $u_n(x)$ sono funzioni che, oltre essere finite e continue in tutto un intervallo (a, b), ammettono sempre una derivata determinata e finita (finchè n è finito), e sono tali che la serie stessa $\sum u_n(x)$ è convergente per tutti i valori di x fra a e b e rappresenta una funzione di x finita e continua $f(x)$. Inoltre ognuna di queste funzioni $u_n(x)$ ammetta nell'intervallo (a, b) dei massimi e minimi, il cui numero, sebbene sempre finito, vada crescendo indefinitamente col crescere di n, e in modo che a partire da un certo valore di n essi si succedano a intervalli minori di qualunque quantità data in tutto l'intervallo (a, b); sarà facile allora di vedere che, quando siano soddisfatte certe altre condizioni semplici, la serie $\sum u_n(x)$ rappresenterà una funzione di x che sebbene finita e continua non avrà mai una derivata finita e determinata in tutto l'intervallo (a, b).

S'indichi infatti con $R_m(x)$ il resto $\sum\limits_{m+1}^{\infty} u_n(x)$ della serie data pel valore x della variabile, e con u'_n il massimo valore assoluto della derivata $u'_n(x)$ di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b), *o il limite superiore dei suoi valori assoluti; allora* per un punto qualunque x' fra a e b si avrà:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}\frac{u_n(x'+h)-u_n(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h},$$

o anche

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\eta_m\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h},$$

essendo h un numero positivo o negativo sufficientemente piccolo, e η_m un numero compreso fra -1 e 1 che dipende da m, da x' e da h.

Si consideri ora un piccolo intorno $(x'-h_1,\ x'+h_2)$ del punto x'. In questo intorno, quando m è abbastanza grande, cadranno sempre alcuni massimi e minimi di $u_m(x)$; quindi se si fa variare h in modo che $x'+h$ resti nell'intorno stesso (a destra o a sinistra di x'), la differenza $u_m(x'+h)-u_m(x')$ farà anch'essa alcune oscillazioni, e quando $x'+h$ venga a corrispondere al primo massimo di $u_m(x)$ che succede a x', o altrimenti quando venga a corrispondere al primo minimo pure successivo a x' a destra o a sinistra, la differenza stessa in valore assoluto non sarà mai inferiore a $\frac{D_m}{2}$, essendo D_m la minima delle varie oscillazioni che $u_m(x)$ fa nell'intervallo $(a,\ b)$.

Prendasi ora h in modo che $x'+h$ cada a destra o a sinistra di x' in questo primo punto di massimo o di minimo di $u_m(x)$ che succede a x', per modo che si abbia in valore assoluto:

$$u_m(x'+h)-u_m(x')\geqq\frac{D_m}{2};$$

allora se δ_m è la massima distanza fra un massimo ed un minimo successivi di $u_m(x)$, sarà numericamente $h<2\delta_m$, e quindi h, per m abbastanza grande, sarà piccolo quanto si vuole e $x'+h$ cadrà nell'intorno che si considera di x', e si avrà inoltre:

$$u_m(x'+h)-u_m(x')=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2},$$

con $\alpha_m=\pm 1$ dipendentemente dalla posizione di x' e talvolta anche dal segno di h, e con γ_m dipendente da x' e da h ma positivo e non inferiore ad uno; e si potrà scrivere perciò:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2h}\left\{\frac{2h}{D_m}\eta'_m\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{2\alpha_m}{\gamma_m}\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}+1\right\},$$

essendo η'_m una nuova quantità compresa fra -1 e 1; e poichè si ha in valore assoluto $2h<4\delta_m$, volendo si potrà anche scrivere:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2h}\left\{4\eta''_m\frac{\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n+2\alpha_m\varepsilon_m\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}+1\right\},$$

essendo η''_m una nuova quantità compresa fra -1 e 1, e ε_m una quantità compresa fra 0 e 1.

Si supponga ora che i massimi e minimi di $u_m(x)$ si succedano con tale rapidità nell'intervallo (a, b) che la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$, e quindi anche l'altra $\frac{h}{D_m}$, abbiano per limite zero col crescere indefinito di m.

Indicando con x_1 e x_2 due punti di massimo e di minimo consecutivi di $u_m(x)$ cui corrisponde la oscillazione minima D_m, con d_m la loro distanza $x_2 - x_1$ o $x_1 - x_2$, e con x_0 un conveniente valore intermedio, si avrà $d_m \leqq \delta_m$, e:

$$D_m = u_m(x_1) - u_m(x_2) = \pm\, d_m u'_m(x_0) = \varepsilon'_m \delta_m u'_m,$$

ovvero

$$\frac{D_m}{\delta_m} = \varepsilon'_m u'_m,$$

essendo ε'_m una quantità compresa fra 0 e 1; e quindi se $\frac{\delta_m}{D_m}$ col crescere indefinito di m tende a zero, o più generalmente non ha per limite l'infinito, u'_m non tenderà a zero, e perciò la serie $\sum u'_n$ sarà divergente (*).

Per questa circostanza il fattore $\sum_1^{m-1} u'_n$ che comparisce nel primo termine della quantità fra parentesi nelle due formole precedenti crescerà indefinitamente con m; però il prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m} \cdot \sum_1^{m-1} u'_n$, come a fortiori anche l'altro $\frac{2h}{D_m} \sum_1^{m-1} u'_n$, potranno benissimo avere per limite una quantità finita, o almeno non prendere valori superiori a una data quantità finita.

Ora se questo prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m} \sum_1^{m-1} u'_n$, o almeno il valore assoluto dell'altro $\frac{2h}{D_m} \sum_1^{m-1} u'_n$, si manterrà sempre inferiore alla unità più di una quantità finita, e qualunque sia x' e il segno di h, per tutti o per alcuni valori di m superiori a un dato numero arbitrariamente grande α_m avrà sempre lo stesso segno

(*) Volendo col mezzo di serie costruire delle funzioni $\Sigma u_n(x)$ che non hanno mai derivata finita e determinata in tutto l'intervallo finito (a, b), era necessario porre la condizione che la serie $\Sigma u'_n$ fosse divergente, perchè altrimenti la serie $\Sigma u'_n(x)$ sarebbe stata convergente in ugual grado fra a e b e avrebbe rappresentato la derivata della somma della serie data. Quì questa condizione si trova inclusa, come abbiamo visto, nell'altra che la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$ abbia per limite zero o anche, più generalmente, non abbia per limite l'infinito.

di $R_m(x'+h)-R_m(x')$; o almeno se, esistendo un limite superiore **finito** dei valori di $R_m(x'+h)-R_m(x')$ pei varii valori di x' quando h è scelto nel modo indicato sopra, ed essendo $2R'_m$ questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{4R'_m}{D_m}$, o anche soltanto l'altra $\frac{2h'}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{4R'_m}{D_m}$ ove h' è il valore assoluto di h, si manterrà sempre inferiore ad uno più di una quantità finita, allora evidentemente $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ per $h=\pm 0$ non potrà mai avere un limite determinato e finito; ma anzi, quando il segno di α_m non dipende da quello di h, il rapporto stesso $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$, o non avrà verun limite, o da una parte avrà per limite $+\infty$ e dall'altra $-\infty$; e se il segno di α_m dipenderà da h allora potrà in alcuni punti avere per limite l'infinito collo stesso segno sì a destra che a sinistra, ma in altri punti in numero infinito $\left(\text{non potendo } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ avere mai un limite determinato e finito}\right)$, dovrà non tendere verso alcun limite o tutt'al più avere per limite da una parte $+\infty$ e dall'altra $-\infty$.

3. Per questi risultati si può dunque evidentemente asserire che « quando » i termini $u_n(x)$ della serie $\sum u_n(x)$, oltre essere finiti e continui nell'intervallo » (a, b) e ammettere una derivata determinata e finita finchè n è finito, sono » tali altresì che la somma della serie sia una funzione finita e continua $f(x)$ » di x nello stesso intervallo, questa funzione sebbene sempre finita e continua » non avrà mai una derivata determinata e finita, e tutt'al più questa derivata » potrà essere in alcuni punti infinita e determinata di segno, e in altri (in » numero infinito) essere infinita e indeterminata di segno, tutte le volte che » si verifichino le condizioni seguenti:

« 1.° che i termini $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b) ammettano dei massimi e » minimi il cui numero, sebbene sempre finito, vada crescendo indefinitamente » con n, e in modo che a partire da un conveniente valore di n questi massimi » e minimi si succedano sempre in tutto l'intervallo (a, b) a distanze minori di » qualunque quantità data;

« 2.° che se δ_m è la massima distanza fra un massimo e un minimo » successivi di $u_m(x)$, e D_m è la minima delle varie oscillazioni che $u_m(x)$ fa » nell'intervallo (a, b), la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$ abbia per limite zero per $m=\infty$;

« 3.° che il prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$, ove le u'_n sono i massimi fra i valori

» assoluti delle derivate di $u_m(x)$ nell'intervallo (a, b) o i limiti superiori di » questi valori, col crescere indefinito di m si mantenga sempre inferiore » alla unità più di una quantità finita, e nello stesso tempo, per tutti o per » alcuni valori di m maggiori di un numero arbitrariamente grande m', la » differenza $u_m(x'+h)-u_m(x')$ qualunque sia x' abbia lo stesso segno di » $R_m(x'+h)-R_m(x')$ quando h è scelto in modo che $x'+h$ cada nel primo » punto di massimo o di minimo di $u_m(x)$ che succede a x' a destra e a sinistra, » per modo che si abbia in valore assoluto $u_m(x'+h)-u_m(x') \geq \frac{D_m}{2}$; o almeno, » se quest'ultima particolarità non si verifica o si è incerti, esista un limite » superiore finito pei valori assoluti di $R_m(x'+h)-R_m(x')$ corrispondenti ai » varii valori di x' e di h quando h è scelto nel modo indicato, ed essendo $2R'_m$ » questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{4R'_m}{D_m}$ » si mantenga sempre numericamente inferiore alla unità più di una quantità » finita. »

E si può notare che in questa condizione 3.ª alla quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$ si potrà sostituire l'altra $\frac{2h'}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$ ove h' è il valore assoluto di h che spesso si potrà prendere inferiore a $2\delta_m$; e in particolare quando il valore medio fra ogni massimo e minimo consecutivi di $u_m(x)$ cada nel punto di mezzo dell'intervallo corrispondente al detto massimo e minimo, per h' si potrà sempre porre $\frac{3}{2}\delta_m$, sostituendo così nella condizione precedente alla quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$ l'altra $\frac{3\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$.

Nei casi speciali poi questa condizione potrà ridursi talvolta anche meno restrittiva.

4. Inoltre si può notare che quando sono soddisfatte le condizioni ora indicate, e [come accade, per es., quando i massimi di $u_m(x)$ sono tutti uguali fra loro e così pure i minimi] il segno di $u_m(x'+h)-u_m(x')$ se h è scelto nel modo indicato non dipende da h, la derivata della nostra funzione $f(x)$ non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno, ma o non esisterà affatto, perchè il rapporto $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ prenderà continuamente valori positivi e valori negativi o oscillerà continuamente tanto per h positivo che per h negativo, o tutto al più potrà essere $+\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra.

E se per ogni valore di x' esisteranno dei valori di m pei quali α_m o $u_m(x'+h)-u_m(x')$ sia positivo, e altri pei quali invece sia negativo quando h ha uno stesso segno positivo o negativo, allora il rapporto $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ coll'impiccolire di h per valori positivi o per valori negativi oscillerà continuamente fra limiti arbitrariamente grandi positivi e negativi, e la derivata di $f(x)$ non potrà mai riguardarsi neppure come infinita e determinata o no di segno, ma dovrà riguardarsi come non esistente affatto.

5. Darò ora un altro teorema del genere di quello testè enunciato che in parte si trova in quello compreso e in parte no.

Ammettiamo perciò che le funzioni $u_n(x)$ che compariscono nella serie $\sum u_n(x)$, oltre a soddisfare alle condizioni poste in principio del § 2, ammettano anche una derivata seconda finita e determinata (finchè n è finito) in tutto l'intervallo (a, b). Allora si avrà:

$$\frac{u_n(x'+h)-u_n(x')}{h}=u'_n(x')+\frac{h}{2}u''_n(x'+\theta_n h)$$

essendo θ_n un numero compreso fra 0 e 1 che dipende da n, da x' e da h; e quindi sarà:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u'_n(x')+\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u''_n(x'+\theta_n h)+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h};$$

e se u''_n è il massimo valore assoluto o il limite superiore dei valori assoluti di $u''_n(x)$ nell'intervallo (a, b), si potrà scrivere:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u'_n(x')+\eta_m\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u''_n+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h},$$

essendo η_m un numero compreso fra -1 e 1.

Similmente per un altro valore h_1 di h si avrà:

$$\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u'_n(x')+\eta'_m\frac{h_1}{2}\sum_1^{m-1}u''_n+\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{h_1}+\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1},$$

essendo η'_m una nuova quantità compresa fra -1 e 1, e quindi sarà:

$$\begin{aligned}\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}&=\eta_m\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u''_n+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}-\\&-\eta'_m\frac{h_1}{2}\sum_1^{m-1}u''_n-\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{h_1}+\\&+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}-\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1}\end{aligned}$$

Si supponga ora che quando x passa da a a b, essendo $a<b$, i massimi di $u_m(x)$ che successivamente si incontrano siano tutti uguali, o almeno non vadano diminuendo, e i minimi invece siano pure tutti uguali o almeno non vadano crescendo.

Allora se per h si prende il valore positivo che fa cadere $x'+h$ nel primo massimo o minimo di $u_m(x)$ che succede a x', come si fece nel § 2, e per h_1 si prenda il valore maggiore di h che fa cadere $x'+h_1$ nel minimo o nel massimo che succede a $x'+h$, la differenza $u_m(x'+h_1)-u_m(x')$ sarà zero o sarà di segno contrario all'altra $u_m(x'+h)-u_m(x')$; e quindi indicando con D'_m la massima delle oscillazioni che fa $u_m(x)$ nell'intervallo (a, b), si avrà

$$\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}-\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h}=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2h}+\alpha_m\varepsilon_m\frac{2h}{h_1}\frac{D'_m}{2h}=$$

$$=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2h}\left(1+2\varepsilon'_m\frac{D'_m}{D_m}\right),$$

essendo ε_m e ε'_m quantità positive comprese fra 0 e 1, e α_m e γ_m avendo i significati dei paragrafi precedenti, e quindi si potrà scrivere:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\frac{\alpha_m\gamma_m D_m}{2h}\left\{\frac{h^2}{D_m}\frac{\alpha_m\eta_m}{\gamma_m}\sum_1^{m-1}u''_n+2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}-\right.$$

$$\left.-\frac{hh_1}{D_m}\frac{\alpha_m\eta'_m}{\gamma_m}\sum_1^{m-1}u''_n-\frac{2\alpha_m}{\gamma_m}\frac{h}{h_1}\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{D_m}+1+2\varepsilon'_m\frac{D'_m}{D_m}\right\};$$

ed essendo $h<h_1$, si avrà anche:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\frac{\alpha_m\gamma_m D_m}{2h}\left\{\eta''_m\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n+2\alpha_m\varepsilon''_m\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}-\right.$$

$$\left.-2\alpha_m\varepsilon'''_m\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{D_m}+1+2\varepsilon'_m\frac{D'_m}{D_m}\right\},$$

essendo η''_m una quantità compresa fra -1 e 1, e ε''_m e ε'''_m quantità compresa fra 0 e 1.

Ammettiamo ora che i massimi e minimi di $u_m(x)$, oltre a soddisfare alla condizione posta sopra rispetto ai loro valori, si succedano con tale rapidità che il rapporto $\frac{\delta_m}{D_m}$ col crescere di m prenda soltanto valori che non vanno al di là di un numero finito, e osserviamo che ciò che si dice per h e h_1 positivi può ripetersi per h e h_1 negativi; si vedrà subito (come nei casi considerati nei paragrafi precedenti) che, in questa ipotesi, se per tutti o per alcuni valori di m superiori a un numero arbitrariamente grande avviene che i valori scelti di h e h_1 facciano acquistare alle differenze $R_m(x'+h)-R_m(x')$, e $R_m(x'+h_1)-R_m(x')$ segni uguali e contrari respettivamente a quello di $u_m(x'+h)-u_m(x')$ (o di α_m), allora basterà che il prodotto $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n$ si mantenga inferiore alla unità più di una quantità finita perchè la differenza $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}$ non scenda al disotto di un certo limite in valore assoluto; e quindi, poichè per m abbastanza grande $x'+h$, e $x'+h_1$ vengono a cadere in un intorno piccolo quanto si vuole di x', basterà il verificarsi di questa circostanza per poter concludere che $f(x)$ nel punto qualunque x' non ammette una derivata determinata e finita. Lo stesso poi accadrà anche se non sono soddisfatte le condizioni che ora abbiamo date rispetto ai segni di una o di tutte e due le differenze $R_m(x'+h)-R_m(x')$, $R_m(x'+h_1)-R_m(x')$ quando h e h_1 sono scelti nel modo indicato, purchè allora esista un limite superiore **finito** dei valori assoluti di queste differenze pei varii valori di x', ed essendo $2R'_m$ questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n+2t\frac{R'_m}{D_m}$ con $t=2$ o $t=4$ si mantenga inferiore alla unità più di una quantità finita; talchè in tutti questi casi la derivata di $f(x)$, non essendo mai finita e determinata, potrà in alcuni punti essere infinita e determinata di segno, ma in altri, in numero infinito, dovrà non esistere affatto o tutt'al più essere infinita e indeterminata di segno.

E si può notare che onde non esista una derivata determinata e finita di $f(x)$ basterà che le condizioni ora indicate rispetto alle quantità $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n$, o $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n+2t\frac{R'_m}{D_m}$ siano soddisfatte quando in esse per h si pone $2\delta_m$ e per h_1 si pone $3\delta_m$; e se, come si disse in fine del § 3, il valor medio fra i massimi e minimi consecutivi di $u_m(x)$ cade nel mezzo dell'intervallo corrispondente allo stesso massimo e minimo, per h si potrà porre $\frac{3}{2}\delta_m$ e per h_1 si potrà porre $\frac{5}{2}\delta_m$ riducendo così le quantità stesse a

$$\frac{6\delta^2_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n, \quad \text{e} \quad \frac{6\delta^2_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n+2t\frac{R'_m}{D_m}.$$

Nei casi speciali poi questa condizione potrà talvolta ridursi anche meno restrittiva.

6. Facciamo ora alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Prendasi $u_n(x) = a_n v_n(b_n x)$, ove le a_n sono costanti tali che la serie $\sum a'_n$ dei loro valori assoluti a'_n sia convergente, le b_n sono quantità positive che crescono indefinitamente con n e per modo che $a_n b_n$ non abbia per limite zero per $n = \infty$, e le $v_n(y)$ sono funzioni tali che per tutti i valori di y sono comprese fra -1 e 1, le loro derivate $v'_n(y)$, $v''_n(y)$ non superano mai in valore assoluto una quantità finita A, e i loro massimi e minimi sono uguali a 1 e -1 e si succedono a distanze fisse d_n sempre minori di una data quantità finita per qualsiasi valore di n.

Allora le funzioni $u_n(x)$ avranno i massimi e minimi alle distanze $\frac{d_n}{b_n}$, e secondo le notazioni dei paragrafi precedenti si avrà $\delta_m = \frac{d_m}{b_m}$, $D_m = 2a'_m$, e la serie $\sum u_n(x) = \sum a_n v_n(b_n x)$ sarà convergente in ugual grado in qualunque intervallo, e quindi rappresenterà una funzione finita e continua di x per qualsiasi valore di x.

Inoltre per questa serie si avrà, sempre in valore assoluto, $R_m(x) < R'_m$, $R_m(x+h) - R_m(x) < 2R'_m$, essendo R'_m il resto $\sum_{m+1}^{\infty} a'_n$ della serie $\sum a'_n$; quindi, per quanto si trovò nei paragrafi precedenti, si può asserire che se $\lim a'_m b_m = \infty$, la serie $\sum a_n v_n(b_n x)$ rappresenterà una funzione che, sebbene finita e continua in qualunque intervallo, non avrà mai una derivata determinata e finita, e tutt'al più questa derivata sarà infinita, ma sempre indeterminata di segno (§ 4), tutte le volte che si avrà:

$$\frac{2Ad_m}{a'_m b_m} \sum_1^{m-1} a'_n b_n + \frac{2R'_m}{a_m} < 1 \tag{1}$$

per qualunque valore di m e anche al limite $m = \infty$, e similmente la stessa funzione non avrà mai una derivata determinata e finita quando il prodotto $a_m b_m$, sarà qualunque senza però avere per limite zero, e si avrà:

$$\frac{5Ad^2_m}{a'_m b^2_m} \sum_1^{m-1} a'_n b^2_n + \frac{4R'_m}{a'_m} < 1; \tag{2}$$

e se il valor medio fra ogni massimo e minimo consecutivi di $v_n(y)$ cadrà nel mezzo dell'intervallo d_n corrispondente, a queste condizioni si potranno sostituire le altre:

$$\frac{3}{2} \frac{Ad_m}{a'_m b_m} \sum_1^{m-1} a'_n b_n + \frac{2R'_m}{a_m} < 1, \tag{3}$$

$$\frac{3Ad^2_m}{a'_m b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b_n + \frac{4R'_m}{a_m} < 1 \tag{4}$$

dovendo sempre insieme alla prima di queste condizioni il prodotto $a'_m b_m$ avere per limite l'infinito per $m = \infty$, e insieme alla seconda potendo il prodotto stésso $a'_m b_m$ esser qualunque, purchè però il suo limite, se esiste, sia diverso da zero; e in questo caso si vedrebbe pur facilmente che la seconda di queste condizioni può rendersi anche meno restrittiva col ridurla all'altra:

$$\frac{3Ad^2_m}{a'_m b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b^2_n + \frac{16R'_m}{5a'_m} < 1. \tag{5}$$

Osservando infine che siccome si ha:

$$b_{m+s}(x'+h) = \frac{b_{m+s}}{b_m} b_m(x'+h),$$

se a partire da un certo valore di n le quantità d_n sono costanti e uguali a d, e i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ per $s \geqq 0$ sono numeri interi dispari, e tutte le funzioni $v_n(y)$ hanno i loro massimi e minimi nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$, $\pm 3d$,..., basterà che $b_m(x'+h)$ corrisponda a un massimo o a un minimo di $v_m(y)$ perchè $b_{m+s}(x'+h)$ corrisponda pure a un massimo o a un minimo di $v_{m+s}(y)$; e quindi in questo caso, se si ammette anche che le quantità a_n a partire da un certo valore di n siano tutte positive, la differenza

$$R_m(x'+h) - R_m(x') = \sum_{m+1}^{\infty} a_n \{v_n[b_n(x'+h)] - v_n(b_n x')\}$$

o sarà nulla o avrà lo stesso segno di $u_m(x'+h) - u_m(x')$, mentre l'altra differenza $R_m(x'+h_1) - R_m(x')$ che si considerò nel § 5, avrà segnó contrario, e perciò in questo caso in cui almeno a partire da un certo valore di n le a_n sono positive e i quozienti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ per $s \geqq 0$ sono numeri interi dispari e le d_n sono costanti e uguali a d le condizioni (1) e (2) si riducono respettivamente alle altre più semplici:

$$\frac{2Ad}{a_m b_m}\sum_1^{m-1} a'_n b_n < 1,$$

$$\frac{5Ad^2}{a_m b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b^2_n < 1,$$

e le (3) e (4) si riducono alle altre:

$$\frac{\frac{3}{2}Ad}{a_m b_m}\sum_1^{m-1} a'_n b_n < 1,$$

$$\frac{3Ad^2}{a_m b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b^2_n < 1.$$

Le stesse condizioni poi si avranno anche quando i massimi e minimi di $b_n(y)$ sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, $\pm\frac{5}{2}d,\ldots$, purchè allora i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$, oltre essere numeri interi dispari, siano della forma $4p_n+1$, essendo p_n un numero intero.

E così in particolare supponendo $a_n = \pm a^n$, $b_n = b^n$ con a positivo e minore di uno, e b positivo e maggiore di uno, si vede subito di qui che se le funzioni $v_n(y)$ hanno i loro massimi e minimi nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$, $\pm 3d,\ldots$ e i valori medî fra questi massimi e minimi consecutivi sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, $\pm\frac{5}{2}d,\ldots$, e se inoltre b è un numero intero dispari, e si ha

$$ab > 1+\frac{3}{2}Ad, \text{ o } ab^2 > 1+3Ad^2, \tag{6}$$

essendo nel primo caso $ab>1$, e nel secondo $ab \geqq 1$, si può assicurare che la serie $\sum a^n v_n(b^n x)$ rappresenterà una funzione di x finita e continua che non avrà mai una derivata determinata e finita in nessun punto; e nel primo caso questa derivata non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno. Lo stesso poi e negli stessi casi accadrà quando i massimi e minimi di $v_n(y)$ saranno nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, $\pm\frac{5}{2}d,\ldots$ e i valori medî saranno nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d,\ldots$ se b, oltre essere un numero dispari, sarà della forma $4p+1$.

Similmente poi, osservando che quando $a_n = \pm a^n$ si ha $R'_m = \frac{a^{m+1}}{1-a}$, si potrà anche asserire che nel caso di b positivo ma qualunque, come anche nel caso che essendo ancora b un numero dispari, i massimi e minimi di $v_n(y)$ non siano nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d,\ldots$ o nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d,\ldots$, e in generale quando non si rientri in uno dei casi precedenti, la serie $\sum \pm a^n v_n(b^n x)$ rappresenterà ancora una funzione di x che sebbene sempre finita e continua non avrà mai una derivata determinata e finita tutte le volte che sia soddisfatta l'una o l'altra delle due condizioni seguenti:

$$\frac{2Ad}{ab-1}+\frac{2a}{1-a}<1, \qquad \frac{5Ad^2}{ab^2-1}+\frac{4a}{1-a}<1, \tag{7}$$

con $ab>1$ quando si ha la prima condizione, e $ab\geqq 1$ quando si ha la seconda; e se i soliti valori medî di $v_n(y)$ saranno nei punti di mezzo degli intervalli corrispondenti ai massimi e minimi consecutivi, a queste condizioni si potranno anche sostituire le altre:

$$\frac{3}{2}\frac{Ad}{ab-1}+\frac{2a}{1-a}<1, \qquad \frac{3Ad^2}{ab^2-1}+\frac{16}{5}\frac{a}{1-a}<1, \tag{8}$$

e quando sia soddisfatta la prima di queste due condizioni o delle due precedenti, si potrà anche asserire che la serie che si considera non potrà aver mai neppure una derivata infinita e determinata di segno in nessun punto.

E si può notare che evidentemente insieme alle condizioni (6) dovrà essere

$$b>1+\frac{3}{2}Ad, \text{ o } b^2>1+3Ad^2$$

perchè $a<1$, e insieme alla prima delle condizioni (7) o (8) si dovrà avere $a<\frac{1}{3}$, mentre insieme alla seconda delle (7) si dovrà avere $a<\frac{1}{5}$, e insieme alla seconda delle (8) basterà invece che sia $a<\frac{5}{21}$.

Più particolarmente ancora, prendendo $v_n(y)=\cos(y)$, o $v_n(y)=\operatorname{sen} y$ si trova che la serie $\sum a^n \cos b^n x$ rappresenta una funzione di x che sebbene sempre finita e continua non ha mai una derivata determinata e finita tutte le volte che b è un numero intero dispari, e $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, o $ab^2>1+3\pi^2$ con $ab>1$ nel primo caso e $ab\geqq 1$ nel secondo; e lo stesso accade nei medesimi casi per la serie $\sum a^n \operatorname{sen} b^n x$ se b, oltre essere un numero dispari, è della forma $4p+1$.

Inoltre nel primo di questi casi, quello cioè in cui $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ (che per la serie $\sum a^n \cos b^n x$ è il caso considerato dal sig. Du Bois Reymond) la derivata della nostra funzione non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno, ma dovrà o essere finita e indeterminata di segno o non esistere affatto.

E similmente, quando non si rientri in questi casi, le serie $\sum \pm a^n \cos b^n x$, $\sum \pm a^n \operatorname{sen} b^n x$, sebbene rappresentino funzioni di x finite e continue, non avranno mai una derivata determinata e finita tutte le volte che si avrà:

$$\frac{3}{2}\frac{\pi}{ab-1}+\frac{2a}{1-a}<1, \text{ ovvero } b>\frac{1}{a}\left\{1+\frac{3}{2}\pi\frac{1-a}{1-3a}\right\}, \text{ con } ab>1,$$

o

$$\frac{3\pi^2}{ab^2-1}+\frac{16}{5}\frac{a}{1-a}<1, \text{ ovvero } b>\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{1+15\pi^2\frac{1-a}{5-21a}}, \text{ con } ab\geqq 1,$$

ciò che porta che nel primo caso sia $a<\frac{1}{3}$, e nel secondo sia invece $a<\frac{5}{21}$.

Così più in particolare ancora, prendendo per es.: $b=7$ con $a>\dfrac{1+\frac{3}{2}\pi}{7}$ ovvero $a\geqq 0{,}82$, o $b=9$ con $a>\dfrac{1+\frac{3}{2}\pi}{9}$ ovvero $a\geqq 0{,}64$, si può dire che le serie $\sum a^n \cos 7^n x$, $\sum a^n \cos 9^n x$, $\sum a^n \operatorname{sen} 9^n x$ rappresentano funzioni di x che sebbene finite e continue non hanno mai una derivata determinata e finita o infinita e determinata di segno.

Prendendo $b=31$, o $b=33,\ldots$ con $a=\frac{1}{b}$, siccome allora è soddisfatta la condizione $ab^2>1+3\pi^2$, e $ab=1$, si può asserire che le serie $\sum\frac{1}{31^n}\cos(31^n x)$, $\sum\frac{1}{33^n}\cos(33^n x)$, $\sum\frac{1}{33^n}\operatorname{sen}(33^n x)$ non hanno mai una derivata determinata e finita, ecc....

Condizioni analoghe si avrebbero per la non esistenza delle derivate delle funzioni $\sum a_n \cos^{2p_n+1} b_n x$, $\sum a_n \operatorname{sen}^{2p_n+1} b_n x$, $\sum a_n \operatorname{sn}^{2p_n+1}(b_n x)$, $\sum a_n \operatorname{cn}^{2p_n+1}(b_n x)\ldots$ ove sn e cn rappresentano le funzioni ellittiche seno e coseno amplitudine quando il loro modulo è reale e minore dell'unità,...

7. Torniamo ora a considerare la serie generale $\sum a_n v_n(b_n x)$, limitandosi però per semplicità al caso in cui le a_n sono tutte positive, i massimi e minimi di $v_n(y)$ sono nei punti $0, \pm d, \pm 2d,\ldots$ o sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d, \pm\frac{3}{2}d,\ldots$ e i soliti valori medî sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d, \pm\frac{3}{2}d,\ldots$ o nei punti $0, \pm d, \pm 2d,\ldots$, e da un certo valore di n in poi i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ sono numeri dispari qualunque ϱ della forma $4p_s+1$.

Allora ponendo

$$\frac{1}{a_m b^q_m}\sum_1^{m-1} a_n b^q_n=\frac{1}{c_m}, \text{ con } q=1, \text{ oppure } =2,$$

se, a partire da un certo valore di m, c_m per $q=1$ sarà superiore a $\frac{3}{2}Ad$, e per $q=2$ sarà superiore a $3Ad^2$, la funzione $\sum a_n v_n(b_n x)$ non avrà mai una derivata determinata e finita, e per $q=1$ questa derivata non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno.

Ora, per $m \geqq 2$, dalla posizione precedente si ha:

$$a_1 b^q_1 + a_2 b^q_2 + \cdots + a_{m-2} b^q_{m-2} + a_{m-1} b^q_{m-1} = \frac{a_m b^q_m}{c_m},$$

$$a_1 b^q_1 + a_2 b^q_2 + \cdots + a_{m-2} b^q_{m-2} \qquad\qquad = \frac{a_{m-1} b^q_{m-1}}{c_{m-1}},$$

quindi sarà:

$$a_{m-1} b^q_{m-1}\left(1 + \frac{1}{c_{m-1}}\right) = \frac{a_m b^q_m}{c_m};$$

e da questa, cangiando m in $m-1$, $m-2$,... 2 e poi moltiplicando, si otterrà la formola seguente:

$$a_m b^q_m = (1+c_1)(1+c_2)\cdots(1+c_{m-1})\frac{c_m}{c_1} a_1 b^q_1, \tag{9}$$

che varrà anche per $m=1$ quando allora al prodotto $(1+c_1)(1+c_2)\cdots(1+c_{m-1})$ si sostituisca l'unità.

Ma, poichè dalla formola precedente si ha:

$$\frac{a_m}{a_{m-1}} = \left(c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}}\right)\frac{b^q_{m-1}}{b^q_m},$$

non si potrà alle b_m e c_m lasciare tale arbitrarietà che la quantità $\left(c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}}\right)\frac{b^q_{m-1}}{b^q_m}$ possa mantenersi sempre maggiore di uno col crescere indefinito di m, perchè altrimenti la serie $\sum a_n$ sarebbe divergente; e noi per essere sicuri della convergenza di questa serie, ammetteremo senz'altro che per tutti i valori di m e anche al limite si debba avere:

$$c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}} < \frac{b^q_m}{b^q_{m-1}},$$

ciò che porterà che il rapporto $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ dovrà essere superiore a $\frac{3}{2}Ad$, o altrimenti il rapporto $\frac{b^2_m}{b^2_{m-1}}$ dovrà essere superiore a $3Ad^2$ per tutti i valori di m e anche al limite.

Ora, ammettendo date le c_m e superiori a $\frac{3}{2}Ad$ o $3Ad^2$ e sempre finite, sarà sempre possibile determinare le b_n in modo che la condizione precedente riesca soddisfatta, e che a partire da un certo valore di n i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ siano numeri interi dispari qualunque, o anche della forma $4p_s+1$, e allora per mezzo della formola (9) resteranno determinati anche i valori delle a_n, e solo nel caso di $q=2$ resterà a farsi in modo che non sia $\lim a_n b_n = 0$; come anche se sono date invece le b_n, e queste crescono indefinitamente con n in modo anche che $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ sia sufficientemente superiore a $\frac{3}{2}Ad$, o $\frac{b^2_m}{b^2_{m-1}}$ sia sufficientemente superiore a $3Ad^2$, si potranno sempre prendere le c_n in modo che la condizione precedente sia soddisfatta, e con ciò resteranno anche determinate le a_n per mezzo della (9), e solo nel caso di $q=2$ resterà ancora a farsi in modo che non sia $\lim a_n b_n = 0$; talchè si potranno così costruire facilmente infinite serie molto semplici $\sum a_n v_n(b_n x)$ che rappresentano funzioni che, sebbene sempre finite e continue, non hanno mai una derivata determinata e finita.

8. In particolare dunque, prendendo le c_n costanti e uguali a $\frac{3}{2}\gamma Ad$, o $3\gamma Ad^2$, con γ maggiore di uno, si potrà prendere $b_n=(2p_1+1)(2p_2+1)\cdots(2p_n+1)$ purchè a partire da un certo valore di n si abbia nel primo caso $p_n > \frac{3}{4}\gamma Ad$, e nel secondo $2p_n+1>\sqrt{1+3\gamma Ad^2}$; e poichè allora dalla formola (9) in questi casi si ha respettivamente:

$$a_n = \frac{k\left(1+\frac{3}{2}\gamma Ad\right)^n}{(2p_1+1)(2p_2+1)\cdots(2p_n+1)}, \qquad a_n = \frac{k(1+3\gamma Ad^2)^n}{(2p_1+1)^2(2p_2+1)^2\cdots(2p_n+1)^2},$$

con k costante, si conclude che quando i massimi e minimi di $v_n(y)$ sono nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$,..., e i soliti valori medî sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$,..., la serie $\sum a_n v_n(b_n x)$ ove a_n e b_n hanno gli indicati valori, e da un certo valore di n in poi nel primo caso si ha $p_n > \frac{3}{4}\gamma Ad$, e nel secondo si ha $2p_n+1>\sqrt{1+3\gamma Ad^2}$, senza che sia $\lim \frac{(1+3A\gamma d^2)^n}{(2p_1+1)(2p_2+1)\cdots(2p_n+1)} = 0$, rappresenterà una funzione di x che sebbene sempre finita e continua non avrà mai una derivata determinata e finita, e nel primo caso non potrà neppure averla infinita e determinata di segno.

Lo stesso poi accadrà anche quando i massimi e minimi di $v_n(y)$ sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d,\ldots$ e i soliti valori medî sono nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d,\ldots$ purchè allora le p_n da un certo valore di n in poi siano numeri pari.

9. Queste serie, al solito, quando si prenda $v_n(y) = \cos y$, o $v_n(y) = \operatorname{sen} y$ si riducono alle due $\sum a_n \cos(b_n x)$, $\sum a_n \operatorname{sen} b_n x$ che, quando a_n e b_n soddisfano alle condizioni ora indicate non hanno mai una derivata determinata e finita.

In particolare prendendo $p_1 = 1$, $p_2 = 2,\ldots$ $p_n = n$, si ha che la serie:

$$\sum \frac{\alpha^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \cos[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x]$$

ove $\alpha > 1 + \frac{3}{2}\pi$ rappresenta una funzione di x che sebbene sempre finita e continua non ha mai una derivata determinata e finita, o infinita e determinata di segno.

Lo stesso accade della serie

$$\sum \frac{\alpha^n}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)} \operatorname{sen}[1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)x],$$

per $\alpha > 1 + \frac{3}{2}\pi,\ldots$

10. Si osservi infine che quando per es. in queste ultime due serie si consideri α come variabile anch'essa, indipendente però da x, rispetto ad α si potrà evidentemente applicare la derivazione, talchè queste serie ci danno così esempii anche di funzioni di due variabili che, almeno in dati campi rispetto ad una delle variabili, hanno sempre una derivata determinata e finita e rispetto all'altra invece non l'hanno mai.

Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali.

(*Memoria di* Enrico Betti, *a Pisa.*)

È noto il seguente teorema dovuto a Lamé:

Non esistono altri sistemi tripli di superficie ortogonali e isoterme, fuori che quelli dei quali fanno parte superficie cilindriche e coniche, i sistemi di superficie di secondo grado omofocali, e il sistema di paraboloidi che è un caso limite di questo ultimo.

La dimostrazione che ha dato di questo teorema il suo scuopritore è molto complicata, e soltanto mediante considerazioni geometriche è stata dal sig. Serret diminuita questa complicanza. Quindi mi è sembrato non inutile di pubblicare la seguente dimostrazione che è interamente analitica e semplice.

Affinchè un sistema triplo di superficie sia ortogonale e isotermo è necessario e sufficiente che denotando con

$$y_1 = \text{cost.} \qquad y_2 = \text{cost.} \qquad y_3 = \text{cost.}$$

l'equazioni dei tre sistemi di superficie, e con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane, l'elemento lineare dello spazio espresso per le coordinate curvilinee y_1, y_2, y_3, prenda la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \psi_2\psi_3 dy_1^2 + \psi_3\psi_1 dy_2^2 + \psi_1\psi_2 dy_3^2$$

dove ψ_i è una funzione delle y che non contiene la y_i.

Le condizioni trovate in generale da Riemann, Christoffel e Liepschitz per l'equivalenza delle forme differenziali omogenee di secondo grado e che per questo caso furono trovate da Lamé, sono espresse da due sistemi di equazioni a derivate parziali, ai quali può darsi la seguente forma:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_2\frac{\partial^2\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_2^2}+\psi_3\frac{\partial^2\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_3^2}&=-\psi_1\frac{\partial\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_1}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_1}+\psi_2\frac{\partial\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_2}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_2}+\psi_3\frac{\partial\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_3}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_3}\\
\psi_3\frac{\partial^2\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_3^2}+\psi_1\frac{\partial^2\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_1^2}&=\psi_1\frac{\partial\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_1}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_1}-\psi_2\frac{\partial\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_2}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_2}+\psi_3\frac{\partial\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_3}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_3}\\
\psi_1\frac{\partial^2\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_1^2}+\psi_2\frac{\partial^2\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_2^2}&=\psi_1\frac{\partial\log\sqrt{\psi_2}}{\psi y_1}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_1}+\psi_2\frac{\partial\log\sqrt{\psi_3}}{\partial y_2}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_2}-\psi_3\frac{\partial\log\sqrt{\psi_1}}{\partial y_3}\frac{\partial\log\sqrt{\psi_2}}{\partial y_3}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
-\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2}+\psi_2\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}+\psi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}&=0\\
\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1}-\psi_2\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}+\psi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}&=0\\
\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2}+\psi_2\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}-\psi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y^1}&=0.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Affinchè l'equazioni (2) coesistano dovrà essere

$$0=\begin{vmatrix}
-\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\psi_3}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\\
\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3} & -\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial\psi_3}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}\\
\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1} & -\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial\psi_3}
\end{vmatrix}=$$

$$0=\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}\right)^2\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_1}}.$$

Ora le derivate delle funzioni ψ non possono annullarsi altro che quando alcuno dei sistemi di superficie è cilindrico o conico; non possono neppure divenire infinite, quindi se i sistemi di superficie non ne contengono dei cilindrici nè dei conici dovrà essere

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1}=0$$

ossia

$$\begin{vmatrix}
0 & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_3}\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & 0 & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_3}\\
\frac{\partial\psi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_3}{\partial y_2} & 0
\end{vmatrix}=0.$$

Questa equazione esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè una delle tre funzioni, per esempio ψ_2, sia una funzione delle altre due indipendente dalle y_1, y_2, y_3. Avremo dunque

$$\psi_2 = \psi_2(\psi_1, \psi_3).$$

Sostituendo nella terza dell'equazioni (2), avremo:

$$\psi_2 = \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} + \psi_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_3}.$$

Dunque ψ_2 funzione omogenea, di grado primo, di ψ_1 e ψ_3. Onde

$$\psi_2 = \psi_1 f\left(\frac{\psi_3}{\psi_1}\right).$$

Ponendo

$$\frac{\psi_3}{\psi_1} = \alpha$$

avremo

$$\left.\begin{aligned} \psi_3 &= \psi_1 \alpha \\ \psi_2 &= \psi_1 f(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Poniamo

$$\frac{\partial \log \sqrt{f(\alpha)}}{\partial \log \sqrt{\alpha}} = f', \qquad \frac{\partial^2 \log \sqrt{f(\alpha)}}{(\partial \log \sqrt{\alpha})^2} = f''.$$

Poichè ψ_2 non contiene y_2, e ψ_3 è indipendente da y_3, avremo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \log \sqrt{\psi_1}}{\partial y_2} &= -f' \frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e sostituendo i valori (3) e (4) nelle equazioni (1) si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_1^2} + f(1-f')\frac{\partial^2 \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2^2} = f'\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_1}\right)^2 + f(f'' + f'^2 - f')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2}\right)^2 - \alpha(1-f')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3}\right)^2 \\
&\frac{\partial^2 \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3^2} + ff'\frac{\partial^2 \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2^2} = f'\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_1}\right)^2 - f(f'' + f'^2 - f')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2}\right)^2 + \alpha(1-f')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3}\right)^2 \\
&f'\frac{\partial^2 \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_1^2} - (1-f')\frac{\partial^2 \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3^2} = (f' - f'')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_1}\right)^2 - f(f'^2 - f')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2}\right)^2 + (1 - f' - f'')\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Se moltiplichiamo la prima di queste equazioni per f', la seconda per $f' - 1$, la terza per -1 e le sommiamo, avremo:

$$0 = (f'' + 2f'^2 - 2f')\left[\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_1}\right)^2 + f\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\partial \log \sqrt{\alpha}}{\partial y_3}\right)^2\right].$$

Poichè la forma dell'elemento lineare è positiva, $\psi_1\psi_2$ e $\psi_1\psi_3$ sono positivi sempre e quindi anche $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ e $\frac{\psi_3}{\psi_1}$ ossia f ed α. Dunque il 2° fattore non può essere zero, se tutti i termini non sono nulli, ossia α costante, ma se è costante α, sarà costante anche $f(\alpha)$ e quindi ψ_2 e ψ_3 non potranno differire da ψ_1 altro che per un fattore costante. Ma ψ_3 non contiene y_3 quindi ψ_1 non conterrà y_3, ψ_2 non contiene y_2, quindi ψ_1 non conterrà neppure y_2 e non potrà essere altro che una costante; e quindi anche ψ_2 e ψ_3 costanti, e l'elemento lineare ha i coefficienti costanti e i tre sistemi di superficie sono tre sistemi di piani ortogonali. Avremo dunque necessariamente, escludendo questo caso,

$$f'' + 2f'^2 - 2f' = 0.$$

Ma

$$f' = \frac{\partial \log\sqrt{f}}{\partial \log\sqrt{\alpha}} = \frac{df}{d\alpha}\frac{\alpha}{f}, \qquad f'' = 2\frac{d^2f}{d\alpha^2}\frac{\alpha^2}{f} + 2\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\alpha}{f} - 2\alpha^2\left(\frac{df}{d\alpha}\right)^2\frac{1}{f^2}$$

onde:

$$f'' + 2f'^2 - 2f' = 2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\frac{\alpha^2}{f} = 0$$

$$f = c + c'\alpha$$

ossia

$$\psi_2 = c\psi_1 + c'\psi_3$$

ed inchiudendo le costanti in ψ_1 e ψ_3,

$$\psi_2 = \psi_1 + \psi_3.$$

Ma ψ_2 non contiene y_2. Quindi:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\psi_2} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial\psi_2}$$

e poichè ψ_1 non contiene y_1, e ψ_3 non contiene y_3, queste due derivate saranno funzioni della sola y_2 e avremo

$$\psi_1 = \quad A_2 - A_3$$

$$\psi_3 = -A_2 + A_1$$

e

$$\psi_2 = \quad A_1 - A_3$$

ed A_i funzione soltanto di y_i.

La forma dell'elemento lineare per tutti i sistemi tripli di superficie isoterme ortogonali che non contengono sistemi cilindrici e conici, sarà dunque

$$ds^2=(A_1-A_2)(A_1-A_3)\theta_1 dy_1^2+(A_2-A_3)(A_1-A_2)\theta_2 dy_2^2+(A_1-A_3)(A_2-A_3)\theta_3 dy_3^2 \quad (5)$$

dove le θ_i e le A_i sono funzioni soltanto di y_i.

Determiniamo ora tutte le sostituzioni che danno all'elemento lineare la forma (5).

Ponendo

$$B_i=(A_i-A_{i+1})(A_i-A_{i+2})\theta_i$$

bisogna integrare il sistema di equazioni

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}=\sum_s \frac{(\alpha s \beta)}{B_s}\frac{\partial x}{\partial y_s} \quad (6)$$

dove:

$$(\alpha s \beta)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{\alpha s}}{\partial y_\beta}+\frac{\partial B_{s\beta}}{\partial y_\alpha}-\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial y_s}\right)$$

cioè:

$$(iii)=\tfrac{1}{2}\frac{\partial B_i}{\partial y_i}, \qquad (iii')=\tfrac{1}{2}\frac{\partial B_i}{\partial y_{i'}}, \qquad (ii'i)=-\tfrac{1}{2}\frac{\partial B_i}{\partial y_{i'}}, \qquad (ii'i'')=0.$$

Poniamo

$$\frac{\partial x}{\partial y_i}=p_i$$

avremo

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial y_\beta}=\sum_s \frac{(\alpha s \beta)}{B_s} p_s$$

e affinchè:

$$f(p_1 p_2 p_3,\ y_1 y_2 y_3)=\text{cost.}$$

sia un integrale di questo sistema di equazioni, è necessario e sufficiente che sia una soluzione comune del sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned} A_1(f)&=\sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\sum_s (is1)\frac{p_s}{B_s}+\frac{\partial f}{\partial y_1}=0\\ A_2(f)&=\sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\sum_s (is2)\frac{p_s}{B_s}+\frac{\partial f}{\partial y_2}=0\\ A_3(f)&=\sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\sum_s (is3)\frac{p_s}{B_s}+\frac{\partial f}{\partial y_3}=0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Questo sistema è **Jacobiano** quando sono soddisfatte l'equazioni (1) e (2).

Infatti affinchè sia tale è necessario e sufficiente che sia

$$A_r[A_s(f)]-A_s[A_r(f)]=\sum_i C_\nu\frac{\partial f}{\partial p_i}+\sum C'_\nu\frac{\partial f}{\partial y_i}=0$$

dove:

$$C_\nu=\sum_\mu\left|\begin{matrix}\sum_l(\mu l r)\frac{p_l}{B_l}, & \sum_l(\mu l s)\frac{p_l}{B_l}\\ (\nu\mu r)\frac{1}{B_\mu}, & (\nu\mu s)\frac{1}{B_\mu}\end{matrix}\right|+\frac{\partial}{\partial y_r}\sum_l(\nu l s)\frac{p_l}{B_l}-\frac{\partial}{\partial y_s}\sum_l(\nu l r)\frac{p_l}{B_l} \quad (8)$$

ossia:

$$C_\nu\sum_l\frac{p_l}{B_l}\left\{\sum_\mu\frac{1}{B_\mu}\left|\begin{matrix}(\mu l r), & (\mu l s)\\ (\nu\mu r), & (\nu\mu s)\end{matrix}\right|+\frac{\partial}{\partial y_r}(\nu l s)-\frac{\partial}{\partial y_s}(\nu l r)+\frac{(\nu l r)}{B_l}\frac{\partial B_l}{\partial y_s}-\frac{(\nu l s)}{B_l}\frac{\partial B_l}{\partial y_r}\right\}.$$

Ora l'equazioni (1) e (2) non sono altro che condizioni di trasformabilità, cioè:

$$\frac{\partial}{\partial y_r}(\nu l s)-\frac{\partial(\nu l r)}{\partial y_s}+\sum_\mu\frac{1}{B_\mu}\left|\begin{matrix}(\nu\mu r) & (\nu\mu s)\\ (l\mu r) & (l\mu s)\end{matrix}\right|=0$$

onde quando queste siano sodisfatte, avremo sostituendo nella (8)

$$C_\nu=\sum_l\frac{p_l}{B_l}\left\{\sum_\mu\frac{1}{B_\mu}\left|\begin{matrix}(\mu l r)+(l\mu r), & (\mu l s)+(l\mu s)\\ (\nu\mu r) & (\nu\mu s)\end{matrix}\right|+\frac{1}{B_l}\left|\begin{matrix}\frac{\partial B_l}{\partial y_s} & \frac{\partial B_l}{\partial y_r}\\ (\nu l s) & (\nu l r)\end{matrix}\right|\right\}.$$

Ma:

$$(\mu l r)+(l\mu r)=\frac{\partial B_{l\mu}}{\partial y_r}$$

$$(\mu l s)+(l\mu s)=\frac{\partial B_{l\mu}}{\partial y_s}$$

onde:

$$C_\nu=0.$$

Abbiamo inoltre

$$C'_\nu=0$$

perchè sono costanti tutti i coefficienti delle derivate parziali rispetto alle y_i. Dunque il sistema (7) è Jacobiano ed ha $6-3$, ossia tre soluzioni.

Pertanto avremo tre equazioni tra le p le y e tre costanti arbitrarie; onde le p saranno determinate in funzione delle y e di tre costanti, e quindi:

$$x=\int\sum p_i dy_i \quad (9)$$

ed x funzione determinata delle y di tre costanti e di un additiva.

Poichè l'equazioni (6) sono lineari rispetto alle p e alle loro derivate, gli integrali più generali avranno la forma

$$p_i = \sum a_s Y_{si}$$

dove a_1, a_2 e a_3 sono le tre costanti arbitrarie, e le Y_{si} funzioni soltanto delle y_i e non delle costanti arbitrarie, che sodisfano coll'equazioni (6). Prendiamo tre sistemi di valori per le costanti: λ_i, μ_i, ν_i. Avremo

$$p_i = \sum \lambda_i Y_{si}, \qquad p'_i = \sum \mu_i Y_{si}, \qquad p''_i = \sum \nu_i Y_{si}.$$

Affinchè le tre funzioni x, x', x'' che otterremo dalla (9) diano la forma (5) è necessario che si abbia

$$p_1^2 + p'^2_1 + p''^2_1 = B_1, \qquad p_2^2 + p'^2_2 + p''^2_3 = B_2, \qquad p_3^2 + p'^2_3 + p''^2_3 = B_3 \tag{8}$$

onde

$$\sum_s (\lambda^2_s + \mu^2_s + \nu^2_s) Y^2_{s1} + 2 \sum_s (\lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'}) Y_{s1} Y_{s'1} = 0$$

$$\sum_s (\lambda^2_s + \mu^2_s + \nu^2_s) Y^2_{s2} + 2 \sum_s (\lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'}) Y_{s2} Y_{s'2} = 0$$

$$\sum_s (\lambda^2_s + \mu^2_s + \nu^2_s) Y^2_{s3} + 2 \sum_s (\lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'}) Y_{s3} Y_{s'3} = 0.$$

Se

$$\sum_s Y^2_{si} = 1$$

saranno sodisfatte le (8) quando si abbia

$$\lambda^2_s + \mu^2_s + \nu^2_s = 1, \qquad \lambda_s \lambda_{s'} + \mu_s \mu_{s'} + \nu_s \nu_{s'} = 0$$

ossia quando siano λ, μ, ν i coseni degli angoli che determinano la direzione di un sistema triplo di assi ortogonali, rispetto agli assi coordinati. Quindi le costanti degli integrali determinano soltanto la posizione delle superficie isoterme e non la loro natura e trovato un sistema, questo è l'unico.

Basterà dunque trovare una sola sostituzione che dia all'elemento lineare la forma (5).

Le equazioni (6) in questo caso divengono

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{A'_1 \frac{\partial x}{\partial y_2} - A'_2 \frac{\partial x}{\partial y_1}}{A_1 - A_2}, \qquad 2 \frac{\partial^2 x}{\partial y_2 \partial y_3} = \frac{A'_2 \frac{\partial x}{\partial y_3} = A'_3 \frac{\partial x}{\partial y_2}}{A_2 - A_3},$$

$$2 \frac{\partial^2 x}{\partial y_3 \partial y_1} = \frac{A'_1 \frac{\partial x}{\partial y_3} - A'_3 \frac{\partial x}{\partial y_1}}{A_1 - A_3}$$

le quali sono sodisfatte prendendo

$$x = \sqrt{C} \cdot f_1 f_2 f_3$$

$$2 f'_i = \frac{A'i}{fi}, \qquad f_i^2 = A_i - a_1.$$

Onde una soluzione è

$$x_1 = \sqrt{C_1} \sqrt{(A_1 - a_1)(A_2 - a_2)(A_3 - a_3)}.$$

Altre due si avranno prendendo due altri valori per a_1

$$x_2 = \sqrt{C_2} \sqrt{A_1 - a_2)(A_2 - a_2)(A_3 - a_2)}$$

$$x_3 = \sqrt{C_3} \sqrt{(A_1 - a_3)(A_2 - a_3)(A_3 - a_3)}.$$

Quindi:

$$\frac{x_1^2}{A_1 - a_1} + \frac{x_2^2}{A_1 - a_2} + \frac{x_3^2}{A_1 - a_3} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{A_2 - a_1} + \frac{x_2^2}{A_2 - a_2} + \frac{x_3^2}{A_2 - a_3} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{A_3 - a_1} + \frac{x_2^2}{A_3 - a_2} + \frac{x_3^2}{A_3 - a_3} = 1,$$

se

$$C_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$$

$$C_2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$$

$$C_3 = \frac{1}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

Questa sostituzione fa acquistare all' elemento lineare la forma

$$ds^2 = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) A'^2_1}{(A_1 - a_1)(A_1 - a\ )(A_1 - a_3)} dy_1^2 + \frac{(A_2 - A_3)(A_1 - A_2) A'^2_2}{(A_2 - a_1)(A_2 - a_2)(A_2 - a_3)} dy_2^2 +$$

$$\frac{(A_1 - A_3)(A_2 - A_3) A'^2_3}{(A_3 - a_1)(A_3 - a_2)(A_3 - a_3)} dy_3^2$$

e prendendo:

$$\frac{d A_i}{\sqrt{(A_i - a_1)(A_i - a_2)(A_i - a_3)}} = \sqrt{\theta_i} \cdot dy$$

abbiamo la forma (5). Il sistema di superficie è unico. Con che riman dimostrato il teorema di Lamé.

Correzione alla Memoria: Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie

(*del prof.* E. Bertini, *a Pisa.*)

Il sig. D.r Riccardo De Paolis mi ha fatto osservare una inesattezza occorsa nel lavoro sunnominato. Ivi è detto (n.° 9) che non può darsi il caso di una trasformazione involutoria di Jonquières con due raggi punteggiati uniti uscenti dal punto $(n-1)^{\text{uplo}}$. Ciò è erroneo. Il sig. De Paolis nota giustamente che il ragionamento non è rigoroso, perchè tutte le curve aventi per tangenti in O le OM, ON formano un fascio costituito dalla curva fondamentale corrispondente ad O e dal fascio di rette di centro O. D'altra parte si possono indicare facilmente costruzioni di trasformazioni involutorie, nelle quali si presentano due rette punteggiate unite partenti da O.

Tuttavia il risultato finale (n.° 18) non è alterato. Si osservi dapprima che, quando esistono due rette unite, in generale le direzioni uscenti da un punto di ciascuna di esse non possono essere unite; cioè una retta arbitraria e la sua curva corrispondente si segano semplicemente sopra ognuna di quelle rette: altrimenti esisterebbero più di due raggi uniti. Segue che, *quando esistono due rette punteggiate unite, l'ordine n della trasformazione deve essere pari* (cfr. n.° 12). Trasformando quadraticamente ponendo il triangolo fondamentale con un vertice in O, l'altro in un punto di una retta punteggiata unita e il terzo in un punto fondamentale semplice si ottiene il caso *b*) e ripetendo lo stesso procedimento, si giunge al caso *a*) (cfr. n.i 13, 14). Adunque il teorema del n.° 18 è vero generalmente.

Pisa, gennajo 1877.

Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperelittiche (*).

(*Memoria di* A. Clebsch, *traduzione con note ed aggiunte di* F. Brioschi.)

NOTA 6ª.

Nello stesso modo che la trasformazione canonica della forma cubica $F(x_1, x_2, x_3)$ ci ha condotto nella precedente Nota alla determinazione dei valori delle coordinate dei punti di flesso della cubica $F=0$, potremo ottenere per mezzo di essa le equazioni delle tangenti a quei punti, risolvere cioè il problema propostosi da Clebsch nel § 4 della sua Memoria, il quale come vedemmo conduce alla equazione (18) dello stesso paragrafo. (Vedi Nota 2ª.)

Se dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} F=y_1^3+y_2^3+y_3^3+6\,g\,y_1y_2y_3=0 \\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

si elimina una delle indeterminate, per esempio la y_3, si ottiene la:

$$f(y_1,\ y_2)=\lambda_3^3(y_1^3+y_2^3)-(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)^3-6\,\lambda_3^2g\,y_1y_2(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2) \tag{2}$$

e quindi supponendo:

$$f(y_1,\ y_2)=(\mu_1y_1+\mu_2y_2)^3 \tag{3}$$

la retta (1) sarà tangente alla cubica $F=0$ in un punto di flesso. Le equazioni indicate con $P=0$, $Q=0$ nella Nota 2ª saranno in questo caso le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2+2\,g\,(\lambda_1^3+\lambda_2^3)\lambda_3+4\,g^2\lambda_1^2\lambda_2^2=0 \\ (\lambda_1^3+\lambda_2^3)\lambda_3^3+12\,g\,\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2+12\,g^2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^3+\lambda_2^3)\lambda_3+16\,g^3\lambda_1^3\lambda_2^3-(\lambda_1^3-\lambda_2^3)^2=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) Vedi Annali di Matematica, t. 8, pag. 55.

dalle quali eliminando λ_3 si ottiene la equazione del nono grado in λ_1, λ_2 corrispondente a quella di Clebsch citata sopra. Questa equazione si decompone tosto nelle tre seguenti del terzo grado e cioè:

$$\lambda_1^3-\lambda_2^3=0, \qquad \lambda_1^3+8g^3\lambda_2^3=0, \qquad 8g^3\lambda_1^3+\lambda_2^3=0$$

e da esse e da una delle (4) si avranno i valori dei rapporti $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$.

I valori di questi rapporti ed i corrispondenti valori di μ_1, μ_2 sono dati dal prospetto seguente:

λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2
1	1	$-2g$	ω	ω
1	e	$-2e^2g$	ω	$e\omega$
1	e^2	$-2eg$	ω	$e^2\omega$
$-2g$	1	1	ω	0
$-2eg$	1	e^2	$e\omega$	0
$-2e^2g$	1	e	$e^2\omega$	0
1	$-2g$	1	0	ω
1	$-2eg$	e^2	0	$e\omega$
1	$-2e^2g$	e	0	$e^2\omega$

nel quale $\omega=\sqrt[3]{1+8g^3}$.

Rammentando ora le formole di sostituzione (26) (40) della Nota 4ª ed osservando che per le notazioni introdotte nella Nota 5ª le formole stesse ponno esprimersi come segue:

$$\left.\begin{aligned} E\alpha_2 y_1 &= h_1[E\alpha_2(kx_3-2p)-\delta Up+(\alpha_1 p+\alpha_2 q)U_0] \\ E\alpha_2 y_2 &= h_2[E\alpha_2(kx_3-2p)-\delta Vp+(\alpha_1 p+\alpha_2 q)V_0] \\ E\alpha_2 y_3 &= h_3[E\alpha_2(kx_3-2p)-\delta Wp+(\alpha_1 p+\alpha_2 q)W_0] \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

si avrà per la (1) che la equazione di una tangente ad un punto di flesso della cubica:

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_3^3-3ux_3+2v$$

sarà la:

$$E\alpha_2(kx_2-2p)L-\delta Mp+(\alpha_1 p+\alpha_2 q)N=0 \tag{6}$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} L &= \lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2+\lambda_3 h_3 \\ N &= \lambda_1 h_1 U_0+\lambda_2 h_2 V_0+\lambda_3 h_3 W_0 \\ M &= \lambda_1 h_1 U+\lambda_2 h_2 V+\lambda_3 h_3 W \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ed i valori dei rapporti $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$ sono quelli del prospetto superiore. Indicando con:

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2++\xi_3 x_3=0$$

la equazione della tangente (6), si ponno determinare le radici dall'equazione di Clebsch cioè i valori delle ξ_1, ξ_2 nel modo seguente. Si pongano nella superiore in luogo delle x_1, x_2, x_3 i loro valori dati dalle relazioni (28) della Nota 4ª; si otterrà facilmente la:

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=\frac{1}{6\alpha_2\delta k}[AX_1+BX_2+CX_3] \tag{8}$$

essendo:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\alpha_2(\delta-2EU)\xi_3+k(\delta U_0-\alpha_1 U)p-k\alpha_2 Uq \\ B &= 2\alpha_2(\delta-2EV)\xi_3+k(\delta V_0-\alpha_1 V)p-k\alpha_2 Vq \\ C &= 2\alpha_2(\delta-2EW)\xi_3+k(\delta W_0-\alpha_1 W)p-k\alpha_2 Wq. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ed in queste le p, q evidentemente eguali a $p_1\xi_2-p_2\xi_1$, $q_1\xi_2-q_2\xi_1$. Ora rammentando che:

$$y_1=h_1 X_1, \qquad y_2=h_2 X_2, \qquad y_3=h_3 X_3$$

la (8) condurrà alla:

$$\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\xi_3 x_3=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3 \tag{10}$$

posto:

$$\varkappa\lambda_1=h_2 h_3 A, \qquad \varkappa\lambda_2=h_3 h_1 B, \qquad \varkappa\lambda_3=h_1 h_2 C \tag{11}$$

e:

$$\varkappa=6\delta\alpha_2 k h_1 h_2 h_3.$$

Dalle (11) si dedurranno quindi pei valori delle espressioni (7) le:

$$\begin{aligned} 6\delta\alpha_2 kL &= A+B+C \\ 6\delta\alpha_1 kM &= AU+BV+CW \\ 6\delta\alpha_2 kN &= AU_0+BV_0+CW_0 \end{aligned}$$

dalle quali infine per le (9):

$$\alpha_1 p + \alpha_2 q = -2(2\alpha_2 EL + \delta M), \qquad p = -2N, \qquad \xi_3 = kL.$$

Le prime due relazioni fra queste ultime daranno i valori delle ξ_1, ξ_2 e ponendo con Clebsch $-\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, si avrà:

$$E\alpha_2 \xi = (2\alpha_2 EL + \delta M - \alpha_1 N)p - \alpha_2 Nq.$$

Rimane così risolto il problema propostosi dall'Autore al § 4°. La determinazione del valore di $\eta = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$ si può ottenere affatto analogamente, ed indicando con L_1, M_1, N_1 le espressioni:

$$L_1 = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2; \qquad M_1 = \mu_1 h_1 U + \mu_2 h_2 V, \qquad N_1 = \mu_1 h_1 U_0 + \mu_2 h_2 V_0$$

si giunge alla:

$$\eta = \frac{L}{L_1}\xi - \frac{1}{E\alpha_2}[(\delta M_1 + 2E\alpha_2 L_1 - \alpha_1 N_1)p - \alpha_2 N_1 q]$$

e quindi coll'Autore:

$$\eta = m(\xi + t)$$

posto $m = \frac{L_1}{L}$ e:

$$E\alpha_2 t = \frac{L}{L_1}[(\alpha_1 p + \alpha_2 q)N_1 - (2E\alpha_2 L_1 + \delta M_1)p]$$

dal quale valore si ponno dedurre le proprietà indicate da Clebsch al § 7°.

NOTA 7ª.

1.° Aggiungeremo in questa Nota alcune ricerche sulla equazione di quarto grado in m considerata dall'Autore al § 5° per dimostrare forse più chiaramente di quanto fece CLEBSCH il legame esistente fra essa e le equazioni dei gradi 9° e 12° dei paragrafi 4° e 7°.

Richiamando la formola (22) (§ 5°), cioè la:

$$3u = 3(\xi^2 - m\eta^2) + 3(\xi - m^2\eta)z + (1 - m^3)z^2 \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} K = (u\xi)^2, \quad L = (u\xi)(u\eta), \quad M = (u\eta)^2, \quad \rho = (\xi\eta) \\ \lambda = (\xi z), \quad \mu = (\eta z) \end{array}\right\} \tag{2}$$

si ottengono facilmente le seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} 3K = -3m\rho^2 - 3m^2\rho\lambda + (1 - m^3)\lambda^2, & (uz)^2 = \lambda^2 - m\mu^2 \\ 3L = -\frac{3}{2}\rho\lambda - \frac{3}{2}m^2\rho\mu + (1 - m^3)\lambda\mu, & (uz)(u\xi) = m\rho\mu - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}m^2\lambda\mu \\ 3M = 3\rho^2 - 3\rho\mu + (1 - m^3)\mu^2, & (uz)(u\eta) = \rho\lambda - \frac{1}{2}\lambda\mu + \frac{1}{2}m^2\mu^2 \end{array}\right\} \tag{3}$$

ed essendo $A = \frac{1}{2}(uu)^2$ si ha:

$$6A = 3K - 3Mm + 3(uz)(u\xi) - 3m^2(uz)(u\eta) + (1 - m^3)(uz)^2$$

o sostituendo i valori superiori:

$$12A = (1 - 4m^3)\lambda^2 - m(4 - m^3)\mu^2 - 12m^2\rho\lambda + 12m\rho\mu - 12m\rho^2 + 6m^2\lambda\mu.$$

Moltiplicando quest'ultima per $1 - m^3$ e ponendo nella medesima per $(1 - m^3)\lambda^2$, $(1 - m^3)\lambda\mu$, $(1 - m^3)\mu^2$, i valori dati dalle (3), si giunge alla:

$$m^4(\rho^2 - M) + 4m^3(K - A) - 6Lm^2 + 4m(M - \tfrac{1}{4}\rho^2) + 4A - K = 0 \tag{4}$$

cioè alla equazione del quarto grado richiesta. Essa ha l'invariante quadratico nullo essendo identicamente:

$$A\rho^2 = KM - L^2 \tag{5}$$

e ponendo:

$$\sigma = A - K + (M - \rho^2)m \tag{6}$$

si trasforma nella:

$$\sigma^4 - \tfrac{3}{2}s\sigma^2 - t\sigma - \tfrac{3}{16}s^2 = 0$$

come alla Nota 3ª.

I valori delle u, v e dei loro covarianti simultanei, nei quali in luogo delle x_1, x_2 siensi poste le ξ_2, $-\xi_1$, si ottengono facilmente formati colle K, L, M, ρ e si hanno così le:

$$u=K,\qquad 2v=-\rho^3,\qquad 2\tau=-(2L\rho^2+K^2),\qquad 2p=-M\rho \tag{7}$$

nei primi membri delle quali si devono ritenere sostituite alle x_1, x_2 le ξ_2, $-\xi_1$. Così si ha per gli invarianti B, E:

$$\left.\begin{aligned}4B&=LM-L\rho^2-K^2+2AK\\ 8E&=K(4A-K)^2+2LM(4A-K)+M^3\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

dai quali valori e dai superiori si deducono le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}8(4AB-E)&=8L^3-K^3-M^3-6LMK\\ 4(A\tau+Bu)&=4L^3-K^3-3LMK-LK\rho^2\\ 2(A\tau-4Bu)&=2L^3+2K^3-5AK^2-4LMK+2LK\rho^2\\ 4AB&=L^3-LMK+ALM-AK^2+2A^2K.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ora le prime due fra queste ultime danno:

$$\begin{aligned}8[\tau^3+2u\tau(A\tau+Bu)+(4AB-E)u^3]=-8L^3\rho^6-8L^2K^2\rho^4+\\ +4L^2K(3MK-4L^2)\rho^2-M^3K^3\end{aligned}$$

e le altre due conducono alla:

$$\begin{aligned}8[4pv(A\tau-4Bu)+16ABv^2]=8L^3\rho^6+8L^2K^2\rho^4-\\ -4L^2K(3MK-4L^2)\rho^2-8LM^2K\rho^4-4M^2K^3\rho^2\end{aligned}$$

quindi sommando si ha:

$$\begin{aligned}8[\tau^3+2u\tau(A\tau+Bu)+(4AB-E)u^3+4pv(A\tau-4Bu)+16ABv^2]=\\ =-[M^3K^3+4M^2K\rho^2(2L\rho^2+K^2)]=8M^2K\rho^2\tau-M^3K^3.\end{aligned}$$

Infine moltiplicando per ρ^3 un membro e l'altro e dividendo per 16, si giungerà nuovamente alla equazione del nono grado dell'Autore (vedi la correzione alla Nota 2ª).

2.° Dalla relazione [(36) del § 7°)

$$\eta=m(\xi+t)$$

si ottengono le:

$$\rho=m(\xi t),\qquad \rho=(\eta t). \tag{10}$$

Supponiamo ora posto nelle u, v, p le t_2, $-t_1$ in luogo di x_1, x_2; si hanno facilmente le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} m^2\cdot u &= M - 2Lm + Km^2 \\ 2m^3\cdot v &= 3m^2 \rho u - (1-m^3)\rho^3 \\ 2m\cdot p &= \rho(4A - K + Mm) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

ossia per la (6):

$$2m\cdot p = \rho(\sigma + 3A + m\rho^2).$$

Da quest'ultima si deduce la:

$$2mpu = (\sigma + 3A)\rho u + m\rho^3 u$$

la quale moltiplicata per $3m^2$ dà per la seconda delle (11):

$$2m^3[3pu - (\sigma + 3A)v] = (\sigma + 3A)(1-m^3)\rho^3 + 3m^3\rho^3 u.$$

Ora se nella espressione:

$$(\sigma + 3A)(1-m^3) + 3m^3 u \qquad (12)$$

poniamo in luogo di σ e di u i loro valori (6) (11) trovasi che l'espressione stesse non è che il primo membro della (4), e quindi per ogni valore di m o di σ che soddisfi la equazione del quarto grado, si avrà:

$$3(pu - Av) - \sigma v = 0$$

da cui l'equazione del 12° grado dell'Autore.

Dalla (12) si avrà inoltre, ponendo come alla Nota 4ª, $\sigma + 3A = k$, che:

$$k = -3\frac{m^3}{1-m^3}u.$$

3.° Dalle formole (9) del § 2°:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u - \xi^2 - \xi\eta - \eta^2 \\ 2v' &= \varepsilon(\varepsilon - 1)[(\xi + 2\eta)u - (\xi + \eta)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

deducesi facilmente, come già osservò l'Autore al § 12°, che ponendo:

$$\xi' = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi + 2\eta), \qquad \eta' = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{3}(\xi - \eta) \qquad (14)$$

si ha la:

$$2v' = 3u'\xi' - \xi'^3 + \eta'^3$$

e quindi si otterranno una nuova equazione del quarto grado ad invariante quadratico nullo, e le corrispondenti equazioni del nono e del dodicesimo grado.

Indicando con K', L', M', ρ', A' i valori delle K, L, M, ρ, A nei quali alle u, ξ, η, si sostituiscano le u', ξ', η', si avranno per la prima delle (13) e le (14) le seguenti relazioni:

$$3K' = 3\rho^2 - (K + 4L + 4M) \qquad \rho' = -\rho$$
$$3L' = -\tfrac{3}{2}\rho^2 - (K + L - 2M) \qquad A' = \tfrac{3}{4}\rho^2 + A - K - L - M.$$
$$3M' = 3\rho^2 - (K - 2L + M)$$

Sostituendo questi valori nella equazione del quarto grado analogo alla (4):

$$m'^4(\rho'^2 - M') + 4m'^3(K' - A') - 6L'm'^2 + 4m'(M' - \tfrac{1}{4}\rho'^2) + 4A' - K' = 0$$

vedesi tosto che ponendo:

$$m' = \frac{m+2}{m-1} \text{ ossia } (m'-1)(m-1) = 3$$

si passa da quest'ultima alla medesima (4).

APPENDICE.

1.° Considerando la forma del sesto ordine:

$$f = v^2 - u^3 \tag{1}$$

evidentemente i covarianti e gli invarianti della medesima si esprimeranno per mezzo di funzioni intere e razionali delle forme simultanee corrispondenti ad u, v. Il sig. Cayley, come l'Autore nota nella introduzione alla sua Memoria, si è [nel t. 9 del Quarterly Journal (pag. 210)] occupato in parte di questa ricerca, ed è giunto ad esprimere i valori degli invarianti di secondo, quarto, e sesto grado di f e del suo discriminante in funzione degli invarianti simultanei denominati da noi nella Nota 1ª con A, B, C, E.

Rispetto al discriminante di f giunge il sig. Cayley ad una interessante relazione, la quale colle notazioni addottate nelle Note può esprimersi come segue. Si indichi con R il risultante delle due forme u, v; e con D il discriminante della forma cubica ternaria:

$$F = x_3^3 - 3\,u\,x_3 + 2\,v$$

e perciò (Nota 3ª) $D = t^2 - s^3$; infine con Δ il discriminante della forma f. Questo evidentemente conterrà i coefficienti di v ad un grado non superiore al 14°, e quelli di u ad un grado non superiore al 18°; e si avrà:

$$\Delta = \pm R^3 \cdot D. \tag{2}$$

Il sig. Cayley aggiunge (pag. 219) che egli pensa possa questo risultato, da lui ottenuto colla ricerca effettiva dei valori di Δ, D, R, essere stabilito a priori. È ciò che intendiamo qui dimostrare pel caso particolare considerato dal sig. Cayley, non senza osservare però che la proprietà può essere generalizzata.

Infatti siccome il discriminante D si ottiene dalla eliminazione dei rapporti $x_1 : x_2 : x_3$ dalle equazioni:

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0 \tag{3}$$

ossia dalle:

$$v_1 - u_1 x_3 = 0, \qquad v_2 - u_2 x_3 = 0, \qquad x_3^2 - u = 0,$$

potendosi all'ultima di queste, in causa della $F = 0$, sostituire la:

$$v x_3 - u^2 = 0$$

la eliminazione della x_3 dalle prime due e da quest'ultima condurrà alle:

$$v v_1 - u^2 u_1 = 0, \qquad v_2 v - u^2 u_2 = 0 \tag{4}$$

dalle quali dovranno eliminarsi le x_1, x_2. Ma queste ultime equazioni non sono altro che le:

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0 \tag{5}$$

avendo f il valore (1), e quindi i risultati della eliminazione dalle equazioni (3) e dalle (5) non possono che differire di un fattore. Evidentemente poi questo fattore non può essere che una potenza del risultante delle due forme u, v.

Il valore di R espresso cogli invarianti simultanei delle forme u, v è il seguente:

$$R = 2(E - 4AB)$$

ed il sig. Cayley addotta nelle sue calcolazioni l'invariante R in luogo di E.

Per eliminare le x_1, x_2 dalle equazioni (4) si osservi dapprima che le equazioni stesse essendo soddisfatte dalle $u^2 = 0$, $v = 0$, il risultante dovrà contenere il fattore R^2, l'altro fattore si otterrà dalla eliminazione delle x_1, x_2 da una di esse (4) e dalle:

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = \vartheta = 0.$$

Inoltre moltiplicando le stesse (4) la prima per p_2 la seconda per p_1 (essendo p come nella Nota 1ª un covariante lineare simultaneo delle u, v), e sottraendole si ha:

$$v \rho - u^2 q = 0$$

ossia per l'ultima delle relazioni date nella Nota 1ª:

$$u \omega - u^2 q + \vartheta \tau = 0$$

si otterrà che il discriminante Δ risulterà dal prodotto di R^3 pel risultante delle due forme cubiche:

$$\vartheta = 0, \qquad \omega - uq = 0$$

od anche pel risultante delle due forme cubiche:

$$\vartheta = 0, \qquad w = 0$$

essendo $w = \omega - 2A\vartheta - qu$ come alla Nota 4ª (equazione 10).

Considerando ora le ϑ, w siccome forme del terzo ordine in p, q e scrivendo:

$$\vartheta = F(p, q) \qquad w = \Phi(p, q)$$

se indicasi con ψ la forma di quarto ordine in p, q:

$$\psi = (F\Phi)$$

e con i, j gli invarianti della medesima, infine con γ l'invariante simultaneo:

$$\gamma = (F\Phi)_3$$

si avrà, come è noto, per l'altro fattore di Δ la espressione:

$$j - \tfrac{1}{18}\gamma i.$$

2.° I covarianti della forma f sono esprimibili, come si è notato sopra, in funzione dei covarianti simultanei delle u, υ; e quindi si potranno esprimere come polinomj in p, q di cui i coefficienti sono funzioni degli invarianti A, B, C, E. Sceglieremo a considerare fra questi covarianti i due seguenti:

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \qquad \theta = 2(fh)$$

i valori dei quali, posto:

$$U = \tfrac{1}{5}(\tau - Au), \qquad V = \tfrac{1}{10}(\upsilon\omega - u^2\rho + 16A\upsilon\vartheta - 10pu\vartheta) =$$
$$= \tfrac{1}{10}[\upsilon w + 9(2A\upsilon - pu)\vartheta]$$

sono:

$$h = Uf - u\vartheta^2, \qquad \theta = Vf + 2\upsilon\vartheta^3$$

e quindi:

$$4h^3 + \theta^2 = f[4U^3f^2 + (V^2 - 12uU^2\vartheta^2)f + 4(\upsilon V + 3u^2U\vartheta + \vartheta^3)\vartheta^3].$$

Ora dimostrasi facilmente per le relazioni stabilite nella Nota 1ª che:

$$\upsilon V + 3u^2U\vartheta + \vartheta^3 = \tfrac{1}{10}(\omega + 6A\vartheta)f$$

e sostituendo:

$$4h^3+\theta^2=f^2[4U^3f+V^2-12uU^2\vartheta^2+\tfrac{2}{5}(\omega+6A\vartheta)\vartheta^3].$$

Se ora sviluppata la espressione fra parentesi del secondo membro si pone in luogo di v^2 la $f+u^3$, si giunge alla:

$$4h^3+\theta^2=f^2[Lf^2+Mf+N]$$

essendo L un invariante, M, N covarianti del sesto e del dodicesimo ordine della forma f.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE TURIN.

PROGRAMME

DU

PRIX BRESSA

Le testament de Mr. Cesar Alexandre Bressa, Docteur en Médecine et Chirurgie, en date du 4 septembre 1835, contient les dispositions suivantes:

« J'institue mon héritière universelle en mes biens présents et futurs, après que tous » les différents legs auront été acquittés, l'Académie Royale des Sciences de Turin, qui » pourra se faire représenter par son Secrétaire perpetuel, ou par un fondé de procuration, » élu à cet objet par les Membres résidents.

» Aussitôt après la cessation du droit d'usufruit constitué, en faveur de M.me Claudin » Aimée Dupêché, sur les biens compris dans la succession, l'Académie des Sciences de » Turin entrera en possession des dits biens, et pourra vendre les immeubles, placer les » capitaux selon ce qu'elle croira être de son intérêt, et avec le revenu de tous ces biens » elle établira un prix biennal qui alternera de la manière suivante:

» Le revenu net des deux premières années formera le prix à adjuger au savant, à » quelque nation qu'il appartienne, qui, pendant les quatre années précédentes, aura fait » la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura produit l'ouvrage le plus » célèbre en fait des sciences physique et expérimentales, histoire naturelle, mathématiques » pures et appliquées, chimie, physiologie et pathologie, sans exclure la géologie, l'histoire, » la géographie, et la statistique.

» Le revenu net des deux années suivantes sera adjugé au savant italien qui, au » jugement de la même Académie de Turin, aura fait dans les quatre dernières années la » découverte la plus importante, ou qui aura publié l'ouvrage le plus considérable en Italie » sur quelqu'une des sciences sus énoncées, et ainsi de suite dans le même ordre. »

L'Académie ne se dissimule pas la grave responsabilité que lui impose l'acte généreux du Docteur Bressa en l'appelant à prononcer un jugement sur les productions de l'esprit humain, qui paraîtront en quelque partie que ce soit de la vaste étendue de presque toutes les sciences positives. Elle a cru néanmoins devoir répondre à la confiance, que le testateur lui a libéralement accordée, en s'engageant à exécuter fidèlement les dispositions contenues dans son testament dicté par la louable intention d'aider au développement des sciences.

L'usufruit établi sur la succession Bressa ayant cessé au mois de juillet 1876, il s'ensuit que le premier terme biennal doit embrasser les années 1877 et 1878.

Le premier prix sera donc adjugé en 1879 au savant, de quelque pays qu'il soit, qui pendant les quatre années précédentes, c'est à dire du 1er jour de janvier 1875 jusq'au dernier jour de décembre 1878, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura publié l'ouvrage le plus célèbre en fait de sciences mathématiques et de sciences expérimentales, telles que la physique, la chimie, la physiologie, ainsi qu'en matière, d'histoire naturelle, y comprise la géologie, de pathologie, d'histoire, de géographie et de statistique.

Pour se conformer à l'esprit du testament du Docteur Bressa, l'Académie choisira ce qu'elle croira le meilleur parmi les découvertes et parmi les ouvrages qui auront été publiés, sans distinction entre ceux qui lui auront été présentés par l'auteur et ceux qui ne l'auront pas été. Elle n'entend s'assujettir à d'autres liens que ceux qui tiennent aux limites de temps prescrites par le testateur, et au sentiment de délicatesse qui défend d'être juge dans sa propre cause.

Le prix ne pourra être adjugé à aucun des Membres nationaux de l'Académie tant résidents que non résidents.

Le prix à adjuger pour la première fois, et attribué aux quatre années de 1875 à 1878 sera de douze mille francs.

Dans l'année 1881 on adjugera le deuxième prix Bressa pour les quatre années, de 1877 à 1880, avec les mêmes règles sus énoncées, mais d'après le testament ce deuxième prix ne pourra être remporté que par un savant italien. Ainsi chaque quatre ans le prix Bressa sera dévolu à un savant à quelque nation qu'il appartienne, et chaque quatre ans à un savant, italien, suivant un alternat régulier entre un prix universel et un prix national.

Turin, le 7 décembre 1876.

LE PRÉSIDENTE DE L'ACADÉMIE

FRÉDÉRIC SCLOPIS.

LE SÉCRETAIRE
de la Classe des Sciences physiques et mathématiques
ASCANIO SOBRERO.

LE SECRÉTAIRE
de la Classe des Sciences morales, historiques et philologiques
GASPARE GORRESIO.

Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra.

(*Nota del prof.* Ulisse Dini, *a Pisa.*)

1. Siano S e S' due superficie i cui punti, almeno per certe porzioni, si corrispondano uno ad uno in modo che si abbia fra esse la similitudine nelle parti infinitesime, o come si dice, si abbia su S' una rappresentazione conforme di una parte di S.

Prendendo per coordinate sulle due superficie due sistemi di linee corrispondenti u e v, e indicando con ds e ds' gli elementi lineari corrispondenti delle due superficie, si avrà:

$$ds' = m ds,$$

ove m è il modulo di similitudine; e se le linee u e v su S e quindi anche su S' costituiscono un doppio sistema di linee ortogonali e isoterme, sarà:

$$ds^2 = \lambda^2 (U du^2 + V dv^2),$$
$$ds'^2 = m^2 \lambda^2 (U du^2 + V dv^2),$$

essendo U e V funzioni di u e v soltanto rispettivamente.

S'indichino ora con K_s e $K_{s'}$ le curvature delle superficie S e S' nei punti corrispondenti (u, v), e s'indichi in generale con $\Delta_2 \varphi$ la quantità detta dal prof. Beltrami parametro differenziale del second'ordine della funzione φ, quantità che, come è noto, quando:

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

è il quadrato dell'elemento lineare della superficie che si considera, è data dalla formola:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{G \frac{d\varphi}{du} - F \frac{d\varphi}{dv}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{d}{dv} \left(\frac{E \frac{d\varphi}{dv} - F \frac{d\varphi}{du}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\},$$

ove il radicale s'intende preso positivamente, ed è una di quelle funzioni che lo stesso prof. Beltrami chiamò **funzioni invariabili**, cioè tali che cambiando le variabili coordinate conservano la stessa composizione coi coefficienti del nuovo elemento lineare della superficie e colle derivate della funzione (*).

Per una formola dello stesso prof. Beltrami, sulla superficie S si avrà:

$$-\Delta_2 \log \lambda = K_s;$$

e similmente, indicando con Δ'_2 i parametri differenziali di second'ordine sulla superficie S', si avrà:

$$-\Delta'_2 \log m\lambda = K_{s'};$$

ovvero:

$$-\Delta'_2 \log m - \Delta'_2 \log \lambda = K_{s'},$$

e siccome $\Delta'_2 = \frac{1}{m^2}\Delta_2$, sarà:

$$\Delta'_2 \log m = \frac{1}{m^2} K_s - K_{s'}, \qquad \Delta_2 \log m = K_s - m^2 K_{s'},$$

donde si conclude in particolare che, quando la superficie S' su cui si fa la rappresentazione è un piano, il parametro differenziale del second'ordine del logaritmo del modulo di similitudine m calcolato sulla superficie S è uguale alla curvatura K_s di questa superficie, e il parametro differenziale del second'ordine del logaritmo del prodotto $m\lambda$ tanto calcolato sulla superficie S quanto sul piano S' è sempre uguale a zero.

2. Supponiamo ora in generale che sulla superficie S' (qualunque essa sia) sia dato un sistema di coordinate isoterme (u', v') per modo che si abbia:

$$ds'^2 = \lambda_1^2 (U_1 du'^2 + V_1 dv'^2);$$

e sia:

$$\int \sqrt{U_1}\, du' + i \int \sqrt{V_1}\, dv' = f\left[\int \sqrt{U}\, du \pm i \int \sqrt{V}\, dv\right],$$

la formola che stabilisce la corrispondenza fra i punti delle due superficie.

Si avrà:

$$m^2 \lambda^2 = \lambda_1^2 f' f'_1,$$

essendo f_1 la funzione conjugata di f, e f' e f'_1 le derivate di f e f_1 rispetto

(*) V. Beltrami: *Ricerche di analisi applicata alla Geometria.* Giorn. di Mat. di Napoli, vol. III.

alle quantità:

$$\int\sqrt{U}du \pm i\int\sqrt{V}dv, \qquad \int\sqrt{U}du \mp i\int\sqrt{V}dv,$$

e perciò sarà:

$$\log m + \log\lambda - \log\lambda_1 = \log\sqrt{f'f'_1},$$

e si avrà pure:

$$\Delta'_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0, \quad \text{e} \quad \Delta_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0,$$

come risulterebbe anche dalle formole date sopra; talchè di qui si vede che in ogni caso le quantità $\Delta_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ e $\Delta'_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ sono sempre zero, e se è data la superficie S, qualunque sia la funzione f che stabilisce la rappresentazione di S su S', il valore di $\Delta_2\log\frac{m}{\lambda_1}$ sarà sempre conosciuto in ogni punto e sarà uguale a $-\Delta_2\log\lambda$ o a K_s.

3. Quando poi dalla conoscenza di questi valori di $\Delta_2\log\frac{m}{\lambda_1}$ o $\Delta_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$, servendosi di altre condizioni al contorno o nell' interno della porzione di superficie S che si vuole rappresentare su S', si giunga a conoscere anche il valore di $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ sulla porzione di superficie S che si considera, allora ponendo:

$$\log\frac{m\lambda}{\lambda_1} = \log\sqrt{f'f'_1} = P, \tag{1}$$

P sarà una funzione conosciuta di u e v che soddisfarà alla condizione $\Delta_2 P = 0$; e conoscendo P potremo con sole quadrature determinare f, e quindi anche tutte le formole della rappresentazione conforme di S su S' che soddisfa alle condizioni che saranno state poste.

Supponendo infatti per semplicità $U = V = 1$, e ponendo:

$$\log\sqrt{f'} = \varphi(u \pm iv),$$

con che sarà:

$$\log\sqrt{f'_1} = \varphi_1(u \mp iv),$$

essendo φ_1 la funzione conjugata di φ, si avrà:

$$\varphi(u \pm iv) + \varphi_1(u \mp iv) = P, \tag{2}$$

e quindi, se P si potrà porre facilmente sotto la forma $\psi(u \pm iv) + \psi_1(u \mp iv)$

con ψ_1 funzione conjugata di ψ, si avrà sùbito:

$$\varphi(u \pm iv) = \psi(u \pm iv) + ic \qquad (c \text{ cost. reale}),$$

e si troverà allora senz'altro:

$$f' = e^{2ic + 2\psi(u \pm iv)}, \quad \text{e} \quad f = e^{2ic} \int e^{2\psi(u \pm iv)} d(u \pm iv) + p + iq,$$

con p e q costanti reali arbitrarie.

In generale poi, siccome dalla (2) si vede che P è la parte reale di $2\varphi(u \pm iv)$ o di $\log f'$, ponendo:

$$\log f' = P + iQ, \tag{3}$$

$P + iQ$ sarà funzione della variabile complessa $u \pm iv$, e si avrà:

$$\frac{dQ}{dv} = \pm \frac{dP}{du}, \qquad \frac{dQ}{du} = \mp \frac{dP}{dv},$$

e l'espressione:

$$\mp \left(\frac{dP}{dv} du - \frac{dP}{du} dv \right)$$

sarà un differenziale esatto, e si avrà:

$$Q = \mp \int \left(\frac{dP}{dv} du - \frac{dP}{du} dv \right) = \mp \int \frac{dP}{dv} du \mp \int \left(- \frac{dP}{du} - \frac{d}{dv} \int \frac{dP}{dv} du \right) dv + c_1,$$

con c_1 costante reale; o anche, limitando gli integrali fra (u_0, v_0) e (u, v) e indicando con P'_u e P'_v le derivate di P, e osservando che $P''_v = -P''_u$:

$$Q = \mp \int_{u_0, v_0}^{u, v} (P'_v du - P'_u dv) + c_1 = \mp \int_{u_0}^{u} P'_v du \pm \int_{v_0}^{v} P'_u(u_0, v) dv + c_1,$$

e perciò, avendosi $f' = e^{P+iQ}$, sarà infine:

$$\left.\begin{aligned} \int \sqrt{U_1} du' + i \int \sqrt{V_1} dv' = f = e^{ic_1} \int_{u_0, v_0}^{u, v} \left\{ e^{P \mp i \int_{u_0, v_0}^{u, v} (P'_v du - P'_u dv)} \right\} d(u \pm iv) + p + iq = \\ = e^{ic_1} \int_{u_0, v_0}^{u, v} \left\{ e^{P \mp i \int_{u_0}^{u} P'_v(u, v) du \pm i \int_{v_0}^{v} P'_u(u_0, v) dv} \right\} d(u \pm iv) + p + iq, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

con p e q nuove costanti reali, talchè le formole della nostra rappresentazione resteranno così pienamente determinate.

È da notarsi però che, dipendentemente dalla natura di P e dalla forma del campo che si considera su S, l'espressione trovata per f potrà non essere a un sol valore.

4. Se poi fosse conosciuto in qualche modo, per mezzo della equazione $\Delta'_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0$ e di altre condizioni date, il valore di $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ sulla porzione di S', che in qualche modo si sapesse che deve corrispondere alla porzione data di S, allora P sarebbe ancora conosciuto ma in funzione di u' e v'; e quando si avesse anche $U_1 = V_1 = 1$, invece di giungere a trovare la relazione:

$$u' + iv' = f(u \pm iv),$$

si giungerebbe collo stesso metodo a trovare la relazione inversa:

$$u \pm iv = \psi(u' + iv').$$

Essendo infatti:

$$u' + iv' = f[\psi(u' + iv')],$$

si avrebbe:

$$f'\psi' = 1, \qquad f'_1 \psi'_1 = 1,$$

e quindi $f' f'_1 = \frac{1}{\psi' \psi'_1}$, e $\log \sqrt{\psi' \psi'_1} = -P$, e si troverebbe con calcoli simili:

$$\left.\begin{aligned} u \pm iv = \psi &= e^{ic'} \int_{u'_0, v'_0}^{u', v'} \left\{ e^{-P + i\int_{u'_0, v'_0}^{u', v'} (P'_{v'} du' - P'_{u'} dv')} \right\} d(u' + iv') + p_1 + iq_1 = \\ &= e^{ic'} \int_{u'_0, v'_0}^{u', v'} \left\{ e^{-P + i\int_{u'_0}^{u'} P'_{v'}(u', v') du' - i\int_{v'_0}^{v'} P'_{u'_0}(u'_0, v') dv'} \right\} d(u' + iv') + p_1 + iq_1, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ove c_1, p_1, q_1 sono costanti reali, talchè il problema potrebbe ancora riguardarsi come risoluto.

5. Dietro questi risultati si può dunque asserire che quando si dia il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ sul contorno della porzione ω di superficie S che si vuole rappresentare su S', o sul contorno della porzione ω' di S' che in qualche modo si sappia che deve corrispondere ad ω, e che questo rapporto debba essere sempre finito e continuo e diverso da zero e avere le derivate prime e seconde finite e continue esse pure, allora, siccome risulterà almeno in generale, completamente determinato il valore di $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ entro ω o entro ω', la rappresentazione corrispondente di ω su ω' (quando sia possibile) sarà poi determinata colle formole del paragrafo precedente all'infuori di qualche costante; e lo stesso pure accadrà quando sul contorno di ω o di ω' si dia invece il valore della derivata rispetto

alla normale interna agli stessi contorni riducendosi così in sostanza il problema alla determinazione di una funzione $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ che, in un campo dato oltre alle solite condizioni ora indicate di continuità ecc., soddisfa alla equazione $\Delta_2=0$ o $\Delta'_2=0$, e per la quale sono dati i suoi valori al contorno, o quelli della sua derivata rispetto alla normale interna al contorno stesso.

Notiamo però che, come già abbiamo accennato, specialmente quando sia dato a priori il campo ω' su cui deve cadere la rappresentazione della superficie data ω, e siano date delle condizioni lungo il contorno di ω', non sempre il problema sarà possibile, e l'impossibilità verrà messa in luce dalla circostanza che colle formole finali (4) o (5) il contorno di ω' non verrà effettivamente a corrispondere al contorno di ω. Però in ogni caso il metodo suggerito da queste considerazioni sarà sempre da seguirsi, poichè se non altro esso porrà in chiaro la impossibilità di soddisfare alle condizioni poste, di rappresentare cioè in modo conforme il campo dato ω sul campo parimente dato ω', ecc.

Inoltre notiamo che talvolta invece di cominciare col determinare per mezzo delle condizioni date, entro ω o entro ω', il valore di $\log\frac{\lambda m}{\lambda_1}$, potrà convenire d'incominciare a determinare la funzione che nel § 3 abbiamo indicato con Q, vale a dire quella funzione Q per la quale la espressione $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}+iQ$ è una funzione di $u\pm iv$ (§ 3), ecc.

6. Indichiamo ora con i l'angolo che una curva s su S fa colle linee $v=$cost.; con i' l'angolo che la linea corrispondente s' su S' fa colla linea $v'=$cost.; e con dn e dn' gli elementi delle curve normali corrispondenti, fissando che la direzione positiva di dn e quella di ds siano disposte la prima rispetto alla seconda come la tangente positiva di una curva $u=$cost. (cioè la direzione secondo cui cresce v) lo è rispetto alla tangente positiva della curva $v=$cost.

Inoltre indichiamo con $\frac{1}{\rho_s}$ e $\frac{1}{\rho_{s'}}$ le curvature geodetiche delle linee s e s', intendendo che ogni raggio geodetico ρ_s abbia un segno positivo o un segno negativo secondochè è diretto nel senso di dn o in senso contrario, e ricordiamo che si ha (V. per es.: Beltrami, Mem. cit.):

$$\frac{1}{\rho_s}=\frac{di}{ds}-\frac{d\log\lambda}{dn},\qquad \frac{1}{\rho_{s'}}=\frac{di'}{ds'}-\frac{d\log\lambda_1}{dn'}. \tag{6}$$

Osserviamo ora che si ha $ds'=m\,ds$, e differenziamo i due membri di questa equazione nel senso della normale ad s su S, indicando a scanso di equivoci questa differenziazione colla caratteristica δ. Si troverà:

$$\delta ds' = m\delta ds + ds\delta m$$

e, dividendo per $ds'\delta n'$ e osservando che $ds' = mds$, $\delta n' = m\delta n$, si avrà:

$$\frac{\delta \log ds'}{\delta n'} = \frac{1}{m}\frac{\delta \log ds}{\delta n} + \frac{1}{m}\frac{\delta \log m}{\delta n},$$

talchè, osservando che con considerazioni semplici si trova che:

$$\frac{\delta \log ds}{\delta n} = \frac{\delta \log \lambda}{\delta n} - \frac{di}{ds} = -\frac{1}{\rho_s}, \qquad \frac{\delta \log ds'}{\delta n'} = \frac{\delta \log \lambda_1}{\delta n'} - \frac{di'}{ds'} = -\frac{1}{\rho_{s'}},$$

si avrà subito la formola nota:

$$\frac{1}{\rho_{s'}} = \frac{1}{m}\frac{1}{\rho_s} - \frac{d\log m}{m\,dn}, \tag{7}$$

nella quale alla caratteristica δ siamo tornati a sostituire la caratteristica d; e insieme a questa si avrà l'altra:

$$\frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{m\,dn} = \frac{1}{m}\frac{di}{ds} - \frac{di'}{ds'},$$

la quale dà luogo alle due:

$$\frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{di}{ds} - m\frac{di'}{ds'}, \qquad \frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn'} = \frac{di}{m\,ds} - \frac{di'}{ds'}, \tag{8}$$

o anche:

$$\frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{di - di'}{ds} = \frac{d(i-i')}{ds}, \qquad \frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn'} = \frac{di - di'}{ds'} = \frac{d(i-i')}{ds'}; \tag{9}$$

e queste quando si abbia $di' = 0$ o $di = 0$ si trasformano nelle altre più semplici:

$$\frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{di}{ds} = \frac{1}{\rho_s} + \frac{d\log\lambda}{dn}, \qquad \frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn'} = -\frac{di'}{ds'} = -\frac{1}{\rho_{s'}} - \frac{d\log\lambda_1}{dn'}. \tag{10}$$

Applicando dunque questa formola ai contorni s e s' di ω e di ω', coll'ammettere dapprima che sui contorni stessi e nell'interno non debbano aversi singolarità, nè rispetto alla rappresentazione che si fa di ω su ω', nè, più generalmente, rispetto al rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$, noi possiamo dire intanto che quando i dati del problema portino alla conoscenza della quantità $\frac{d(i-i')}{ds}$ sul contorno s del campo ω, o a quella della quantità $\frac{d(i-i')}{ds'}$ sul contorno s' del campo ω' che in qualche modo si sappia che deve corrispondere ad ω, si conoscerà appunto il valore della derivata di $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ rispetto alla normale interna al contorno di ω o di ω', e il problema, per quanto si è detto nel paragrafo precedente, ove sia possibile, potrà ritenersi come risoluto.

Così in particolare, quando si abbia per dato che la differenza $i-i'$ debba avere valori costanti sulle varie linee o pezzi di linee che costituiscono il contorno di ω, si trae subito di qui che, nella ipotesi ammessa della continuità ecc. rispetto a $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$, dovrà essere $\frac{m\lambda}{\lambda_1}=\text{cost.}$ in tutto ω, e con ciò la rappresentazione conforme della porzione ω di S su una porzione ω' di S' in modo che al contorno si abbia $i-i'=\text{cost.}$ rimarrà determinata dalla formola $u'+iv'=A(u+iv)+B$ con A e B costanti arbitrarie (§ 3), e non resteranno a farsi che le verificazioni che dai dati del problema fossero rese necessarie; e in questa rappresentazione non solo pei contorni ma per le linee corrispondenti sarà soddisfatta in ogni punto la condizione $i-i'=\text{cost.}$

7. In particolare ancora, quando per dato si abbia che il contorno di ω' sulla superficie S' deve essere formato da uno o più pezzi di linee che taglino sotto angoli costanti le linee v' (per le quali, cioè, sia $di'=0$), riducendosi allora la espressione $\frac{di-di'}{ds}$ a $\frac{di}{ds}$ che è conosciuta, si verrà a conoscere il valore $\frac{di}{ds}$ o $\frac{1}{\rho_s}+\frac{d\log\lambda}{dn}$ della derivata di $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ rispetto alla normale interna a s sulla superficie S, e la rappresentazione conforme di ω su ω' (quando sia possibile farla in modo che $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ soddisfi alle solite condizioni di continuità ecc.) resterà determinata (§ 5); e similmente quando il contorno s di ω sia formato da linee o pezzi di linee che taglino sotto angoli costanti le linee v (per le quali, cioè, si abbia $di=0$), scegliendo a piacere il campo ω' che deve venire a corrispondere ad ω (salvo a soddisfare alle condizioni che verranno più sotto indicate), si potrà riguardare come conosciuto su S' il valore $-\frac{di'}{ds'}$ o $-\frac{1}{\rho_{s'}}-\frac{d\log\lambda_1}{dn'}$ della derivata di $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ rispetto alla normale interna al contorno s' di ω', e

la rappresentazione di ω su ω' (quando sia possibile) rimarrà ancora determinata; talchè si può evidentemente asserire che in questi casi, in cui le condizioni date portano che il contorno di ω o quello di ω' siano formati da linee o pezzi di linee che tagliano sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme v o v', il problema della rappresentazione conforme di un campo dato ω su un altro parimente dato ω' (quando sia possibile) è senz'altro ridotto alla determinazione di una funzione $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ che in uno degli stessi campi, oltre alle solite condizioni di continuità ecc., soddisfa alla equazione $\Delta_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}=0$, o $\Delta'_2\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}=0$, e di cui sono dati i valori della derivata rispetto alla normale interna al contorno.

8. Fermiamoci in particolare sulle questioni di possibilità o no delle rappresentazioni conformi di un campo ω su un altro dato o nò ω', quando, come nei casi considerati nei due paragrafi precedenti, sono date alcune condizioni che determinano il valore di $\frac{d(i-i')}{ds}$, o $\frac{d(i-i')}{ds'}$ sul contorno s o s' di ω o di ω', facendo per ora astrazione dai casi di impossibilità che possono presentarsi per non essere soddisfatte le condizioni di continuità ecc. pel rapporto $\frac{\lambda m}{\lambda_1}$. Si potrà osservare allora che nel primo caso, se il campo ω' non è completamente definito a priori, ma per esso è data soltanto la condizione che il rapporto $\frac{d(i-i')}{ds}$ nei punti del contorno s di ω abbia valori dati, veri casi di impossibilità non vi saranno perchè le formole finali condurranno a una rappresentazione conforme di ω su una porzione di S' per la quale al contorno di ω il rapporto $\frac{d(i-i')}{ds}$ a causa della prima delle (9) prenderà appunto il valore dato; e se il campo ω' sarà dato perfettamente a priori, allora potrà avvenire che le formole finali non corrispondano effettivamente alla rappresentazione di ω su ω', però esse daranno sempre una rappresentazione di ω su una porzione Ω' di S' il cui contorno se non sarà precisamente quello di ω' soddisfarà però ad una condizione comune, quella cioè che lungo di esso il rapporto $\frac{d(i-i')}{ds}$ abbia i valori dati.

Nel secondo caso poi, dovendo esser dato perfettamente il campo ω', perchè è su esso che si fa la determinazione del rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$, potrà avvenire che le formole finali non corrispondano effettivamente a una rappresentazione conforme del campo dato ω sul campo parimenti dato ω'; però queste formole daranno sempre una rappresentazione conforme per la quale il campo ω' se non corrisponderà precisamente al campo dato ω di S, corrisponderà però ad un campo Ω limitato come ω da linee tali che il rapporto $\frac{d(i-i')}{ds'}$ prenda su s' i valori dati.

E in particolare nel primo caso, quando il contorno del campo dato ω' taglia sotto angoli costanti le linee v', si può dire che se il campo Ω' che colle formole finali verrà a corrispondere ad ω non sarà precisamente ω', avrà però il contorno formato, come quello di ω', da linee che tagliano sotto angoli costanti le linee v'; e nel secondo caso, se il contorno del campo dato ω taglia sotto angoli costanti le linee v, il campo Ω che colle formole finali verrà a corrispondere al campo preso a piacere ω', se non sarà precisamente ω, avrà però, come questo, il suo contorno formato da linee che tagliano sotto angoli costanti le linee v.

9. Veniamo ora a occuparci in modo speciale delle condizioni di continuità ecc. che abbiamo sempre supposto nel rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$, e osserviamo dapprima che se φ è una funzione che nei punti di un campo C il cui contorno è σ è sempre finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, e in questo campo esiste soltanto tutt'al più un numero finito di punti nei quali le coordinate u e v, o u' e v' (secondochè esso è su S o su S') non si comportano come le ordinarie coordinate cartesiane, o, più generalmente, esiste soltanto un numero finito di punti nei quali λ o λ_1 presentano qualche singolarità, si ha:

$$\iint_C \Delta_2\varphi\, dC + \int_\sigma \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 0, \tag{10}$$

essendo n la normale interna a σ (*); si concluderà da ciò che onde il rap-

(*) V. Beltrami: *Sulle funzioni di variabili complesse su una superficie qualunque,* Annali di Mat. di Milano, t. 1. Il Beltrami dimostra la formola (10) pei campi C nei quali i soliti coefficienti E e G dei due quadrati nell'elemento lineare, e il determinante dell'area $EG-F^2$ sono finiti e diversi da zero, ciò che nel caso nostro porterebbe sempre la restrizione che λ o λ_1, secondochè C è su S o su S', in tutto C fossero finiti e diversi da zero; però se vi è un numero finito di punti entro C nei quali λ o λ_1 presentano qualche singolarità, escludendo questi punti con circonferenze geodetiche arbitrariamente piccole, si vede che basta ammettere che coll'avvicinarsi ad essi indefinitamente $\Delta_2\varphi$ e le derivate prime di φ si mantengano finite per poter dire che la formola (10) continua ancora a sussistere porto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ sia a un sol valore finito e continuo e diverso da zero, e abbia finite e continue anche le sue derivate prime e seconde in tutto un campo dato ω, o in tutto il campo ω' che forma la rappresentazione di ω, bisognerà che le curve corrispondenti s e s' che formano i contorni di ω e ω' siano tali che si abbia:

$$\int d(i-i')=0, \quad \text{o:} \quad \int_s di-\int_{s'} di'=0. \tag{11}$$

Avendo poi riguardo alle formole (6) questa condizione potrà anche trasformarsi nell' altra:

$$\int_s\left(\frac{d\log\lambda}{dn}+\frac{1}{\rho_s}\right)ds=\int_{s'}\left(\frac{d\log\lambda_1}{dn'}+\frac{1}{\rho_{s'}}\right)ds',$$

la quale, quando λ e λ_1 entro ω e ω' soddisfino alle solite condizioni di continuità ecc., si può anche scrivere:

$$\int_s\frac{ds}{\rho_s}-\iint_\omega \Delta_2\log\lambda\, d\omega=\int_{s'}\frac{ds'}{\rho_{s'}}-\iint_{\omega'}\Delta'_2\log\lambda_1\, d\omega',$$

ovvero:

$$T-T'=\Gamma'-\Gamma,$$

essendo T e T' le somme degli angoli di contingenza geodetica dei contorni s e s' rispettivamente, e Γ e Γ' le curvature integre o totali:

$$\iint_\omega K_s\, d\omega, \qquad \iint_{\omega'} K_{s'}\, d\omega'$$

delle aree ω e ω'; ciò che evidentemente somministra un teorema sulle rappresentazioni conformi di una superficie su di un altra facile ad enunciarsi.

Nel caso particolare poi in cui sia $di'=0$ queste condizioni divengono:

$$\int_s di=0, \quad \text{o:} \quad T=-\Gamma,$$

e nel caso di $di=0$ esse divengono invece:

$$\int_{s'} di'=0, \quad \text{o:} \quad T'=-\Gamma'.$$

In ciò che segue la differenza $\int_s di-\int_{s'} di'$ verrà da noi indicata con ϖ quando sia espressa per u e v (cioè quando si consideri su S), e verrà invece indicata con ϖ_1 quando sia espressa per u' e v'. Queste quantità dunque ϖ e ϖ_1 dovranno essere zero quando siano soddisfatte le indicate condizioni di continuità ecc. rispetto a $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$.

10. Se poi non sono soddisfatte le condizioni $\varpi=0$ o $\varpi_1=0$, o anche se, essendolo, deve mancare in alcuni punti della rappresentazione di ω su ω' la similitudine nelle parti infinitesime, allora saremo nel caso in cui il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ ha qualche singolarità in qualche punto, linea o porzione della superficie che si considera.

Ci limiteremo a considerare il caso di quelle singolarità speciali per le quali il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ diviene zero o infinito in uno o più punti staccati $p_1, p_2, \ldots p_n$ del campo ω o ω' su cui si considera, e questi zeri o infiniti sono tali che la funzione $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ divenga infinita come i logaritmi delle distanze geodetiche da questi punti ai punti vicini, per modo che si abbia per es.: sulla superficie ω:

$$\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}=A_1\log\frac{1}{r_1}+A_2\log\frac{1}{r_2}+\cdots+A_n\log\frac{1}{r_n}+\varphi \tag{12}$$

essendo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ le distanze geodetiche ora indicate, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ delle costanti convenienti, e φ una funzione di u e v che è finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, ciò che equivale ad ammettere che $\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ non abbia altre singolarità che quelle che provengono dai termini logaritmici scritti sopra.

Allora, fuori dei punti singolari φ dovrà soddisfare alle condizioni:

$$\frac{d\varphi}{dn}=\sum_1^n A_h\frac{d\log r_h}{dn}+\frac{d\log\frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn}=\sum_1^n A_h\frac{d\log r_h}{dn}+\frac{di-di'}{ds},$$

$$\Delta_2\varphi=\sum_1^n A_h\Delta_2\log r_h,$$

$$\iint_\omega \Delta_2\varphi\,d\omega+\int_s\frac{d\varphi}{dn}ds=0;$$

quindi, poichè la seconda di queste richiede che le quantità $\Delta_2\log r_h$ restino finite anche coll'avvicinarsi indefinitamente ai punti p_h, converrà ammettere (Beltrami, Mem. cit.) che la curvatura della superficie ω nei punti $p_1, p_2, \dots p_n$ sia finita (*).

Ora si ha (Beltrami, Mem. cit.):

$$\iint_\omega \Delta_2 \log r_h\, d\omega + \int_s \frac{d \log r_h}{dn} ds = -\varepsilon_h,$$

ove ε_h è uguale a 2π se il punto r_h è interno ad ω, ed è uguale all'angolo interno che fanno i due elementi del contorno che partono da p_h, quando questo punto appartiene al contorno; quindi poichè dalla prima delle formole precedenti si ha:

$$\varpi = -\sum_1^n A_h \int_s \frac{d \log r_h}{dn} ds + \int_s \frac{d\varphi}{dn} ds,$$

avendo riguardo alle altre delle stesse formole e alla precedente, si vede che dovrà essere:

$$\sum_1^n A_h \varepsilon_h = \varpi,$$

ciò che ci permette di dire che quando i dati del problema siano tali che le determinazioni debbano farsi sulla superficie ω, e che debbano aversi alcune singolarità come quelle portate dai termini logaritmici che compariscono nella (12), allora, per risolvere il problema, invece di cercare la funzione $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ colla condizione che al contorno si abbia $\frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{d(i-i')}{ds}$, e sia finita, continua, ecc., come si disse ai §§ 6 e 7, si cercherà una funzione φ che, oltre

(*) Con questa ipotesi, quand'anche si fosse ammesso che in $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ oltre ai termini logaritmici si potessero trovare dei termini della forma $r_h^{\nu_h} Q_h$, con Q_h funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, e ν_h soltanto positivo, la condizione che allora avremmo avuto al posto della seconda delle precedenti avrebbe portato che ν_h dovesse essere maggiore o eguale a 2, e quindi le derivate prime e seconde di $r_h^{\nu_h} Q_h$ sarebbero state finite e continue, e non si sarebbe perciò ottenuto nulla di più generale, poichè le condizioni poste per φ non escludono che in φ possano trovarsi inclusi anche dei termini della forma $r_h^{\nu_h} Q_h$ con $\nu_h \geqq 2$.

essere finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto ω, soddisfi alla condizione:

$$\Delta_2 \varphi = \sum_1^n A_h \Delta_2 \log r_h \tag{13}$$

in tutti i punti di ω, e la cui derivata $\frac{d\varphi}{dn}$ rispetto alla normale al contorno sia data dalla formola:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d(i-i')}{ds} + \sum_1^n A_h \frac{d \log r_h}{dn}, \tag{14}$$

essendo le A_h costanti reali legate fra loro dalla relazione:

$$\sum_1^n A_h \varepsilon_h = \varpi = \int_s di - \int_{s'} di', \tag{15}$$

e essendo le r_h le distanze geodetiche dai punti p_h nei quali $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ deve divenire zero o infinito agli altri punti della superficie, e ε_h essendo uguale a 2π pei punti p_h interni ad ω e uguale all'angolo interno che fanno i due elementi del contorno che partono da p_h quando questo punto appartiene al contorno; e trovata questa funzione φ, si prenderà:

$$\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = -\sum_1^n A_h \log r_h + \varphi, \tag{16}$$

e si procederà poi, come si disse al § 3, per trovare le formole della rappresentazione richiesta.

Similmente nel caso in cui i dati del problema siano tali che tutte le determinazioni debbano farsi su ω', e il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ debba ancora avere delle singolarità come quelle sopra indicate nei punti $p'_1, p'_2, \ldots p'_n$ di ω', si potrà ottenere una soluzione del problema prendendo:

$$\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = -\sum_1^n A'_h \log r'_h + \psi, \tag{17}$$

con ψ funzione di u' e v' finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto ω', e obbligata a soddisfare alle condizioni

$$\Delta'_2 \psi = \sum_1^n A'_h \Delta'_2 \log r'_h, \qquad \frac{d\psi}{dn'} = \frac{di - di'}{ds'} + \sum_1^n A'_h \frac{d \log r'_h}{dn'} \tag{18}$$

nell'interno e al contorno di ω' rispettivamente, essendo ora le A'_h legate fra loro dalla condizione:

$$\sum_1^n A'_h \varepsilon'_h = \varpi_1 = \int_s di - \int_{s'} di', \tag{19}$$

e le r'_h e ε'_h avendo pei punti $p'_1, p'_2, \dots p'_n$ di ω' gli stessi significati delle r_h e ε_h del caso precedente.

Non si deve però tralasciare di notare che le costanti A_h, A'_h nei casi speciali non potranno esser costanti arbitrarie legate fra loro soltanto dalla condizione (15)' o dalla (19), ma dovranno avere valori particolari che soddisfino a queste condizioni, se si vuole che il problema sia possibile; come del resto avremo occasione di notare anche fra breve.

È poi da osservare che questi risultati comprendono anche quelli dei casi considerati nei §§ 6, 7 e 8 pei quali oltre essere $\varpi = 0$ o $\varpi_1 = 0$, non si ha alcuna singolarità nella funzione $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$, bastando allora supporre che le costanti A_h o A'_h siano tutte eguali a zero.

11. Inoltre si può osservare che, restando gli stessi i punti singolari p_h e p'_h e la natura delle singolarità, per uno stesso sistema di valori delle costanti A_h o A'_h e per uno stesso campo ω o ω', la rappresentazione di ω su ω' (se è possibile) resta perfettamente determinata all'infuori della arbitrarietà che proviene dall'essere in φ o in ψ una costante arbitraria additiva.

Ricordiamo infatti che quando F è una funzione che in ω o in ω', per es. in ω, soddisfa alle solite condizioni di continuità ecc., si ha (Beltrami, Mem. cit.) la formola seguente:

$$-\iint_\omega \Delta_1 F\, d\omega = \iint_\omega F \Delta_2 F\, d\omega + \int_s F \frac{dF}{dn} ds,$$

nella quale $\Delta_1 F$ è il parametro differenziale di prim'ordine, cioè:

$$\Delta_1 F = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\left(\frac{dF}{du}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dv}\right)^2\right\};$$

si vedrà subito che quando esistessero due funzioni φ e φ_0 che soddisfacessero alle condizioni poste sopra per φ, la loro differenza $F = \varphi - \varphi_0$ sarebbe una funzione che oltre alle solite condizioni di continuità ecc., nell'interno e al contorno di ω soddisfarebbe alla condizione $\Delta_2 F = 0$, e al contorno sarebbe $\frac{dF}{dn} = 0$, e quindi si avrebbe $F = \text{cost.}$ e $\varphi_0 = \varphi + \text{cost.}$ in tutto il campo.

12. La determinazione poi delle costanti A_h e A'_h che, come già abbiamo accennato, non sono legate dalla sola condizione (15) o (19), può farsi facilmente colle considerazioni seguenti.

Si supponga dapprima che il punto che ora indicheremo con p_c in cui $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ presenta une delle singolarità sopra indicate sia sul contorno s di ω e non sia in esso una cuspide, e si indichi con ε_c l'angolo interno (che sarà diverso da zero) dei due elementi del contorno stesso che escono da quel punto, e con ε'_c quello degli elementi corrispondenti del contorno s' di ω'. Si conduca poi su ω una circonferenza geodetica σ_c col centro in p_c, talmente piccola che nello spazio racchiuso fra essa e il contorno non cadano altri punti singolari di $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$, e s'indichi con σ'_c la curva che le corrisponde nella rappresentazione su ω'.

Su σ_c si avrà, a causa della prima delle (9):

$$\frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{d n_c} = \frac{d i - d i'}{d \sigma_c}$$

e quindi:

$$\int_{\sigma_c} \frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{d n_c} d\sigma_c = \int_{\sigma_c} d i - \int_{\sigma'_c} d i' ;$$

e a causa del valore (16) di $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ si avrà anche:

$$-\sum_{(c)} A_h \int_{\sigma_c} \frac{d \log r_h}{d n_c} d\sigma_c - A_c \int_{\sigma_c} \frac{d \log r_c}{d n_c} d\sigma_c + \int_{\sigma_c} \frac{d\varphi}{d n_c} d\sigma_c = \int_{\sigma_c} d i - \int_{\sigma'_c} d i',$$

ove la somma $\sum_{(c)}$ è estesa a tutti i punti singolari p_h escluso p_c.

Ma su σ_c la quantità $\frac{d\varphi}{d n_c}$, e così anche le altre $\frac{d \log r_h}{d n_c}$ quando r_h è diverso da r_c, si mantengono finite mentre σ_c impiccolisce oltre ogni limite; quindi poichè $d n_c = -d r_c$, e al successivo impiccolirsi di σ_c, se in p_c la curvatura della superficie ω è finita, si può prendere $d\sigma_c = r_c d\varepsilon$, essendo ε l'angolo che i raggi geodetici r_c fanno con uno fra essi che si considera come fisso, si conclude che al limite il primo membro della formola precedente si riduce a $A_c \varepsilon_c$, e si ha perciò:

$$A_c \varepsilon_c = \lim \left[\int_{\sigma_c} d i - \int_{\sigma'_c} d i' \right].$$

Ma evidentemente se p_c e il punto che gli corrisponde su ω' non sono punti nei quali le linee coordinate u e v, o u' e v' abbiano qualche singolarità, i limiti degli integrali $\int\limits_{\sigma_c} di$, $\int\limits_{\sigma'_c} di'$ non sono altro che gli angoli ε_c e ε'_c rispettivamente; quindi si può asserire che si avrà:

$$A_c = 1 - \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_c}, \tag{20}$$

per tutti i punti singolari p_c del contorno di ω, quando in essi l'angolo ε_c sia diverso da zero, cioè in essi non si abbiano delle cuspidi del contorno.

Similmente si troverebbe colle notazioni precedenti:

$$A'_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon'_c} - 1, \tag{21}$$

per ogni punto singolare p'_c del contorno di ω' che non sia una cuspide.

Osservando ora che in forza di questi risultati, estendendo la somma $\sum A_c \varepsilon_c$ a tutti i punti singolari p_c del contorno di ω, si ha:

$$\sum A_c \varepsilon_c = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c,$$

mentre, se $\sum A_i \varepsilon_i$ è quella relativa ai punti singolari p_i interni ad ω, si ha in questi punti $\varepsilon_i = 2\pi$, e a causa della (15) si ha anche:

$$\sum A_c \varepsilon_c + \sum A_i \varepsilon_i = \varpi,$$

si conclude che sarà:

$$2\pi \sum A_i = \varpi + \sum \varepsilon'_c - \sum \varepsilon_c, \tag{22}$$

ciò che ci mostra che quando non sia

$$\varpi = \int\limits_s di - \int\limits_{s'} di' = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c,$$

la funzione $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ dovrà necessariamente avere delle singolarità nell'interno di ω, almeno quando si suppone che le linee u e v entro ω, dopo di avere esclusi tutt'al più un numero finito di punti singolari, si comportino come le ordinarie coordinate cartesiane; e se la singolarità nell'interno proviene dalla presenza di un solo termine logaritmico $A_i \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$, si avrà

$$2\pi A_i = \varpi + \sum \varepsilon'_c - \sum \varepsilon_c. \tag{23}$$

13. Si osservi poi che se nell'interno di ω esistono in $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ delle singo-

larità quali sono quelle portate dai termini logaritmici $A_i \log \frac{1}{r_i}$, e p_i è uno di questi punti singolari corrispondente al termine $A_i \log \frac{1}{r_i}$, con ragionamenti simili a quelli fatti sopra per p_c si trova che, se in p_i non si hanno singolarità nelle coordinate u e v, sarà $2\pi A_i = 2\pi - \lim \int_{\sigma'_i} di'$, ove l'integrale è esteso a una curva σ'_i su ω' che nella rappresentazione corrisponde a una piccola circonferenza geodetica σ_i descritta su ω col centro in p_i. Però se questa linea σ'_i si chiudesse senza che nel suo interno vi fossero singolarità nelle coordinate u' e v' e senza avere singolarità nel suo percorso, si vede facilmente (Beltrami, Mem. cit.) che dovrebbe essere $\int_{\sigma'_i} di' = 2\pi$ e $A_i = 0$; quindi evidentemente se non si ha $\varpi = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c$, ove le somme sono estese ai punti singolari del contorno, necessariamente la singolarità di $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ che devono trovarsi nell'interno, almeno quando si ammette che debbano essere portate da termini logaritmici $A_i \log \frac{1}{r_i}$ e che non corrispondano ai punti nei quali le coordinate presentano qualche singolarità, non possono essere in punti staccati, ma dovranno trovarsi su linee o su porzioni di superficie, o dovranno corrispondere a delle sovrapposizioni ecc., come avviene per es. nella rappresentazione data da Hardings della sfera su di un piano, quando essa non si riduce alla projezione stereografica polare.

Però è da notare che, siccome abbiamo ammesso che in un numero finito di punti entro ω o ω' le coordinate u e v o u' e v' e quindi λ o λ_1 possano presentare qualche singolarità, potrà avvenire talvolta che le singolarità che si presentano nel rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ nell'interno di ω o di ω' provengano appunto da singolarità che si hanno nelle coordinate adottate, e non siano già vere e proprie singolarità della rappresentazione.

Le stesse considerazioni poi valgono anche pei punti singolari p'_i che fossero su ω'; solo in questo caso dovrà essere:

$$2\pi \sum A'_i = \varpi_1 + \sum \varepsilon'_c - \sum \varepsilon_c, \tag{24}$$

e onde manchino le singolarità nell'interno si dovrà avere, come è naturale, $\varpi_1 = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c$.

Quando poi sia $\varpi = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c$, o $\varpi_1 = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c$, potrà ancora avvenire che la funzione $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ abbia qualche singolarità corrispondente ai soliti termini logaritmici nell'interno di ω o di ω', però, dovendo essere $\sum A_i = 0$ o $\sum A'_i = 0$, si può asserire che i punti p_i o p'_i che portano i termini logaritmici dovranno essere almeno due.

Infine notiamo che se il contorno di ω ha anche qualche cuspide, e nel punto p_{c_1} corrispondente $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ presenta ancora una singolarità corrispondente al termine $A_{c_1} \log \frac{1}{r_{c_1}}$, colle considerazioni stesse che abbiamo fatto precedentemente, si trova che anche nel punto che corrisponde a p_{c_1} sul contorno di ω' si deve avere una cuspide, ma non si giunge però a determinare il valore di A_{c_1}.

14. Facciamo ora alcune applicazioni dei risultati che precedono.

1.° Vogliasi rappresentare su un piano S' la porzione ω di un altro piano S compreso fra due cerchi concentrici di raggi R_1 e R_2 ($R_2 < R_1$) per modo che il modulo di similitudine m abbia su questi cerchi dati valori m_1 e m_2 (costanti o variabili).

Prendendo sul piano S un sistema di coordinate polari (ρ, θ) col polo nel centro comune dei due cerchi, si avrà

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2 \right), \qquad \lambda^2 = \rho^2,$$

e prendendo su S' un sistema di coordinate cartesiane si avrà:

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2, \qquad \lambda_1^2 = 1,$$

talchè il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ in questo caso sarà $m\rho$.

Applicando quindi la formola (7) della mia Memoria: *Sulle funzioni di una variabile complessa* (Annali di Mat., t. 4) si troverà pel punto (ρ, θ):

$$\log m\rho = \frac{1}{2\pi \log \frac{R_1}{R_2}} \left(\log R_1 \int_0^{2\pi} \log m_2 \, d\alpha - \log R_2 \int_0^{2\pi} \log m_1 \, d\alpha \right) +$$

$$+ \frac{\log \rho}{2\pi \log \frac{R_1}{R_2}} \int_0^{2\pi} \log \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} \, d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho^n}{R_1^{2n} - R_2^{2n}} \int_0^{2\pi} (R_1^n \log m_1 - R_2^n \log m_2) \cos n(\theta - \alpha) \, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R_1^n R_2^n}{\rho^n (R^{2n} - R_1^{2n})} \int_0^{2\pi} (R_1^n \log m_2 - R_2^n \log m_1) \cos n(\theta - \alpha) \, d\alpha$$

e ora posto $\int \frac{d\rho}{\rho} = \log \rho = u$, $\theta = v$, si ha colle notazioni del § 3 il valore di P espresso per u e v, e colla formola (4) dello stesso paragrafo si ottiene poi il valore di $x+iy$ espresso per $u \pm iv$ o per $\log \rho \pm i\theta$.

La rappresentazione però corrispondente alle formole che si ottengono può presentare delle singolarità dipendentemente dai valori dati m_1 e m_2 di m.

Quando poi in particolare si dia la condizione che m sia costante sui cerchi R_1 e R_2 senza essere $m_1 R_1 = m_2 R_2$, si trova subito:

$$\log m\rho = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left(\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1 + \log \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} \log \rho \right),$$

ovvero:

$$P = \log m\rho = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left(\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1 + \log \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} u \right),$$

e si ha perciò dalla (4):

$$x + iy = \frac{\log R_1 - \log R_2}{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2} e^{ic_1 + \frac{\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1}{\log R_1 - \log R_2} + \frac{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2}{\log R_1 - \log R_2}(u \pm iv)} + p + iq,$$

ovvero:

$$x + iy = \frac{\log R_1 - \log R_2}{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2} e^{ic_1 + \frac{\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1}{\log R_1 - \log R_2}} \cdot \rho^{\frac{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2}{\log R_1 - \log R_2}} e^{\pm i \frac{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2}{\log R_1 - \log R_2} \theta} + p + iq,$$

ove c_1, p e q sono costanti reali.

E nel caso di $m_1 R_1 = m_2 R_2$ si ha invece:

$$x + iy = e^{ic_1 + \frac{\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1}{\log R_1 - \log R_2}} (\log \rho \pm i\theta) + p + iq.$$

2.° Si voglia ora la rappresentazione di una zona sferica ω a due basi su un piano S' per modo che lungo le due basi il modulo di similitudine m abbia dati valori m_1 e m_2.

Per questo si potrebbe rappresentare direttamente la zona sferica sul piano S', ma è più comodo fare una rappresentazione ausiliare di ω fra due cerchi di un piano ausiliario S_1, e poi passare da questo al piano dato S'.

Si osserverà perciò che se:

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2 \beta \left(\frac{d\beta^2}{\operatorname{sen}^2 \beta} + d\alpha^2 \right)$$

è l'elemento lineare della sfera, che per semplicità si suppone di raggio uguale a uno, e le basi della zona sono i due cerchi $\beta=\beta_1$, $\beta=\beta_2$, si avrà subito una rappresentazione conforme di questa zona nell' area ω_1 compresa fra due cerchi del piano il cui elemento lineare è:

$$ds_1^2=\rho^2\left(\frac{d\rho^2}{\rho^2}+d\theta^2\right),$$

facendo:

$$\log\rho+i\theta=\int\frac{d\beta}{\operatorname{sen}\beta}+i\alpha=\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta+i\alpha,$$

e il modulo di similitudine μ sarà $\frac{\rho}{\operatorname{sen}\beta}$ ovvero $\frac{1}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}$. Si farà poi una rappresentazione conforme di ω_1 sul piano S' colle formole precedenti per modo che il modulo di similitudine corrispondente $\frac{ds'}{ds}$ sui due cerchi β_1 e β_2 sia $2m_1\cos^2\frac{\beta_1}{2}$, e $2m_2\cos^2\frac{\beta}{2}$ $\left(\text{cioè } \frac{m_1}{\mu_1}, \text{ e } \frac{m_2}{\mu_2}\right)$, e così il problema resterà evidentemente risoluto anche per la zona sferica a due basi.

3.° Supponiamo ora che su una superficie S una o più linee che tagliano sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme v formino il contorno completo s di una porzione ω di superficie nella quale ogni punto è individuato da un sistema di coordinate isoterme u e v che si comportano come se fossero coordinate cartesiane nel piano. Su un' altra superficie S' si immaginino pure delle linee s' che formino anch' esse il contorno completo di un area ω' e taglino sotto angoli costanti le linee v' di un doppio sistema isotermo u' e v' analogo al precedente; e si cerchi di rappresentare ω su ω'.

Secondo quanto già osservammo al § 6, siccome i contorni s e s' si devono corrispondere nella rappresentazione di ω su ω', se entro le aree ω e ω' il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ deve soddisfare alle solite condizioni di continuità ecc. ad ogni linea che tagli sotto angoli costanti le linee v su ω corrisponderà una linea che taglia sotto angoli costanti le linee v' su ω' e viceversa; talchè basta che questa costanza degli angoli colle linee v e v' si abbia per le linee del contorno perchè si abbia uguale corrispondenza nell' interno delle aree ω e ω', quando la rappresentazione non deve presentare singolarità.

In questi casi poi, sempre secondo quanto fu detto al § 6, se la rappresentazione è possibile, sarà

$$u'+iv'=A(u+iv)+p+iq \tag{25}$$

la formola che stabilisce la corrispondenza fra i punti delle due superficie, con A, p e q costanti arbitrarie delle quali le ultime due sono reali.

In particolare dunque, se sarà data una zona sferica a due basi β_1 e β_2 per la quale si abbia:

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2\beta\left(\frac{d\beta^2}{\operatorname{sen}^2\beta} + d\alpha^2\right),$$

e si vorrà rappresentarla su di un piano in un'area rettangolare di cui due lati opposti corrispondano alle due basi β_1 e β_2 della zona, e gli altri due corrispondano a un cerchio meridiano che può considerarsi come una linea doppia $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ limite della zona, si può dire che a tutti i meridiani e a tutti i paralleli della zona corrisponderanno linee rette, e saremo nel caso della rappresentazione di Mercatore.

E infatti colla (25) si trova:

$$x + iy = (a + ib)\left(\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta + i\alpha\right),$$

trascurando le costanti p e q, e di qui si ha subito:

$$x = a \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \mp b\alpha, \qquad y = b \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \pm a\alpha,$$

o anche

$$ax + by = (a^2 + b^2)\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta, \qquad ay - bx = \pm\,(a^2 + b^2)\alpha,$$

e queste sono appunto le formole della rappresentazione di Mercatore.

4.° Cerchisi ora la rappresentazione di un'area piana ω limitata da un contorno s su un cerchio ω'; ciò che costituisce il noto problema posto da Riemann.

Ammettendo che le linee o pezzi di linee che costituiscono il contorno s di ω taglino sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme v che insieme alle linee ortogonali u si prenderanno come coordinate su S, e ammettendo inoltre che queste linee u e v, tranne tutt'al più in un numero finito di punti, in tutto ω si comportino come le ordinarie coordinate cartesiane, il problema per quanto fu detto al § 10, quando si ammette che le singolarità nel rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$, se vi sono, siano del genere di quelle considerate nei paragrafi precedenti, si riduce in generale a determinare entro il cerchio ω' una funzione φ che, oltre essere finita e continua insieme alle sue derivate entro il cerchio ω soddisfa in esso alla equazione $\Delta'_2\varphi = f$, ove f è una funzione nota, e al contorno la sua derivata rispetto alla normale interna prende dati valori. Questo problema si sa completamente risolvere (*); quindi il problema di Riemann, quando si tratta di un'area piana ω il cui contorno s è formato da linee che tagliano sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme v che insieme alle loro trajettorie ortogonali u non presentano mai singolarità in ω, tranne tutt'al più in un numero finito di punti, si può sempre completamente risolvere colle sole considerazioni che precedono.

Applichiamo questo processo al caso considerato da Christoffel, nel 1° volume di questi Annali, per la rappresentazione di un poligono piano e rettilineo e convesso ω su un cerchio ω'.

Prendiamo perciò su ω un sistema di coordinate cartesiane x e y; i lati del contorno poligonale s di ω taglieranno sotto angoli costanti queste linee x e y, e quindi si potranno subito applicare le considerazioni che precedono.

Prendiamo poi sul piano del cerchio ω' un sistema di coordinate cartesiane x', y', si avrà:

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2, \qquad \lambda_1^2 = 1,$$

talchè, secondo le notazioni dei §§ 6 e seg., sulla circonferenza s' che forma il contorno di ω' si avrà:

$$\frac{di'}{ds'} = \frac{1}{R} \quad \text{e} \quad \varpi_1 = -\int di' = -2\pi.$$

Siano ora $a_1, a_2, \ldots a_n$ i vertici del poligono nell'ordine in cui si succedono, e siano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ i loro angoli interni, e $p'_1, p'_2, \ldots p'_n$ i punti che loro devono corrispondere sulla circonferenza s'. In questi punti gli angoli $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots \varepsilon'_n$ che secondo le notazioni del § 12 corrisponderanno a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ saranno tutti uguali a π, e perciò in essi il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ che ora si riduce a m presenterà delle singolarità.

Ammettendo che queste singolarità siano di quelle considerate nei §§ 10 e seg., si dovrà avere intanto:

$$\log m = -\sum_1^n A'_h \log r'_h + \psi,$$

essendo ψ una funzione che conterrà i termini corrispondenti alle altre singo-

(*) V. mia Mem.: *Sulle integraz. della equaz.* $\Delta^2 u = 0$ in questi Annali, vol. 5, o l'altra: *Sopra una funzione analoga a quella di Green* negli Atti della Accademia dei Lincei, vol. 3, ser. II.

larità che dovessero ancora trovarsi in m, e essendo r'_h le distanze dei punti p'_h ai varii punti del cerchio, e A'_h quantità costanti.

Ma, per quanto si disse al § 12, si ha:

$$A'_h = \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon'_h} - 1 = \frac{\varepsilon_h}{\pi} - 1,$$

e per il poligono convesso si ha anche:

$$\sum \varepsilon_h - \sum \varepsilon'_h = (n-2)\pi - n\pi = -2\pi = \varpi_1,$$

quindi per quanto si disse al § 12, soddisfacendo già i termini che figurano in $\log m$ alla condizione $\sum_1^n A'_h \varepsilon'_h = \varpi_1$, non è necessario supporre che in ψ si trovino altre singolarità (*), e si può cercare di risolvere il problema determinando (§ 10), se sarà possibile, la funzione ψ colla condizione di essere finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto il cerchio ω', e di soddisfare alla equazione $\Delta'_2 \psi = 0$, e all'altra:

$$\frac{d\psi}{dn'} = -\frac{di'}{ds'} + \sum_1^n A'_h \frac{d \log r'_h}{dn'} = -\frac{1}{R} + \sum_1^n A'_h \frac{d \log r'_h}{dn'},$$

al contorno, essendo come si è detto:

$$A'_h = \frac{\varepsilon_h}{\pi} - 1, \quad \text{e} \quad \sum A'_h = -2.$$

Ma, introducendo un sistema di coordinate polari (ρ', θ') col polo nel centro di ω', e indicando con θ'_h l'angolo polare di p'_h, si ha:

$$r'^2_h = R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta' - \theta'_h);$$

quindi sarà:

$$\log r'_h = \frac{1}{2} \log[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta' - \theta'_h)],$$

e:

$$\frac{d \log r'_h}{dn'} = -\left(\frac{d \log r'_h}{d\rho'}\right)_{\rho'=R} = -\left[\frac{\rho' - R\cos(\theta' - \theta'_h)}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta' - \theta'_h)}\right]_{\rho'=R} = -\frac{1}{2R};$$

(*) Se sul cerchio ω' si fossero adottate le coordinate polari ρ', θ', queste avrebbero presentato una singolarità nel centro, e il rapporto $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ si sarebbe allora ridotto a $\frac{m}{\rho'}$. Essendo poi allora $di' = 0$, $\omega_1 = 0$, la condizione $\Sigma \varepsilon_h - \Sigma \varepsilon'_h = \varpi_1$, non sarebbe stata più soddisfatta, e ai termini $A'_h \log r'_h$ si sarebbe dovuto aggiungere un termine corrispondente alla singolarità nel centro, che secondo le considerazioni dei §§ 12 e 13 sarebbe stato appunto $-\log \rho'$.

talchè osservando che $\sum A'_h = -2$, si conclude che la funzione ψ al contorno dovrà soddisfare alla condizione $\frac{d\psi}{dn'} = 0$, mentre nell' interno dovrà soddisfare all' altra $\Delta'_2 \psi = 0$ e essere finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde.

Questo porta che ψ debba essere una costante $-\log c$ in tutto il cerchio ω'; quindi si può dire intanto che dovrà essere:

$$\log m = -\sum_1^n A'_h \log r'_h - \log c = \log \frac{r'^{\,1-\frac{\varepsilon_1}{\pi}}_1 \, r'^{\,1-\frac{\varepsilon_2}{\pi}}_2 \ldots r'^{\,1-\frac{\varepsilon_n}{\pi}}_n}{c}.$$

Ma, colle coordinate polari ρ', θ', osservando che:

$$r'^2_h = \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_h)}\right)\left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i(\theta' - \theta'_h)}\right) R^2,$$

si trova che secondo le notazioni del § 3 si ha:

$$P = -\frac{1}{2} \log \frac{c}{R^2} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_1)}\right)^{1 - \frac{\varepsilon_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_2)}\right)^{1 - \frac{\varepsilon_2}{\pi}} \ldots -$$

$$-\frac{1}{2} \log \frac{c}{R^2} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i(\theta' - \theta'_1)}\right)^{1 - \frac{\varepsilon_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i(\theta' - \theta'_2)}\right)^{1 - \frac{\varepsilon_2}{\pi}} \ldots,$$

quindi, osservando che il secondo membro è già spezzato in due parti l'una delle quali è funzione di $\rho' e^{i\theta'}$ o $x' + iy'$, e l'altra è funzione di $\rho' e^{-i\theta'}$ o $x' - iy'$, e ritenendo che $x \pm iy = \psi_1(x' + iy')$ sia la formola che stabilisce la corrispondenza fra i punti dei due piani, per quanto si disse al § 3 si troverà subito:

$$-\log \sqrt{\psi'_1} = -\frac{1}{2} \log \frac{c}{R^2} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_1)}\right)^{1 - \frac{\varepsilon_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_2)}\right)^{1 - \frac{\varepsilon_2}{\pi}} \ldots - i \frac{c_1}{2},$$

con c_1 costante arbitraria reale; e ora, indicando con z' la variabile complessa $\rho' e^{i\theta'}$ o $x' + iy'$ e con z'_h i valori di questa variabile relativi ai punti p'_h che corrispondono ai vertici del poligono, si avrà di qui:

$$\psi' = \frac{c}{R^2} e^{ic_1} \left(1 - \frac{z'}{z'_1}\right)^{\frac{\varepsilon_1}{\pi} - 1} \left(1 - \frac{z'}{z'_2}\right)^{\frac{\varepsilon_2}{\pi} - 1} \ldots \left(1 - \frac{z'}{z'_n}\right)^{\frac{\varepsilon_n}{\pi} - 1},$$

e quindi; integrando e indicando con c' un' altra costante arbitraria reale, e con (x_0, y_0) le coordinate del punto del poligono cui deve corrispondere il centro del cerchio, si otterrà infine:

$$x+iy=ce^{ic'}\int_0^z (z'-z'_1)^{\frac{\varepsilon_1}{\pi}-1}(z'-z'_2)^{\frac{\varepsilon_2}{\pi}-1}\ldots(z'-z'_n)^{\frac{\varepsilon_n}{\pi}-1}dz'+x_0+iy_0,$$

per la formola che dà la rappresentazione richiesta.

Questa formola, ponendo $z'=\frac{Z-Z_0}{Z-Z'_0}$ per ridurre il cerchio ad un mezzo piano, diviene precisamente quella data da Christoffel per la rappresentazione di un poligono su un mezzo piano.

Tornando poi colla stessa formola a determinare il valore di $\log m$, si trova naturalmente che sulla circonferenza del cerchio di raggio R (su cui si trovano i punti z'_1, $z'_2, \ldots$ z'_n) si ha $\frac{d\log m}{dn'}=-\frac{di'}{ds'}=-\frac{1}{R}$, e questa a causa delle (9) ci assicura che la formola precedente trasforma sempre necessariamente un poligono in un cerchio di raggio R. Onde però il poligono trasformato sia quello dato, conviene determinare convenientemente le costanti z'_1, $z'_2, \ldots$ z'_n.

Pisa, dicembre 1876.

Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique

(*par Mr.* Edouard Lucas, *professeur au Lycée Charlemagne, à Paris*).

I. Notations.

Nous désignerons :

1. Par x_i la puissance d'un point du plan (ou de l'espace), par rapport à un cercle (ou à une sphère), ayant pour centre O_i, divisée par le diamètre $2r_i$.

2. Par d_{ij}, la distance des centres O_i et O_j; par S_{ijk}, l'aire du triangle formé par les trois centres O_i, O_j et O_k; par V_{ijkl}, le volume du tétraèdre formé par les centres O_i, O_j, O_k, O_l, conformément aux principes des signes de direction, et de circulation, dans le plan et dans l'espace.

3. Par x_{ij} l'angle formé par les cercles ou les sphères ayant pour centres O_i et O_j, et par x_{ijk} l'angle trièdre formé par les trois sphères ayant pour centres O_i, O_j et O_k. On a, d'ailleurs

$$\cos x_{ij} = \frac{r_i^2 + r_j^2 - d_{ij}^2}{2 r_i r_j} .$$

Lorsque les cercles ne se coupent pas, on emploie les fonctions hyperboliques.

4. Par ξ_i la coordonnée trilinéaire (ou tétraédrique) d'un point, par rapport au côté (ou au plan) opposé au centre O_i, dans le triangle (ou le tétraèdre) de référence, formé par les centres de trois cercles ou de quatre sphères; par ξ_{ij} et par ξ_{ijk} l'angle plan et l'angle trièdre formé par ces coordonnées. Nous appellerons **tricycle** ou **tétrasphère** de référence, l'ensemble des trois cercles ou des quatre sphères.

5. Par O le centre radical du tricycle ou de la tétrasphère, et par R le rayon du cercle ou de la sphère qui les coupe orthogonalement.

6. Par $\Delta_{ijkl\ldots}$ le déterminant ayant pour élément principal $a_{ii}a_{jj}a_{kk}a_{ll}\ldots$, et ainsi

$$\Delta_{ijkl\ldots} = \sum(\pm\, a_{ii}a_{jj}a_{kk}a_{ll}\ldots).$$

Nous poserons, de plus,

$$\Delta_{ijkl\ldots} = \sin^2 x_{ijkl\,\ldots},$$

lorsque nous aurons $a_{ij} = a_{ji} = \cos x_{ij}$.

II. Relations du premier degré.

1. En désignant sous le nom de cycle, un cercle orthogonal au cercle O, et sous le nom de sphère, une sphère orthogonale à la sphère O, on a, pour tous les points du cycle ou de la sphère, la relation

$$\sum u_i x_i = 0,$$

en supposant $i = 1, 2, 3$ pour le plan, et $i = 1, 2, 3, 4$, pour l'espace.

Les systèmes de cycles et de sphères jouissent des propriétés descriptives et métriques des systèmes de droites et de plans. En voici quelques exemples:

Théorème. — Les cycles bissecteurs du tricycle de référence, ont pour équations

$$x_1 = \pm\, x_2 = \pm\, x_3,$$

et se coupent trois par trois aux deux mêmes points, qui sont les points limites du système des cercles tangents de même couple.

Théorème. — Les cycles abaissés orthogonalement des sommets, sur les côtés opposés, ont pour équations

$$x_1 \cos x_{23} = x_2 \cos x_{31} = x_3 \cos x_{12},$$

et se rencontrent aux mêmes points.

Théorème. — Si deux tricycles sont tels que les cercles abaissés perpendiculairement des sommets du premier sur les côtés du second se rencontrent aux deux mêmes points, réciproquement les cycles abaissés perpendiculairement des sommets du second sur les côtés du premier, se coupent aux mêmes points.

Théorème. — Si l'on joint le point P pris dans le plan d'un tricycle, aux trois sommets, par des cycles AP, BP, CP, on a la relation

$$\frac{\sin PAB \cdot \sin PBC \cdot \sin PCA}{\sin PBA \cdot \sin PCB \cdot \sin PAC} = -1.$$

On peut généraliser ce théorème, et l'appliquer à un polycycle, ainsi que l'a fait CARNOT, pour les polygones plans ou gauches (*).

2. *Théorème.* — Le point qui divise dans le rapport de p' à $-p$ le cycle qui joint les deux points $P(x_1\ x_2\ x_3)$ et $P'(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$, ou dont les coordonnées tricirculaires sont proportionnelles aux quantités

$$px_1 + p'x'_1, \qquad px_2 + p'x'_2, \qquad px_3 + p'x'_3,$$

s'obtient par l'intersection du cycle PP' avec la droite qui joint le centre radical O au point qui divise la droite PP' dans le rapport donné (**).

Théorème. — Les cycles qui joignent les sommets d'un tricycle aux milieux des côtés opposés se rencontrent en un même point.

Théorème. — Les cycles qui joignent les milieux des côtés opposés d'un tétracycle, et les milieux des cycles diagonaux, se rencontrent en un même point.

Théorème. — Si l'on joint les trois sommets d'un tricycle à trois points situés sur les côtés opposés, et divisant ces côtés en rapports dont le produit est égal à -1, les trois cycles de jonction se rencontrent en un même point.

Remarque. — Les propriétés du système formé par un point et ses projections sur les côtés (ou les plans) du triangle (ou du tétraèdre) de référence, celles du quadrilatère (ou de l'hexaèdre) complet, celles des triangles (ou des tétraèdres) homologiques, etc., se démontrent de la même façon.

3. Le rayon ρ du cycle U ayant pour équation

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

est donné par l'expression

$$\rho^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2u_1u_2\cos x_{12} + 2u_2u_3\cos x_{23} + 2u_3u_1\cos x_{31}}{\left(\frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} + \frac{u_3}{r_3}\right)^2},$$

et la distance circulaire δ (puissance divisée par le diamètre) d'un point $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ à ce cycle est donnée par la formule suivante

$$\delta = \frac{u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2u_1u_2\cos x_{12} + 2u_2u_3\cos x_{23} + 2u_3u_1\cos x_{31}}},$$

entièrement analogue à celle de la géométrie trilinéaire.

(*) CARNOT : *Géométrie de position,* p. 301.

(**) Afin de conserver l'analogie avec la théorie de la droite et du plan, nous ne considérons que les points situés, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, du cercle radical (ou de la sphère) qui joue ici le rôle que joue, dans les théories ordinaires, la droite (ou le plan) de l'infini.

Les quantités u_1, u_2, u_3, sont les coordonnées ponctuelles du cycle V, et les coordonnées trilinéaires du centre de ce cycle sont fournies par les relations

$$\frac{u_1}{r_1 d_{23} \xi_1} = \frac{u_2}{r_2 d_{31} \xi_2} = \frac{u_3}{r_3 d_{12} \xi_3} .$$

Il résulte de là, que si $f(u_1, u_2, u_3) = 0$, désigne l'équation d'une anallagmatique en coordonnées tangentielles, le lieu du centre du cycle tangent, appelé déférente de l'anallagmatique, est donné, en coordonnées trilinéaires, par l'équation

$$f(r_1 d_{23} \xi_1,\ r_2 d_{31} \xi_2,\ r_3 d_{12} \xi_3) = 0,$$

et réciproquement.

L'angle des deux cycles V et V' est donné par la formule

$$\cos(V, V') = \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 + (u_1 u'_2 + u_2 u'_1) \cos x_{12} + \cdots}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2 u_1 u_2 \cos x_{12} + \cdots}\sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3 + 2 u'_1 u'_2 \cos x_{12} + \cdots}} .$$

On a des formules analogues pour l'espace.

III. Relations du second degré.

1. Le rayon R du cercle radical du tricycle est donné par la formule

$$4 R^2 S_{123}^2 = - r_1^2 r_2^2 r_3^2 \sin^2 x_{123}.$$

On déduit aisément de cette expression, la relation fondamentale qui lie entre elles les coordonnées tricirculaires d'un point. Cette relation est

$$\Delta_{123} = 0,$$

en supposant

$$a_{ij} = r_i x_i + r_j x_j + r_i r_j \cos x_{ij}.$$

2. L'équation du cercle radical est, en coordonnées tangentielles,

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2 u_1 u_2 \cos x_{12} + 2 u_2 u_3 \cos x_{23} + 2 u_3 u_1 \cos x_{31} = 0,$$

et, en coordonnées tricirculaires,

$$R = \begin{vmatrix} \cos x_{11} & \cos x_{12} & \cos x_{13} & x_1 \\ \cos x_{21} & \cos x_{22} & \cos x_{23} & x_2 \\ \cos x_{31} & \cos x_{32} & \cos x_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. On a entre les angles de quatre cycles la relation

$$\Delta_{1234} = 0,$$

en supposant

$$a_{ij} = \cos x_{ij}.$$

4. L'ensemble des cercles circonscrits au tricycle de référence a pour équation, en coordonnées tricirculaires,

$$R - (x_1 \sin x_{23} \pm x_2 \sin x_{31} \pm x_3 \sin x_{12})^2 = 0.$$

Cette équation devient du seizième degré en coordonnées cartésiennes. A l'aide du principe des signes, l'ensemble des deux cercles, circonscrits au tricycle dont les angles sont nettement déterminés, a pour équation

$$\frac{1}{x_1} \sin \frac{x_{31} + x_{12} - x_{23}}{2} + \frac{1}{x_2} \sin \frac{x_{12} + x_{23} - x_{31}}{2} + \frac{1}{x_3} \sin \frac{x_{23} + x_{31} - x_{12}}{2} = 0.$$

5. Le cercle conjugué au tricycle de référence a pour équation

$$x_1^2 \frac{\cos x_{23}}{\cos x_{31} \cos x_{12} - \cos x_{23}} + x_2^2 \frac{\cos x_{31}}{\cos x_{12} \cos x_{23} - \cos x_{31}} + x_3^2 \frac{\cos x_{12}}{\cos x_{23} \cos x_{31} - \cos x_{12}} = 0.$$

6. L'ensemble des cercles inscrits au tricycle a pour équation

$$\sin \frac{x_{23}}{2} \sqrt{x_1} + \sin \frac{x_{31}}{2} \sqrt{x_2} + \sin \frac{x_{12}}{2} \sqrt{x_3} = 0;$$

on obtient les équations des cercles ex-inscrits par le principe des signes.

Les cycles qui joignent les sommets du tricycle de référence aux points de contact des cercles inscrits ont pour équation

$$x_1 \sin^2 \frac{1}{2} x_{23} = x_2 \sin^2 \frac{1}{2} x_{31} = x_3 \sin^2 \frac{1}{2} x_{12},$$

et se rencontrent en un même point. Ce théorème permet de résoudre le problème des cercles tangents à trois cercles donnés, par une méthode différente de celle de Gergonne.

Le cycle tangent commun aux cercles inscrits I et aux cercles ex-inscrits I_1, a pour équation

$$x_1 \sin^2 \frac{1}{2} x_{23} = 4(x_2 - x_3) \sin \frac{1}{2} (x_{31} + x_{12}) \sin \frac{1}{2} (x_{31} - x_{12}).$$

C'est l'expression analytique la plus simple du théorème du D.r Hart.

7. On trouve aussi aisément l'équation des cercles coupant trois cercles donnés sous un angle donné, et l'on peut appliquer ce procédé au problème de MALFATTI, généralisé par STEINER. Nous ajouterons le théorème suivant:

Le carré du rayon du cercle radical de trois cercles, est égal à la moyenne harmonique des produits des rayons des cercles tangents de même couple.

Les considérations précédentes s'appliquent aussi à la tétrasphère.

IV.

Nous reviendrons prochainement sur l'application de ces systèmes de coordonnées à l'étude des propriétés métriques des figures anallagmatiques. Nous ferons observer cependant que les formules considérées précédemment sont considérablement simplifiées en prenant les systèmes particuliers:

1.° de trois cercles égaux et dont les centres sont également distants les uns des autres. — Système tricirculaire isogonal;

2.° de trois cercles orthogonaux deux à deux. — Système tricirculaire orthogonal;

3.° de trois cercles tangents entre eux deux à deux. — Système tricirculaire agonal.

Nous observerons que le même système tétrasphérique orthogonal donne lieu, en ajoutant la sphère radicale, et par l'échange des sphères les unes dans les autres, à cinq systèmes de coordonnées tétrasphériques, aux quels correspondent cinq systèmes de coordonnées tétraédriques, et le système cartésien quelconque.

Il existe entre ces onze systèmes de coordonnées, et les onze systèmes corrélatifs, des relations nombreuses, qui paraissent fort importantes dans la recherche de nouvelles propriétés de l'espace.

Moulins-sur-Allier, août 1876.

Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper.

(*Von* E. B. Christoffel, *in Strassburg*.)

I. Die vollständigen Bedingungen für die Bewegungen im Innern eines elastischen festen Körpers.

1.

In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich die in meiner vorigen Arbeit (Seite 81 d. B.) entwickelten Principien auf die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper anwenden. Ich beginne mit einigen Vorbemerkungen darüber, wie die hier zu entwickelnden Erscheinungen zu verstehen sind, da die folgenden Untersuchungen keine Unklarheit über diesen Punkt vertragen.

Ich denke mir einen homogenen elastischen Körper ohne Einwirkung äusserer Kräfte im Gleichgewichte, und bezeichne für diesen Fall durch xyz die rechtwinkligen Coordinaten eines seiner Theilchen m, durch ρ seine constante Dichtigkeit, durch $\mathfrak{R}$ den von ihm erfüllten Raum, durch $\mathfrak{S}$ seine Oberfläche.

Wird das Gleichgewicht dieses Körpers gestört, so bezeichne ich wie üblich durch $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten des nämlichen Theilchens m zur Zeit t. Die Grössen uvw, die Verschiebungscomponenten von m, werden als Functionen von $txyz$ aufgefasst, d. h. sie werden den Punkten xyz des ruhenden Raumes $\mathfrak{R}$ zugeordnet, so dass sie für jeden Zeitpunkt t die wirkliche Lage desjenigen Theilchens m bestimmen, welches xyz zu Gleichgewichtscoordinaten hat.

Wir reduciren demnach sämmtliche hier zu untersuchenden Erscheinungen auf diesen ruhenden Raum $\mathfrak{R}$ und seine Oberfläche $\mathfrak{S}$. Insbesondere wird, bei der Fortpflanzung von Stössen, als Unstetigkeitsfläche zur Zeit t nicht die wirkliche, zu dieser Zeit stattfindende Unstetigkeitsfläche bezeichnet, sondern diejenige Fläche Σ, welche zwar die nämlichen Massentheilchen wie jene, aber in ihrer Gleichgewichtslage von einander trennt. Aus der Gestalt dieser letztern und ihrer Fortpflanzung im homogen ausgefüllten Raume $\mathfrak{R}$ kann man, wenn uvw bekannt sind, sofort auch die Gestalt jener und ihre Fortpflanzung durch den in Vibration befindlichen elastischen Körper finden.

2.

Die elastischen festen Körper bieten zwei Erscheinungen dar, welche auf Unstetigkeiten beruhen, die Spaltung und die Fortpflanzung von Stössen.

Bei der Spaltung bildet sich im Raume $\mathfrak{R}$ eine Fläche, längs welcher die Verschiebungscomponenten uvw selbst unstetig sind, und diese Fläche breitet sich, der fortschreitenden Spaltung entsprechend, im Raume $\mathfrak{R}$ immer weiter aus. Ich schliesse diesen Fall von den gegenwärtigen Untersuchungen aus; er betrifft in erster Linie die Lehre von den Spaltflächen der Krystalle, erfordert aber eine Vervollständigung der Hypothesen über die Constitution der elastischen festen Körper.

Ich setze also für die folgenden Untersuchungen voraus dass uvw, welche nach dem Begriffe der Masse sich mit t stetig ändern, auch stetige Functionen von xyz sind. Die einzigen Unstetigkeiten, welche in Betracht zu ziehen sein werden, sind in Folge dessen Unstetigkeiten der ersten und höhern Derivirten von uvw; ihnen entspricht die Fortpflanzung von Stössen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Untersuchung in üblicher Weise auf solche Erscheinungen beschränkt ist, bei denen das Princip der Superposition stattfindet, also alle Bedingungen in den Werthen von uvw linear werden.

3.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich bekanntlich die Spannungen, welche an einem Theilchen m auftreten, wenn die Einrichtung des elastischen Körpers gestört wird, aus einer Kräftefunction herleiten. Dieselbe ist eine quadratische Form der sechs Variabeln

$$\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \theta_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\theta_4 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \theta_6 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

und soll im Folgenden durch

$$\Pi = \Sigma a_{\mu\nu} \theta_\mu \theta_\nu \qquad (\mu,\ \nu = 1,\ 2, \ldots\ 6)$$

bezeichnet werden.

Seien $\overset{+}{m}$, $\overset{-}{m}$ Theilchen welche einander berühren, und sei $\Delta\Sigma$ das Flächenelement, welches sie in der Gleichgewichtslage voneinander trennt. Ueber $\Delta\Sigma$ wird auf der Seite von $\overset{+}{m}$ die Normale errichtet; die Winkel, welche sie mit den positiven Axen bildet, heissen $\alpha\beta\gamma$. Zwischen $\overset{-}{m}$ und $\overset{+}{m}$ wirken Spannkräfte; sind

$$\rho X \Delta\Sigma, \qquad \rho Y \Delta\Sigma, \qquad \rho Z \Delta\Sigma$$

die an $\overset{-}{m}$ wirkenden Componenten derselben, so ist

$$X = \Pi_1 \cos\alpha + \Pi_6 \cos\beta + \Pi_5 \cos\gamma$$

$$Y = \Pi_6 \cos\alpha + \Pi_2 \cos\beta + \Pi_4 \cos\gamma$$

$$Z = \Pi_5 \cos\alpha + \Pi_4 \cos\beta + \Pi_3 \cos\gamma,$$

und hier ist allgemein

$$\Pi_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_\mu}.$$

Man nimmt an, dass die quadratische Form Π eine vollständige und stets positive ist, d. h. dass sie die Eigenschaft besitzt, bei reellen Werthen der sechs Variabeln θ nur dann $= 0$ zu werden wenn alle Variabeln zugleich verschwinden, und in allen übrigen Fällen positive von Null verschiedene Werthe anzunehmen (vergl. die Abhandlung des Herrn Kirchhoff in Borchardt's Journal 56, pag. 290-291).

In besondern Fällen vereinfacht sich der Ausdruck für die Kräftefunction Π (vergl. unten art. 14 *B* und art. 15 zu Ende); für unsern Zweck ist es vortheilhafter, die obige allgemeine Form beizubehalten.

4.

Wird der elastische Körper ausschliesslich den zwischen seinen Theilchen wirkenden Spannungen überlassen, so gelten für das Innere des Raumes $\mathfrak{R}$

die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_5}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_6}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_4}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Pi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_3}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

solange die ersten Derivirten von uvw nicht unstetig werden. Wo dieser Ausnahmefall eintritt, gelten andere Bedingungen welche wir nun entwickeln wollen.

Sei, immer auf den Raum $\mathfrak{R}$ reducirt, das Flächenelement $\Delta\Sigma$ des vorigen art. Element einer Unstetigkeitsfläche Σ, und mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnungen, diejenige Seite von Σ, über welcher die Normale errichtet worden ist, die positive. Sodann sei T die Ebene, von welcher Σ in diesem Elemente berührt wird.

Mit Σ zugleich schreiten auch die Tangentialebenen von Σ im Raume fort. Ist Σ' eine spätere Lage von Σ, so kann man das Gesetz, nach welchem die einzelnen Tangentialebenen sich fortbewegen, so wählen, dass T nach diesem Gesetze in eine beliebige Tangentialebene T' von Σ' übergeht.

Wir wählen dieses Gesetz, wie in der vorigen Abhandlung, so, dass jede Tangentialebene T ihre Lage nur nach der Stetigkeit ändert und zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt. Die Bahn σ ihres Berührungspunktes heisst dann der zur festen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gehörige Strahl, und die positive oder negative Geschwindigkeit, mit welcher T nach der nämlichen Richtung fortschreitet, wird durch

$$\omega$$

bezeichnet.

Ist ω positiv, so ist $\rho\omega\Delta t\Delta\Sigma$ die Masse m, welche $\Delta\Sigma$ im Raume $\mathfrak{R}$ während der Zeit Δt überstreicht. Diese Masse geht während der Zeit Δt aus den Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u^+}{\partial t}$, $\frac{\partial v^+}{\partial t}$, $\frac{\partial w^+}{\partial t}$ über in die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{\partial u^-}{\partial t}$, $\frac{\partial v^-}{\partial t}$, $\frac{\partial w^-}{\partial t}$, was die Geschwindigkeitsvermehrungen

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} - \frac{\partial u^+}{\partial t} = -\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right], \qquad \frac{\partial v^-}{\partial t} - \frac{\partial v^+}{\partial t} = -\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right], \qquad \frac{\partial w^-}{\partial t} - \frac{\partial w^+}{\partial t} = -\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

gibt. Sie erleidet also in der Zeit Δt einen Stoss, und die Componenten der Stoss kraft sind

$$-\rho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Delta\Sigma, \qquad -\rho\omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]\Delta\Sigma, \qquad -\rho\omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]\Delta\Sigma.$$

Diese Ausdrücke bleiben auch richtig, wenn $\Delta\Sigma$ in entgegengesetzter Richtung fortschreitet, also ω negativ ist, weil dann die Ausdrücke für die gestossene Masse und ihre Geschwindigkeitsänderungen mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind.

Diese Masse hat die Gestalt eines Cylinders, dessen Grundflächen zu $\Delta\Sigma$ parallel und $=\Delta\Sigma$ sind. Bedeuten $\overset{+}{X}\overset{+}{Y}\overset{+}{Z}$ die Werthe der im vorigen art. gegebenen Ausdrücke XYZ in derjenigen Grundfläche, welche während der Zeit Δt auf der positiven Seite von $\Delta\Sigma$ liegt, $\overset{-}{X}\overset{-}{Y}\overset{-}{Z}$ ihre Werthe in der andern, so wirken auf die Masse m, während sie von $\Delta\Sigma$ durchlaufen wird, (1) an den beiden Grundflächen die Componenten $\rho\overset{+}{X}\Delta\Sigma$, $\rho\overset{+}{Y}\Delta\Sigma$, $\rho\overset{+}{Z}\Delta\Sigma$ und $-\rho\overset{-}{X}\Delta\Sigma$, $-\rho\overset{-}{Y}\Delta\Sigma$, $-\rho\overset{-}{Z}\Delta\Sigma$, (2) ausserdem nur noch Kräfte, welche einander bis auf unendlich kleine Differenzen aufheben. Also folgt z. B.

$$-\rho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\Delta\Sigma=\rho\overset{+}{X}\Delta\Sigma-\rho\overset{-}{X}\Delta\Sigma,$$

mithin

$$\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\overset{+}{X}-\overset{-}{X}=0, \qquad \omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+\overset{+}{Y}-\overset{-}{Y}=0, \qquad \omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+\overset{+}{Z}-\overset{-}{Z}=0.$$

Nun sind X, Y, Z in $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},\cdots$ linear und homogen; also ist $\overset{+}{X}-\overset{-}{X}$ aus $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right],\cdots$ genau ebenso gebildet, wie X selbst aus $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},\cdots$ zusammengesetzt ist. Setzen wir daher

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\theta'_1 \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\theta'_2 \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\theta'_3$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]=\theta'_4 \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\theta'_5 \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\theta'_6,$$

und

$$\Pi'=\Sigma\alpha_{\mu\nu}\theta'_\mu\theta'_\nu, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Pi'}{\partial\theta'_\mu}=\Pi'_\mu,$$

so wird

$$\overset{+}{X}-\overset{-}{X}=\Pi'_1\cos\alpha+\Pi'_6\cos\beta+\Pi'_5\cos\gamma,$$

u. s. w., also haben wir für den Stoss, den die von Σ überschrittenen Theilchen erleiden, die mechanischen Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}\omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\Pi'_1\cos\alpha+\Pi'_6\cos\beta+\Pi'_5\cos\gamma=0\\ \omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]+\Pi'_6\cos\alpha+\Pi'_2\cos\beta+\Pi'_4\cos\gamma=0\\ \omega\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]+\Pi'_5\cos\alpha+\Pi'_4\cos\beta+\Pi'_3\cos\gamma=0,\end{aligned}\right\}\qquad(\delta)$$

während längs Σ wegen der Continuität der Masse

$$\overset{+}{u}-\overset{-}{u}=0,\qquad \overset{+}{v}-\overset{-}{v}=0,\qquad \overset{+}{w}-\overset{-}{w}=0\qquad(\varepsilon)$$

bleiben muss.

Dies ist, für das Innere eines elastischen Körpers, das vollständige System aller aus mechanischen Gründen zu schöpfenden Bedingungen, wenn der Fall wo dieser Körper sich spaltet, ausgeschlossen bleibt.

II. Die Fortpflanzung der Unstetigkeiten im Innern eines elastischen Körpers.

5.

Wir bezeichnen auch in dieser Abhandlung die Coordinaten eines Punktes durch $\xi\eta\zeta$ oder durch xyz, jenachdem er der Unstetigkeitsfläche Σ angehört oder im Innern des Raumes $\mathfrak{R}$ nach Belieben angenommen werden kann. Dann hat t für alle Punkte einer Unstetigkeitsfläche denselben Werth, und ist durch die Fortpflanzung dieser Fläche so als Function von $\xi\eta\zeta$ bestimmt, dass

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad \frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad \frac{\partial t}{\partial\zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega}\qquad(1)$$

ist. In der That ist (vergl. meine vorige Abh. art. 5) das vollständige Differential von t proportional zu $\cos\alpha\,\partial\xi+\cos\beta\,\partial\eta+\cos\gamma\,\partial\zeta$; nimmt man, zur Bestimmung des Proportionalitätsfactors, für $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ die Componenten des

Weges $\omega\partial t$, welcher in der Zeit ∂t in der Richtung der positiven Normale zurückgelegt wird, so ergibt sich $\cos\alpha\partial\xi+\cos\beta\partial\eta+\cos\gamma\partial\zeta=\omega\partial t$, also gilt diese Gleichung allgemein. Setzen wir nun

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=U, \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]=V, \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]=W, \tag{2}$$

so ergeben sich aus (ε) die Relationen

$$\left.\begin{matrix} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]+U\frac{\partial t}{\partial\xi}=0 & \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]+U\frac{\partial t}{\partial\eta}=0 & \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]+U\frac{\partial t}{\partial\zeta}=0 \\ \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]+V\frac{\partial t}{\partial\xi}=0 & \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]+V\frac{\partial t}{\partial\eta}=0 & \left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]+V\frac{\partial t}{\partial\zeta}=0 \\ \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]+W\frac{\partial t}{\partial\xi}=0 & \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]+W\frac{\partial t}{\partial\eta}=0 & \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]+W\frac{\partial t}{\partial\zeta}=0 \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

als die Bedingungen für die mit der Stetigkeit von uvw verträglichen Unstetigkeiten ihrer ersten Derivirten.

Diese Werthe müssen nun in (δ) eingeführt werden. Benutzt man die Relationen (1) und (2), so folgt zunächst:

$$\left.\begin{aligned} U+\Pi'_1\frac{\partial t}{\partial\xi}+\Pi'_6\frac{\partial t}{\partial\eta}+\Pi'_5\frac{\partial t}{\partial\zeta}=0 \\ V+\Pi'_6\frac{\partial t}{\partial\xi}+\Pi'_2\frac{\partial t}{\partial\eta}+\Pi'_4\frac{\partial t}{\partial\zeta}=0 \\ W+\Pi'_5\frac{\partial t}{\partial\xi}+\Pi'_4\frac{\partial t}{\partial\eta}+\Pi'_3\frac{\partial t}{\partial\zeta}=0. \end{aligned}\right\} \tag{δ_1}$$

Nun folgt aus (3)

$$\left.\begin{matrix} \theta'_1=-U\frac{\partial t}{\partial\xi} & \theta'_2=-V\frac{\partial t}{\partial\eta} & \theta'_3=-W\frac{\partial t}{\partial\zeta} \\ \theta'_4=-\left(V\frac{\partial t}{\partial\zeta}+W\frac{\partial t}{\partial\eta}\right) & \theta'_5=-\left(W\frac{\partial t}{\partial\xi}+U\frac{\partial t}{\partial\zeta}\right) & \theta'_6=-\left(U\frac{\partial t}{\partial\eta}+V\frac{\partial t}{\partial\xi}\right); \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

bedeutet daher

$$P$$

den Ausdruck, in welchen Π' durch diese Substitution übergeht, so ist P quadratische Form von UVW und, weil U nur in θ'_1, θ'_6, θ'_5 vorkommt,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U}=-\Pi'_1\frac{\partial t}{\partial\xi}-\Pi'_6\frac{\partial t}{\partial\eta}-\Pi'_5\frac{\partial t}{\partial\zeta};$$

ähnlich verhält es sich mit den Ausdrücken für die Derivirten von P nach V und W. Die Gleichungen (δ_1) geben also

$$U = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U}, \qquad V = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial V}, \qquad W = \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial W}, \tag{5}$$

und es handelt sich zunächst um den Ausdruck und die Eigenschaften von P.

6.

Die folgenden Rechnungen sind ohne Anwendung symbolischer Formen schwer durchführbar. Sei

$$\Theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + a_4\theta_4 + a_5\theta_5 + a_6\theta_6,$$

so ist Θ^2 die symbolische Form für Π. Setzt man nun

$$\begin{aligned}
a_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_6\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_5\frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \Lambda_1 \qquad & a_1U + a_6V + a_5W &= M_1\\
a_6\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_4\frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \Lambda_2 \qquad & a_6U + a_2V + a_4W &= M_2\\
a_5\frac{\partial t}{\partial \xi} + a_4\frac{\partial t}{\partial \eta} + a_3\frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \Lambda_3 \qquad & a_5U + a_4V + a_3W &= M_3
\end{aligned}$$

und

$$Q = \Lambda_1 U + \Lambda_2 V + \Lambda_3 W = M_1\frac{\partial t}{\partial \xi} + M_2\frac{\partial t}{\partial \eta} + M_3\frac{\partial t}{\partial \zeta},$$

so wird vermöge der Gleichungen (4)

$$\Sigma a_\mu \theta'_\mu = -Q,$$

also ist symbolisch

$$P = Q^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial U} = \Lambda_1 Q, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial V} = \Lambda_2 Q, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial W} = \Lambda_3 Q.$$

Hierzu bilden wir die Effectivwerthe

$$\Lambda_\mu \Lambda_\nu = \Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_{\nu\mu},$$

so dass ausgerechnet

$$P = \Lambda_{11}U^2 + \Lambda_{22}V^2 + \Lambda_{33}W^2 + 2\Lambda_{23}VW + 2\Lambda_{31}WU + 2\Lambda_{12}UV$$

wird; die Ausdrücke dieser Coefficienten ergeben sich aus folgender Tabelle:

	$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2$	$\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$	$\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2$	$\frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial t}{\partial \zeta}$	$\frac{\partial t}{\partial \zeta}\frac{\partial t}{\partial \xi}$	$\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \eta}$
Λ_{11}	a_{11}	a_{66}	a_{55}	$2a_{65}$	$2a_{51}$	$2a_{16}$
Λ_{22}	a_{66}	a_{22}	a_{44}	$2a_{24}$	$2a_{46}$	$2a_{62}$
Λ_{33}	a_{55}	a_{44}	a_{33}	$2a_{43}$	$2a_{35}$	$2a_{54}$
Λ_{23}	a_{65}	a_{24}	a_{43}	$a_{23}+a_{44}$	$a_{45}+a_{63}$	$a_{64}+a_{25}$
Λ_{31}	a_{51}	a_{46}	a_{35}	$a_{45}+a_{63}$	$a_{31}+a_{55}$	$a_{56}+a_{41}$
Λ_{12}	a_{16}	a_{62}	a_{54}	$a_{64}+a_{25}$	$a_{56}+a_{41}$	$a_{12}+a_{66}$

Dies sind die Formeln, deren wir für die Behandlung der Gleichungen (5) bedürfen. Was die Eigenschaften von P als quadratische Form betrifft, so erinnere man sich, dass Π' eine vollständige und stets positive quadratische Form von $\theta'_1, \theta'_2, \ldots \theta'_6$ ist. Solange die in (4) stehenden Werthe dieser Argumente reell sind, ist also P stets positiv, und nur in dem Falle $=0$, wo alle Argumente zugleich verschwinden. Da aber z. B. $\theta'^2_4 - 4\theta'_2\theta'_3 = \left(V\frac{\partial t}{\partial \zeta} - W\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2$ ist, so können die sechs Argumente von P nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn

$$U\frac{\partial t}{\partial \xi}=0 \qquad U\frac{\partial t}{\partial \eta}=0 \qquad U\frac{\partial t}{\partial \zeta}=0$$

$$V\frac{\partial t}{\partial \xi}=0 \qquad V\frac{\partial t}{\partial \eta}=0 \qquad V\frac{\partial t}{\partial \zeta}=0$$

$$W\frac{\partial t}{\partial \xi}=0 \qquad W\frac{\partial t}{\partial \eta}=0 \qquad W\frac{\partial t}{\partial \zeta}=0,$$

d. h. wenn gleichzeitig $U=0$, $V=0$, $W=0$ wird, da wegen der Gleichung

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)^2=\frac{1}{\omega^2}$$

die ersten Derivirten von t nicht zugleich verschwinden können.

Also folgt, dass P positiv und von Null verschieden bleibt, solange U, V, W nicht zugleich verschwinden, d. h. P ist eine vollständige und stets positive quadratische Form von UVW.

7.

Die Gleichungen (5) gehen nunmehr über in

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_{11}U+\Lambda_{12}V+\Lambda_{13}W=U \\ \Lambda_{21}U+\Lambda_{22}V+\Lambda_{23}W=V \\ \Lambda_{31}U+\Lambda_{32}V+\Lambda_{33}W=W. \end{array}\right\} \tag{I}$$

Ist

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=\begin{vmatrix} \Lambda_{11}-1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}-1 & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}-1 \end{vmatrix}$$

die Determinante dieser Gleichungen, und werden die Unterdeterminanten in üblicher Weise durch $\Delta_{\mu\nu}$ bezeichnet, so folgt, wenn der Fall wo gar keine Unstetigkeiten stattfinden ausgeschlossen bleibt,

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0 \tag{II}$$

als **Differentialgleichung der Unstetigkeitsflächen** und, abgesehen von den besondern Fällen, wo mit Δ zugleich alle Unterdeterminanten verschwinden

$$\frac{U^2}{\Delta_{11}}=\frac{V^2}{\Delta_{22}}=\frac{W^2}{\Delta_{33}}=\frac{VW}{\Delta_{23}}=\frac{WU}{\Delta_{31}}=\frac{UV}{\Delta_{12}}=\frac{P}{\Delta'}, \tag{III}$$

wenn

$$\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33}$$

gesetzt wird. In der That sind die Glieder dieser continuirlichen Gleichung $=(U^2+V^2+W^2):(\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33})$, und aus (I) ergibt sich

$$P=U^2+V^2+W^2.$$

Abgesehen von den Grenzfällen, wo in (III) alle Nenner verschwinden, sind also UVW durch P allein ausgedrückt, während es zur Bestimmung von P neuer Bedingungsgleichungen bedarf. Die weitere Untersuchung mit Einschluss der in Rede stehenden Grenzfälle hängt von der Integration der Gleichung (II) ab, zu welcher wir nun übergehen.

III. Die Unstetigkeitsfläche Σ und das zugehörige Strahlensystem.

8.

Zur Integration der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0 \tag{II}$$

führen wir wieder die Werthe

$$\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

ein, wodurch sie in

$$\Delta\left(\frac{\cos\alpha}{\omega}, \frac{\cos\beta}{\omega}, \frac{\cos\gamma}{\omega}\right)=0 \tag{II a}$$

übergeht. In dieser Form lehrt sie, dass die Gleichung (II) weiter nichts enthält als die Vorschrift, mit welcher Geschwindigkeit ω eine jede Tangentialebene T von Σ nach der zu ihr senkrechten Richtung $\alpha\beta\gamma$ der positiven Normale fortschreiten soll.

Es ist demnach klar, dass die Fläche Σ in ihren spätern Lagen nur dann bestimmt sein kann, wenn eine Anfangslage derselben feststeht, und dass diese letztere willkürlich angenommen werden kann, soweit ihrer Normalenrichtung durch die Gleichung (II a) ein reelles ω zugeordnet wird. Sei Σ_0 die der Zeit $t=0$ entsprechende Anfangslage von Σ.

Um die spätern Lagen von Σ zu ermitteln, hat man nur nöthig, zu jedem Punkte $m_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ von Σ_0 die Lage $m(\xi\eta\zeta)$ desjenigen Punktes von Σ zu bestimmen, in welchem die Tangentialebene T parallel ist zur Tangentialebene T_0 von Σ_0 in m_0. Sei $X\cos\alpha+\cdots=p$ die Gleichung von T, also p das, nach der positiven Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ hin wachsende Loth aus dem Ursprunge auf T, mithin $\frac{\partial p}{\partial t}=\omega$. Da ω von t unabhängig und (art. 4) p stetige Function von t ist, so folgt $p-p_0=\omega t$, wenn p_0 den Werth von p in T_0 bedeutet. Ausserdem folgt für $t=0$, weil T_0 durch m_0 geht, $p_0=\xi_0\cos\alpha+\cdots$, also erhalten wir als Gleichung von T:

$$(X-\xi_0)\cos\alpha+(Y-\eta_0)\cos\beta+(Z-\zeta_0)\cos\gamma=\omega t. \tag{T}$$

Um die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ des Berührungspunctes m zu finden, müssen wir $\cos\alpha$,

$\cos\beta$, $\cos\gamma$ variiren, während t und ebenso $X=\xi$, $Y=\eta$, $Z=\zeta$ ungëandert bleiben. Dann folgt

$$(\xi-\xi_0)\cos\alpha+(\eta-\eta_0)\cos\beta+(\zeta-\zeta_0)\cos\gamma=\omega t \qquad (a)$$

ferner

$$(\xi-\xi_0)\delta\cos\alpha+(\eta-\eta_0)\delta\cos\beta+(\zeta-\zeta_0)\delta\cos\gamma$$
$$-(\cos\alpha\,\delta\xi_0+\cos\beta\,\delta\eta_0\cos\gamma\,\delta\zeta_0)=t\,\delta\omega,$$

oder weil

$$\cos\alpha\,\delta\xi_0+\cos\beta\,\delta\eta_0+\cos\gamma\,\delta\zeta=0 \qquad (b)$$

ist,

$$(\xi-\xi_0)\delta\cos\alpha+(\eta-\eta_0)\delta\cos\beta+(\zeta-\zeta_0)\delta\cos\gamma=t\,\delta\omega. \qquad (c)$$

Um für $\delta\omega$ einen passenden Ausdruck zu gewinnen, setze ich folgendes fest. Sind p, q, r unabhängige Variabeln, so bestimmt die Gleichung

$$\Delta\left(\frac{p}{\Omega},\frac{q}{\Omega},\frac{r}{\Omega}\right)=0$$

Ω als homogene Function ersten Grades von p, q, r; im Folgenden soll unter

$$\omega,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta},\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}$$

das verstanden werden, was aus

$$\Omega,\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial p},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial q},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

wird, wenn man $p=\cos\alpha$, $q=\cos\beta$, $r=\cos\gamma$ setzt. Es soll mit andern Worten ω als homogene Function ersten Grades von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aufgefasst werden; dann steht die Bedeutung seiner Derivirten nach diesen Grössen vollkommen fest, und es wird

$$\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\cdot\cos\beta+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\cdot\cos\gamma=\omega, \qquad (d)$$

während die Gleichung (c) in

$$\left(\xi-\xi_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right)\delta\cos\alpha+\left(\eta-\eta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right)\delta\cos\beta+\left(\zeta-\zeta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)\delta\cos\gamma=0$$

übergeht. Dies gilt für alle Werthe der Variationen, welche $\cos\alpha\,\delta\cos\alpha+\cos\beta\,\delta\cos\beta+\cos\gamma\,\delta\cos\gamma=0$ geben, also folgt

$$\xi-\xi_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}=h\cos\alpha,\qquad \eta-\eta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}=h\cos\beta,\qquad \zeta-\zeta_0-t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}=h\cos\gamma.$$

Führt man diese Werthe in (a) ein, und berücksichtigt die Relation (d), so folgt $h = 0$, also sind

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\\ \eta &= \eta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\\ \zeta &= \zeta_0 + t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

die Coordinaten desjenigen Punktes m, in welchem Σ von T berührt wird.

Es ist nur noch zu verificiren, dass dies bei jeder Annahme über Σ_0 die Lösung der vorgelegten Differentialgleichung (II) ist.

9.

Denkt man sich zu den Gleichungen (m) noch die Gleichung von Σ_0 (zwischen $\xi_0\eta_0\zeta_0$) gefügt, und die aus ihr folgenden Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in (m) eingesetzt, so hat man vier Gleichungen zwischen $t\xi\eta\zeta$ einer-und $\xi_0\eta_0\zeta_0$ andererseits. Für $t = 0$ sind die Gleichungen (m) voneinander unabhängig in Bezug auf $\xi_0\eta_0\zeta_0$; sie können daher in Bezug auf diese Variabeln nicht für ein unbestimmtes t voneinander abhängig sein. Die in Rede stehenden vier Gleichungen gestatten also die Elimination von $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und liefern dann eine Relation zwischen $t\xi\eta\zeta$, welche für $t = 0$ in die Gleichung von Σ_0 übergeht, und von welcher zu verificiren ist, dass sie der partiellen Differentialgleichung (II) genügt.

Genauer gesprochen ist durch die Annahme einer bestimmten Fläche Σ_0 und ihre Beziehung zu den Formeln (m) in diesen letztern eine Abhängigkeit zwischen $t\xi\eta\zeta$ allein festgelegt, vermöge deren t Function von $\xi\eta\zeta$ wird, und es ist zu verificiren, dass diese Function der Differentialgleichung (II) genügt, wie auch immer Σ_0 angenommen werden mag.

Entnimmt man aber den Gleichungen (m) die Differentiale von $\xi\eta\zeta$, so wird, mit Berücksichtigung von (b) und (d)

$$\cos\alpha\,\partial\xi + \cos\beta\,\partial\eta + \cos\gamma\,\partial\zeta = \omega\,\partial t + t\cdot\varepsilon,$$

wo

$$\varepsilon = \cos\alpha\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right) + \cos\beta\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right) + \cos\gamma\,\partial\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)$$

ist. Dies gibt

$$\varepsilon=\partial\left(\cos\alpha\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}+\cos\beta\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}+\cos\gamma\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right)-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\partial\cos\alpha+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\partial\cos\beta+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\partial\cos\gamma\right),$$

also

$$\varepsilon=0$$

da Minuend und Subtrahend $=\partial\omega$ ist.

Das vollständige Differential von t ist also

$$\partial t=\frac{\cos\alpha}{\omega}\partial\xi+\frac{\cos\beta}{\omega}\partial\eta+\frac{\cos\gamma}{\omega}\partial\zeta,$$

mithin

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad\frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad\frac{\partial t}{\partial\zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega}.$$

Wenn daher, wie wir voraussetzen, ω als homogene Function ersten Grades von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\cos\alpha}{\omega},\ \frac{\cos\beta}{\omega},\ \frac{\cos\gamma}{\omega}\right)=0 \tag{II a}$$

gemäss angenommen wird, so folgt, dass in der That die Derivirten von t der Gleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial\xi},\ \frac{\partial t}{\partial\eta},\ \frac{\partial t}{\partial\zeta}\right)=0 \tag{II}$$

genügen, w. z. v. w.

Die Gleichungen (m) liefern also, wie auch immer Σ_0 angenommen werden mag, die Fläche Σ so, dass ihre Fortpflanzung und Umgestaltung der Differentialgleichung (II) gemäss von Statten geht, und Σ_0 ihre Anfangslage ist.

10.

Wir betrachten nun die Bahn des Punktes m oder den zur festen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gehörigen Strahl σ (art. 4). Seine Gleichungen ergeben sich aus (m), wenn man $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und $\alpha\beta\gamma$ ungeändert, aber t variiren lässt.

Die Gleichungen (m) zeigen, dass jeder Strahl σ geradlinigt ist, und vom Punkte m mit den constanten Geschwindigkeitscomponenten

$$\Xi=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},\qquad H=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta},\qquad Z=\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma} \tag{Δ}$$

durchlaufen wird.

Diese Formeln, oder die Gleichungen (m) selbst, bestimmen also zu jedem Punkte m_0 der Fläche Σ_0 einen von ihm ausgehenden Strahl σ nebst den Geschwindigkeiten, mit welchen m denselben durchlaufen soll.

Auf diese Weise entsteht ein Strahlensystem ($\sigma\sigma$), in welchem die Fläche Σ so fortschreitet, dass die Ebene T, von welcher sie im Schnittpunkte m mit ein und demselben Strahl σ berührt wird, zu ihrer Anfangslage T_0 fortwährend parallel bleibt.

Ist also $\Delta\Sigma_0$ ein Element von Σ_0, so geht von dort ein unendlich dünnes Strahlenbündel aus, und wenn dasselbe auf Σ das Element $\Delta\Sigma$ bestimmt, so durchläuft $\Delta\Sigma$ dieses Strahlenbündel mit den Geschwindigkeitscomponenten $\Xi H Z$, indem es dabei fortwährend zu $\Delta\Sigma_0$ parallel bleibt. Ich nenne $\Delta\Sigma$ den Querschnitt des unendlich dünnen Strahlenbündels; derselbe wird nur ausnahmsweise von den Strahlen dieses Bündels senkrecht geschnitten.

11.

Ein einzelner Strahl σ des Systems ($\sigma\sigma$) hängt nicht von der Gestalt der ganzen Fläche Σ_0 ab, sondern nur von der Lage seines Ausgangspunktes m_0 und der Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ in demselben.

Zwei verschiedene Flächen Σ_0 geben also, wofern nicht eine von ihnen Anfangslage der andern ist, zu verschiedenen Strahlensystemen ($\sigma\sigma$) Veranlassung, aber in allen ist die Zuordnung der Strahlen zur Normalenrichtung dieselbe.

Um für diese Art der Zuordnung die einfachste Darstellung zu gewinnen, nehmen wir für Σ_0 einen einzigen Punkt m_0, indem wir denselben etwa als Grenzfall einer Kugelfläche von abnehmendem Halbmesser auffassen.

Dann bestimmen die Gleichungen

$$\xi - \xi_0 = t\frac{\partial \omega}{\partial \cos\alpha}, \qquad \eta - \eta_0 = t\frac{\partial \omega}{\partial \cos\beta}, \qquad \zeta - \zeta_0 = t\frac{\partial \omega}{\partial \cos\gamma}, \tag{m}$$

wenn t constant bleibt, und die Normalenrichtung variirt, eine Fläche C_t, welche wir als die zum Punkte m_0 gehörige Centralfläche bezeichnen, während m_0 ihr Centralpunkt heissen soll.

Ist m_0 derselbe Punkt wie im vorigen art., so sind $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten von m; also hat Σ mit C_t den Punkt m gemein. Auch führt in beiden Fällen derselbe Strahl σ von m_0 nach m. Ergänzen wir ihn in beiden Fällen zu unendlich dünnen Strahlenbündeln, so werden beide von parallelen, nämlich zu derselben Richtung $\alpha\beta\gamma$ senkrechten Querschnitten und mit den nämlichen Geschwindigkeiten $\Xi H Z$ durchlaufen; so weit beide Strahlenbündel einander durchdringen, decken beide Querschnitte einander. Dies findet also stets im gemeinsamen Schnittpunkte mit σ statt. Ist dieser Punkt in m angelangt, so sind die beiden Querschnitte Elemente von Σ und C_t, also folgt, dass Σ von C_t in m berührt wird.

Legt man also um jeden Punkt m_0 von Σ_0 als Centralpunkt die Centralfläche C_t, so ist Σ die Einhüllende aller dieser Centralflächen, und zwar derjenige Theil der vollständigen Einhüllenden, in welchem die von Σ_0 ausgehenden Strahlen münden.

12.

Diejenige Centralfläche, welche dem speciellen Werthe $t=1$ entspricht, bezeichnen wir als die Wellenfläche Δ. Die Gleichungen (m) zeigen, dass man aus der Wellenfläche Δ die Centralfläche C_t erhält, wenn alle vom Centralpunkte ausgehenden Leitstrahlen im Verhältnisse von 1 zu t vergrössert werden.

Für die in Rede stehende Zuordnung der Strahlen und der Normalenrichtung reicht es aus, die Wellenfläche zu betrachten und ihren Centralpunkt in den Coordinatenursprung zu verlegen. Dann erhält man für die Wellenfläche die Gleichungen

$$\Xi = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad H = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad Z = \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}, \tag{Δ}$$

und nach art. 8 (T) (wo $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ und $t=1$ zu nehmen ist) lautet die Gleichung ihrer Tangentialebene T in dem hierdurch bestimmten Punkte $\Xi H Z$:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \omega. \tag{T}$$

Legt man also an die Wellenfläche Δ eine Tangentialebene T so, dass ihre Normale mit den Axen die Winkel $\alpha\beta\gamma$ bildet, so ist das Loth aus dem Centralpunkte auf T die Geschwindigkeit ω, mit welcher die parallele Tangentialebene der Unstetigkeitsfläche Σ fortschreitet; der Leitstrahl aus dem Centralpunkte nach dem Berührungspunkte $\Xi H Z$ bestimmt die Richtung des zugehörigen Strahls und zugleich die Geschwindigkeitscomponenten $\Xi H Z$, mit welchen derselbe durchlaufen wird.

Die ganze Untersuchung der Differentialgleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0 \tag{II}$$

concentrirt sich also in der Theorie der Wellenfläche Δ.

Die Gleichung dieser Fläche in Punktcoordinaten $\Xi H Z$ würde sich durch Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus den Gleichungen (Δ) ergeben; in geeigneten Plancoordinaten kann man sie ohne Weiteres hinschreiben.

Als Coordinaten einer Ebene führen wir ihre reciproken Axensegmente ein, die wir durch p, q, r bezeichnen. Die Coordinaten von T sind also

$$p=\frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad q=\frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad r=\frac{\cos\gamma}{\omega},$$

also folgt, dass

$$\Delta(p, q, r)=0 \tag{II b}$$

die Gleichung der Wellenfläche in diesen Plancoordinaten ist.

Alles dies gilt für jede Differentialgleichung von der Form (II), und lässt sich auch umkehren. Ist nämlich die Wellenfläche Δ vorgeschrieben, und gelingt es, ihre Gleichung in den Plancoordinaten p, q, r auszuführen, so hat man ohne Weiteres auch die partielle Differentialgleichung (II) derjenigen Klasse von Unstetigkeitsflächen und zugehörigen Strahlensystemen, welche zu dieser nämlichen Wellenfläche gehört.

13.

Es handelt sich nun darum, diese allgemeinen Resultate für den besondern Fall weiter auszuführen, wo

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=\begin{vmatrix} \Lambda_{11}-1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}-1 & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}-1 \end{vmatrix}$$

ist, und die Ausdrücke $\Lambda_{\mu\nu}$ die im art. 6 angegebene Bedeutung haben. Durch die Substitution

$$\frac{\partial t}{\partial \xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \eta}=\frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad \frac{\partial t}{\partial \zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega} \tag{1}$$

werde

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{\omega^2}.$$

Ist alsdann

$$A_1 = a_1 \cos\alpha + a_6 \cos\beta + a_5 \cos\gamma$$
$$A_2 = a_6 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_4 \cos\gamma$$
$$A_3 = a_5 \cos\alpha + a_4 \cos\beta + a_3 \cos\gamma,$$

so hat man in symbolischer Form

$$A_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu.$$

Wir setzen nun

$$\begin{vmatrix} A_{11} - x & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - x & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - x \end{vmatrix} = D(x),$$

und bezeichnen die Unterdeterminanten durch $D_{\mu\nu}$. Dann haben wir für ω die Gleichung sechsten Grades $D(\omega^2) = 0$, um deren Wurzeln es sich vor allen Dingen handelt. In dieser Beziehung finden folgende beiden Sätze statt:

1. Die Wurzeln der Gleichung $D(x) = 0$ sind alle positiv und von Null verschieden.

2. Ist $x = a$ mehrfache Wurzel dieser Gleichung und $(x-a)^\alpha$ die höchste Potenz von $x - a$, durch welche $D(x)$ ohne Rest theilbar ist, so sind alle Unterdeterminanten $D_{\mu\nu}$ durch $(x-a)^{\alpha-1}$, aber nicht alle durch $(x-a)^\alpha$ theilbar.

Beide Sätze sind besondere Fälle von sehr allgemeinen Theoremen, von denen das zweite von Herrn Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 4 März 1858), das erste, von allen überflüssigen Bedingungen befreit, von mir herrührt (Borchardt's Journal 63, pag. 257 und 264). In Bezug auf beide Theoreme ist auch eine Abhandlung des Herrn Somof zu erwähnen (Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg vom Iahre 1859) welche mir selbst zu meinem Bedauern erst in der letzten Zeit zugänglich geworden ist, und deren sehr interessante Schlussweise sich leicht zu einer grössern Vollendung bringen lässt.

Den Beweis des ersten Satzes muss ich vollständig nach meiner so eben erwähnten Arbeit reproduciren, indem dort nur die Realität von ω^2 bewiesen ist. Dieser Beweis gründet sich darauf dass (art. 6 zu Ende) P eine vollständige und stets positive quadratische Form von UVW ist; dasselbe gilt also auch von

$$\eta = A_{11} U^2 + A_{22} V^2 + A_{33} W^2 + 2 A_{23} V W + 2 A_{31} W U + 2 A_{12} U V.$$

Nun ist $D(x) = 0$ die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass man den drei in UVW linearen Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial U} = xU, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial V} = xV, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial W} = xW$$

genügen kann, ohne U, V, W alle $= 0$ zu setzen. Sei also x Wurzel dieser Gleichung und, indem man nöthigenfalls das Reelle vom Imaginären trennt, seien $U = U_1 + i U_2$, $V = V_1 + i V_2$, $W = W_1 + i W_2$ die entsprechenden Werthe von UVW; die sechs Grössen U_1, $U_2, \ldots W_2$ sind also nicht alle $= 0$. Sind nun η_1, η_2 die Werthe in welche η übergeht, wenn UVW den Index 1 oder 2 erhalten, und ist

$$U_1^2 + U_2^2 + V_1^2 + V_2^2 + W_1^2 + W_2^2 = p,$$

so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen durch Multiplication mit $U_1 - i U_2$, $V_1 - i V_2$, $W_1 - i W_2$

$$\eta_1 + \eta_2 = xp.$$

Hier ist p positiv und von Null verschieden, ebenso $\eta_1 + \eta_2$, da weder η_1 noch η_2 negativ ist also ihre Summe nur in dem Falle $= 0$ werden kann, wo η_1 und η_2 einzeln, also U_1, $V_1, \ldots W_2$ sämmtlich verschwinden. Also ist jede Wurzel x der Gleichung $D(x) = 0$ positiv und von Null verschieden. Zugleich ist aus der Form des Ausdrucks D ersichtlich, dass es keine Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ gibt, für welche eine Wurzel dieser Gleichung unendlich wird.

Den Beweis des zweiten, in allgemeinerer Form von Herrn Weierstrass herrührenden Satzes kann man für den vorliegenden Fall auf die leicht zu beweisende identische Gleichung

$$D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2 D_{23}^2 + 2 D_{31}^2 + 2 D_{12}^2 = D'^2 - DD''$$

gründen wo $D = D(x)$ und D' die erste, D'' die zweite Derivirte ist. Hat D den Wurzelfactor $x - a$ genau α mal, so ist $D'^2 - DD''$ durch ihn $2\alpha - 2$ mal und nicht öfter theilbar; a ist nach dem vorigen Satze reell. Lässt man also $x - a$ abnehmen, so wird die ganze Function zur Linken an der Grenze unendlich klein zur Ordnung $2\alpha - 2$; bleibt während dessen x reell, was unmöglich sein würde wenn a imaginär wäre, so bleibt jedes einzelne Glied positiv, also wird jedes Glied unendlich klein mindestens zur Ordnung $2\alpha - 2$, aber nicht jedes Glied zu höherer Ordnung unendlich klein; dies ist der zweite von den obigen Sätzen.

14.

Es sind demnach bei der cubischen Gleichung $D(x) = 0$ drei Fälle zu unterscheiden.

A) Soll ω^2 dreifache Wurzel, also

$$D(x) = (\omega^2 - x)^3$$

sein, so folgt aus dem Satze des Herrn Weierstrass, dass die in x linearen Functionen D_{23}, D_{31}, D_{12} identisch $= 0$ sein müssen, was

$$A_{23} = 0, \qquad A_{31} = 0, \qquad A_{12} = 0$$

gibt, und dann, dass D_{11}, D_{22}, D_{33} reine Quadrate und $= (\omega^2 - x)^2$ sein müssen, was

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \omega^2$$

gibt.

Für die Normalenrichtungen $\alpha\beta\gamma$, denen eine dreifache Wurzel ω^2 entsprechen soll, gibt dies fünf Bedingungsgleichungen

$$A_{11} = A_{22} = A_{33}; \qquad A_{23} = 0 \quad A_{31} = 0 \quad A_{12} = 0; \tag{A 1}$$

wählt man die Coordinaten axen so, dass $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^\circ$ wird, so überzeugt man sich leicht, dass dieser Fall mit der Bedingung vereinbar ist, dass die Kräftefunction Π eine vollständige und stets positive quadratische Form sei.

Dagegen ist mit dieser unerlässlichen Eigenschaft von Π die Forderung unverträglich, dass für jede Normalenrichtung eine dreifache Wurzel stattfinde. Dir Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{11}U + A_{12}V + A_{13}W &= \omega^2 U \\ A_{21}U + A_{22}V + A_{23}W &= \omega^2 V \\ A_{31}U + A_{32}V + A_{33}W &= \omega^2 W, \end{aligned}\right\} \tag{U}$$

die sich für U, V, W ergeben haben, sind identisch erfüllt.

B) Soll D einen Doppelfactor haben, also

$$D(x) = (\omega_1^2 - x)^2 (\omega_3^2 - x)$$

sein, wo ω_1^2 von ω_3^2 verschieden ist, so müssen alle Unterdeterminanten durch $\omega_1^2 - x$ theilbar sein. Aus den Ausdrücken für D_{23}, D_{31}, D_{12} folgt

$$\omega_1^2 = A_{11} - \frac{A_{31}A_{12}}{A_{23}} = A_{22} - \frac{A_{12}A_{23}}{A_{31}} = A_{33} - \frac{A_{23}A_{31}}{A_{12}}, \tag{B 1}$$

wenn der Kürze wegen von dem besondern Falle Abstand genommen wird, wo zwei von den Grössen A_{23}, A_{31}, A_{12} verschwinden. Setzt man die hieraus folgenden Werthe von A_{11}, A_{22}, A_{33} ein, so wird

$$D = (\omega_1^2 - x)^2\left[\omega_1^2 - x + \frac{A_{31}A_{12}}{A_{23}} + \frac{A_{12}A_{23}}{A_{31}} + \frac{A_{23}A_{31}}{A_{12}}\right],$$

d. h. die in (B 1) enthaltenen Bedingungen reichen für den vorliegenden Fall aus. Der Ausdruck für die Summe der Wurzeln gibt

$$\omega_3^2 = A_{11} + A_{22} + A_{33} - 2\,\omega_1^2.$$

Benutzt man die Bedingungsgleichungen (B 1) auch in (U), so folgt

$$A_{31}A_{12}U + A_{12}A_{23}V + A_{23}A_{31}W = (\omega^2 - \omega_1^2)A_{23}U = (\omega^2 - \omega_1^2)A_{31}V = (\omega^2 - \omega_1^2)A_{12}W.$$

Versieht man die Componenten UVW mit demselben Index wie ω, so folgt

1. wenn für ω^2 die Doppelwurzel ω_1^2, genommen wird,

$$\frac{U_1}{A_{23}} + \frac{V_1}{A_{31}} + \frac{W_1}{A_{12}} = 0,$$

2. dagegen für $\omega^2 = \omega_3^2$

$$U_3 : V_3 : W_3 = \frac{1}{A_{23}} : \frac{1}{A_{31}} : \frac{1}{A_{12}}.$$

Damit der vorliegende Fall eintrete, sind für die entsprechende Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ nur zwei Bedingungen erforderlich, die sich aus (B 1) ergeben. S i n d d i e s e b e i d e n B e d i n g u n g e n i d e n t i s c h e r f ü l l t, so findet für jede Normalenrichtung eine Doppelwurzel ω_1^2 und eine einfache ω_3^2 statt. Ich habe die Untersuchung dieses Falles vollständig durchgeführt, und finde, ausser einem nicht hierher gehörigen Falle (*), wo Π zwar eine vollständige Form aber nicht von unveränderlichem Zeichen ist, nur den folgenden Fall, wo bei passender Wahl der Coordinatenaxen

$$\Pi = k^2(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 + \theta_5^2 + \theta_6^2 - 2\,\theta_2\theta_3 - 2\,\theta_3\theta_1 - 2\,\theta_1\theta_2) + (a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3)^2$$

ist. Die Constanten sind alle reell und der Bedingung unterworfen, dass 1) $a_2 + a_3$,

---

(*) Bei geeigneter Wahl der Coordinatenaxen ist in diesem Falle

$$\Pi = A^2[(\theta_2 - \theta_3)^2 + \theta_4^2] + B^2[\theta_5^2 + \theta_6^2 - 2\,\theta_1(\theta_2 + \theta_3)] + \Gamma^2\theta_1^2$$

und $\omega_1^2 = A^2\sin\alpha^2 + B^2\cos\alpha^2$, $\omega_3^2 = B^2\sin\alpha^2 + \Gamma^2\cos\alpha^2$. Der Ausdruck Π wird $= 0$ z. B. für $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$, $\theta_3 = \theta_2$, $\theta_1 = 2\frac{B^2}{\Gamma^2}\theta_2$, also ohne dass alle $\theta = 0$ werden.

a_3+a_1, a_1+a_2 von Null verschieden sein müssen und 2) $a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2 > k^2$ ist. Dann wird für jede Normalenrichtung $\omega_1^2=k^2$, $\omega_3^2=k^2+a_1^2\cos\alpha^2+a_2^2\cos\beta^2+a_3^2\cos\gamma^2$. Die Wellenfläche zerfällt also in eine doppelt gelegte Kugel vom Halbmesser k und ein dieselbe einschliessendes concentrisches Ellipsoid, in dessen Hauptaxen die Coordinatenaxen gelegt sind. Die Quadrate der Halbaxen sind $a_1^2+k^2$, $a_2^2+k^2$, $a_3^2+k^2$; sind a_1, a_2, a_3 einander gleich, so entspricht der vorstehende Ausdruck den Medien von constanter Elasticität.

C) Mit Ausnahme dieses besondern Falles hat also die Gleichung $D(x)=0$ im Allgemeinen drei ungleiche Wurzeln ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, und dieselben fallen nur für besondere Normalenrichtungen zusammen. Wir beschränken unsere Untersuchung auf diese Voraussetzung, da der hiermit ausgeschlossene Fall, wo für jede Normalenrichtung eine Doppelwurzel stattfindet, keinerlei Schwierigkeiten darbietet.

Bedeutet D' die Derivirte von D, so folgt für $x=\omega^2$

$$\frac{U^2}{D_{11}}=\frac{V^2}{D_{22}}=\frac{W^2}{D_{33}}=\frac{VW}{D_{23}}=\frac{WU}{D_{31}}=\frac{UV}{D_{12}}=-\frac{P}{D'},$$

wodurch die Componenten des Stosses auf seine Resultante $\sqrt{P}$ als allein übrigbleibende Unbekannte reducirt werden (art. 7, III), und zur Bestimmung des zur Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω gehörigen Strahls σ

$$\left.\begin{aligned}
\Xi &= \frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}=-\frac{1}{2\omega D'}\sum_\mu\sum_\nu D_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial\cos\alpha}\\
H &= \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}=-\frac{1}{2\omega D'}\sum\sum D_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial\cos\beta}\\
Z &= \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}=-\frac{1}{2\omega D'}\sum\sum D_{\mu\nu}\cdot\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial\cos\gamma}
\end{aligned}\right\}\qquad(\sigma)$$

oder wegen der vorangehenden Gleichung

$$\Xi=\frac{1}{2\omega P}\left[U^2\frac{\partial A_{11}}{\partial\cos\alpha}+\cdots+2VW\frac{\partial A_{23}}{\partial\cos\alpha}+\cdots\right]\text{ u. s. w.}\qquad(\sigma_1)$$

Einer gegebenen Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ entsprechen hiernach im Allgemeinen 6 Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$, also 6 Punkte $\Xi H Z$ der Wellenfläche Δ, welche paarweise zum Ursprunge symmetrisch liegen. Die Wellenfläche besteht also aus 3 Schalen, und ihr Centralpunkt ist auch ihr Mittelpunkt.

15.

In den Fällen (A) und (B) werden die in (σ) stehenden Ausdrücke von $\Xi H Z$ unbestimmt; die Gleichungen (σ_1) zeigen, dass diese Unbestimmtheit gehoben wird, sobald es gelingt, auch für diese Fälle die Verhältnisse von UVW zur $\sqrt{P}$ zu bestimmen. Ist N die Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$, für welche einer von diesen Fällen eintritt, N_1 eine unendlich benachbarte Normalenrichtung $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, so muss man UVW und die zugehörigen Werthe $\Xi H Z$ als die Grenzen ansehen, gegen welche die zu N_1 gehörigen Werthe convergiren, wenn N_1 mit N zusammenfällt.

Was die Durchführung dieser Untersuchung betrifft, so muss ich mich der Uebersichtlichkeit wegen begnügen, im Wesentlichen den Gang derselben nebst den Resultaten anzugeben. Um die Bedingung, dass N_1 von N nur unendlich wenig abweiche, so auszudrücken, dass zugleich ersichtlich wird, nach welcher Richtung die Abweichung stattfindet, führt man noch zwei zueinander und zu N senkrechte Richtungen $N'(\alpha'\beta'\gamma')$ und $N''(\alpha''\beta''\gamma'')$ ein. Ist dann ε (in Bogenmass) der unendlich kleine Winkel, den N_1 mit N bilden soll, und φ der von N' nach N'' hin wachsende Winkel von der Ebene NN' bis zur Ebene NN_1, so erhält man sofort

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha\cos\varepsilon + (\cos\alpha'\cos\varphi + \cos\alpha''\sin\varphi)\sin\varepsilon$$
$$\cos\beta_1 = \cos\beta\cos\varepsilon + (\cos\beta'\cos\varphi + \cos\beta''\sin\varphi)\sin\varepsilon$$
$$\cos\gamma_1 = \cos\gamma\cos\varepsilon + (\cos\gamma'\cos\varphi + \cos\gamma''\sin\varphi)\sin\varepsilon.$$

Seien $U_1 V_1 W_1 \omega_1$ die Werthe welche der Normalenrichtung N_1 entsprechen; für $\varepsilon = 0$ gehen sie über in $UVW\omega$, während ω^2 mehrfache Wurzel ist. Sodann sei

$$B_1 = a_1\cos\alpha_1 + a_6\cos\beta_1 + a_5\cos\gamma_1$$
$$B_2 = a_6\cos\alpha_1 + a_2\cos\beta_1 + a_4\cos\gamma_1$$
$$B_3 = a_5\cos\alpha_1 + a_4\cos\beta_1 + a_3\cos\gamma_1$$

und, nach ε und φ geordnet,

$$B_\mu = A_\mu\cos\varepsilon + (A'_\mu\cos\varphi + A''_\mu\sin\varphi)\sin\varepsilon,$$

endlich ausgerechnet

$$(B_1 U_1 + B_2 V_1 + B_3 W_1)^2 = G.$$

Dann haben wir (vergl. art. 5)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial U_1}=\omega_1^2 U_1,\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial V_1}=\omega_1^2 V_1,\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial W_1}=\omega_1^2 W_1,$$

wo man, wenn man will, für $U_1 V_1 W_1$ auch die Cosinus der Winkel setzen darf, nach denen der Stoss erfolgt.

Für $\varepsilon=0$ erhält man die Gleichungen

$$A_{11}U+A_{12}V+A_{13}W=\omega^2 U$$
$$A_{21}U+A_{22}V+A_{23}W=\omega^2 V$$
$$A_{31}U+A_{32}V+A_{33}W=\omega^2 W$$

wieder. Sodann differentiiren wir nach ε und setzen dann wieder $\varepsilon=0$. Diese Operation gebe

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\varepsilon}=\omega',\qquad \frac{\partial U_1}{\partial\varepsilon}=U',\qquad \frac{\partial V_1}{\partial\varepsilon}=V',\qquad \frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}=W'.$$

Dann wird, für $\varepsilon=0$

$$\lim(B_1U_1+B_2V_1+B_3W_1)=A_1U+A_2V+A_3W$$

$$\lim\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(B_1U_1+B_2V_1+B_3W_1)=(A_1U'+A_2V'+A_3W')+$$
$$(A'_1U+A'_2V+A'_3W)\cos\varphi+(A''_1U+A''_2V+A''_3W)\sin\varphi,$$

also, wenn die Effectivwerthe

$$(A_1U+A_2V+A_3W)(A'_1U+A'_2V+A'_3W)=G'$$
$$(A_1U+A_2V+A_3W)(A''_1U+A''_2V+A''_3W)=G''$$

sind, und

$$G'\cos\varphi+G''\sin\varphi=\Gamma$$

gesetzt wird, immer für $\varepsilon=0$

$$\lim\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\varepsilon}=A_{11}UU'+\cdots A_{23}(VW'+WV')+\cdots+\Gamma$$

und

$$\lim\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial\varepsilon\,\partial U_1}=A_{11}U'+A_{12}V'+A_{13}W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial U},$$

da $U_1=U+\varepsilon U'\ldots$ ist. Da ausserdem noch für $\varepsilon=0$

$$\frac{\partial\omega_1^2U_1}{\partial\varepsilon}=\omega^2U'+2\omega\omega'U$$

ist, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}(A_{11}-\omega^2)U'+A_{12}V'+A_{13}W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial U}&=2\omega\omega' U\\ A_{21}U'+(A_{22}-\omega^2)V'+A_{23}W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial V}&=2\omega\omega' V\\ A_{31}U'+A_{32}V'+(A_{33}-\omega^2)W'+\frac{\partial\Gamma}{\partial W}&=2\omega\omega' W,\end{aligned}\right\}\qquad (U')$$

indem die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch Vertauschungen folgen.

Nun ist im Falle (A) des vorigen art. $A_{23}=A_{31}=A_{12}=0$, $A_{11}=A_{22}=A_{33}=\omega^2$; die Gleichungen ($U$) werden also identisch erfüllt, aber aus (U') erhalten wir

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial U}=2\omega\omega' U,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial V}=2\omega\omega' V,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial W}=2\omega\omega' W.$$

Dies gibt für ω' eine kubische Gleichung, deren Wurzeln stets reell sind; ausserdem bestimmen diese drei Gleichungen die Verhältnisse von $U:V:W$, und liefern also mittelst der Formeln (σ_1) des art. 14 vollkommen bestimmte Lagen für diejenigen Punkte $\Xi H Z$ der Wellenfläche, in denen die singuläre Normalenrichtung $\alpha\beta\gamma$ stattfindet, und in denen Δ von der Ebene $X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma=\omega$ berührt wird.

Die Werthe $\Xi H Z$ hängen im Allgemeinen von φ ab; die genauere Untersuchung zeigt, das der Ort aller Punkte $\Xi H Z$, in denen Δ von der singulären Tangentialebene berührt wird, eine vollständige, ganz im Endlichen verlaufende Kurve dritter Klasse ist. Wenn sie nicht in Oerter niederer Klassen zerfällt, ist sie vom 6 oder vom 4 Grade. In beiden Fällen ist sie frei von Doppel- und Wendepunkten. Im ersten Falle besteht sie aus einem Kurvendreieck, dessen Ecken Rückkehrpunkte sind, und einem dasselbe einschliessenden Oval. Das Loth aus dem Centrum der Wellenfläche auf die Ebene der Kurve trifft dieselbe innerhalb der vom Oval eingeschlossenen Fläche. Im zweiten Falle hat die Kurve eine Gestalt, ähnlich wie die Cardioïden, die von derselben Ordnung und Klasse sind; sie ist Grenzfall der vorigen Kurve, und ergibt sich, wenn zwei Rückkehrpunkte derselben zu Punkten des Ovals werden, wobei die Bögen zwischen diesen beiden Punkten in eine doppeltgelegte, geradlinigte Strecke, ein Stück der Doppeltangente ausarten.

Im Falle (B) des vorigen art. gehen die Gleichungen (U) über in die einzige

$$\frac{U}{A_{23}}+\frac{V}{A_{31}}+\frac{W}{A_{12}}=0;\qquad (U)$$

nimmt man in (U') für ω^2 den dort $(B\,1)$ gegebenen Werth von ω_1^2, und setzt zur Abkürzung $A_{31}A_{12}U'+\cdots=K$, so erhält man

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial U}=2\omega\omega' U+\frac{K}{A_{23}},\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial V}=2\omega\omega' V+\frac{K}{A_{31}},\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial W}=2\omega\omega' W+\frac{K}{A_{12}}\cdot \qquad (U')$$

Diese Gleichungen bestimmen UVW proportional zu K; setzt man ihre Werthe in (U) ein, so erhält man für ω' eine quadratische Gleichung, von welcher man durch das in art. 13 mitgetheilte Verfahren beweist, dass ihre Wurzeln stets reell sind.

Für $\Xi H Z$ erhält man wieder völlig bestimmte, im Allgemeinen von φ abhängige Werthe. Der Ort aller Punkte $\Xi H Z$, in denen die Wellenfläche Δ von der singulären Tangentialebene berührt wird, ist in diesem Falle eine vollständige, ganz im Endlichen verlaufende Kurve zweiter Klasse, also entweder das System von zwei getrennten oder zusammenfallenden Punkten, oder eine vollständige Ellipse.

Für die Lehre von den singulären Punkten der Wellenfläche bedarf es nicht ihrer Gleichung in Punktcoordinaten; man kann dieselbe ebenfalls direkt an die Gleichung $D(\omega^2)=0$ knüpfen. Durch die Substitution

$$\omega=\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma,\qquad \cos\alpha=\frac{x-\xi}{s},\qquad \cos\beta=\frac{y-\eta}{s},\qquad \cos\gamma=\frac{z-\zeta}{s}\qquad (S)$$

werde

$$\omega=\frac{q}{s},\qquad A_{\mu\nu}=\frac{(x\xi)_{\mu\nu}}{ss},$$

was

$$q=\xi(x-\xi)+\eta(y-\eta)+\zeta(z-\zeta)$$

gibt. Sodann sei

$$\vartheta=\begin{vmatrix}(x\xi)_{11}-q^2 & (x\xi)_{12} & (x\xi)_{13}\\ (x\xi)_{21} & (x\xi)_{22}-q^2 & (x\xi)_{23}\\ (x\xi)_{31} & (x\xi)_{32} & (x\xi)_{33}-q^2\end{vmatrix},$$

also vermöge der Substitution (S)

$$\vartheta=\frac{1}{s^6}D(\omega^2).$$

Die Gleichung $\vartheta=0$ bestimmt für jede Lage des Punktes $\xi\eta\zeta$ einen Kegel 6 Grades ϑ_6, dessen Scheitel der Punkt $\xi\eta\zeta$ ist. Sind $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel einer Kante dieses Kegels, so erhält man $D(\omega^2)=0$ für $\omega=\frac{q}{s}=\xi\cos\alpha+\cdots$;

folglich ist die Ebene ($X \cos\alpha + \cdots = \omega$), welche durch den Scheitel geht und zu dieser Kante senkrecht ist, Tangentialebene der Wellenfläche Δ (art. 12 T).

Der Ort aller Tangentialebenen T der Wellenfläche Δ, welche durch den Scheitel von ϑ_6 gehen, ist also ein Kegel D_6 der 6. Klasse, und beide Kegel sind zu einander supplementär, dh. sie haben denselben Scheitel und jede Kante des einen ist senkrecht zu einer Tangentialebene des andern.

Damit xyz Punkt einer Doppelkante von ϑ_6 sei, muss gleichzeitig sein

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0;$$

führt man diese Gleichungen aus, und macht dann wieder die Substitution (S), so ergibt sich

$$\xi = -\frac{1}{2\omega D'} \sum_{\mu} \sum_{\nu} D_{\mu\nu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\alpha}$$

$$\eta = -\frac{1}{2\omega D'} \Sigma\Sigma D_{\mu\nu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\beta}$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\omega D'} \Sigma\Sigma D_{\mu\nu} \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \cos\gamma}.$$

Aber dies sind (art. 14 $C\,\sigma$) die Gleichungen der Wellenfläche Δ und es folgt, dass der Kegel ϑ_6 stets und nur dann eine Doppelkante hat, wenn sein Scheitel $\xi\eta\zeta$ Punkt der Wellenfläche ist, und zwar ist in einem solchen Falle die Doppelkante von ϑ_6 die Normale der Wellenfläche in jenem Punkte. Die entsprechende Doppelberührebene des Supplementärkegels D_6 ist die Tangentialebene T der Wellenfläche im nämlichen Punkte.

Soll daher $\xi\eta\zeta$ ein singulärer Punkt von Δ und der Berührungskegel d_μ von Δ in diesem Punkte von der Klasse μ sein, so muss der Supplementärkegel ϑ_μ vom μ^{ten} Grade und jede Kante desselben mehrfache, also mindestens Doppelkante von ϑ_6 sein. Also muss ϑ_6 zerfallen in den mindestens zweimal gelegten Kegel ϑ_μ und einen zweiten Kegel ϑ'_ν, so dass, wenn $\vartheta = \vartheta_\mu^m \vartheta'_\nu$ wird, $m \geqq 2$ und $\mu m + \nu = 6$ ist. Der Supplementärkegel d'_ν von ϑ'_ν hat dann ebenfalls seinen Scheitel im singulären Punkte $\xi\eta\zeta$, aber er berührt Δ ausserhalb desselben. Dies gibt drei Fälle

$$\vartheta = \vartheta_2^2 \vartheta'_2 \tag{a}$$

$$\vartheta = \vartheta_3^2 \tag{b}$$

$$\vartheta = \vartheta_2^3, \tag{c}$$

und es wird durch die in diesen Formeln geforderten Zerfällungen von ϑ, soweit sie statt haben, der singuläre Punkt $\xi\eta\zeta$ von Δ sowie das Gleichungspolynom ϑ_μ des Normalenkegels in demselben völlig bestimmt.

Ein ohne grosse Schwierigkeiten ausführbares Beispiel dieses, auch durch Rechnung leicht zu bestätigenden Satzes bietet der bekannte Fall dar, welcher in der Krystalloptik behandelt wird, und in welchem Δ in die Fresnel'sche Fläche und eine sie einschliessende Kugel zerfällt. Bei passender Wahl der Coordinatenaxen ist unter den Voraussetzungen der Krystalloptik die Kräftefunction

$$\Pi = k^2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)^2 + a^2(\theta_4^2 - 4\theta_2\theta_3) + b^2(\theta_5^2 - 4\theta_3\theta_1) + c^2(\theta_6^2 - 4\theta_1\theta_2);$$

die Constanten sind der Bedingung unterworfen, dass aus a, b, c als Seiten ein Dreieck gebildet werden könne, und k grösser ist wie der Halbmesser des umschriebenen Kreises.

IV. Die mit den partiellen Differentialgleichungen d. verträglichen Unstetigkeiten.

16.

Setzen wir wieder

$$\Theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \cdots + a_6\theta_6,$$

und symbolisch

$$\Pi = \Theta^2,$$

so wird in den Differentialgleichungen d. des art. 4 allgemein $\Pi_\mu = a_\mu \Theta$, also kann man dieselben in symbolischer Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a_6\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a_5\frac{\partial\Theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_6\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a_2\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a_4\frac{\partial\Theta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_5\frac{\partial\Theta}{\partial x} + a_4\frac{\partial\Theta}{\partial y} + a_3\frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

Für die mit diesen Gleichungen verträglichen Unstetigkeiten haben wir also

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=a_1\left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right]+a_6\left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right]+a_5\left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right]$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]=a_6\left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right]+a_2\left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right]+a_4\left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right]$$
$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=a_5\left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right]+a_4\left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right]+a_3\left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right].$$

Den Ausdruck für $\overset{+}{\Theta}-\overset{-}{\Theta}=a_1\theta'_1+a_2\theta'_2+\cdots$ haben wir bereits im art. 6 umgeformt; es war

$$Q=\Lambda_1 U+\Lambda_2 V+\Lambda_3 W=M_1\frac{\partial t}{\partial \xi}+M_2\frac{\partial t}{\partial \eta}+M_3\frac{\partial t}{\partial \zeta},$$

und

$$\overset{+}{\Theta}-\overset{-}{\Theta}=-Q.$$

Da längs der Unstetigkeitsfläche Σ t Function von $\xi\eta\zeta$ ist, so können auch, wie von hier ab geschehen soll, UVW und Q als solche aufgefasst werden. Dann liefert die vorstehende Gleichung sofort

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi}=-\frac{\partial Q}{\partial \xi},\quad \left[\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta}=-\frac{\partial Q}{\partial \eta},\quad \left[\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta}=-\frac{\partial Q}{\partial \zeta},$$

also erhalten wir

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=-\Lambda_1\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]-\left(a_1\frac{\partial Q}{\partial \xi}+a_6\frac{\partial Q}{\partial \eta}+a_5\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]=-\Lambda_2\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]-\left(a_6\frac{\partial Q}{\partial \xi}+a_2\frac{\partial Q}{\partial \eta}+a_4\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)$$
$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]=-\Lambda_3\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]-\left(a_5\frac{\partial Q}{\partial \xi}+a_4\frac{\partial Q}{\partial \eta}+a_3\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right).$$

Es handelt sich nur noch um $\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]$. Aus dem Ausdrucke für $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ folgt zunächst

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right]=a_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right]+a_6\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y}\right]+a_5\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}\right]$$
$$+a_6\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}\right]+a_2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}\right]+a_4\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial z}\right]$$
$$+a_5\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right]+a_4\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}\right]+a_3\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial z}\right].$$

Zugleich ist längs Σ

$$\frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{u}}{\partial t} = U, \qquad \frac{\partial \overset{+}{v}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{v}}{\partial t} = V, \qquad \frac{\partial \overset{+}{w}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{-}{w}}{\partial t} = W,$$

also

$$\begin{array}{lll}
\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right] = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\right] = \frac{\partial U}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}\right] = \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} \\
\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}\right] = \frac{\partial V}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} & \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y}\right] = \frac{\partial V}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} & \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}\right] = \frac{\partial V}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta} \\
\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right] = \frac{\partial W}{\partial \xi} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \xi} & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}\right] = \frac{\partial W}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \eta} & \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}\right] = \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{\partial t}{\partial \zeta}.
\end{array}$$

Führt man diese Werthe ein und ordnet die Minuenden nach den Vertikal-, die Subtrahenden nach den Horizontalreihen, so wird

$$\left[\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right] = \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta} - \Lambda_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] - \Lambda_2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] - \Lambda_3\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right].$$

Dies ist oben einzusetzen. Werden zur Abkürzung die Effectivwerthe von

$$\Lambda_1\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + a_1\frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_6\frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_5\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \Xi_1$$

$$\Lambda_2\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + a_6\frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_4\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \Xi_2$$

$$\Lambda_3\left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} + \frac{\partial M_3}{\partial \zeta}\right) + a_5\frac{\partial Q}{\partial \xi} + a_4\frac{\partial Q}{\partial \eta} + a_3\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \Xi_3$$

gesetzt, so folgt

$$(\Lambda_{11} - 1)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + \Lambda_{12}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + \Lambda_{13}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \Xi_1$$

$$\Lambda_{21}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + (\Lambda_{22} - 1)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + \Lambda_{23}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \Xi_2$$

$$\Lambda_{31}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + \Lambda_{32}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + (\Lambda_{33} - 1)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = \Xi_3$$

Aber die Determinante dieser Gleichungen ist $=0$, da wir eine den mechanischen Bedingungen entsprechende Unstetigkeitsfläche Σ voraussetzen. Also lassen sich die Unstetigkeiten der Accelerationen eliminiren, wobei jedoch die nämlichen Fälle wie im art. 14 zu unterscheiden sind.

17.

Im allgemeinen Falle (C), wo die Gleichung $D=0$ nur ungleiche Wurzeln hat, verschwindet die Determinante der vorstehenden Gleichungen, aber nicht jede Unterdeterminante. Als Multiplicatoren nehmen wir nicht Unterdeterminanten, was zu nichts führen würde, sondern mit Rücksicht auf die Gleichungen (I) art. 7 die Grössen UVW selbst; dann erhalten wir

$$U\Xi_1+V\Xi_2+W\Xi_3=0,$$

was selbstverständlich auch in den andern Fällen passt. Führt man die Werthe von $\Xi_1\Xi_2\Xi_3$ ein, so erhält man sofort

$$Q\left(\frac{\partial M_1}{\partial\xi}+\frac{\partial M_2}{\partial\eta}+\frac{\partial M_3}{\partial\zeta}\right)+M_1\frac{\partial Q}{\partial\xi}+M_2\frac{\partial Q}{\partial\eta}+M_3\frac{\partial Q}{\partial\zeta}=0$$

oder

$$\frac{\partial QM_1}{\partial\xi}+\frac{\partial QM_2}{\partial\eta}+\frac{\partial QM_3}{\partial\zeta}=0.$$

Um von den symbolischen zu den Effectivformen zurückzukehren, setzen wir wieder

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad \frac{\partial t}{\partial\eta}=\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad \frac{\partial t}{\partial\zeta}=\frac{\cos\gamma}{\omega},$$

ausserdem

$$X=A_1U+A_2V+A_3W=M_1\cos\alpha+M_2\cos\beta+M_3\cos\gamma;$$

dann wird

$$Q=\frac{X}{\omega},\qquad M_1=\frac{\partial X}{\partial\cos\alpha}$$

also

$$QM_1=\frac{X}{\omega}\frac{\partial X}{\partial\cos\alpha}=\frac{1}{2\omega}\frac{\partial XX}{\partial\cos\alpha},$$

wo aber in

$$XX=A_{11}U^2+\cdots+2A_{23}VW+\cdots$$

nur auf die homogenen Coefficienten zu operiren ist. Dies gibt

$$\frac{\partial XX}{\partial\cos\alpha}=U^2\frac{\partial A_{11}}{\partial\cos\alpha}+\cdots+2VW\frac{\partial A_{23}}{\partial\cos\alpha}+\cdots$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (σ) (σ_1) am Schlusse des art. 14

$$\frac{\partial XX}{\partial\cos\alpha}=2\omega P\Xi=2\omega P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},$$

wo wieder $P = U^2 + V^2 + W^2$ ist. Also erhalten wir

$$QM_1 = P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}, \qquad QM_2 = P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}, \qquad QM_3 = P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma},$$

so dass unsere Differentialgleichung die folgende sehr einfache Form annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(P\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\right) = 0,$$

also zur Bestimmung von P verhilft. Es möge erlaubt sein zu bemerken, dass jede Specialisirung der Kräftefunction Π die Herleitung dieser Gleichung in der vorstehenden, naturgemässen Form derselben, in hohem Grade erschwert.

Die Integration dieser Gleichung ist überaus einfach. Auf der Unstetigkeitsfläche Σ_0 nehme man ein Stück $\Delta\Sigma_0$ an und lege durch jeden Punkt m_0 desselben den zugehörigen Strahl (σ). Das so entstehende Strahlenbündel durchdringe bis zur Fläche Σ das Volumen $\mathfrak{V}$ und auf Σ das Flächenstück $\Delta\Sigma$; sei M die Mantelfläche von $\mathfrak{V}$. Wird ein unbestimmtes Element der Gesammtoberfläche von $\mathfrak{V}$ durch $\partial\mathfrak{S}$ bezeichnet, und sind lmn die Winkel welche die über $\partial\mathfrak{S}$ nach Aussen errichtete Normale mit den Axen bildet, so liefert die vorstehende Gleichung, über alle Elemente von $\mathfrak{V}$ integrirt:

$$\int P\left[\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha}\cos l + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta}\cos m + \frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}\cos n\right]\partial\mathfrak{S} = 0.$$

Den Factor von $P\partial\mathfrak{S}$ erhält man, indem man die Geschwindigkeit, mit welcher σ durchlaufen wird, senkrecht auf die Normale über $\partial\mathfrak{S}$ projicirt; er ist also $= 0$ für alle Elemente von M, $= \omega$ in $\Delta\Sigma$ und $= -\omega$ in $\Delta\Sigma_0$; also bleibt

$$\int P\omega\partial\Delta\Sigma - \int P_0\omega\partial\Delta\Sigma_0 = 0,$$

unter P_0 den Anfangswerth von P verstanden. Wenn daher für die entsprechenden Flächenstücke $\Delta\Sigma_0$, $\Delta\Sigma$ die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels genommen werden (art. 10), so ergibt sich

$$P\Delta\Sigma = P_0\Delta\Sigma_0;$$

es ist nicht zweckmässig, das Verhältniss der beiden Flächenelemente in endlichen Zahlen auszudrücken.

Nun ist $\sqrt{P}$ die Resultante aus UVW; sind $\lambda\mu\nu$ die Winkel welche die Richtung dieses Stosses mit den Axen der xyz bildet, so folgt, wenn wir R

statt $\sqrt{P}$ schreiben:

$$\frac{\cos\lambda^2}{D_{11}}=\frac{\cos\mu^2}{D_{22}}=\frac{\cos\nu^2}{D_{33}}=\frac{\cos\mu\cos\nu}{D_{23}}=\frac{\cos\nu\cos\lambda}{D_{31}}=\frac{\cos\lambda\cos\mu}{D_{12}} \tag{1}$$

$$U=R\cos\lambda,\qquad V=R\cos\mu,\qquad W=R\cos\nu \tag{2}$$

$$R\sqrt{\Delta\Sigma}=R_0\sqrt{\Delta\Sigma_0}. \tag{3}$$

Während die Unstetigkeitsfläche Σ durch das Innere des elastischen Körpers fortschreitet, bleibt für ein und dasselbe unendlich dünne Strahlenbündel die Richtung $\lambda\mu\nu$ des Stosses constant und die Stärke R desselben umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus dem Querschnitte des Strahlenbündels mit der Unstetigkeitsfläche.

Gehören zur Normale von $\Delta\Sigma_0$ drei ungleiche Werthe von ω^2, so gehen von $\Delta\Sigma_0$ drei Strahlenbündel aus. Wird also gegen $\Delta\Sigma_0$ ein Stoss ausgeführt, so bilden sich drei Stosswellen, die sich nach jenen Strahlenbündeln fortpflanzen. Die Stossrichtungen sind durch (1) bestimmt und bilden, wie man aus den Gleichungen (U) art. 14 in bekannter Weise schliesst, ein orthogonales System. Zerlegt man den anfänglichen, gegen $\Delta\Sigma_0$ ausgeübten Stoss nach diesen drei Richtungen, so hat man für jede der drei Stosswellen den Werth von R_0, also UVW selbst.

Wenn ferner diejenigen Theile von Σ_0, zu deren Normale eine mehrfache Wurzel ω gehört, nur als Grenzlagen solcher Flächentheile auftreten, innerhalb deren dieser Ausnahmefall nicht vorkommt, so gelten die Schlussformeln für UVW nicht bloss für letztere, sondern auch noch für jene.

18.

Für die Bestimmung der Stösse, die aus einem vorgeschriebenen Anfangszustande hervorgehen, reichen die Resultate des vorigen art. also nur in dem Falle nicht aus, wo ein endlicher Theil von Σ_0 oder kürzer Σ_0 selbst eben und zu einer singulären Tangentialebene von Δ parallel ist. In einem solchen Falle ergeben sich die fehlenden Bedingungen aus art. 16. Da $\frac{\partial t}{\partial\xi}$, $\frac{\partial t}{\partial\eta}$, $\frac{\partial t}{\partial\zeta}$ unter den gegenwärtigen Voraussetzungen constant sind, so kann man die Schlussgleichungen des art. 16 in die Form setzen:

$$\Xi_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q M_1}{\partial U}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q M_2}{\partial U}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial Q M_3}{\partial U}\right)$$

$$\Xi_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q M_1}{\partial V}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q M_2}{\partial V}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial Q M_3}{\partial V}\right)$$

$$\Xi_3 = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q M_1}{\partial W}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q M_2}{\partial W}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial Q M_3}{\partial W}\right)$$

da die weggelassenen Glieder im vorliegenden Falle verschwinden; ausserdem folgt:

$$(A_{11} - \omega^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + A_{13}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \omega^2 \Xi_1$$

$$A_{21}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + (A_{22} - \omega^2)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + A_{23}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \omega^2 \Xi_2$$

$$A_{31}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + A_{32}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + (A_{33} - \omega^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \omega^2 \Xi_3.$$

Im Falle (A) des art. 14, wo ω^2 dreifache Wurzel der Gleichung $D = 0$ ist, und wir aus den Gleichungen (U) gar keine Bestimmungen über UVW erhielten, liefern die vorstehenden Formeln die partiellen Differentialgleichungen

$$\Xi_1 = 0, \qquad \Xi_2 = 0, \qquad \Xi_3 = 0;$$

dieselben enthalten nur die ersten Derivirten von UVW und sind in denselben linear und homogen, mit constanten Coefficienten.

Im Falle (B) sei ω^2 die Doppelwurzel; wird ihr Werth in die obigen Gleichungen eingeführt und

$$A_{31} A_{12}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] + A_{12} A_{23}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] + A_{23} A_{31}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] = K$$

gesetzt, so ergibt sich

$$\frac{K}{A_{23}} = \omega^2 \Xi_1, \qquad \frac{K}{A_{31}} = \omega^2 \Xi_2, \qquad \frac{K}{A_{12}} = \omega^2 \Xi_3,$$

indem wir wieder von dem ebenfalls sehr leicht zu behandelnden Falle Abstand nehmen, wo zwei von den Grössen A_{23}, A_{31}, A_{12} verschwinden.

Im vorliegenden Falle erhalten wir also zwischen UVW nur zwei Differentialgleichungen

$$A_{23} \Xi_1 = A_{31} \Xi_2 = A_{12} \Xi_3,$$

aber dazu kommt noch die Relation

$$\frac{U}{A_{23}} + \frac{V}{A_{31}} + \frac{W}{A_{12}} = 0,$$

so dass auch hier die nöthige Anzahl von Bedingungsgleichungen vorhanden ist, um UVW aus ihrem längs Σ_0 vorgeschriebenen Verlaufe für die übrigen Theile des Raumes zu bestimmen.

Im besondern Falle der Krystalloptik ist die Integration der Differentialgleichungen, die man mutatis mutandis für den vorliegenden Fall findet, mit keinen Schwierigkeiten verbunden.

V. Ueber die Modification der Unstetigkeiten an der Grenzfläche zweier Mittel.

19.

Seien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ die Räume, welche zwei einander berührende elastische feste Körper in ihrer Gleichgewichtslage ausfüllen, und $\mathfrak{S}$ die Grenzfläche zwischen beiden Räumen; die auf $\mathfrak{R}'$ bezüglichen Grössen werden wir mit einem Accent versehen, im Uebrigen alle bisherigen Bezeichnungen beibehalten. Sollen die nämlichen Körpertheilchen, welche während des Gleichgewichtes einander längs $\mathfrak{S}$ berührten, auch während der Bewegung in Berührung bleiben, so muss längs $\mathfrak{S}$

$$u' = u, \qquad v' = v, \qquad w' = w \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\rho'\Pi'_1 - \rho\Pi_1)\cos\lambda + (\rho'\Pi'_6 - \rho\Pi_6)\cos\mu + (\rho'\Pi'_5 - \rho\Pi_5)\cos\nu = 0 \\
(\rho'\Pi'_6 - \rho\Pi_6)\cos\lambda + (\rho'\Pi'_2 - \rho\Pi_2)\cos\mu + (\rho'\Pi'_4 - \rho\Pi_4)\cos\nu = 0 \\
(\rho'\Pi'_5 - \rho\Pi_5)\cos\lambda + (\rho'\Pi'_4 - \rho\Pi_4)\cos\mu + (\rho'\Pi'_3 - \rho\Pi_3)\cos\nu = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

bleiben, wenn $\lambda\mu\nu$ die Richtungswinkel der Normale über $\mathfrak{S}$ bedeuten.

Die Bedingungen (1) gelten ununterbrochen, die Bedingungen (2) solange die ersten Derivirten der Verschiebungscomponenten nicht unstetig werden, also falls dies eintritt, vor und nach dem Stosse. Die Gleichungen (2) und diejenigen, welche sich aus (1) durch Differentiiren ergeben, liefern ohne Weiteres die Grenzbedingungen für die Reflection und Brechung eines auf die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ einfallenden Stosses, sobald die Anzahl und Beschaffenheit der neu entstehenden Unstetigkeitsflächen ermittelt ist.

20.

Sei

$$t = f(\xi\eta\zeta) \tag{Σ}$$

eine aus $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{S}$ einfallende Unstetigkeitsfläche Σ, d. h. t Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right) = 0.$$

Ebenso sei

$$t' = f'(\xi\eta\zeta) \tag{Σ'}$$

eine durch Reflection oder durch Brechung an $\mathfrak{S}$ aus Σ hervorgehende Unstetigkeitsfläche, d. h.

$$\Delta'\left(\frac{\partial t'}{\partial \xi}, \frac{\partial t'}{\partial \eta}, \frac{\partial t'}{\partial \zeta}\right) = 0,$$

wo Δ' im ersten Falle den auf $\mathfrak{R}$, im andern den auf $\mathfrak{R}'$ bezüglichen Ausdruck bedeutet. In beiden Fällen lautet die Grenzbedingung

$$t' = t, \tag{3}$$

weil die sämmtlichen Stösse, zu denen Σ Veranlassung gibt, einen der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ angehörigen materiellen Punkt gleichzeitig treffen müssen. Schneidet also Σ die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ zur Zeit t in der Kurve l, so muss l zur nämlichen Zeit $t' = t$ auch der Schnitt von $\mathfrak{S}$ mit Σ' sein. Für jeden Punkt $\xi\eta\zeta$ des von l überschrittenen Theiles von $\mathfrak{S}$ muss sich also für t' derselbe Werth ergeben wie für t, was die Grenzbedingung ist.

Aus (3) folgt sofort, dass an $\mathfrak{S}$ entlang

$$\frac{\partial t'}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi} : \frac{\partial t'}{\partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial \eta} : \frac{\partial t'}{\partial \zeta} - \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$$

ist; wir setzen

$$\frac{\partial t'}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{k}{\omega}\cos\lambda, \qquad \frac{\partial t'}{\partial \eta} - \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{k}{\omega}\cos\mu, \qquad \frac{\partial t'}{\partial \zeta} - \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{k}{\omega}\cos\nu; \tag{4}$$

die Form in welcher wir den Proportionalitätsfactor angenommen haben, wird sich in der Folge rechtfertigen. Wenn daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \xi} &= \frac{\cos\alpha}{\omega}, & \frac{\partial t}{\partial \eta} &= \frac{\cos\beta}{\omega}, & \frac{\partial t}{\partial \zeta} &= \frac{\cos\gamma}{\omega} \\ \frac{\partial t'}{\partial \xi} &= \frac{\cos\alpha'}{\omega'}, & \frac{\partial t'}{\partial \eta} &= \frac{\cos\beta'}{\omega'}, & \frac{\partial t'}{\partial \zeta} &= \frac{\cos\gamma'}{\omega'} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gesetzt wird, so folgt auch

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'}=\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega},\qquad \frac{\cos\beta'}{\omega'}=\frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega},\qquad \frac{\cos\gamma'}{\omega'}=\frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}; \tag{6}$$

wir setzen ω und ω', wie immer, als homogene Functionen ersten Grades der drei Cosinus voraus, von denen sie abhängen, so dass ihre partiellen Derivirten nach denselben eine völlig bestimmte Bedeutung haben.

Dann sind (art. 8 *m*) die Gleichungen des Strahls σ die folgenden

$$\xi=\xi_0+t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},\qquad \eta=\eta_0+t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta},\qquad \zeta=\zeta_0+t\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}; \tag{m}$$

derselbe geht zur Zeit $t=0$ vom Punkte $m_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ der Fläche Σ_0 aus; trifft er die Fläche $\mathfrak{S}$ im Punkte $p(xyz)$ und zur Zeit τ, so folgt

$$x=\xi_0+\tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\alpha},\qquad y=\eta_0+\tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\beta},\qquad z=\zeta_0+\tau\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma}. \tag{pm_0}$$

Zum Ausgangspunkte m_0 und dem Einfallspunkte p berechnen wir einen Punkt $m'_0(\xi'_0\eta'_0\zeta'_0)$ so, dass auch

$$x=\xi'_0+\tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'},\qquad y=\eta'_0+\tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'},\qquad z=\zeta'_0+\tau\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'} \tag{pm'_0}$$

wird.

Dieser Punkt m'_0 heisst Bild von m_0; der Ort aller Punkte m'_0 ist eine Fläche Σ'_0, welche man Bild von Σ_0 nennen kann.

Wenn, wie wir sogleich beweisen werden, $\alpha'\beta'\gamma'$ die Richtungswinkel der Normale von Σ'_0 im Punkte m'_0 sind, und dies für alle Punkte dieser Fläche gilt, so ist sie die Anfangslage einer der Gleichung $\Delta'=0$ entsprechenden Unstetigkeitsfläche Σ':

$$\xi=\xi'_0+t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'},\qquad \eta=\eta'_0+t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'},\qquad \zeta=\zeta'_0+t'\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}, \tag{m'}$$

wie aus der in art. 9 für Σ gegebenen Verification folgt, und zwar ist dann Σ' diejenige Unstetigkeitsfläche, welche der Grenzbedingung $t'=t$ unserer Aufgabe genügt. Denn nimmt man, um die Zeitpunkte t, t' zu bestimmen, wo Σ und Σ' auf $\mathfrak{S}$ zusammentreffen, in den Gleichungen (m) (m') für $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten xyz des nämlichen Punktes p von $\mathfrak{S}$, so erhält man aus (m') und (pm'_0)

$$0=(t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'},\qquad 0=(t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'},\qquad 0=(t'-\tau)\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'},$$

also $t' = \tau$, und ebenso $t = \tau$ aus (m) und (pm_0), also aus beiden zusammen $t' = t$, wie die Grenzbedingung es fordert.

Der noch zu beweisende Hülfssatz ergibt sich wie folgt. Aus (pm'_0) hat man, mit leicht verständlicher Bezeichnung

$$\Sigma \cos\alpha' \delta\xi'_0 + \omega'\delta\tau + \tau\varepsilon' = \Sigma\cos\alpha'\delta x;$$

hier ist

$$\varepsilon' = \cos\alpha'\delta\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}\right) + \cos\beta'\delta\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}\right) + \cos\gamma'\delta\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}\right),$$

also nach art. 9 $\varepsilon' = 0$. Dies gibt zunächst

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi'_0 = \Sigma\cos\alpha'\delta x - \omega'\delta\tau.$$

Sodann folgt aus 6, weil

$$\Sigma\cos\lambda\delta x = 0$$

ist:

$$\Sigma\cos\alpha'\delta x = \frac{\omega'}{\omega}\Sigma\cos\alpha\delta x,$$

mithin weiter

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi'_0 = \frac{\omega'}{\omega}(\Sigma\cos\alpha\delta x - \omega\delta\tau).$$

Endlich folgt aus (pm_0)

$$\Sigma\cos\alpha\delta x = \Sigma\cos\alpha\delta\xi_0 + \omega\delta\tau + \tau\varepsilon = \omega\delta\tau,$$

da ε dieselbe Bedeutung hat wie in art. 9, also $\varepsilon = 0$, und nach Voraussetzung auch

$$\Sigma\cos\alpha\delta\xi_0 = 0$$

ist. Es folgt

$$\Sigma\cos\alpha'\delta\xi'_0 = 0,$$

also sind $\alpha'\beta'\gamma'$ in der That die Richtungswinkel der Normale von Σ'_0 im Punkte m'_0, w. z. v. w.

21.

Wir erhalten für die Fortpflanzung der Unstetigkeitsflächen durchaus die nämlichen Gesetze, welche aus der Optik für die Fortpflanzung der Lichtwellen bekannt sind, und wo das, wie im gegenwärtigen art., in der Natur der Sache liegt, auch durch dieselben Methoden. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, solchen Berührungspunkten gegenüber auch den wesentlichen Unterschied zwischen beiden Theorien hervorzuheben. Ich erblicke denselben keineswegs darin, dass die vorliegenden Untersuchungen für jede Wellenfläche gültig sind; man kann sie in derselben Allgemeinheit auf die Lehre vom Lichte übertragen, wenn man die Gesichtspunkte der Undulationstheorie zu Grunde legt und dann, wie das nicht anders möglich ist, die beiden Huyghens'schen Principien zu Hülfe nimmt, um die Begriffe der Lichtwellen und der Wellenfläche aufeinander zurückzuführen und aus einem von ihnen den Begriff des Lichtstrahls abzuleiten. Der wesentliche Unterschied, auf den wir aufmerksam zu machen wünschen ist der, dass die Theorie der Unstetigkeiten auf alle diese Begriffe direct und mit Nothwendigkeit führt, ohne sie auf Umwegen einführen zu müssen oder für diesen Zweck secundärer Principien zu bedürfen.

Seien T, T', $\mathfrak{T}$ die Tangentialebenen von Σ, Σ', $\mathfrak{S}$ in den Punkten m, m', p. Das Gleichungspolynom der Ebene T ist (art. 8 T)

$$T = (X - \xi_0)\cos\alpha + (Y - \eta_0)\cos\beta + (Z - \zeta_0)\cos\gamma - \omega t$$

und kann mittelst der Gleichungen (pm_0) in die Form

$$T = (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma - \omega(t - \tau)$$

gebracht werden. Legt man um $p(xyz)$ als Centralpunkt die Centralfläche $C_{t-\tau}$, so ist m Punkt derselben und, wie die zweite Form von T zeigt, $T = 0$ ihre Tangentialebene in m.

Wird daher für jeden Punkt p einer beliebigen Fläche $\mathfrak{S}$ (vergl. art. 11) die Zeit τ bestimmt, in welcher die Unstetigkeitfläche Σ von Σ_0 aus dort eintrifft, und dann um ihn als Centralpunkt die Centralfläche $C_{t-\tau}$ gelegt, so hüllt die zur Zeit t stattfindende Unstetigkeitsfläche Σ diese Schaar von Centralflächen ein. Dieser Satz entspricht dem Princip der Erregungscentra in der Huyghens'schen Theorie des Lichtes.

Dieselbe Construction gilt auch für die, von Σ'_0 aus fortschreitende Unstetigkeitsfläche Σ', wofern man nur die aus der entsprechenden Wellenfläche Δ' hervorgehende Centralfläche $C'_{t-\tau}$ benutzt.

Die Gleichungspolynome der Ebenen T' und $\mathfrak{T}$ lauten

$$T' = (X - x)\cos\alpha' + (Y - y)\cos\beta' + (Z - z)\cos\gamma' - \omega'(t - \tau)$$

$$\mathfrak{T} = (X - x)\cos\lambda + (Y - y)\cos\mu + (Z - z)\cos\nu;$$

die Formeln 6 des vorigen art. lehren also, dass identisch

$$\frac{T'}{\omega'} - \frac{T}{\omega} = \frac{k}{\omega} \mathfrak{T}$$

ist, d. h. dass die drei Ebenen T', T und $\mathfrak{T}$ durch die nämliche Gerade G gehen. Um G zu construiren, legt man also in bekannter Weise (1) an $\mathfrak{S}$ die Tangentialebene $\mathfrak{T}$ im Einfallspunkte p von σ, (2) an $C_{t-\tau}$ die Tangentialebene T in demjenigen Punkte m dieser Fläche, in welchem σ mündet; dann ist G der Durchschnitt beider und die gesuchte Ebene T' ergibt sich als eine durch G an $C'_{t-\tau}$ zulegende Tangentialebene. Ist σ' der Strahl aus p nach dem Berührungspunkte von T', so ist seine Richtung so wie die Geschwindigkeit, mit welcher er durchlaufen wird, unabhängig von t und τ; beide ergeben sich also insbesondere auch, wenn man $t - \tau = 1$ nimmt, also für jeden Einfallspunkt p die Centralflächen $C_{t-\tau}$, $C'_{t-\tau}$ durch die Wellenflächen Δ, Δ' ersetzt.

22.

Wir erhalten demnach für die Brechung und Reflection der Unstetigkeitsflächen die nämlichen Constructionen, welche Huyghens für das Licht gefunden hat.

Handelt es sich um die Reflection einer aus $\mathfrak{R}$ einfallenden Unstetigkeitsfläche Σ, so ist Δ' die den Raume $\mathfrak{R}$ eigenthümliche Wellenfläche, also mit Δ identisch. Die aus G an Δ zu legende Tangentialebene T' liefert indess nur dann eine Lösung unserer Aufgabe, wenn der aus p nach dem Berührungspunkte von T' führende Strahl bei p zunächst in den Raum $\mathfrak{R}$ zurückkehrt.

Bei der Brechung aus $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ ist Δ' die dem Raume $\mathfrak{R}'$ eigenthümliche Wellenfläche: durch G werden alle Tangentialebenen an Δ' gelegt, und diejenigen Strahlen aus p nach den Berührungspunkten, welche von p aus zunächst in den Raum $\mathfrak{R}'$ eindringen, sind die gebrochnen Strahlen im engern Sinne.

Nun wissen wir aus den art. 11 und 12, dass die hier auftretenden Strahlensysteme wesentlich durch die Wellenfläche charakterisirt sind, zu welcher sie gehören, indem diese in geometrischer Form die Strahlen-und Normalenrichtungen einander zuordnet und gleichzeitig die entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten angibt.

Andererseits gehört zu jeder Wellenfläche Δ ein bestimmtes Reflectionsgesetz, welches durch die erste, und zu jedem Paar von Wellenflächen Δ, Δ' ein bestimmtes Brechungsgesetz, welches durch die zweite Huyghens'sche Construction ausgedrückt ist.

Lässt man als reflectirte Strahlen alle gelten, welche sich aus der ersten, und als gebrochne alle, die sich aus der zweiten Construction ergeben, so folgt aus der im art. 20 geleisteten Verification der Satz:

Wird ein zur Wellenfläche Δ gehöriges Strahlensystem an einer beliebigen Fläche $\mathfrak{S}$ nach den in den Huyghens'schen Constructionen enthaltenen Gesetzen reflectirt und der Wellenfläche Δ' gemäss gebrochen, so gehört jedes reflectirte Strahlensystem zur nämlichen Wellenfläche Δ und jedes gebrochne zur Wellenfläche Δ'.

Und wenn man sich der Grenzbedingung $t'=t$ als Gleichung von $\mathfrak{S}$ erinnert und bedenkt dass mit t zugleich auch t — const. Lösung der Differentialgleichung $\Delta=0$ ist, während beiden Lösungen das nämliche, zur Wellenfläche Δ gehörige Strahlensystem entspricht, so erkennt man den Satz:

Sind zwei Strahlensysteme in Raume vorhanden, welche zu beliebigen Wellenflächen Δ, Δ' gehören, so gibt es, soweit beide einander durchdringen, unzählig viel Flächen $\mathfrak{S}$, an denen das eine aus dem andern durch Brechung nach der für diese Wellenflächen geltenden Huyghens'schen Construction hervorgeht.

Sind die Wellenflächen Δ, Δ' so beschaffen, dass die Huyghens'sche Construction für einen einzigen einfallenden Strahl σ mehrere reflectirte Strahlen σ_1, σ_2,... und mehrere gebrochne Strahlen σ', σ'',... liefert, so entspringen aus einem einzigen einfallenden Strahlensystem $(\sigma\sigma)$ mehrere reflectirte Strahlensysteme $(\sigma_1\sigma_1)$, $(\sigma_2\sigma_2)$,... und mehrere gebrochne Strahlensysteme $(\sigma'\sigma')$, $(\sigma''\sigma'')$,...; für jedes einzelne von ihnen gelten die vorstehenden Sätze.

Diesen reflectirten und gebrochnen Strahlensystemen entsprechen ebensoviel reflectirte und gebrochne Unstetigkeitsflächen Σ_1, Σ_2,... und Σ', Σ'',... Das im vorigen art. gefundene Resultat zeigt, dass auch für diese Flächen eine der von Huyghens gefundenen Constructionen gilt. Sollen sie für die Zeit t dargestellt werden, so ermittle man für jeden Punkt p der Grenzfläche $\mathfrak{S}$ die von Σ_0 abhängige Zeit τ, wann Σ dort anlangt; legt man dann um ihn als Centralpunkt die Centralflächen $C_{t-\tau}$, $C'_{t-\tau}$, so sind Σ_1, Σ_2,... Einhüllende der ersten, Σ', Σ'',... Einhüllende der zweiten Schaar von Centralflächen, und zwar sind sie diejenigen Theile der vollständigen einhüllenden Flächen, in denen beziehungsweise die Strahlensysteme $(\sigma_1\sigma_1)$, $(\sigma_2\sigma_2)$,... $(\sigma'\sigma')$, $(\sigma''\sigma'')$,... münden.

Alle diese Constructionen zusammengenommen sind der geometrische Ausdruck für die Lösung der Aufgabe, zwei längs einer Fläche $\mathfrak{S}$ aneinander grenzende Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ stetig nach Werthen von t so zu ordnen, dass in jenem

$$\Delta\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0,$$

in diesem

$$\Delta'\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}, \frac{\partial t}{\partial \eta}, \frac{\partial t}{\partial \zeta}\right)=0$$

wird, wo die Grenzbedingung $t'=t$ durch die Bedingung ersetzt ist, dass t nicht bloss innerhalb $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, sondern auch beim Durchgange durch $\mathfrak{S}$ stetig bleiben soll.

Sie leisten durch Wiederholung die vollständige Lösung dieser Aufgabe, soweit die Anfangsbedingungen die verlangte Ordnung des Raumes nach Werthen von t überhaupt nach sich ziehen, auch für den Fall, wo man sich den unbegrenzten Raum in beliebige Theile $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$,... zerlegt, und jedem derselben eine bestimmte Differentialgleichung obiger Form, oder eine bestimmte Wellenfläche Δ, Δ', Δ'',... zugeordnet denkt, immer in geometrischer Form und bei ausschliesslich geometrischer Deutung der Differentialgleichungen. Die Frage nach der Lösbarkeit dieser Aufgabe durch analytische Ausdrücke würde in die Eliminationstheorie gehören.

23.

Es fragt sich nun, wie die reflectirten und gebrochnen Strahlen im engern Sinne sich analytisch voneinander unterscheiden. Lassen wir, um wieder beide Fälle zu vereinigen, dahingestellt, ob der Ausdruck Δ' mit Δ übereinstimmt oder nicht, so haben wir für den aus σ durch Reflection oder Brechung hervorgehenden Strahl σ' aus art. 20

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'}=\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega}, \quad \frac{\cos\beta'}{\omega'}=\frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega}, \quad \frac{\cos\gamma'}{\omega'}=\frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}, \qquad (\alpha)$$

ausserdem

$$\Delta'\left(\frac{\cos\alpha'}{\omega'}, \frac{\cos\beta'}{\omega'}, \frac{\cos\gamma'}{\omega'}\right)=0,$$

also

$$\Delta'\left(\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega},\ \frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega},\ \frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega}\right)=0. \qquad (\beta)$$

Iede reelle Wurzel k dieser Gleichung liefert, in (α) eingesetzt, einen reellen Werth für ω', und mit Zugrundelegung desselben eine unzweideutig bestimmte Richtung $\alpha'\beta'\gamma'$ für die Normale der neu erzeugten, nach dieser Richtung mit der Geschwindingkeit ω' fortschreitenden Unstetigkeitsfläche. Unsere Aufgabe ist diese, zu unterscheiden ob dies eine nach $\mathfrak{R}$ zurückkehrende oder eine in den Raum $\mathfrak{R}'$ übergehende Fläche ist, d. h. ob der neu erzeugte Strahl σ' vom Einfallspunkte aus zunächst nach $\mathfrak{R}$ zurückführt oder nach $\mathfrak{R}'$ übergeht.

Die Geschwindigkeitscomponenten, mit denen σ' durchlaufen wird, sind

$$\Xi'=\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'},\qquad H'=\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'},\qquad Z'=\frac{\partial\cos\gamma'}{\partial\omega'};$$

Zerlegt man nach der Normale von $\mathfrak{S}$ und zwei dazu senkrechten Richtungen, so ist

$$\mathfrak{N}'=\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}\cos\lambda+\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}\cos\mu+\frac{\partial\omega}{\partial\cos\gamma'}\cos\nu$$

die Componente nach der Normale, und zwar nach der durch $\lambda\mu\nu$ bestimmten Richtung derselben.

Im Vorangehenden war keine Veranlassung vorhanden, in dieser Hinsicht genauere Bestimmungen zu treffen; ich setze nunmehr fest, es sollen $\lambda\mu\nu$ oder ihre Cosinus so gewählt werden, dass die durch sie bestimmte Richtung von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}'$ führt.

Dann ist σ' ein gebrochner oder ein reflectirter Strahl, jenachdem $\mathfrak{N}'$ positiv oder negativ ist.

Dieses Kriterium muss nun auf die Gleichung (β) übertragen werden. Sei

$$\frac{\cos\alpha'}{\omega'}=p,\qquad \frac{\cos\beta'}{\omega'}=q,\qquad \frac{\cos\gamma'}{\omega'}=r, \qquad (1)$$

also

$$\Delta'(pqr)=0. \qquad (\beta)$$

Ist das vollständige Differential

$$\partial\Delta'(pqr)=P\partial p+Q\partial q+R\partial r,$$

ferner

$$Pp+Qq+Rr=N,\qquad P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu=Z,$$

so folgt aus (β)

$$N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\alpha'}=P,\qquad N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\beta'}=Q,\qquad N\frac{\partial\omega'}{\partial\cos\gamma'}=R,$$

also

$$\mathfrak{N}'=\frac{Z}{N}.$$

Setzen wir nun für pqr ihre Werthe aus (α) ein, mithin

$$p=\frac{\cos\alpha+k\cos\lambda}{\omega},\qquad q=\frac{\cos\beta+k\cos\mu}{\omega},\qquad r=\frac{\cos\gamma+k\cos\nu}{\omega},\tag{2}$$

und betrachten in der Gleichung (β) k und ω als Variable, so folgt auch

$$Z\partial k-N\partial\omega=0,$$

also haben wir unter dieser Voraussetzung

$$\mathfrak{N}'=\frac{\partial\omega}{\partial k}.$$

Um zu untersuchen, ob einer reellen Wurzel k der Gleichung (β) ein nach $\mathfrak{N}'$ oder ein nach $\mathfrak{N}$ führender Strahl σ' entspricht, muss man also in dieser Gleichung ω als Function von k betrachten; dann findet der erste oder der zweite Fall statt, jenachdem

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}$$

positiv oder negativ ist, vorausgesetzt dass die Normalenrichtung $\lambda\mu\nu$ von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{N}'$ führt.

24.

Die Anwendung dieses Kriteriums auf die Wellenfläche der homogenen elastischen Körper liefert die folgende Eigenschaft derselben, welche vielen, aber nicht allen Mittelpunktsflächen zukommt:

Die Anzahl der Tangentialebenen, welche durch eine Gerade G an die Wellenfläche Δ' eines homogenen elastischen Körpers gelegt werden können, ist stets eine gerade Zahl $2m$, und m eine der Zahlen 0, 1, 2, 3.

Legt man eine Ebene $\mathfrak{T}$ durch G und den Mittelpunkt der Fläche Δ', und zieht aus letzterm die Strahlen nach den $2m$ Berührungspunkten, so erhält man auf der einen Seite von $\mathfrak{T}$ ebenso viel Strahlen wie auf der andern, also auf jeder Seite m Strahlen.

Ist

$$\begin{vmatrix} \Lambda'_{11}-1 & \Lambda'_{12} & \Lambda'_{13} \\ \Lambda'_{21} & \Lambda'_{22}-1 & \Lambda'_{23} \\ \Lambda'_{31} & \Lambda'_{32} & \Lambda'_{33}-1 \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung $\Delta'=0$ und, wenn für die Derivirten von t' ihre Werthe aus (α) eingesetzt werden:

$$\Lambda'_{\mu\nu}=\frac{A'_{\mu\nu}}{\omega'^2}=\frac{\mathfrak{A}_{\mu\nu}}{\omega^2},$$

so dass

$$\mathfrak{A}_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}+2B_{\mu\nu}k+C_{\mu\nu}k^2$$

von ω frei und ganze Function zweiten Grades von k ist, so können wir statt der Gleichung (β) die folgende nehmen

$$K=\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}-\omega^2 & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}-\omega^3 & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{33}-\omega^2 \end{vmatrix}=0;$$

dann entsprechen die aus G an Δ' zulegenden Tangentialebenen den reellen Wurzeln k dieser Gleichung, vorausgesetzt dass man für ω denjenigen festen Werth nimmt, welcher dem einfallenden Strahl σ entspricht.

Um die Bedingung zur Geltung zu bringen, dass nur reelle Werthe von k und ω in Betracht kommen, stellen wir k als Abscisse, ω als Ordinate in einem rechtwinkligen Axensystem dar. Dann ist K eine Kurve 6 Grades, und die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden $\omega=\text{const.}$ eine der Zahlen 6, 4, 2, 0, was der erste Theil des obigen Satzes ist. Ist $2m$ die Anzahl der Schnittpunkte, so behauptet der zweite Theil des Satzes, dass $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ in m von ihnen positiv, in den m übrigen negativ ist. Der Beweis hiervon ergibt sich wie folgt.

Für jedes reelle k sind alle Wurzeln ω reell, paarweise entgegen gesetzt gleich, und keine von ihnen wird jemals $=0$ (art. 13). Die Kurve hat also

6 reelle Zweige, die sich von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ erstrecken; drei von ihnen, ω_1 ω_2 und ω_3, verlaufen auf der Halbebene $\omega > 0$, die drei andern sind zu ihnen in Bezug auf die Axe der k symmetrisch. Diese Axe wird von keinem Zweige geschnitten.

Solange k endlich bleibt, ändern ω_1, ω_2, ω_3 sich stetig mit k. Werden, während k sich ununterbrochen in der nämlichen Richtung ändert, zwei Wurzeln ω_1, ω_2 einander gleich, so trennen sie sich darüber hinaus wieder, ohne imaginär zu werden; also kehrt die Kurve dort nicht zu frühern Werthen von k zurück, sondern es bildet sich ein Doppelpunkt.

Wenn also, während k fortwährend zunimmt, zwei Zweige ω_1 und ω_2 zum nämlichen Punkte führen, so gehen von dort zwei Zweige weiter zu grössern k; welchen von beiden man als Fortsetzung von ω_1 betrachten will, ist für unsern Zweck gleichgültig. Hat man aber hierüber für jeden Doppelpunkt verfügt, so hat jeder Zweig der Kurve die wesentliche Eigenschaft dass ein Punkt, welcher ihn von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ durchläuft, während dessen niemals zu kleinern k zurückkehrt, sondern ununterbrochen zu grössern k fortschreitet. Dies ist die erste Eigenschaft der Kurvenzweige, welche hier in Betracht kommt.

Die zweite, welche mit dieser zusammen den Beweis unserer Behauptung liefert, besteht darin, dass sowohl für $k = -\infty$ wie für $k = +\infty$ drei Wurzeln $\omega = +\infty$ die drei andern $= -\infty$ werden.

Aus beiden zusammen folgt, dass ein Punkt, welcher auf der Halbebene $\omega > 0$ einem Kurvenzweige von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ folgt, stets zu grössern k fortschreitet, aber Anfangs von unendlich grossen zu endlichen Werthen von ω sinkt, und schliesslich wieder von endlichen zu unendlich grossen Werthen von ω steigt. Wenn aber ein solcher Zweig von einer Geraden $\omega = \text{const.}$ überhaupt geschnitten wird, so muss er durch diese Gerade ebenso oft von grössern zu kleinern, wie von kleinern zu grössern ω gehen. Da er jedesmal zu grössern k fortschreitet, so ist $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ im ersten Falle negativ, im andern positiv. Beide Fälle treten für jeden einzelnen Zweig gleich oft ein, also gilt dies auch von allen Zweigen zusammengenommen, w. z. b. w.

Die Huyghens'sche Construction liefert jedenfalls eine Tangentialebene an Δ, diejenige, welche dem nach $\mathfrak{R}'$ hinein sich fortsetzenden Strahl σ entspricht, also auch mindestens eine, welcher ein reflectirter Strahl entspricht. Die Anzahl der reflectirten Strahlen ist also 1, 2 oder 3, die der gebrochnen 0, 1, 2 oder 3, was im Ganzen 12 verschiedene Fälle gibt.

Nur in einem von diesen Fällen, nämlich wenn beide Zahlen $=3$ sind, reichen die Grenzbedingungen allein hin, um die entstehenden Unstetigkeiten völlig zu bestimmen; in den 11 übrigen Fällen bedarf es hierfür der Integration der Differentialgleichungen d. art. 4.

25.

Es handelt sich nur noch um den Nachweis dieses Satzes, nicht um ausgeführte Rechnungen, deren Resultate wenig lohnend sein würden.

Sei wieder l die Kurve, in welcher die Grenzfläche $\mathfrak{S}$ zur Zeit t von Σ geschnitten wird. Wird ein an $\mathfrak{S}$ grenzender Punkt von l überschritten, so möge die Gesammtzunahme, welche ein ihm zugeordneter Werth, z. B. $\frac{\partial u}{\partial t}$ oder Π'_1 erlangt, durch

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad (\Pi'_1)$$

bezeichnet werden.

Nun bleibt sowohl vor- wie nachher in einem solchen Punkte [(1) art. 19] $u'=u$, $v'=v$, $w'=w$ also auch $\frac{\partial u'}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}$, u. s. w., also folgt weiter

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad \left(\frac{\partial v'}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right), \quad \left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right), \tag{I}$$

und aus demselben Grunde folgt aus (2) art. 19

$$\left.\begin{aligned}
\rho'(\Pi'_1\cos\lambda+\Pi'_6\cos\mu+\Pi'_5\cos\nu)&=\rho(\Pi_1\cos\lambda+\Pi_6\cos\mu+\Pi_5\cos\nu)\\
\rho'(\Pi'_6\cos\lambda+\Pi'_2\cos\mu+\Pi'_4\cos\nu)&=\rho(\Pi_6\cos\lambda+\Pi_2\cos\mu+\Pi_4\cos\nu)\\
\rho'(\Pi_5'\cos\lambda+\Pi'_4\cos\mu+\Pi'_3\cos\nu)&=\rho(\Pi_5\cos\lambda+\Pi_4\cos\mu+\Pi_3\cos\nu).
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Es ist für unsern Zweck wünschenswerth, noch ein Formelnsystem abzuleiten. Da an $\mathfrak{S}$ vor und nach dem Durchgange von l

$$\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u'}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu$$

ist, was ebenso für v' und v sowie für w' und w gilt, so ist auch

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu,$$

oder, wenn $\alpha\beta\gamma\omega$ sich nur auf die einfallende Unstetigkeitsfläche Σ beziehen, wegen (I)

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial t}\cdot\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial u'}{\partial t}\cdot\frac{\cos\beta}{\omega}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right):\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu.$$

Die hier eingehenden Gesammtzunahmen erhält man auch wie folgt. Man lege um den Einfallspunkt p in der Normalebene von l einen unendlich kleinen Kreis und nenne R den Halbkreis welcher in den Raum $\mathfrak{R}$ fällt, den andern R'. Sodann wähle man zur positiven Seite einer Unstetigkeitsfläche jedesmal diejenige, welche der wirklichen Fortschrittsrichtung von l zugewandt ist. Dann ist z. B. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ die Summe aller stetigen vermehrt um die Summe aller plötzlichen Zunahmen, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$ erlangt, wenn R von der positiven nach der negativen Seite durchlaufen wird. Die unstetigen Zunahmen treten ein beim Durchgange durch Σ und die verschiedenen reflectirten Unstetigkeitsflächen, die stetigen beim Durchgange durch die Winkelräume zwischen $\mathfrak{S}$ und den Unstetigkeitsflächen. Ebenso verhält es sich auf der andern Seite von $\mathfrak{S}$.

Ich bezeichne nun die Summen der plötzlichen Zunahmen für die Minuenden der vorstehenden Formel durch $A'B'C'$, für die Subtrahenden durch ABC, und behaupte dass identisch $A:B:C=A'B'C'=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu$ ist. Ist dies bewiesen, so ergibt sich, dass aus der Grenzbedingung $u'=u$, abgesehen von (I), nur noch zu schliessen ist, dass die vorstehende Proportion für die Summen der stetigen Zunahmen der in sie eingehenden Ausdrücke gilt.

Es nehmen aber

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\cos\alpha}{\omega},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\cos\beta}{\omega},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\cos\gamma}{\omega}$$

zu (1) beim Durchgange durch Σ um Null, da diese Zunahme

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{\cos\alpha}{\omega}=0$$

u. s. w. ist; (2) beim Durchgange durch Σ_1 um

$$-\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_1-\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1\frac{\cos\alpha}{\omega}=\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1=\frac{k_1\cos\lambda}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1,$$
$$\frac{k_1\cos\mu}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1,\qquad \frac{k_1\cos\nu}{\omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_1;$$

und da dies für jede reflectirte Unstetigkeitsfläche Σ_1 gilt, so folgt für die Summen aller plötzlichen Zunahmen $A:B:C=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu$, und offenbar gilt dieser Nachweis, der sich allein auf die Formeln (3) art. 5 und (6) art. 20 gründet, auch für A', B' und C'.

Bezeichnen wir also durch $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_c$, $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_c$ u. s. w. die Summe aller stetigen Zunahmen, welche $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u'}{\partial x}$ u. s. w. erlangen, wenn R, R' von der positiven nach der negativen Seite durchlaufen werden, so reducirt sich unsere Proportion auf

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)_c-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\alpha}{\omega}\right)_c:\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)_c-\\ -&\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\beta}{\omega}\right)_c:\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)_c-\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\cos\gamma}{\omega}\right)_c=\cos\lambda:\cos\mu:\cos\nu\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

nebst der gleichen Proportion für v' und v so wie für w' und w, und es ist bewiesen dass ausser (I) sich aus der Grenzbedingung $u'=u$ usw. keine andern mehr ergeben. —

Wenn die Linie l in unendlicher Nähe umkreist wird und eine veränderliche Grösse sich dabei stetig, aber so ändert, dass sie endliche Zunahmen erlangt, nachdem die Umkreisung um einen endlichen Winkel fortgeschritten ist, so ist sie in der Linie l selbst unbestimmt. Wenn daher die ersten Derivirten von u, v, w, u', v', w' in l nicht unbestimmt werden, so sind auf der linken Seite von (III) alle Glieder $=0$. Wir werden sehen, dass letzteres nicht immer der Fall sein kann, und dann schliessen müssen, dass die in Rede stehenden Derivirten an l unbestimmt und von der Eintrittsrichtung abhängig werden.

Ich beginne mit dem Falle, wo sowohl durch Reflection wie durch Brechung drei Unstetigkeitsflächen entstehen; derselbe tritt ein, so lange die in $\mathfrak{T}$ liegende Gerade G weder Δ noch Δ' schneidet. Nimmt man an, dass in diesem Falle die ersten Derivirten von u $v\ldots$ w' an l nicht unbestimmt werden, so bleiben nur die Grenzbedingungen (I) (II) übrig, und die dort eingehenden Gesammtzunahmen drücken sich aus durch die Unstetigkeiten der Derivirten. Diese reduciren sich durch die Formeln (3) art. 5 auf die Componenten UVW, während diese sich (art. 14 C und art. 15 AB) in allen Fällen durch eine einzige Hülfsgrösse ausdrücken. Die Anzahl der Unbekannten ist also $=6$, gleich der Anzahl der Gleichungen (I) (II).

Wir halten uns bei einer Theorie dieser Gleichungen nicht auf, und gehen zur Schlussuntersuchung über, dem Nachweise, dass die noch übrigen 11 Fälle eine neue nicht mehr hierhin gehörige Klasse von Problemen bilden, insofern die im vorigen Falle vorhandene Möglichkeit, die gesuchten Unstetigkeiten unabhängig vom stetigen Verlaufe der mit ihnen behafteten Functionen, also ohne Kenntniss dieser Functionen selbst zu finden, in den noch übrigen Fällen nicht mehr stattfindet.

Ich vergleiche miteinander drei Fälle der vorliegenden Anfgabe, welche a, b, c heissen mögen, und unendlich benachbarten Lagen der Geraden G entsprechen: im Falle a schneidet die Gerade G weder Δ noch Δ', im Falle b berührt sie Δ', im Falle c wird Δ' von G in zwei unendlich benachbarten Punkten geschnitten.

Im Falle a existiren also alle Unstetigkeitsflächen; derselbe wird demnach durch die vorhin erörterten Gleichungen (I) (II) erledigt. Im Falle c existiren nur noch zwei gebrochne Unstetigkeitsflächen; folgen dieselben im Falle a von der positiven nach der negativen Seite hin in der Reihenfolge Σ', Σ'', Σ''' aufeinander, so möge im Falle c Σ' und Σ''' noch reell vorhanden, aber Σ'' imaginär geworden sein.

Im Falle a findet also zwischen $\overset{-}{\Sigma}{}'$ und $\overset{+}{\Sigma}{}'''$ noch eine Unstetigkeit statt, aber nicht mehr im Falle c. Zu beiden gehört b als Grenzfall. Die Werthsvertheilungen in den Fällen a und c können also von der im Falle b stattfindenden, folglich voneinander nur unendlich wenig abweichen. Während aber die Derivirten von $u'v'w'$ im Falle a beim Durchgange durch Σ'' plötzliche Werthsaenderungen erleiden, ist an Stelle dieser Unstetigkeiten im Falle c eine davon nur wenig abweichende, aber stetige Aenderung um die gleichen Beträge getreten.

Im Falle a bedeutet hiernach z. B. $\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)$ die Summe von 3 plötzlichen Aenderungen, welche beim Durchgange durch Σ', Σ'', Σ''' stattfinden: im Falle c bedeutet dieses Zeichen, bei nahezu gleichem Werthe, die Summe der plötzlichen Aenderungen beim Durchgange durch Σ' und Σ''', vermehrt um die von Null verschiedene, aber auf stetigem Wege erfolgende Zunahme beim Uebergange von $\overset{-}{\Sigma}{}'$ bis $\overset{+}{\Sigma}{}'''$.

Von den Unbekannten, die im Falle a aus (I) und (II) bestimmt werden, sind also im Falle c deren 12 nicht mehr vorhanden: es sind dies die Unstetigkeiten der ersten Derivirten von $u'v'w'$ an Σ'', welche sich durch phoronomische und mechanische Relationen auf eine einzige Unbekannte reduciren. An ihre Stelle sind im Falle *c* die stetigen Zunahmen getreten, welche diese 12 Derivirten beim Uebergange von $\overset{-}{\Sigma}'$ bis $\overset{+}{\Sigma}'''$ erlangen. Für diese stetigen Zunahmen besitzen wir in den Gleichungen (III) (welche sich vereinfachen) phoronomische Relationen, durch welche diese 12 Unbekannten auf 6 reducirt werden. Gäbe es noch mehr mechanische oder phoronomische Relationen, z. B. solche, die aus dem Begriffe der Unbestimmtheit einer Function in einer Linie l entspringen, und zwar im Ganzen so viele, dass durch sie diese 12 stetigen, unbekannten Zunahmen auf eine einzige Unbekannte reducirt würden, so würden die Gleichungen (I) (II) wieder nur 6 Unbekannte enthalten, und auch die vorliegende Aufgabe würde ohne die Kenntniss der Functionen uvw selbst lösbar sein.

Aber ein solches System von phoronomischen und mechanischen Relationen gibt es in diesem Umfange nicht. Denn wenn dasselbe existirte, so würde das nämliche System der so beschaffenen Relationen die erwähnten 12 stetigen Zunahmen auch in dem Falle auf eine einzige Unbekannte reduciren, wo z. B. zwei gebrochne Unstetigkeitsflächen imaginär geworden sind, während die Grenzbedingungen (I) (II) für den Raum $\mathfrak{R}'$ drei Unbekannte fordern.

Ich schliesse daraus, dass in allen denjenigen Fallen, wo gebrochne oder reflectirte Unstetigkeitsflächen imaginär werden, die stetigen Zunahmen der ersten Derivirten von $u'v'w'$ oder uvw in den frei werdenden Winkelräumen nicht durch phoronomische und mechanische Grenzbedingungen allein, sondern nur durch Integration der partiellen Differentialgleichungen d. (art. 4) auf diejenige Anzahl von Unbekannten reducirt werden können, welche für die Befriedigung der Grenzbedingungen (I) (II) erforderlich ist.

Strassburg, 20 März 1877.

Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano.

(*Memoria del prof.* E. Bertini, *a Pisa.*)

Le presenti ricerche sono indirizzate alla soluzione del seguente problema: Indicare tutte le possibili trasformazioni involutorie nel piano, che sono irriducibili, cioè non possono dedursi l'una dall'altra per una serie di trasformazioni quadratiche o, ciò che è lo stesso, per una trasformazione univoca. Noi ammettiamo che i punti fondamentali delle trasformazioni involutorie possano assumere posizioni speciali e anche divenire infinitamente vicini; ma i nostri ragionamenti non abbracciano quei casi ne'quali le curve fondamentali si spezzano (*). Escludendo questi casi, ecco il metodo e i risultati di queste ricerche. Nel § 1 si premette la riduzione di alcuni sistemi lineari ad altri di ordine inferiore per trasformazioni quadratiche. Generalizzando un procedimento noto (**) si arriva ad alcuni nuovi risultati. Nel § 2 si dimostra (nell'ipotesi suddetta) che ogni curva fondamentale L_i che passa α_{ii} volte pel punto fondamentale a cui corrisponde, dà origine ad un sistema $[L]$ di curve corrispondenti a sè stesse o fra loro, e che in ogni trasformazione involutoria esiste almeno uno di tali sistemi. Nei § 3, 4, 5 esaminiamo i casi $\alpha_{ii}=1$, $\alpha_{ii}=2$, $\alpha_{ii}=3$ e troviamo che per essi le trasformazioni involutorie sono sempre riducibili ai quattro casi seguenti (irriducibili fra loro):

a) Omologia armonica.

(*) È chiaro che ciò può soltanto accadere quando i punti fondamentali sieno infinitamente vicini (non reciprocamente).

(**) Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch,* t. 1, pag. 488.

b) Trasformazioni involutorie (di Jonquières) d'ordine $p+2$ con $2p+2$ punti semplici fondamentali distinti, aventi una curva punteggiata unita d'ordine $p+2$, di genere p (essendo p un numero qualunque >0), con un (solo) punto p^{plo} nel punto $(p+1)^{uplo}$ della trasformazione.

c) Trasformazione involutoria dell'8° ordine con 7 punti tripli, avente una curva punteggiata unita di 6° ordine, per la quale quei sette punti sono doppî.

d) Trasformazione involutoria del 17° ordine con 8 punti sestupli, avente una curva punteggiata unita di 9° ordine, per la quale quegli otto punti sono tripli.

Alle trasformazioni *a*), *b*), di cui la costruzione è semplicissima, si possono ridurre, come dimostrai in altro lavoro (*), tutte le trasformazioni involutorie di Jonquières. Il caso *c*) fu già considerato da Geiser (**), però da un punto di vista affatto diverso. Esso si ottiene con una rete di curve di 3° ordine passanti per i setti punti fondamentali, facendo corrispondere ad ogni punto del piano il nono punto comune alle curve del 3° ordine passanti per quel punto. Il caso *d*) è (a mio avviso) non ancora osservato. Esso nasce da una notevole proprietà (credo nuova) del sistema lineare triplamente infinito di curve di 6° ordine (di genere 2) che hanno otto punti doppî in comune. Le curve di questo sistema che passano per un punto (cioè appartengono ad una rete) passano necessariamente per un altro punto. I punti del piano sono così riferiti univocamente ed involutoriamente.

L'importanza delle trasformazioni *a*) *b*) *c*) *d*) è resa manifesta dal § 6 ove si considera il caso $\alpha_{ii}>3$ nel supposto che le curve del sistema $[L]$ sieno unite (corrispondenti a sè stesse); giacchè si trova che, in questa ipotesi, le trasformazioni involutorie sono appunto riducibili ai suddetti casi *a*) *b*) *c*) *d*).

Considerazioni di altra specie m'indurrebbero a pensare che a questi casi possano ridursi tutte le possibili trasformazioni involutorie nel piano. Però una dimostrazione rigorosa di tale proprietà non mi è riuscita. Le difficoltà provengono sopratutto dalla considerazione di quei casi ne' quali le curve fondamentali si spezzano, e quindi cessano di essere vere parecchie proprietà che

(*) *Sopra una classe di trasformazioni univoche involutorie.* Annali di Matematica, serie II, t. 8, n.i 4, 18.

(**) *Ueber zwei geometrische Probleme.* Giornale di Crelle, t. 67, pag. 78. — Cfr. anche la *Bemerkung* di Milinowski al precedente lavoro di Geiser (Crelle, t. 77, pag. 263).

sussistono in generale; per es., le relazioni (13) (14) (15) del § 2. Tali casi non furono finora convenientemente esaminati, nemmeno per le trasformazioni univoche qualunque.

Nel desiderio che altri possa mettersi in queste ricerche aggiungo in fine un'Appendice, in cui accenno alle proprietà colle quali ho tentato l'esame del caso generale.

§ 1.

Riduzione di alcuni sistemi lineari ad altri di ordine inferiore per trasformazioni quadratiche.

1. Consideriamo un sistema (lineare) $[C]$ di curve aventi a comune punti multipli di ordine $r_1, r_2, \dots r_h$ rispettivamente in h punti (punti base) $1, 2, \dots h$ e tale che una curva (generale) del sistema non sia sottoposta ad altre condizioni e non si decomponga in parti. Per essere il sistema lineare essa non possiede punti multipli esternamente ai punti base; poichè si ha la proprietà: Se una curva (generale) variabile in un sistema lineare qualsivoglia, non si compone di parti, non può avere punti multipli fuori dei punti fissi comuni alle curve del sistema. Infatti, essendo il sistema lineare, due curve di esso determinano un fascio di curve tutte appartenenti al sistema, ognuna delle quali per conseguenza sarebbe dotata di punti multipli esternamente ai punti base. Quindi il fascio dovrebbe spezzarsi in una parte fissa e in una variabile (*) e però, ecc.

Sia n l'ordine di una curva del sistema $[C]$, p il genere, β il numero delle relazioni sussistenti fra i punti base, cioè il numero delle condizioni date da questi punti che sono conseguenza delle rimanenti, ed α il numero delle condizioni che determinano una curva del sistema. È evidente che sussisteranno

(*) Non può accadere che ogni curva di un fascio sia dotata di punti multipli (esternamente ai punti base) se il fascio non si compone di una parte fissa e di una variabile. Per persuadersene basta osservare che due curve del fascio avvicinandosi indefinitamente, e un punto multiplo dell'una tendendo a coincidere con un punto multiplo dell'altra, al punto di coincidenza (esterno ai punti base) debbono approssimarsi delle intersezioni comuni alle due curve: il che non può avvenire se le curve sono interamente distinte. Se un fascio presenta infiniti punti doppî e non ha luogo il caso ora considerato, deve appartenere al fascio una curva contata più volte. I due casi possono anche aver luogo simultaneamente (per es., nel fascio di 3^o ordine formato da una retta fissa e da un fascio di coniche bitangenti).

le due relazioni

$$(n-1)(n-2)=\sum_i r_i(r_i-1)+2p$$
$$n(n+3)=\sum_i r_i(r_i+1)-2\beta+2\alpha:$$

da cui seguono queste altre

$$\sum_1^h {}_i r^2{}_i = n^2+1-p+\beta-\alpha \tag{1}$$

$$\sum_1^h {}_i r_i = 3n-1+p+\beta-\alpha. \tag{2}$$

Dalla prima delle quali si trae che due curve del sistema si tagliano in

$$s=p-\beta+\alpha-1 \tag{3}$$

punti esternamente ai punti base. Si può osservare che $\alpha-1$ punti arbitrarî determinano un fascio di curve, e però deve essere $s \geqq \alpha-1$: onde si ha $p \geqq \beta$.

Il sistema considerato è riducibile per trasformazioni quadratiche ad un altro di ordine inferiore se la somma dei tre punti base di ordine più elevato è $>n$. Supponiamo ordinati i punti base in guisa che si abbia

$$r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \cdots \geqq r_n.$$

Trasportiamo nelle (1), (2) tutti i termini nel secondo membro: moltiplichiamo la (2) per r_3 e sottragghiamo la (1) dalla (2): otterremo

$$\sum_1^h {}_i(r_i-r_3)r_i - n^2+3nr_3+(p-1)(1+r_3)+(\beta-\alpha)(r_3-1)=0.$$

Se $r_1+r_2+r_3$ non è maggiore di n, cioè si abbia $r_1+r_2+r_3+k=n$, (essendo k numero intero positivo anche nullo), osservando che

$$k^2+2k(r_1+r_2+r_3)-3r_3k \geqq 0,$$

dalla precedente si trae facilmente

$$\sum_4^h {}_i(r_i-r_3)r_i+2r_3^2-2r_1r_2+(p-1)(1+r_3)+(\beta-\alpha)(r_3-1) \geqq 0.$$

Adunque se si abbia

$$\sum_4^h {}_i(r_i-r_3)r_i+2r_3^2-2r_1r_2+(p-1)(1+r_3)+(\beta-\alpha)(r_3-1)<0, \tag{4}$$

od anche, per essere $2r_3^2-2r_1r_2 \leq 0$ ed $r_i^2-r_3r_i \leq 0$ ($i=4, 5,\ldots h$), se

$$(p-1)(r_3+1)+(\beta-\alpha)(r_3-1)<0, \qquad (5)$$

il sistema $[C]$ è trasformabile quadraticamente in un altro di ordine inferiore.

2. Se $p=0$, $\alpha=1$; cioè si considera un fascio di curve razionali, discende dalla (3) che deve essere $\beta=0$, cioè non possono esistere vincoli fra i punti base del sistema. Inoltre, la (5) essendo manifestamente soddisfatta, si ha la proprietà nota (*): Un fascio di curve razionali si può sempre ridurre per trasformazioni quadratiche ad un fascio di ordine inferiore; in particolare ad un fascio di rette.

3. Se $p=1$, $\alpha=1$; cioè si ha un fascio di curve di genere 1, dalla (3) segue $\beta=1$, cioè deve esistere un vincolo fra i punti base del sistema. Applicando la (4), si riconosce che il sistema è sempre riducibile, escluso il caso in cui sia

$$\begin{aligned} r_3^2-r_1r_2 &= 0 \\ r_i-r_3 &= 0 \qquad (i=4,\ldots h) \end{aligned}$$

cioè si abbia

$$r_1=r_2=r_3=\cdots=r_h;$$

nel qual caso le (1) (2) diventano

$$hr_1^2=n^2, \qquad hr_1=3n,$$

da cui

$$h=9 \qquad n=3r_1.$$

Adunque: Un fascio di curve di genere 1 è deducibile per trasformazioni quadratiche da un fascio di curve d'ordine $3r$ con nove punti base multipli secondo lo stesso numero r. Questo secondo fascio è manifestamente non riducibile ad altri di ordine inferiore per trasformazioni univoche.

4. Se $p=0$, $\alpha=2$ si ha $\beta=0$, $s=1$ e dalla (5) si ottiene il teorema noto (**): Una rete di curve razionali, soggette alle sole condizioni di avere punti fissi comuni, è deducibile con trasformazioni quadratiche dalla rete delle rette di un piano.

(*) Noether, *Ueber Flächen, velche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, t. 3, pag. 165.

(**) Veggasi, per es., Lindemann, l. c., pag. 489 e la nota bibliografica alla stessa pagina.

5. Se $p=1$, $\alpha=2$, ossia si considera una rete di curve di genere 1, deve essere $s=-\beta+2$. Ma due curve non possono segarsi in un solo punto variabile, giacchè per mezzo di un fascio di curve della rete si otterrebbero i punti di una curva della rete stessa uno ad uno, e però la curva sarebbe razionale. Adunque dovrà essere $s=2$, $\beta=0$.

La considerazione di queste reti e dei fasci di curve razionali (n.° 2) è racchiusa in quella dei sistemi lineari, pei quali, α essendo qualunque, sieno $p=\alpha-1$ e $\beta=0$; onde $s=2\alpha-2$. Per tali sistemi le (1) (2) diventano

$$\sum_1^h {}_i r_i^2 = n^2 - 2\alpha + 2, \qquad \sum_1^h {}_i r_i = 3n-2; \tag{6}$$

e la condizione (4) si cangia nella

$$\sum_4^h {}_i (r_i - r_3) r_i + 2r_3^2 - 2r_1 r_2 - 2r_3 + 2\alpha - 2 < 0;$$

la quale, ponendo

$$r_2 = r_1 - \delta, \qquad r_3 = r_1 - \delta_1,$$

ove δ, δ_1 sono interi positivi, anche nulli, non maggiori di r_1-1 e tali che $\delta \leqq \delta_1$, si trasforma nell'altra

$$\sum_4^h {}_i (r_i - r_3) r_i + 2(\alpha - r_1 - 1) + 2r_1(\delta - \delta_1) + 2\delta_1(\delta_1 - r_1 + 1) < 0. \tag{7}$$

Questa è manifestamente soddisfatta, per essere $\delta - \delta_1 \leqq 0$ e $\delta_1 \leqq r_1 - 1$, quando si abbia $\alpha - 1 < r_1$. Adunque:

Un sistema lineare, ∞^α, di curve di genere $\alpha-1$, tale che due curve si seghino in $2\alpha-2$ punti (variabili), è riducibile ad un altro di ordine inferiore (definito dalle stesse caratteristiche) se il genere $\alpha-1$ è minore del numero che indica la moltiplicità del punto base più elevato.

6. Se $\alpha=2$ il sistema è sempre riducibile quando sia $r_1>1$. Ma, se $r_1=r_2=\cdots=1$, le (6) danno $n=3$: quindi;

Una rete di curve di genere 1, due delle quali si segano in due punti variabili, è sempre deducibile con trasformazioni quadratiche dalla rete delle curve generali del 3° ordine passanti per 7 punti fissi.

7. Riprendendo la considerazione del sistema generale del n.° 5, se $\alpha-1=r_1$, la (7) mostra che il sistema è sempre riducibile se sia $r_i-r_3<0$ almeno per un valore di i. Quando sia $r_i-r_3=0$ $(i=4, 5,\ldots h)$ l'applicazione della (7) lascia incertezza nei due casi seguenti:

$$1.^\circ \quad \delta=\delta_1=0: \qquad \text{e però } r_1=r_2=\cdots=r_h=\alpha-1$$

$$2.^\circ \quad \delta=\delta_1=r_1-1: \text{ e però } r_1=\alpha-1, \quad r_2=r_3=\cdots=r_h=1.$$

Nel primo caso le (6) danno

$$\alpha-1=\frac{n}{3}, \qquad h=9-\frac{6}{n}$$

cioè deve essere $n=6$, ovvero $n=3$. Nel secondo caso dalle (6) si ricava

$$\alpha^2-\alpha=n^2-3n+2$$

da cui si ottiene (trascurando un'altra soluzione priva di significato geometrico) $\alpha=n-1$ e per conseguenza $r_1=n-2$, $h=2n+1$. Possiamo quindi concludere che:

Un sistema lineare, ∞^α, di curve di genere $\alpha-1$, tale che due curve si seghino in $2\alpha-2$ punti (variabili), è riducibile ad un altro di ordine inferiore (definito dalle stesse caratteristiche) se il genere $\alpha-1$ è eguale al numero che indica la moltiplicità del punto base più elevato, esclusi soltanto:

I sistemi lineari di curve d'ordine n (e di genere $n-2$) aventi a comune un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$ e $2n$ punti semplici;

Il sistema lineare triplamente infinito di curve di 6° ordine (e di 2° genere) aventi a comune otto punti doppî.

Questi sistemi sono manifestamente irriducibili per trasformazioni quadratiche.

8. Se $\alpha=3$, poichè dalle (6) segue che i punti base non possono essere tutti semplici, dovrà aversi $r_1\geqq 2$. Per conseguenza (n.i 5, 7):

Un sistema lineare, triplamente infinito, di curve di genere 2, tale che due curve si taglino in 4 punti variabili, è sempre deducibile per trasformazioni quadratiche dal sistema di curve di 6° ordine con 8 punti doppî comuni, ovvero dal sistema delle curve di 4° ordine con un punto doppio e 8 punti semplici comuni.

9. Le proprietà dei n.i 2, 3, 6, 8 (di cui dovremo fare applicazione) sussistono anche se i punti base divengono infinitamente vicini. Per dimostrarlo

valgono identicamente le considerazioni fatte da NÖTHER (*) nel caso del n.° 4; cioè si dimostra che, quando le moltiplicità dei tre punti base più elevati danno una somma maggiore dell'ordine, se due di essi diventano infinitamente vicini al terzo in direzioni diverse (onde la trasformazione quadratica coi medesimi non è più possibile), esistono sempre due punti base che non sono infinitamente vicini al punto base più elevato in direzioni diverse e tali che la somma delle loro moltiplicità e quella dell'ultimo punto supera l'ordine. Una sola eccezione s'incontra pel n.° 8, cioè se $\alpha = 3$, nel sistema di curve di 5° ordine aventi a comune un punto triplo, un punto doppio e otto punti semplici, quando accada che il punto doppio sia infinitamente vicino al punto triplo in una direzione, gli otto punti semplici infinitamente vicini allo stesso punto triplo in

(*) *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* (Math. Ann., t. 5, pag. 634). Prendendo di qui le notazioni, invece della diseguaglianza ultima (a pag. 639) si trova, per un sistema definito dalle (1) (2), la seguente

$$0 \geqq \frac{n-j}{2}(2j-n) + j(n-j-i_1) + (1-p)\left(\frac{n-j}{2}+1\right) + (\alpha-\beta)\left(\frac{n-j}{2}-1\right),$$

sussistendo le

$$j + i_1 + i_2 > n, \qquad i_1 + i_2 \leqq j,$$

onde

$$2j > n,$$

e

$$n \geqq j + i_1, \qquad n > j.$$

La suddetta proprietà risulta dimostrata se si prova assurda la diseguaglianza precedente. Ora nel caso del n.° 3, cioè se $p = \alpha = \beta = 1$, è manifestamente non soddisfatta. Se $p = \alpha - 1$ e $\beta = 0$, diventa

$$0 \geqq (n-j)(2j-n-1) + 2j(n-j-i_1) + 3(n-j) - 4\alpha + 4,$$

la quale evidentemente non sussiste nel caso del n.° 2 cioè se $\alpha = 1$ e nel caso del n.° 4 cioè se $\alpha = 2$ (notando, per quest'ultimo, che, non essendo le curve razionali, deve aversi $n \geqq j + 2$).

Nel caso del n.° 8, cioè se $\alpha = 3$, la precedente relazione non è evidentemente soddisfatta se $n > j + 2$. Se $n = j + 2$ la medesima relazione diventa

$$3j - ji_1 - 4 \leqq 0.$$

Ma, dall'essere $j + i_1 \leqq n$, segue $i_1 \leqq 2$ e dovrà prendersi $i_1 = 2$ per non ricadere nel sistema di curve di 4° ordine che già escludemmo (n.° 8). Sicchè quella relazione è assurda se $j > 4$. Ora, tenendo presente le (6), i casi $j = 1$, $j = 2$ sono da respingere e l'altro $j = 4$ conduce ad un sistema di curve di 6° ordine con un punto quadruplo, due doppî e otto semplici comuni, il quale è sempre riducibile ad ordine inferiore. Il caso di $j = 3$ dà un sistema di curve di 5° ordine con un un punto triplo, un punto doppio e otto punti semplici comuni, il quale è pure riducibile ad ordine inferiore, tranne nel caso eccezionale summenzionato.

un' altra direzione e due in linea retta con esso (cioè le curve abbiano in quest' altra direzione un contatto dell' 8° ordine e inoltre presentino inflessione). È facile persuadersi che un tal sistema è irriducibile per trasformazioni univoche. Esso è un esempio del fatto notevole che la riducibilità, per tali trasformazioni, di un sistema, può cessare per l' avvicinamento indefinito dei punti base.

§ 2.

Sistemi lineari corrispondenti a sè stessi nelle trasformazioni involutorie.

10. Prendiamo a considerare una trasformazione involutoria nella quale i punti fondamentali possano avere comunque posizioni speciali, ma escludiamo che sieno infinitamente vicini (*). Il sistema dei punti e delle curve fondamentali essendo il medesimo per le due figure, diciamo 1, 2, 3,... h, i punti fondamentali; r_1, r_2,... r_h i loro ordini di moltiplicità; L_1, L_2,... L_h le curve fondamentali (degli ordini r_1, r_2,... r_h) corrispondenti ordinatamente a quei punti, e indichiamo con α_{ik} l'ordine di moltiplicità del punto i per la curva L_k o, ciò che è lo stesso, l'ordine di moltiplicità del punto k per la curva L_i: onde $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$. Per le curve corrispondenti alle rette del piano sussistono le note relazioni

$$\sum_i r_i^2 = n^2 - 1 \tag{8}$$

$$\sum_i r_i = 3n - 3. \tag{9}$$

Inoltre, perchè una curva corrispondente ad una retta arbitraria non può tagliare una curva fondamentale fuori dei punti fondamentali, avremo le relazioni

$$n r_i = \sum_k \alpha_{ik} r_k \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h). \tag{10}$$

(*) La pubblicazione di questo lavoro essendo stata spezzata fra il fascicolo 3° e 4° del t. 8 di questi Annali, sono riuscito, nell'intervallo, ad avvicinarmi alla soluzione del problema propostomi assai più di quanto sta scritto nell'introduzione. Ho potuto, cioè, evitare le difficoltà provenienti dall'avvicinamento indefinito dei punti fondamentali e dallo spezzamento delle curve fondamentali, col variare la trattazione in alcuni punti e per il teorema del n.° 51: per il quale è sufficiente di considerare nei §§ 2, 3, 4, 5, 6 le trasformazioni involutorie **date**, come aventi i punti fondamentali a distanze finite. Vedasi nel n.° 52 che cosa resta ancora per risolvere interamente la questione.

Inoltre, essendo le curve fondamentali razionali, si ha

$$(r_i-1)(r_i-2)=\sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik}-1), \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h). \tag{11}$$

Dico che si avrà ancora la relazione

$$r_i(r_i+3)=\sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik}+1) \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h). \tag{12}$$

Si osservi infatti che, dati i punti fondamentali, la jacobiana della rete di curve corrispondenti alle rette del piano è individuata; onde, per una curva fondamentale che è una parte di quella jacobiana, potrà accadere solamente che i passaggi per i punti fondamentali non rappresentino tutte condizioni indipendenti (*): cioè si abbia

$$r_i(r_i+3)\leqq \sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik}+1) \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h)$$

ossia, per la (11)

$$3r_i-1\leqq \sum_k \alpha_{ik} \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h).$$

Ma è facile vedere che deve aver luogo sempre il segno inferiore; perchè altrimenti, sommando le (10), per la precedente, le (8) e (9), si giungerebbe ad una relazione assurda. Adunque (**); una curva fondamentale è determinata da' suoi passaggi pei punti fondamentali, e questi rappresentano tutte condizioni indipendenti. Dalle (11) (12) seguono poi queste altre relazioni

$$r_i^2+1=\sum_k \alpha^2_{ik} \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h) \tag{13}$$

$$3r_i-1=\sum_k \alpha_{ik} \qquad (i=1,\ 2,\dots\ h). \tag{14}$$

Si noti infine che due curve fondamentali si segano soltanto in punti fondamentali; la quale proprietà è evidente essendo i punti fondamentali a distanze finite. Essa può anche essere dedotta dalle formule precedenti. Infatti se fosse

$$r_i r_k \geqq \sum_s \alpha_{si}\alpha_{sk},$$

essendo l, k due (diversi) dei numeri $1,\ 2,\dots\ h$; sommando le relazioni che nascono di qui col dare a k i valori $1,\ 2,\dots\ i-1,\ i+1,\dots\ h$, insieme alla

(*) Altrimenti: Se una curva fondamentale non risultasse determinata da' suoi passaggi pei punti fondamentali, siccome l'essere la curva fondamentale dipende soltanto da questi passaggi, avremmo infinite curve fondamentali: il che è assurdo.

(**) Avvertiamo nuovamente che si considerano i punti fondamentali a distanze finite.

(13), si troverebbe

$$r_i \sum_k r_k \geqq \sum_s \alpha_{si}(\alpha_{s1} + \alpha_{s2} + \cdots + \alpha_{sh}) - 1$$

cioè, per le (14), (8),

$$r_i(3n-3) \geqq \sum_s \alpha_{si}(3r_s - 1) - 1$$

la quale, per le (10), (14), non può essere verificata se non ha luogo il segno inferiore. Dunque si ha

$$r_i r_k = \sum_s \alpha_{si} \alpha_{sk}. \tag{15}$$

11. Ciò premesso, consideriamo una curva qualunque fondamentale L_1 d'ordine r_1. Per questa curva i passaggi per il punto 1 equivalgono ad $\frac{\alpha_{11}(\alpha_{11}+1)}{2}$ condizioni lineari. Per una curva L che soddisfi a tutte le condizioni della L_1, tranne che nel punto 1 abbia un punto $(\alpha_{11}-1)^{\text{uplo}}$, resteranno quindi

$$\frac{\alpha_{11}(\alpha_{11}+1)}{2} - \frac{(\alpha_{11}-1)\alpha_{11}}{2} = \alpha_{11}$$

condizioni libere; cioè la L apparterrà ad un sistema $\infty^{\alpha_{11}}$. Inoltre, poichè L_1 è del genere zero, L sarà del genere

$$\frac{\alpha_{11}(\alpha_{11}-1)}{2} - \frac{(\alpha_{11}-1)(\alpha_{11}-2)}{2} = \alpha_{11} - 1.$$

Alla curva L nella trasformazione involutoria corrisponde una curva d'ordine

$$n r_1 - (\alpha_{11}-1) r_1 - \alpha_{12} r_2 - \alpha_{13} r_3 - \cdots$$

cioè, per la prima delle (10), d'ordine r_1: avente il punto 1 multiplo secondo

$$r_1^2 - \alpha_{11}(\alpha_{11}-1) - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \cdots$$

cioè, per la (13), secondo $\alpha_{11}-1$, e il punto $i(=2, 3, \ldots 4)$ multiplo secondo

$$r_1 r_i - (\alpha_{11}-1)\alpha_{1i} - \alpha_{21}\alpha_{2i} - \alpha_{31}\alpha_{3i} - \cdots$$

cioè, per la (15), multiplo secondo α_{1i}. Adunque, la curva corrispondente a L ha lo stesso ordine e le stesse moltiplicità di L, cioè il sistema formato dalle curve L, che indicheremo con $[L]$, è, nella trasformazione involutoria, corrispondente a sè stesso.

Due curve del sistema $[L]$ si segano, per la (13), in

$$r_1^2 - (\alpha_{11}-1)^2 - \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 - \cdots = 2\alpha_{11} - 2$$

punti, il che segue anche dall'essere il sistema $\infty^{\alpha_{11}}$, le curve di genere $\alpha_{11}-1$ e $\beta=0$ (cfr. n.° 1).

Indicando con $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_h$ i numeri $\alpha_{11}-1, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1h}$, si hanno adunque, pel sistema $[L]$, le relazioni

$$\sum_i \rho_i^2 = r_1^2 \quad -2(\alpha_{11}-1) \tag{16}$$

$$\sum_i \rho_i = 3r_1 - 2. \tag{17}$$

12. In una trasformazione involutoria si può sempre considerare almeno un sistema $[L]$ ottenuto nel modo detto. Ciò risulta dalla seguente proprietà:

In una trasformazione involutoria (d'ordine >2) una almeno delle tre curve fondamentali d'ordine più elevato passa per il punto fondamentale a cui corrisponde.

Sieno infatti 1, 2, 3 i punti fondamentali d'ordine più alto; onde si avrà $r_1+r_2+r_3>n$ (*) e però

$$r_1+r_2+r_3=n+\delta, \tag{A}$$

δ indicando un numero (intero) positivo non nullo. Alla retta 12 corrisponde una curva d'ordine $n-r_1-r_2$ la quale deve avere il punto 1 multiplo secondo $r_1-\alpha_{11}-\alpha_{12}$ e il punto 2 multiplo secondo $r_2-\alpha_{22}-\alpha_{21}$: sarà quindi

$$n-r_1-r_2 \geqq r_1-\alpha_{11}-\alpha_{12}+r_2-\alpha_{22}-\alpha_{12}$$

cioè:

$$2r_1+2r_2 \leqq n+\alpha_{11}+\alpha_{22}+2\alpha_{12}. \tag{B}$$

Questa relazione sussiste anche se la retta 12 è fondamentale [onde non può, per la (14), contenere altri punti fondamentali, oltre 1, 2] giacchè allora si avrebbe per le (10), (14), (15),

$$r_1+r_2=n, \qquad \alpha_{11}+\alpha_{12}\geqq r_1, \qquad \alpha_{22}+\alpha_{12}\geqq r_2$$

il segno $>$ riferendosi al caso in cui la retta 12 corrisponda al punto 1 (nel qual caso del resto si ha già un sistema $[L]$ nel fascio di rette di centro 2). La stessa relazione (B) è vera anche quando la 12, non essendo fondamentale, contenesse altri punti fondamentali oltre 1, 2. Perchè, ammettendo, per es., che sulla retta 12 giaccia il punto 4, il ragionamento fatto per stabilire la relazione (B) condurrebbe a quest'altra

$$2r_1+2r_2+2r_4 \leqq n+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{44}+2\alpha_{12}+2\alpha_{24}+2\alpha_{41}$$

(*) Cfr. n.° 4.

dalla quale si passa alla (B) osservando che manifestamente si ha

$$r_4 \geqq \alpha_{44} + \alpha_{24} + \alpha_{14}$$

e per conseguenza

$$2 r_4 \geqq \alpha_{44} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{41}.$$

Scrivendo la (B) per le tre rette 12, 23, 31 e sommando, si trova

$$4(r_1 + r_2 + r_3) \leqq 3n + 2\alpha_{11} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{33} + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{12}$$

Ma si ha:

$$r_1 \geqq \alpha_{12} + \alpha_{13} - \varepsilon_1$$

$$r_2 \geqq \alpha_{21} + \alpha_{23} - \varepsilon_2$$

$$r_3 \geqq \alpha_{31} + \alpha_{32} - \varepsilon_3$$

dove ε_1 (e similmente ε_2, ε_3) è 0 od 1; acquistando questo ultimo valore (e allora dovendosi prendere il segno di eguaglianza) se accada che la retta 23 sia fondamentale e corrisponda al punto 1. Quindi la precedente relazione diventa, tenendo anche presente la (A),

$$3\delta - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \leqq 2\alpha_{11} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{33}.$$

Adunque, eccettuato il caso in cui $\delta = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, che conduce ad una trasformazione involutoria di 2° ordine (*), una almeno delle α_{11}, α_{22}, α_{33} deve essere diversa da zero: come asserimmo.

§ 3.

Trasformazioni involutorie per le quali una (almeno) delle $\alpha_{ii}(i = 1, 2, \ldots h)$ è l'unità.

13. Supponiamo che esista una curva fondamentale, per es., la L_1, la quale passi semplicemente pel punto fondamentale a cui corrisponde. Il sistema $[L]$ a cui essa dà origine (n.° 11) è un fascio di curve di genere zero corrispondenti a due a due, ovvero corrispondenti a sè stesse. Un tal fascio è deducibile con una serie di trasformazioni quadratiche da un fascio di rette (n.° 2). La trasformazione involutoria a cui si giunge dalla data per la detta

(*) Quella accennata nel n.° 15 della mia Nota citata: *Sopra una classe*, ecc.

serie di trasformazioni è necessariamente di Jonquières. Infatti una retta arbitraria che incontri una retta r del fascio in un punto A ha per corrispondente una curva che incontra la corrispondente di r (distinta o no da essa) in un punto (il corrispondente di A): onde il centro del fascio è $(n-1)^{\text{uplo}}$ per le curve della rete corrispondenti alle rette del piano, se la trasformazione è di ordine n. Adunque:

Una trasformazione involutoria nella quale si presenta una curva fondamentale passante semplicemente pel punto fondamentale a cui corrisponde è riducibile, per trasformazioni quadratiche, ai casi *a*), *b*).

14. La proprietà precedente, ovvero lo studio diretto del sistema $[L]$ conduce a determinare le proprietà di tali involuzioni; cioè il sistema $[L]$ sarà formato di curve unite, ovvero corrispondenti due a due. Nel 1.° caso sopra ogni curva esiste una involuzione di punti corrispondenti e però due punti uniti: e il luogo di tali punti uniti è una curva punteggiata unita. Nel 2.° caso si hanno due sole curve unite del fascio e sopra ciascuna due punti uniti, cioè la trasformazione ammette quattro punti uniti; ovvero può una di quelle curve essere punteggiata unita; ovvero possono esserle amendue (*); ecc.

15. Le cose dette nei numeri precedenti 13, 14 sono manifestamente applicabili a tutte le trasformazioni involutorie nelle quali si trovi un fascio di curve razionali, unite o corrispondenti due a due.

16. Aggiungeremo qui la dimostrazione di proprietà che ci torneranno utili in seguito.

Premettiamo la ricerca dell'ordine n' della nuova trasformazione involutoria che si ottiene in un piano Π, trasformando quadraticamente un piano P, nel quale è data una trasformazione involutoria di ordine n. Se 1, 2, 3 sono i vertici del triangolo fondamentale preso nel piano P, ad una retta di Π corrisponderà in P, per la trasformazione quadratica, una conica circoscritta al triangolo 123; a questa, per la trasformazione involutoria, una curva di ordine $2n-r_1-r_2-r_3$ avente in 1, 2, 3 punti multipli degli ordini $2r_1-\alpha_{11}-\alpha_{12}-\alpha_{13}$, $2r_2-\alpha_{21}-\alpha_{22}-\alpha_{23}$, $2r_3-\alpha_{31}-\alpha_{32}-\alpha_{33}$: e infine a questa curva, per la trasformazione quadratica, corrisponderà in Π una curva di ordine

$$4n-2(r_1+r_2+r_3)-(2r_1-\alpha_{11}-\alpha_{12}-\alpha_{13})-(2r_2-\alpha_{21}-\alpha_{22}-\alpha_{23})-(2r_3-\alpha_{31}-\alpha_{32}-\alpha_{33}).$$

Adunque si ha

$$n'=4n-4(r_1+r_2+r_3)+\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}+2\alpha_{12}+2\alpha_{23}+2\alpha_{31}. \qquad (18)$$

(*) Cfr. la *Correzione* alla mia Nota citata. Ann. di Mat., serie II, tom. 8.

Se il punto 1, per es., non è fondamentale, nè unito, dovrà porsi $r_1 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$. Che se il punto 1 (non essendo fondamentale) è unito, si dovrà inoltre sottrarre l'unità, giacchè alla conica passante per 1 corrisponderà allora, per la trasformazione involutoria, una curva per lo stesso punto. Per una ragione analoga, se 1, 2 (non essendo fondamentali) sono corrispondenti, si dovrà porre $r_1 = r_2 = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ e sottrarre due (*).

17. Ciò posto, sia 4 un punto semplice fondamentale. Escludiamo che la retta fondamentale corrispondente passi per 4, giacchè si ottengono allora (n.° 13) i casi *a*), *b*). Quella retta fondamentale congiunga i punti 2, 3; onde abbiasi, per le (10) (15),

$$r_2 + r_3 = n, \qquad \alpha_{22} + \alpha_{23} = r_2, \qquad \alpha_{33} + \alpha_{32} = r_3.$$

Prendasi un altro punto fondamentale 1 e si operi una trasformazione quadratica col triangolo 123: per le precedenti relazioni si avrà dalla (18)

$$n' = 4n - 4(n + r_1) + n + \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13},$$

e poichè

$$r_1 > \alpha_{11}, \qquad 2r_1 \geqq 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13},$$

segue

$$n' < n - r_1;$$

cioè la trasformazione è riducibile ad ordine minore.

Consideriamo ancora un punto 6 fondamentale doppio per una trasformazione involutoria. La conica fondamentale corrispondente, non passando per 6 (n.° 13), contenga i punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5. Si ha per le (10) (15)

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 &= 2n \\
\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} &= 2r_1 \\
\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \alpha_{25} &= 2r_2 \\
\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{35} &= 2r_3 \\
\alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \alpha_{44} + \alpha_{45} &= 2r_4 \\
\alpha_{51} + \alpha_{52} + \alpha_{53} + \alpha_{54} + \alpha_{55} &= 2r_5.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} + 2\alpha_{23} = 4n - (4r_4 - \alpha_{44} - 2\alpha_{45}) - (4r_5 - \alpha_{55}):$$

(*) Si noti che la formola (18) potrebbe subire modificazioni a cagione di punti fondamentali dell'involuzione successivi ad 1, 2, 3 (cfr. Nota al n.° 21).

e quindi, prendendo per triangolo fondamentale 123, dalla (18) si ottiene

$$n' = \alpha_{44} + \alpha_{55} + 2\alpha_{45}$$

cioè, per essere

$$\alpha_{44} + \alpha_{45} \leqq r_4, \qquad \alpha_{55} + \alpha_{54} \leqq r_5,$$

si ottiene

$$n' \leqq r_4 + r_5.$$

Se fosse $r_4 + r_5 = n$ la retta 45 sarebbe fondamentale, cioè esisterebbe un punto semplice fondamentale, il qual caso fu considerato precedentemente. In ogni altro, $r_4 + r_5 < n$.

Concludiamo che: Se una trasformazione involutoria possiede un punto semplice fondamentale, ovvero un punto doppio fondamentale, e non presenta i casi *a*), *b*), è riducibile, per una trasformazione quadratica, ad una trasformazione involutoria di ordine minore (*).

§ 4.

Trasformazioni involutorie per le quali una (almeno) delle $\alpha_{ii} (i = 1, 2, \ldots h)$ è 2.

18. Quando esista una curva fondamentale L_1 che abbia nel punto 1, a cui corrisponde, un punto doppio, il sistema $[L]$ è una rete di curve di genere 1, per le quali sussistono le (cfr. n.° 11)

$$\sum_i \rho_i^2 = r_1^2 - 2$$
$$\sum_i \rho_i = 3r_1 - 2.$$

Una tal rete si può sempre dedurre con trasformazioni quadratiche da una rete di curve di 3° ordine con sette punti comuni (n.i 6, 9). Siamo quindi condotti a considerare le trasformazioni involutorie che rappresenteremo con I, le quali ammettono una rete R di curve (unite o corrispondenti due a due) di 3° ordine, con sette punti fissi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

(*) Per istabilire generalmente questo teorema dovrebbe discutersi ciò che accade se i punti fondamentali della trasformazione involutoria diventano infinitamente vicini. Però l'applicazione del teorema è fatta in seguito soltanto a trasformazioni involutorie aventi i punti fondamentali a distanze finite (n.i 23, 34).

19. Una trasformazione I non può avere altri punti fondamentali all'infuori dei punti 1, 2,... 7. Infatti, rappresentando con r_1, r_2,... r_7 le molteplicità di questi punti per la trasformazione I (le r potendo anche essere nulle), perchè ad una curva di R corrisponde un'altra curva (di R) dello stesso ordine deve essere

$$3n-(r_1+r_2+\cdots+r_7)=3 \qquad (9)'$$

che è appunto la (9).

20. Una trasformazione I è riducibile ai casi *a*), *b*), se nella rete R esiste un fascio di cubiche razionali, ovvero un fascio di cubiche che si spezzano.

Osserviamo anzitutto che un fascio di cubiche razionali appartenenti ad R sarà formato di cubiche aventi un punto doppio in uno dei punti 1, 2,... 7. Un tal punto sarà quindi di contatto per le curve di R e però rappresenterà due infinitamente vicini dei punti 1, 2,... 7. Inoltre è chiaro che, se un fascio di cubiche della rete R si spezza in una retta e in un fascio di coniche, la retta contiene tre dei sette punti nominati: se si spezza in una conica (anche formata di due rette) e in un fascio di rette, la conica ne contiene sei.

Dicasi F il fascio di cubiche, di coniche o di rette. Ad F corrisponderà per l'involuzione un fascio F' che potrà pure essere in ciascun caso un fascio di cubiche, di coniche o di rette. Per diminuire il numero dei casi da esaminare, potremo intendere fatte le trasformazioni quadratiche che riducono F' (per es.) ad un fascio di rette (n.° 2); per le quali trasformazioni, adoperandosi i soli punti 1, 2,... 7, è evidente che si giunge sempre ad una rete R e però ad una trasformazione I. Allora potrà accadere che:

1.° Il fascio F' sia un altro fascio di rette. Essendo 1 il centro di uno dei due fasci F, F', dovrà adunque aversi

$$n-r_1=1,$$

e si ha per conseguenza una trasformazione di Jonquières. Anzi se i centri dei due fasci sono diversi è chiaro che deve essere $n=2$.

2.° Il fascio F' sia un fascio di coniche. Se il centro del fascio F di rette è un punto base del fascio F' si faccia una trasformazione quadratica (*) ponendo il triangolo fondamentale con un vertice nel punto base comune e

(*) Si noti che i punti 1, 2,... 7, esistendo sopra curve generali del 3° ordine, non possono divenire infinitamente vicini in direzioni diverse: e quindi tre qualunque possono essere sempre i punti fondamentali di una trasformazione quadratica.

gli altri due in due altri punti base di F'. Il caso che consideriamo è allora ridotto al 1°. Che se il centro di F è un punto 1 e i punti basi di F' sono quattro altri punti 2, 3, 4, 5 si avrà

$$n - r_1 = 2$$

$$2n - r_2 - r_3 - r_4 - r_5 = 1$$

donde, per la (9)', $r_6 = r_7 = 0$. Ne risulta $n = 3$, ovvero $n = 2$ (*).

3.° Il fascio F' sia un fascio di cubiche. Fu già avvertito che nel punto doppio comune a queste cubiche cadono due dei punti 1, 2,... 7, per es. 1, 2. Le cubiche di F' passano inoltre per 3, 4, 5, 6, 7. Il presente caso è ridotto al 2° trasformando con un triangolo, di cui un vertice sia nel punto doppio e gli altri due vertici sieno presi arbitrariamente fra i punti 3, 4, 5, 6, 7; avvertendo che, se il punto doppio non è il centro di F, debba essere scelto questo per uno degli ultimi due vertici.

21. Il teorema dimostrato può anche enunciarsi così:

Una trasformazione I è riducibile ai casi *a*), *b*) se dei punti 1, 2,... 7, due (almeno) sono infinitamente vicini (**); ovvero tre sopra una retta; ovvero sei sopra una conica.

22. Per esempio, consideriamo il caso particolare in cui le curve di R sieno unite (corrispondenti a sè stesse) e sei dei punti 1, 2,... 7 esistano sopra una conica, ovvero tre sopra una retta.

Se i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 esistono sopra una conica, due curve di R si segano in due punti (variabili) corrispondenti che debbono essere in linea retta col punto 1, per una proprietà notissima delle curve di 3° ordine. Abbiamo adunque un fascio di rette unite di centro 1: e però una trasformazione di

(*) Cfr. Cremona: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.* Mem. dell'Acad. di Bologna, Nota II, n.° 22. Segue di qui che, se una trasformazione involutoria contiene un punto $(n-2)^{\text{uplo}}$, deve essere necessariamente $n \leq 5$; poichè si debbono trascurare le soluzioni non conjugate a sè stesse.

(**) È facile vedere direttamente come avvenga che il semplice avvicinamento indefinito dei punti fondamentali possa produrre la riducibilità della trasformazione involutoria. Quando i punti 1, 2,... 7 sono dati arbitrariamente, vedremo (n.° 24) che si ha una involuzione dell'8° ordine con sette punti tripli, irriducibile. Se due punti 1, 2 diventano successivi, trasformando il piano dato P in un altro Π col prendere (per es.) il triangolo 134 si troverà (cfr. n.° 16) che ad una retta di Π corrisponde una conica circoscritta al triangolo 134 e a questa corrisponde in P una curva del 7° ordine avento 1, 3, 4 punti doppi e 2, 5, 6, 7 punti tripli. Ma, passando da P a Π, questa curva viene ad essere trasformata col triangolo 234 ed ha quindi per corrispondente una curva del 7° ordine, ecc.

Jonquières con una curva unita (dell'ordine stesso della trasformazione); la quale trasformazione può essere evidentemente soltanto una delle seguenti:

$$\text{I)}\quad n=1,\quad r_1=r_2=r_3=\cdots=r_6=r_7=0$$

$$\text{II)}\quad n=2,\quad r_1=r_2=r_3=1,\quad r_4=r_5=r_6=r_7=0$$

$$\text{III)}\quad n=3,\quad r_1=2,\quad r_2=r_3=r_4=r_5=1,\quad r_6=r_7=0$$

$$\text{IV)}\quad n=4,\quad r_1=3,\quad r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=r_7=1$$

(i punti di moltiplicità zero essendo uniti o corrispondenti a due a due).

Facciamo invece l'ipotesi che tre 5, 6, 7 dei sette punti considerati sieno sopra una retta. Allora due curve di R si segano sopra una conica passante per 1, 2, 3, 4 e quindi abbiamo un fascio di coniche unite con questi punti base. Trasformando quadraticamente, ponendo il triangolo fondamentale in tre punti base, si giunge ad una trasformazione con un fascio di rette unite, e però ad una delle quattro trasformazioni precedenti I), II), III), IV). Sicchè, retrocedendo, troviamo nell'ipotesi ora fatta, oltre a queste trasformazioni, le seguenti:

$$\text{V)}\quad n=4,\quad r_1=r_2=r_3=2,\quad r_4=r_5=r_6=1,\quad r_7=0,$$

$$\text{VI)}\quad n=5,\quad r_1=3,\quad r_2=r_3=r_4=2,\quad r_5=r_6=r_7=1,$$

$$\text{VII)}\quad n=5,\quad r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=2,\quad r_7=0,$$

$$\text{VIII)}\quad n=6,\quad r_1=r_2=3,\quad r_3=r_4=r_5=r_6=2,\quad r_7=1,$$

$$\text{IX)}\quad n=7,\quad r_1=r_2=r_3=r_4=3,\quad r_5=r_6=r_7=2;$$

le quali nascono in vario modo dalle I), II), III), IV) per trasformazioni quadratiche. Per es., le V), VI), VII), VIII) nascono tutte dalla II), che è l'inversione quadrica, con una sola trasformazione quadratica. Cioè, indicando con c uno qualsiasi dei punti di contatto delle tangenti condotte dal polo (dell'inversione quadrica) alla conica punteggiata unita, con u_1, u_2, u_3 punti arbitrarî di questa conica, con v_1, v_2 punti arbitrarî del piano, si ottiene la V) con un triangolo cu_1v_1; la VI) con un triangolo cv_1v_2; la VII) con un triangolo $u_1u_2u_3$; la VIII) con un triangolo $u_1u_2v_1$. La IX) proviene (per es.) dalla IV) prendendo tre punti semplici di questa trasformazione per vertici del triangolo fondamentale della trasformazione quadratica. In tal modo si trova che le jacobiane J (cioè il sistema delle curve fondamentali) e le curve punteggiate unite Γ sono, nei singoli casi, le seguenti:

per la V):

$$J \equiv (12346)_1^2 (12345)_2^2 (12356)_3^2 (12)_4^1 (23)_5^1 (31)_6^1$$

$$\Gamma \equiv (123)^2;$$

per la VI):

$$J \equiv (1^2 234567)_1^3 (12347)_2^2 (12346)_3^2 (12345)_4^2 (14)_5^1 (13)_6^1 (12)_7^1$$

$$\Gamma \equiv (1^2 234)^3;$$

per la VII):

$$J \equiv (23456)_1^2 (13456)_2^2 (12456)_3^2 (12356)_4^2 (12345)_5^2 (12346)_6^2$$

$$\Gamma \equiv (56)^1;$$

per la VIII):

$$J \equiv (12^2 34567)_1^3 (1^2 234567)_2^3 (12456)_3^2 (12346)_4^2 (12356)_5^2 (12345)_6^2 (12)_7^1$$

$$\Gamma \equiv (1245)^2;$$

per la IX):

$$J \equiv (1^2 234567)_1^3 (12^2 34567)_2^3 (123^2 4567)_3^3 (1234^2 567)_4^3 (12345)_5^2 (12346)_6^2 (12347)_7^2$$

$$\Gamma \equiv (1^2 2^2 3^2 4^2 567)^5;$$

ove, per es., $(12346)_1^2$ indica una curva fondamentale passante per i punti 1, 2, 3, 4, 6, d'ordine 2 e corrispondente al punto 1, e $(123)^2$ indica una curva di 2° ordine passante per 1, 2, 3 e tangente in questi punti alle curve $(12346)_1^2$, $(12345)_2^2$, $(12356)_3^2$ ordinatamente corrispondenti agli stessi punti. È evidente infatti che i rami di una curva punteggiata unita, uscenti da un punto fondamentale, debbono toccare ivi altrettanti rami della curva fondamentale corrispondenti a quel punto.

23. Per il teorema del n.° 21 ci restano a considerare trasformazioni I, nelle quali i sette punti 1, 2,... 7 sono a distanza finita (e però le curve fondamentali non si spezzano) e inoltre di essi non sono situati tre sopra una retta, nè sei sopra una conica. Per tali trasformazioni possiamo indubbiamente scrivere queste relazioni

$$\begin{aligned} 2r_1 + r_2 + \cdots + r_7 &\leqq 3n \\ r_1 + 2r_2 + \cdots + r_7 &\leqq 3n \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ r_1 + r_2 + \cdots + 2r_7 &\leqq 3n \end{aligned}$$

considerando, nella rete R, le sette cubiche (che non si decompongono) aventi punti doppî in 1, 2,... 7 ordinatamente e dovendosi prendere il segno di eguaglianza se quelle cubiche sono fondamentali. Da esse e dalle (9)′ si trae facilmente

$$n \leqq 8, \qquad r_i \leqq 3 \qquad (i=1,\ 2,\ldots\ 7).$$

Se $n=8$ deve essere necessariamente $r_i=3$ e reciprocamente. Anzi dalle (8) (9) segue immediatamente che se una trasformazione univoca ammette soltanto punti tripli è necessariamente dell'8° ordine con sette punti tripli.

Ora, se de' punti 1, 2,... 7 esiste alcuno semplice o doppio, siccome per le trasformazioni I che ora consideriamo quei punti sono a distanze finite, potremo applicare il teorema del n.° 17 (*) e quindi, tenendo presente anche il teorema del n.° 21, concludere in generale:

Una trasformazione I che possiede punti fondamentali semplici o doppî, se non presenta i casi *a*), *b*), è riducibile ad una trasformazione I d'ordine minore;

la quale proprietà resta così stabilita anche se i punti 1, 2,... 7 divengono successivi.

24. Adunque rimane infine da esaminare una trasformazione I per la quale si presentano soltanto punti tripli (n.° 23), cioè una trasformazione dell'ottavo ordine con sette punti tripli 1, 2,... 7. Di questi punti possiamo ritenere che due qualunque non sieno infinitamente vicini, sei non esistano sopra una conica, nè tre sopra una retta (n.° 21). Le curve fondamentali (del 3° ordine) passeranno per tutti i punti fondamentali e avranno rispettivamente in ciascuno un punto doppio. Si escluda che il punto doppio di una curva fondamentale sia diverso dal punto a cui essa corrisponde, giacchè le trasformazioni per le quali ciò potesse accadere sono riducibili ai casi *a*), *b*) (§ 3). Quindi resteranno a considerare le sole trasformazioni I per le quali il sistema delle curve fondamentali è il seguente:

$$J \equiv (1^2 2 3 4 5 6 7)_1^3 (1 2^2 3 4 5 6 7)_2^3 \ldots (1 2 3 4 5 6 7^2)_7^3.$$

Una tale trasformazione si ottiene manifestamente facendo corrispondere a ciascun punto M del piano il nuovo punto M' comune alle curve del 3° ordine passanti per 1, 2,... 7 e per M. La jacobiana della rete di curve di 3° ordine aventi a comune i punti 1, 2,... 7 è manifestamente la curva punteggiata unita, e però

$$\Gamma \equiv (1^2 2^2 3^2 \ldots 7^2)^6.$$

(*) Cfr. Nota allo stesso n.° 17.

Dico ora che nessun altra trasformazione involutoria è possibile col sistema superiormente scritto di punti e curve fondamentali. Questa proprietà è un corollario del seguente teorema generale.

25. Una trasformazione involutoria (d'ordine $n > 2$) è *individuata*, dato il sistema dei punti e delle curve fondamentali, se i punti fondamentali non sono infinitamente vicini (*).

Premettendo che dalle (1), (2) il valore di n è determinato, consideriamo una retta, non fondamentale, che congiunge due punti fondamentali 1, 2. A questa retta, per una trasformazione involutoria (d'ordine n), che abbia il dato sistema di punti e curve fondamentali, corrisponderà una curva K che incontrerà la curva L_1 corrispondente al punto 1 (e similmente la L_2) in un punto corrispondente alla direzione della 12 uscente da 1. Per ogni altra trasformazione involutoria (d'ordine n), che possa avere il medesimo sistema di punti e curve fondamentali, alla curva K corrisponderà la 12. Sicchè, prendendo tre rette 12, 13, 14 non fondamentali, alle tre direzioni di queste tre rette che partono da 1 debbono corrispondere (qualunque possa essere l'involuzione) tre punti determinati della L_1. È adunque fissata la projettività fra le direzioni partenti da 1 e i punti della L_1. Segue immediatamente, se l'ordine r_1 di L_1 è >1, che ad una retta arbitraria corrisponde una determinata curva di ordine n. Se $r_1 = 1$, facendo lo stesso ragionamento per un altro punto 2, si giunge alla stessa conseguenza. Adunque non può esistere che una sola trasformazione involutoria. Per es., nel caso del n.° 24, alle tre coniche 23456, 23467, 23457 debbono corrispondere le rette 17, 15, 16: e però alle tre intersezioni (diverse dai punti fondamentali) di quelle tre coniche colla curva $(1^2 234567)_1^3$ debbono corrispondere le tre direzioni uscenti da 1 delle tre rette.

Il ragionamento fatto suppone che ci sieno punti fondamentali (uno o due)

(*) Tale condizione, la quale è verificata nelle applicazioni che noi facciamo del teorema (n.° 24 e 34), si può forse limitare a questo soltanto, che le curve fondamentali non si spezzino. Certamente, se le curve fondamentali si spezzano, le trasformazioni involutorie possono non essere determinate dal sistema dei punti e delle curve fondamentali. Per es., si costruisca, nel modo detto nel n.° 3 della mia Nota citata, l'involuzione del 3° ordine avente una cubica Γ punteggiate unita e si ponga il punto O in un flesso della medesima. Allora dei quattro punti semplici fondamentali della trasformazione uno è successivo ad O sulla tangente di flesso e gli altri tre giacciono sulla polare armonica del flesso. La conica fondamentale consta di quella tangente e di questa polare. Ora i punti e le curve fondamentali non variano, se Γ varia nel fascio formato da essa e dalla curva del 3° ordine composta della tangente di flesso e della polare armonica contata due volte, ecc.

tali che almeno tre delle rette che li congiungono ai rimanenti sieno non fondamentali. Ciò accade certamente se non esistono punti semplici fondamentali. Che se si abbia un punto 1 semplice fondamentale, e la retta 12, per es., sia fondamentale, dal punto 1 non potrà partirne alcun altra (se $n>2$), giacchè, per la (10), essendo $r_1+r_2=n$, dovrà essere 2 punto $(n-1)^{\text{uplo}}$ e si avrà una trasformazione di Jonquières. In questo caso, dal punto 1 partiranno almeno tre rette, non fondamentali, giacchè sopra due rette (non fondamentali) uscenti dal punto 1, possono giacere al più $2n-3$ punti semplici (compreso 1). Parimenti se dal punto fondamentale semplice 1 non parte alcuna retta fondamentale, è evidente, per la (9), che debbono partire almeno tre rette non fondamentali.

Se $n=2$, il teorema non è vero, come è facile riconoscere nei due casi possibili (*). Infatti nell'inversione quadrica per conica punteggiata unita può prendersi una qualunque in un fascio di coniche bitangenti (in due vertici del triangolo fondamentale dato), e nel caso dell'involuzione quadratica rispetto ad un fascio di coniche può scegliersi questo fascio in una rete (che ha per triangolo conjugato il dato triangolo fondamentale).

26. Concludiamo adunque (n.° 24) che: Una trasformazione involutoria che possiede una curva fondamentale, avente nel punto fondamentale a cui corrisponde un punto doppio, è riducibile per trasformazioni quadratiche ai casi *a*), *b*), *c*).

27. La conclusione precedente è evidentemente applicabile a tutte le trasformazioni involutorie per le quali si presenti una rete di curve unite o corrispondenti due a due, di genere 1 e due delle quali si taglino in due punti (variabili).

28. Aggiungerò qui la dimostrazione di un altra proprietà che dovrà essere applicata in seguito.

Suppongasi che in una trasformazione involutoria qualsiasi esista una curva fondamentale di 3° ordine, per es. la curva L_8 corrispondente al punto 8. Se L_8 passa semplicemente o doppiamente pel punto 8, ricadiamo nei casi già esaminati. Se non contiene il punto 8, avrà, per es., in 1 il punto doppio e passerà semplicemente per 2, 3, 4, 5, 6, 7. Si ha dapprima, per le (10), (15)

$$\begin{aligned} 2r_1+r_2+r_3+\cdots+r_7 &= 3n \\ 2\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\cdots+\alpha_{17} &= 3r_1 \\ 2\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}+\cdots+\alpha_{27} &= 3r_2 \\ 2\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}+\cdots+\alpha_{37} &= 3r_3. \end{aligned}$$

(*) Cfr. n.° 15 della mia Nota già citata.

Consideriamo la conica 14567, per es., che supporremo non fondamentale, altrimenti (n.° 17) la nostra trasformazione sarebbe riducibile ad ordine minore se non presentasse i casi *a*), *b*). Quella conica potrebbe contenere altri punti fondamentali, oltre i punti 1, 4, 5, 6, 7; per es. i punti 9,... Quindi dicendo i l'ordine della sua curva corrispondente e i_1, i_2, i_3 le moltiplicità di questa curva nei punti 1, 2, 3, si avrà

$$r_1+r_4+r_5+r_6+r_7+r_9+\cdots=2n-i$$

$$\alpha_{11}+\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\alpha_{19}+\cdots=2r_1-i_1$$

$$\alpha_{21}+\alpha_{24}+\alpha_{25}+\alpha_{26}+\alpha_{27}+\alpha_{29}+\cdots=2r_2-i_2$$

$$\alpha_{31}+\alpha_{34}+\alpha_{35}+\alpha_{36}+\alpha_{37}+\alpha_{39}+\cdots=2r_3-i_3$$

che, aggiunte alle superiori, dànno

$$r_1+r_2+r_3=n+i+r_9+\cdots$$

$$\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}=r_1+i_1+\alpha_{19}+\cdots$$

$$\alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}=r_2+i_2+\alpha_{29}+\cdots$$

$$\alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}=r_3+i_3+\alpha_{39}+\cdots$$

per le quali, trasformando quadraticamente col triangolo 123, l'ordine n' della nuova trasformazione involutoria è, per la (18),

$$n'=n-(3i-i_1-i_2-i_3)-(3r_9-\alpha_{19}-\alpha_{29}-\alpha_{39})-\cdots:$$

e quindi, poichè manifestamente le quantità fra parentesi sono positive (non nulle),

$$n'<n.$$

Dunque: Una trasformazione involutoria, che possiede un punto fondamentale di 3° ordine, è sempre riducibile ad ordine inferiore, se non presenta i casi *a*), *b*), *c*) (*).

(*) Si ripeta qui l'osservazione della Nota al n.° 17 (cfr. n.° 34).

§ 5.

Trasformazioni involutorie
per le quali una (almeno) delle $\alpha_{ii}(i=1, 2, \ldots h)$ è 3.

29. Il sistema $[L]$ nascente da una curva L_1 avente in 1 un punto triplo e però soddisfacente alle (n.° 11)

$$\sum_i \rho_i^2 = r_i^2 - 4$$
$$\sum_i \rho_i = 3r_i - 2,$$

è deducibile, con trasformazioni quadratiche dall'uno o dall'altro dei due sistemi seguenti (n.° 8):

1.° Sistema di curve di 4° ordine con un punto doppio e otto punti semplici comuni.

2.° Sistema di curve di 6° ordine con otto punti doppî comuni.

Escludiamo subito le trasformazioni che ammettono il 1° sistema di curve (corrispondenti a sè stesse o a due a due), giacchè tali trasformazioni entrano nei casi *a*), *b*). Infatti, se diciamo $r_1, r_2, \ldots r_9$ le moltiplicità del punto doppio e degli otto punti semplici per la trasformazione, perchè le curve di 4° ordine sono corrispondenti, dovrà essere

$$4n-(2r_1+r_2+r_3+\cdots+r_9)=4.$$

Ma, per la (9), si ha

$$r_1+r_2+r_3+\cdots+r_9 \leqq 3n-3$$

valendo il segno inferiore se non esistono punti fondamentali diversi dai punti 1, 2,... 9: quindi

$$r_1 \geqq n-1$$

e però, ecc.

30. Dovremo escludere ancora il caso eccezionale avvertito nel n.° 9. Infatti se si ha un sistema (corrispondente a sè stesso) di curve di 5° ordine con un punto triplo 1, uno doppio 2 e otto semplici 3, 4,... 10, multipli rispettivamente per l'involuzione secondo $r_1, r_2, \ldots r_{10}$, dovrà aversi

$$5n-3r_1-2r_2-r_3-r_4-\cdots-r_{10}=5 \qquad (A)$$

donde, per essere $r_1+r_2 \leqq n$ e

$$r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{10} \leqq 3n-3, \qquad (B)$$

si ha

$$r_1 \geqq n-2.$$

Se $r_1 = n-1$ si hanno trasformazioni di Jonquières. Se $r_1 = n-2$, onde, per le (A), (B), risulta $r_2 \geqq 2$ e però $r_2 = 2$, si hanno, oltre le precedenti, trasformazioni del 4° o 5° ordine (cfr. Nota al n.° 20). Cioè una trasformazione del 4° ordine con tre punti doppî e tre semplici, ovvero una del 5° con un punto triplo, tre punti doppî e tre semplici. In amendue i casi, fra i punti doppî trovasi il punto 2 e inoltre alcuno (uno o due) dei punti 3, 4,... 10. Segue che il suddetto caso eccezionale non può incontrarsi, perchè al punto 1 (doppio se $n = 4$, triplo se $n = 5$) si sarebbero accostati in direzioni diverse due punti doppî, cioè il punto 2 e uno dei punti 3, 4,... 10: il che è assurdo, osservando che questo fatto avrebbe dovuto far crescere la moltiplicità di 1 per la trasformazione.

31. Rimangono quindi a studiare le sole trasformazioni involutorie, che diremo K, aventi un sistema S di sestiche (curve di 6° ordine) corrispondenti fra loro o a sè stesse, con otto punti doppî comuni 1, 2,... 8. Se $r_1, r_2, \ldots r_8$ indicano le moltiplicità di questi punti per l'involuzione, dovrà aversi

$$6n - 2(r_1 + r_2 + \cdots + r_8) = 6 \qquad (9)''$$

che è appunto la (9). Quindi: Una trasformazione K non può avere altri punti fondamentali all'infuori dei punti 1, 2,... 8.

32. Una trasformazione K è riducibile ai casi a), b), c), se nel sistema S esiste una rete di sestiche di genere 1, ovvero una rete di sestiche che si spezzano.

Premettiamo che le sestiche di una rete, di genere 1, appartenenti ad S avranno necessariamente in uno dei punti 1, 2,... 8 un punto triplo. Anzi nel punto triplo dovranno cadere due (almeno) dei punti 1, 2,... 8, perchè esiste una sola sestica avente in 1 un punto triplo e in 2,... 8 punti doppî. I punti 1 2 essendo successivi, le sestiche della rete hanno in 1 un punto triplo, passano con un ramo per 2 ed hanno punti doppî in 3,... 8: oppure, se anche 3 è successivo a 2, hanno in 1 un punto triplo, in 2 un punto doppio e passano semplicemente per 3, ecc. Viceversa, se due dei punti 1, 2,... 8 sono infinitamente vicini, esiste nel sistema S una rete di sestiche di genere 1. Se le sestiche di una rete appartenente ad S si compongono di una retta e di una quintica, deve necessariamente la retta contenere tre dei punti 1, 2,... 8 e la quintica passare per questi e avere cinque punti doppî nei rimanenti: se si compongono di una conica e di una quartica, deve la conica contenere sei punti e la quartica passare pei medesimi e avere punti doppî nei due residui: e infine se si compongono di due cubiche, una deve passare per tutti i punti e avere in uno di essi un punto doppio e l'altra deve contenere i sette punti rimanenti. Che altre decomposizioni non sieno possibili, anche se i punti 1, 2,... 8 divengano successivi, è facile riconoscere, tenendo presente che le sestiche considerate debbono formare una rete, che questa rete deve appartenere ad S e che una sestica generale di S non si spezza.

Ciò premesso, dicasi F la rete di sestiche o di quintiche o di quartiche o di cubiche predette. Alla rete F corrisponderà, per l'involuzione, una rete F' che, in ogni caso, potrà essere parimenti una rete di sestiche o di quintiche o di quartiche o di cubiche. Per semplicità possiamo ritenere effettuate quelle trasformazioni quadratiche (*) che riducono F ad una rete di cubiche (n.° 6): per le quali trasformazioni si arriva sempre manifestamente ad un sistema S e però ad una involuzione K. Sicchè potrà avvenire che:

1.° F' sia pure una rete di cubiche. Se i sette punti base di F e di F' sono i medesimi abbiamo una trasformazione I (n.° 18). Se no, sieno 1, 2,... 6, 7 i punti base di F; 1, 2,... 6, 8 quelli di F'. Sarà

$$3n - r_1 - r_2 - \cdots - r_6 - r_7 = 3$$

$$3n - r_1 - r_2 - \cdots - r_6 - r_8 = 3$$

le quali aggiunte alla (9)'' danno $r_7 = r_8 = 0$: cioè i punti 7, 8 sono semplicemente corrispondenti nella trasformazione. Quindi qualunque cubica che passa per 1, 2,... 6 ha per corrispondente una cubica per gli stessi sei punti. Due qualunque di tali cubiche che si corrispondano hanno (oltre 1, 2,... 6) tre punti comuni, dei quali due potranno essere uniti o corrispondenti, ma il terzo è necessariamente unito. Questo terzo punto e i punti 1, 2,... 6 determinano una rete R di cubiche e però si ha nuovamente una trasformazione I (n.° 18).

2.° F' sia una rete di quartiche. Se i due punti base doppî per F' sono fra i punti base della rete F è manifesto che, con una trasformazione quadratica, questo caso è ridotto al 1°. Se invece i punti base di F sono (per es.) 1, 2,... 7 e i punti doppî di F' sono 7, 8 si avrà

$$3n - r_1 - r_2 - \cdots - r_6 - r_7 = 4$$

$$4n - r_1 - r_2 - \cdots - r_6 - 2r_7 - 2r_8 = 3$$

(*) Dei punti 1, 2,... 8 due (o più) non possono divenire infinitamente vicini ad un terzo in direzioni diverse, perchè, se ciò accadesse, la moltiplicità del terzo punto pel sistema S dovrebbe superare due. Questa osservazione mostra che tre qualunque di quei punti si possono sempre prendere per punti fondamentali di una trasformazione quadratica.

donde, per la $(9)''$, $r_8=1$, $r_7=n-1$ e si ha per conseguenza una trasformazione di JONQUIÈRES.

3.° F' sia una rete di quintiche. Si giunge al caso 2°, trasformando con un triangolo che abbia i vertici in tre punti doppî di F' che siano anche punti base di F.

4.° F' sia una rete di sestiche. Abbiamo già osservato che nel punto base triplo per F' debbono cadere due dei punti 1, 2,... 8. Segue che fra i punti base di F uno è necessariamente lo stesso punto triplo. Allora trasformando con un triangolo che abbia un vertice nel punto triplo e gli altri due vertici in altri due punti basi comuni ad F F' (e doppî per F') si riduce questo caso al 3°.

33. Il teorema dimostrato si può anche enunciare così:

Una trasformazione K è riducibile ai casi *a*), *b*), *c*) se dei punti 1, 2,... 8 due (almeno) sono infinitamente vicini; ovvero tre sopra una retta; ovvero sei sopra una conica; ovvero esistono tutti sopra una cubica che abbia in uno di essi un punto doppio.

34. Escludiamo adunque tutte le trasformazioni K per le quali i punti 1, 2,... 8 hanno le posizioni speciali dette nell'ultimo teorema. Per le trasformazioni K rimanenti (per le quali adunque i punti fondamentali sono a distanze finite) esisteranno certamente le relazioni

$$\begin{gathered}3r_1+2r_2+\cdots+2r_8\leq 6n\\ 2r_1+3r_2+\cdots+2r_8\leq 6n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2r_1+2r_2+\cdots+3r_8\leq 6n\end{gathered}$$

che si ottengono dalla considerazione delle sestiche del sistema S, che hanno rispettivamente in 1, 2,... 8 punti tripli. Dalle medesime e dalla $(9)''$ segue

$$n\leq 17, \qquad r_i\leq 6 \qquad (i=1,\ 2,\ldots\ 8).$$

Se $n=17$ si ha $r_i=6$ e viceversa. Anzi se una trasformazione univoca ammette soltanto punti sestupli, segue subito, dalle (8), (9), che deve essere del 17° ordine con otto punti sestupli (*).

(*) Le (8) (9), se debbono essere $r_1=r_2=\ldots=r_h$, dànno le sole soluzioni:

$$\begin{array}{lll} n=3, & h=3, & r_i=1\\ n=2, & h=3, & r_i=1\\ n=8, & h=7, & r_i=3\\ n=17, & h=8, & r_i=6. \end{array}$$

Essendo i punti 1, 2,... 8 a distanze finite, se accada che alcuno di questi punti sia semplice, doppio o triplo, possiamo applicare i teoremi dei n.i 17, 28. Se alcuno dei suddetti punti è quadruplo per la trasformazione K, non può avere per corrispondente una curva (del 4.° ordine) con un punto triplo, altrimenti la trasformazione dovrebbe possedere nove punti fondamentali, affinchè la curva del 4° ordine potesse essere individuata (cfr. n.° 10). La curva nominata avrà adunque tre dei punti 1, 2,... 8 doppî e i restanti semplici: ma allora si rientra nel caso $\alpha_{ii}=1$, ovvero $\alpha_{ii}=2$ (§ 3, 4). Lo stesso dicasi se esiste un punto quintuplo, giacchè la curva corrispondente dovrebbe essere dotata di cinque punti doppî. Quindi, anche pel n.° 33, si ha in generale la proprietà:

Una trasformazione K che possiede punti fondamentali d'ordine <6, se non presenta i casi *a*), *b*), *c*), è riducibile ad una trasformazione K d'ordine minore:

la quale è adunque vera anche se i punti 1, 2,... 8 divengono successivi.

Rimangono quindi ad esaminare le sole trasformazioni K per le quali i punti 1, 2,... 8 sono tutti sestupli. Escluderemo che questi punti abbiano le posizioni speciali dette nel n.° 33. Le curve fondamentali corrispondenti a quei punti non possono essere altro che curve di 6° ordine con un punto triplo e sette punti doppî. Supporremo che il punto triplo di ciascuna curva fondamentale giaccia nel punto fondamentale a cui corrisponde: altrimenti ritroveremmo un caso già esaminato (§ 4). La trasformazione K che resta a considerare ha adunque un sistema determinato di punti e curve fondamentali ed è per conseguenza (n.° 25) individuata. Una costruzione che dà quel sistema di punti e curve fondamentali e quindi quella trasformazione K, si ottiene colla seguente proprietà.

35. Si chiami F il fascio di cubiche determinato dai punti 1, 2,... 8 (e aventi un nono punto comune). Le curve del sistema S (formato dalle sestiche aventi punti doppî in 1, 2,... 8), che passano per due punti arbitrarî M_1, M_2 costituiscono un fascio φ di curve, aventi altri due punti comuni M'_1, M'_2. Le due curve Δ_1, Δ_2 del fascio F determinate dai punti M_1, M_2 formano una curva del fascio φ e quindi passeranno per M'_1, M'_2. Passi Δ_1 per M_1, M'_1; Δ_1 per M_2, M'_2. Prendiamo un altro punto M_3 arbitrario e sia Λ la curva del fascio φ che passa per M_3. Per i punti M_1, M_3 si hanno allora due curve del sistema S; l'una Λ, l'altra formata di due curve del fascio F, cioè di Δ_1 e di una nuova curva Δ_3 di questo fascio determinata da M_3. Quelle due curve di 6° ordine si segano in M_1, M'_1, M_3 e in un nuovo punto M'_3 (quello

in cui Δ_3 sega Λ, oltre M_3). Segue che tutte le curve di 6° ordine del sistema S che passano per M_1, M_3 debbono passare per M'_1, M'_3. Variando M_3 si hanno tutte le curve di S passanti per M_1, le quali adunque passano anche per M'_1. Si conclude che:

Le curve di 6° ordine aventi otto punti doppî comuni costituiscono un sistema lineare, triplamente infinito, tale che le curve che passano per un punto (cioè costituiscono una rete) passano necessariamente per un altro punto (*).

Così i punti del piano sono riferiti univocamente ed involutoriamente. La trasformazione involutoria che ne nasce ha manifestamente i punti 1, 2,... 8 sestupli, a ciascuno corrispondendo la curva di S che ha ivi un punto triplo ed è perciò (n.° 34) del 17° ordine. Le curve del sistema S e del fascio F sono unite.

36. Inoltre la detta trasformazione ammette una curva punteggiata unita Γ del nono ordine e avente in 1, 2,... 8 punti tripli. Infatti la costruzione precedente conduce a quest'altra. Prendasi un punto arbitrario A che individua una rete R (del sistema S) passante anche per il punto corrispondente A': e si faccia corrispondere ad ogni altro punto del

(*) Dopo aver consegnato il presente lavoro alla Direzione degli Annali, seppi che il prof. Cremona aveva già osservata questa proprietà e comunicatala per lettera al dott. Caporali. Ecco la dimostrazione del prof. Cremona:

Si ritenga il piano nel quale si ha il sistema S, come rappresentativo di una superficie generale del 3° ordine e sieno 1, 2,... 6 i punti fondamentali della rappresentazione. Allora le curve del sistema S sono le imagini delle intersezioni della superficie del 3° ordine col sistema triplamente infinito delle quadriche tangenti alla superficie nei punti 7', 8' che hanno per imagini 7, 8. Due qualunque di queste quadriche s'incontrano secondo due coniche; e si ha così il sistema doppiamente infinito delle coniche che sono tangenti a due piani fissi in due punti fissi 7', 8'. Ognuna di queste coniche incontra la superficie in due punti, uno de'quali determina evidentemente l'altro in modo unico. Così i punti della superficie del 3° ordine e quindi quelli del piano rappresentativo diventano coujugati due a due. Ma tutte le quadriche (tangenti in 7', 8') che passano per un punto della superficie contengono la conica che passa per quel punto e quindi il punto conjugato. Dunque le sestiche del sistema S che passano per un punto passano anche per il punto conjugato.

Siccome due punti conjugati della superficie giacciono in uno stesso piano coi due punti di contatto 7', 8', segue che, nel piano rappresentativo una cubica per gli otto punti 1, 2,... 8, la quale passa per un altro punto qualunque, passa anche per il suo conjugato.

Si può confermare per questa via anche il risultato del n.° 36: cercando il luogo (che ha per imagine Γ) del terzo punto di contatto, colla superficie del 3° ordine, delle coniche tangenti in 7', 8'. È facile vedere che questo luogo è una linea del 9° ordine che ha in 7', 8' punti tripli ed è appoggiata in tre punti ad ogni retta della superficie (la qual linea è la base di un fascio di superficie di 3° ordine che si osculano in 7', 8'): e però, ecc.

piano il nuovo punto comune alle curve del fascio determinato, nella rete R, da quel punto. La jacobiana di R è del 15° ordine ed ha in 1, 2,... 8, punti quintupli. Essa si compone manifestamente (*) della curva Γ e di una curva residua, non punteggiata unita, per la quale i punti A, A' debbono essere doppî. Tale curva è evidentemente la curva del 3° ordine di F passante per A, A', con tata due volte: e però, ecc.

37. Si è adunque dimostrato (n.° 34) che: Tutte le trasformazioni involutorie per le quali esiste una curva fondamentale che passa triplamente pel punto fondamentale a cui corrisponde, è riducibile, per trasformazioni quadratiche, ai casi *a*), *b*), *c*), *d*).

38. Tale proprietà sussiste chiaramente per tutte le trasformazioni involutorie, per le quali si abbia un sistema triplamente infinito di curve, di genere 2, unite o corrispondenti fra loro, e due delle quali si taglino in quattro punti (variabili).

§ 6.

Trasformazioni involutorie per le quali esiste un sistema $[L]$ di curve unite ($\alpha_{ii} > 3$).

39. Le curve di un sistema $[L]$ provenienti da una curva fondamentale L_1 (n. 11) possono essere unite, cioè corrispondenti a sè stesse, ovvero corrispondenti a due a due. Ci proponiamo di esaminare il 1° caso, supponendo $\alpha_{11} > 3$. Per semplicità di indicazione porremo $\alpha_{11} = \alpha$.

Si prendano $\alpha - 2$ punti arbitrarî $A_1, A_2, \ldots A_{\alpha-2}$. Le curve L che passano per questi punti, passano altresì (per essere unite) pei loro corrispondenti A'_1 $A'_2, \ldots A'_{\alpha-2}$ e formano una rete R di curve. Due curve di R si tagliano in due punti (oltre alle intersezioni raccolte nei punti fondamentali della trasformazione e ai $2\alpha - 4$ punti fissi A, A') che sono manifestamente corrispondenti: onde una rete R potrebbe servire a costruire la trasformazione involutoria. Una rete R fa parte di una moltiplicità $\infty^{\alpha-2}$ giacchè varia al variare dei punti A (od A').

40. Alla jacobiana J di R appartiene (quando esista) la curva punteggiata unita Γ della trasformazione involutoria: perchè se un punto tende a cadere

(*) Cfr. n.i 39, 40.

sulla curva Γ, il suo corrispondente si avvicina ad esso indefinitamente, onde due curve di R, passanti per un punto di Γ, ivi si toccano (*). Però Γ non può da sola costituire la jacobiana J (se $\alpha > 2$), giacchè questa jacobiana deve avere punti doppî nei punti A, A' arbitrarî. Adunque J si spezzerà in Γ e in altre curve

$$F'_1,\ F''_1, \dots F_1^{(m_1)}, \qquad F'_2,\ F''_2, \dots F_2^{(m_2)}, \qquad F'_3,\ F''_3, \dots F_3^{(m_3)}, \dots \tag{19}$$

che (tenendo conto del numero delle volte, in cui ciascuna di esse entri in J) passeranno complessivamente per ciascuno dei punti A, A' con due rami e con due soltanto. Quest'ultima asserzione è evidente osservando che le curve di R passano semplicemente per i punti A, A', in questi punti non si toccano e inoltre nessuna curva di R può avere in uno degli stessi punti un punto triplo (**). Se una curva di R avesse infatti un punto A_1 triplo, dovrebbe avere anche il punto A'_1 triplo; ciò che non può accadere, perchè due curve di R possono segarsi in due soli punti (oltre ai punti fissi).

41. Un punto E qualsiasi di una qualunque F'_1 delle curve (19) determina un fascio di curve della rete R, una delle quali (almeno) deve avere in E un punto doppio, il punto E appartenendo a J. Segue che, se la curva variabile di quel fascio non avesse una parte fissa passante per E, questo punto sarebbe punto di contatto di curve (diverse) della rete R e però punto unito: il che è escluso. Quindi il fascio determinato dal punto E deve spezzarsi in una parte variabile e in una parte fissa passante per E. Se a quest'ultima non appartenesse F'_1, avremmo, variando E sopra F'_1, infinite curve appartenenti a J. Adunque F'_1 appartiene a J in quanto è parte fissa di un

(*) Cfr. la nota al n.° 12 del mio lavoro citato.

(**) Se in un punto $x_2 = x_3 = 0$ le curve di una rete hanno un punto semplice comune, esiste una curva della rete per la quale quel punto è (almeno) doppio. L'equazione di questa curva e di due curve qualunque della rete essendo

$$u_2 x_1^{n-2} + \dots = 0$$
$$(p x_2 + q x_3) x_1^{n-1} + \dots = 0$$
$$(p_1 x_2 + q_1 x_3) x_1^{n-1} + \dots = 0$$

l'equazione della jacobiana è

$$J \equiv (p q_1 - p_1 q) u_2 x_1^{3n-5} + \dots = 0.$$

Quindi, se J ha nel punto $x_2 = x_3 = 0$ una moltiplicità > 2, deve essere $p q_1 - p_1 q = 0$, ovvero $u_2 = 0$ identicamente: cioè le curve della rete debbono toccarsi, ovvero deve esisterne una con punto triplo.

fascio di curve della rete R. La proprietà sussisterebbe anche se la curva Γ'_1, contata due volte, potesse dare una curva di R. Ma, essendo $\alpha > 3$ (*), ciò non può accadere. Basta osservare che, contenendo allora F'_1 tutti i punti A, A', varia al variare di questi punti; e quindi può sempre essere pensata come parte fissa di un fascio di curve della rete R, la parte variabile essendo una curva dotata delle stesse proprietà di F'_1, ma non passante per qualcuno dei punti A, A'. Manifestamente si hanno $\alpha - 2$ di tali fasci quante sono le coppie $(A_1 A'_1)$, $(A_2 A'_2)$,...: sicchè, per essere $\alpha - 2 > 1$, le curve della rete R si spezzerebbero nella parte fissa Γ'_1 e in una parte residua. Per conseguenza si spezzerebbe ogni curva del sistema $[L]$, il che non può essere.

Adunque le curve (11) sono parti fisse di fasci di curve (che si spezzano) della rete R. Si potranno cioè considerare tanti fasci

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \equiv (F_1 V_1) \equiv (F'_1 F''_1 \ldots F_1^{(m_1)} V_1) \\ \varphi_2 \equiv (F_2 V_2) \equiv (F'_2 F''_2 \ldots F_2^{(m_2)} V_2) \\ \varphi_3 \equiv (F_3 V_3) \equiv (F'_3 F''_3 \ldots F_3^{(m_3)} F_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (20)$$

indicando con F_i la parte fissa [composta di m_i curve delle (19)] e con V_i la parte variabile. Manifestamente F_i e V_i corrispondono rispettivamente a sè medesime.

42. Nei fasci (20) entrano tutte le curve (19) e ciascuna una volta sola. In vero se una stessa delle curve (19) entrasse a far parte di due fasci φ, ogni curva di R si spezzerebbe in quella e in altre curve: e però, ecc. Si noti ancora che non escludiamo che una medesima curva F'_1 (per es.) sia contata più volte come facente parte di un fascio φ_1; ma dalle cose che seguono risulterà che un tal fatto non è possibile (n.i 43, 45).

43. Le curve di un fascio (20) non possono avere punti doppî nei punti A, A': giacchè altrimenti questi punti sarebbero di contatto per le curve di R. Adunque la parte fissa F_i e la parte variabile V_i di un fascio φ_i passeranno complessivamente una volta sola per ciascuno dei punti A, A'. Inoltre, da ciò che i punti A, A' debbono essere doppî per J, si trae che in qualcuno dei fasci φ la parte fissa deve contenere un certo numero dei punti A, A'. Indichiamo con φ_x uno di tali fasci; cioè supponiamo, per es., che la sua parte fissa F_x passi per A_1, A'_1, A_2, A'_2,... A_r, A'_r e la sua parte

(*) Nel caso di $\alpha = 3$ abbiamo invece incontrato questa circostanza (cfr. n.° 36).

variabile V_x passi per i rimanenti A_{r+1}, A'_{r+1}, A_{r+2}, $A'_{r+2}, \ldots A_{\alpha-2}$, $A'_{\alpha-2}$, essendo $r > 0$ e $\leq \alpha - 2$. Dal fascio

$$\varphi_x \equiv (F_x V_x) \equiv (A_1 A'_1 \ldots A_r A'_r;\ A_{r+1} A'_{r+1} \ldots A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2})$$

si possono imaginare ottenuti altri fasci φ, della stessa natura di φ_x, nei due modi seguenti:

44. I) Facciamo passare V_x per A_r e però per A'_r e togliamo alla curva F_x la condizione di passare per gli stessi punti A_r, A'_r. Questa condizione non può essere conseguenza delle rimanenti a cui è sottoposta F_x, perchè A_r, A'_r sono punti (corrispondenti) arbitrarî. Nascerà quindi (cfr. n.° 45) dalla parte variabile V_x una parte fissa F_y e dalla parte fissa F_x una parte variabile V_y di un nuovo fascio

$$\varphi_y \equiv (F_y V_y) \equiv (A_r A'_r \ldots A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2};\ A_1 A'_1 \ldots A_{r-1} A'_{r-1});$$

e si potranno da φ_x generare r di tali fasci (oltre φ_x) quante sono le coppie di punti (corrispondenti) A, A' pei quali passa F_x.

II) Osserviamo che la jacobiana J deve presentare lo stesso fatto comunque si scambiino le coppie $(A_1 A'_1)$, $(A_2 A'_2), \ldots (A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2})$ e permutando due punti di una stessa coppia: giacchè è chiaro, per essere scelte quelle coppie in modo arbitrario, che, nella formazione di J, l'ufficio che fa una coppia rispetto alle altre e ai punti fondamentali della trasformazione, deve fare ognuna di queste rispetto alle rimanenti e ai medesimi punti fondamentali, e che un punto A è nelle stesse condizioni del suo corrispondente A'. Segue che, insieme al fascio φ_x, esisteranno altri fasci, per ciascuno dei quali la parte fissa passerà per r delle $\alpha-2$ coppie suddette: per es.

$$\varphi_z \equiv (F_z V_z) \equiv (A_1 A'_1 \ldots A_{r-1} A'_{r-1} A_{r+1} A'_{r+1};\ A_r A'_r A_{r+2} A'_{r+2} \ldots A_{\alpha-2} A'_{\alpha-2}).$$

In questo modo si otterranno $\dfrac{(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-r-1)}{1\,2\cdots r}$ fasci (compreso φ_x).

45. Applicando il procedimento I) si noti che non può accadere che la parte fissa F_x del fascio φ_x contenga curve, le quali passino per nessuna o passino solamente per alcuna delle r coppie $(A_1 A'_1), \ldots (A_r A'_r)$. Altrimenti, passando dal fascio φ_x al fascio φ_y, diventerebbe variabile soltanto quella curva di F_x che contiene i punti A_r, A'_r: e però i due fasci φ_x, φ_y avrebbero una curva fissa a comune, il che non può accadere (n.° 42).

Nemmeno può la parte fissa F_x spezzarsi in due curve corrispondenti, l'una per $A_1, A_2, \ldots A_r$, l'altra per $A'_1, A'_2, \ldots A'_r$, se sia $r > 1$. Giacchè, per la simmetria avvertita nel procedimento II), dovrebbe esistere, per es., un altro fascio nel quale la parte fissa dovrebbe comporsi di due curve corrispondenti l'una per A'_1, A_2, A_3,... A_r, l'altra per A_1, A'_2, A'_3,... A'_r; e d'altra parte, col procedimento I) troveremmo altri fasci ne'quali la parte fissa passerebbe per A_1, A'_1. Sicchè, per es., A_1, A'_1 riescirebbero (almeno) tripli per J, ciò che non può essere (n.° 40).

Adunque in un fascio φ_x (e analogamente φ_y, φ_z) la parte fissa non può spezzarsi se si abbia $r>1$. Quando sia $r=1$ può spezzarsi soltanto in due curve corrispondenti (l'una per A_1, l'altra per A'_1).

Osservando poi che la parte variabile di un fascio φ_x produce colla costruzione I) la parte fissa di un altro fascio della stessa natura di φ_x, si conclude anche che la parte variabile di un fascio φ_x (e analogamente φ_y, φ_z) non può spezzarsi, se contenga alcuna delle coppie $(A_1A'_1)$,... $(A_{\alpha-2}A'_{\alpha-2})$. Quando non passi per alcuna di queste coppie può spezzarsi in due curve corrispondenti.

46. Applicando i procedimenti I), II) nel caso che esista un fascio φ_x, pel quale sia $r=1$, troviamo il seguente sistema di fasci (*)

$$\left.\begin{array}{lll}\varphi_1 \equiv (F_1V_1) & \equiv (A_1A'_1; & A_2A'_2A_3A'_3\ldots A_{\alpha-2}A'_{\alpha-2})\\ \varphi_2 \equiv (F_2V_2) & \equiv (A_2A'_2; & A_1A'_1A_3A'_3\ldots A_{\alpha-2}A'_{\alpha-2})\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \varphi_{\alpha-2} \equiv (F_{\alpha-2}V_{\alpha-2}) & \equiv (A_{\alpha-2}A'_{\alpha-2}; & A_1A'_1A_2A'_2\ldots A_{\alpha-3}A'_{\alpha-3})\\ \varphi_0 \equiv (F_0V_0) & \equiv (A_1A'_1A_2A'_2\ldots A_{\alpha-2}A'_{\alpha-2}; & 0),\end{array}\right\} \quad (21)$$

lo zero significando in quest'ultimo fascio che la parte variabile non passa per alcuno dei punti A, A'. Le F_1, F_2,... $F_{\alpha-2}$, V_0 possono spezzarsi ciascuna in due curve corrispondenti: le V_1, V_2,... $V_{\alpha-2}$, F_0 non possono spezzarsi in due linee corrispondenti, essendo $\alpha>3$ (n.° 45).

Se $r=\alpha-2$ è manifesto che si giunge colle medesime costruzioni I), II) allo stesso caso.

Se $r=2$ e $<\alpha-2$, deve essere $\alpha=5$. Infatti, se fosse $\alpha>5$, si troverebbero fasci

(*) Un esempio di questo caso si ha nelle trasformazioni involutorie di Jonquières che ammettono una curva punteggiata unita, considerando il sistema [L] nascente dalla curva fondamentale corrispondente al punto $(n-1)^{\text{uplo}}$. [Cfr. la mia Nota: *Una nuova proprietà delle curve di ordine* n *con un punto* $(n-2)^{\text{uplo}}$. Transunti della R. Accademia dei Lincei, vol. I, serie III.]

$$(A_1A'_1A_2A'_2;\ A_3A'_3A_4A'_4\ldots)$$
$$(A_1A'_1A_3A'_3;\ A_2A'_2A_4A'_4\ldots)$$
$$(A_1A'_1A_4A'_4;\ A_2A'_2A_3A'_3\ldots)$$
. . . .

ne' quali le parti fisse avrebbero complessivamente nei punti A, A' una moltiplicità >2 (n.° 40). Se $\alpha=5$ si trova [le F, V non spezzandosi (n.° 45)];

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1\equiv(F_1V_1)\equiv(A_2A'_2A_3A'_3;\ A_1A'_1)\\ \varphi_2\equiv(F_2V_2)\equiv(A_1A'_1A_3A'_3;\ A_2A'_2)\\ \varphi_3\equiv(F_3V_3)\equiv(A_1A'_1A_2A'_2;\ A_3A'_3).\end{array}\right\}\qquad(22)$$

Se $r>2$ e $<\alpha-2$ è facile persuadersi che si giunge sempre all'assurdo ora avvertito (n.° 40).

Concludiamo adunque che non è possibile alcun sistema di fasci φ all'infuori dei sistemi (21), (22).

47. Le curve F_0, $V_1,\ldots V_{\alpha-2}$ del sistema (21) sono manifestamente della stessa natura [V_1, $V_2,\ldots V_{\alpha-2}$ nascendo da F_0 col processo I)] e parimenti sono della stessa natura V_0, $F_1,\ldots F_{\alpha-2}$. Ma (per es.) F_0 taglia V_1 in $2(\alpha-3)$ dei punti A, A' e taglia F_1 in 2 dei medesimi punti. Dunque, tenendo presente che due curve del sistema $[L]$ si segano in $2(\alpha-1)$ punti, si ha, pel sistema (21), che (all'infuori dei punti fondamentali della trasformazione):

due delle curve F_0, $V_1,\ldots V_{\alpha-2}$ si tagliano in $2(\alpha-3)$ punti;

due delle curve V_0, $F_1,\ldots F_{\alpha-2}$ non si tagliano affatto, cioè formano un fascio;

una curva F_i di un fascio φ_i sega una curva V_i dello stesso fascio in 2 punti.

Per un ragionamento analogo quest'ultima proprietà sussiste pel sistema (22) nel quale evidentemente F_1, F_2, F_3, V_1, V_2, V_3 sono curve, appartenenti ad una stessa rete, di cui due si segano in due punti (oltre ai punti fondamentali).

48. Per terminare la discussione dei due casi a cui siamo giunti occorre premettere la dimostrazione di una formola.

Una curva d'ordine r variabile in un sistema lineare di curve aventi a comune punti multipli secondo ρ_1, $\rho_2,\ldots \rho_h$ nei punti 1, 2,… h, si spezzi (in una speciale posizione) in k curve degli ordini r', $r'',\ldots r^{(k)}$: e la curva d'ordine $r^{(i)}$ abbia nei punti 1, 2,… h le moltiplicità $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)},\ldots \rho_h^{(i)}$. Si avrà

$$r=r'+r''+\cdots+r^{(k)}$$
$$\rho_s\leq\rho'_s+\rho''_s+\cdots+\rho_s^{(k)},\qquad i=1,\ 2,\ldots\ h.$$

Ne segue:

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2}-\sum_1^h {}_s\frac{\rho_s(\rho_s-1)}{2}\geqq\sum_1^k {}_i\frac{(r'^{i)}-1)(r'^{i)}-2)}{2}+\sum_{mn}r^{(m)}r^{(n)}-(k-1)-$$

$$-\sum_1^h {}_s\sum_1^k {}_i\frac{\rho_s^{(i)}(\rho_s'^{i)}-1)}{2}-\sum_1^h {}_s\sum_{mn}\rho_s^{(m)}\rho_s^{(n)}$$

ove $\sum_{mn}$ esprime la somma ottenuta col prendere per m, n tutte le combinazioni possibili di due (diversi) dei numeri $1, 2, \ldots k$. Ma si ha

$$r^{(m)}r^{(n)}=\sum_1^h {}_s\rho_s^{(m)}\rho_s^{(n)}+\delta_{mn} \tag{23}$$

indicando con δ_{mn} le intersezioni delle due curve degli ordini $r^{(m)}$, $r^{(n)}$, esterne ai punti base. Dunque, rappresentando rispettivamente con p, p', p'',... $p^{(k)}$ i generi della curva generale del sistema e delle curve degli ordini r', r'',... $r^{(k)}$,

$$p\geqq p'+p''+\cdots+p^{(k)}-k+1+\sum_{mn}\delta_{mn}. \tag{24}$$

Se le curve degli ordini r', r'',... $r^{(k)}$ potessero avere punti muitipli (all'infuori dei punti base) i loro generi decrescerebbero e la precedente continuerebbe ad essere vera. La formola precedente sussiste anche se due delle dette k curve coincidano, purchè la (23) sia soddisfatta, essendo δ_{mn} un numero $\geqq 0$ (*).

49. Applichiamo la formola (24) ad una curva del fascio φ_1, per es., del sistema (21). Sarà $k=3$, ovvero $k=2$ secondochè F_1 si spezza o no in due parti e inoltre (n.° 47) $\Sigma_{mn}\delta_{mn}=2$ e $p=\alpha-1$. Avremo adunque

$$\alpha-1\geqq p'+\varepsilon p''-\varepsilon+2,$$

ε essendo 1 o 2 a seconda dei due casi nominati; p' il genere di V_1 e p'' il genere di F_1 (o il genere comune delle due parti in cui F_1 si spezzi). Ora se $p''=0$, F_1 dà (al variare di A_1, A'_1) un fascio di curve razionali, corrispondenti fra loro o a sè stesse: e quindi la trasformazione involutoria rientra in un caso già studiato (§ 3). Se $p''>0$, dalla precedente segue

$$p'\leqq\alpha-3.$$

Allora V_1 (al variare dei punti A, A') produce un sistema lineare $\infty^{\alpha-2}$ di curve che non si spezzano, corrispondenti a sè stesse, due delle quali si ta-

(*) Si noti ancora che la (24) potrebbe non sussistere se i punti base sono infinitamente vicini, perchè potrebbe allora accadere che, per qualche valore di s, fosse $\rho_s>\rho'_s+\rho''_s+\ldots+\rho_s^{(k)}$. Però basta che noi applichiamo la (24) nel supposto che i punti base sieno a distanze finite.

gliano in $2(\alpha-3)$ punti (n.° 45) di genere $\leq \alpha-3$. Se fosse $p' < \alpha-3$ e, per es., $p' = \alpha-3-\gamma$, facendo passare V_1 per γ coppie, fisse, arbitrarie di punti corrispondenti, otterremmo un sistema, $\infty^{\alpha'}$, di curve unite, di genere $\alpha'-1$, e due delle quali si tagliano in $2(\alpha'-1)$ punti variabili, essendo $\alpha' = \alpha-\gamma-2$ e quindi $\alpha' \leq \alpha-2$. Applicando a questo sistema tutti i ragionamenti del presente paragrafo giungeremo ad un sistema $\infty^{\alpha''}$ di curve unite, due delle quali si tagliano in $2(\alpha''-1)$ punti, di genere $\alpha''-1$: e così di seguito, finchè troveremo i sistemi ∞^3 o ∞^2 ovvero ∞^1 e studiati nei §§ 3, 4, 5 (cfr. n.i 15, 27, 38).

Applicando la (24) ad un fascio φ_1 del sistema (22) (*) si trova (n.i 46, 47)

$$4 \geq 2p'-1+2, \qquad p' \leq 1,$$

indicando con p' il genere comune delle F_1, V_1: e si concluderebbe, come dianzi, (secondochè $p'=0$, ovvero $=1$) che esistono sistemi ∞^1, ovvero ∞^2 di curve considerati nei §§ 3, 4 (cfr. n.i 15, 27).

Concludiamo che: Una trasformazione involutoria per la quale il sistema $[L]$ nascente da una curva fondamentale che passa $\alpha_{ii}(>3)$ volte per il punto fondamentale a cui corrisponde, è formato di curve unite, deve contenere necessariamente uno dei tre seguenti sistemi di curve:

1) Un sistema lineare triplamente infinito di curve unite di genere 2, delle quali due si segano in 4 punti (variabili);

2) Una rete di curve unite di genere 1, due curve segandosi in due punti;

3) Un fascio di curve razionali, unite o corrispondenti fra loro.

Per conseguenza (§§ 3, 4, 5): Le trasformazioni suddette sono riducibili, per trasformazioni quadratiche, ai casi *a*), *b*), *c*), *d*).

50. Per torre ogni dubbio sul precedente risultato sarà utile aggiungere qualche osservazione alle cose del § 1.

Nel § 1 si considerarono sistemi lineari soggetti soltanto alle condizioni di avere punti fissi in comune. Togliendo questa restrizione, cioè considerando sistemi lineari qualisivogliano, potrà accadere che, nella determinazione del sistema, entrino anche γ condizioni che non consistono in passaggi per punti. Allora, indicando β il numero dei vincoli fra tutte le condizioni del sistema,

(*) Questo sistema è possibile?

si avrà, invece delle (1) (2),

$$\sum_1^h {}_i r_i^2 = n^2 + 1 - p + \beta - \alpha - \gamma$$

$$\sum_1^h {}_i r_i = 3n - 1 + p + \beta - \alpha - \gamma$$

e, invece della (3),

$$s = p - \beta + \alpha + \gamma - 1.$$

Ora, supponendo $s = 2\alpha - 2$, $p = \alpha - 1$, da quest'ultima segue

$$\gamma = \beta$$

e quindi le due relazioni precedenti si cangiano nelle (6), precisamente come se fosse $\beta = 0$ (e quindi $\gamma = 0$). Ora sulle relazioni (6) sono fondate le cose dei n.^{i} 5, 6, 7, 8, 9: dunque i teoremi di questi numeri sussistono inalterati qualsiasi il sistema lineare. Questa osservazione rischiara le affermazioni dei n.^{i} 27, 38 e l'applicazione fattane nel n.° 49.

Sul § 1 si può anche notare che l'essere $\beta = 0$, $\beta = 1$ nei n.^{i} 2, 3 rientra in una proprietà generale. Infatti un fascio di curve deve essere completamente determinato da' suoi punti base, perchè se a determinarlo occorressero altre condizioni (che non fossero conseguenza di quelle espresse dai punti base), togliendole, per ogni punto del piano passerebbero infinite curve del fascio; ecc. Segue dalla (3), essendo $s = 0$, $\alpha = 1$,

$$p = \beta,$$

cioè: Il genere di una curva variabile in un fascio è eguale al numero dei vincoli sussistenti fra i punti base.

APPENDICE.

51. Le cose dei §§ 2, 3, 4, 5, 6 suppongono che si parta dalla considerazione di una trasformazione involutoria avente i punti fondamentali a distanze finite. I risultati di quei paragrafi possiamo ora estenderli a tutte le possibili trasformazioni involutorie (comprese quelle in cui le curve fondamentali si spezzano) in virtù della seguente proprietà:

Tutte le *possibili* trasformazioni involutorie sono deducibili per trasformazioni quadratiche da altre aventi i punti fondamentali a distanze finite.

Escludiamo le trasformazioni di Jonquières, trattate completamente altrove: e diciamo, per brevità, punto isolato di una trasformazione involutoria un punto che non ne ha altri infinitamente vicini (al quale quindi corrisponde una curva che non si spezza) e punto di aggruppamento un punto fondamentale al quale in una stessa o in diverse direzioni sono infinitamente vicini altri punti fondamentali. Si trasformi il piano P nel quale si ha l'involuzione data in un altro Π, prendendo un vertice del triangolo fondamentale in un punto A di aggruppamento del piano P e gli altri due vertici M, N affatto arbitrariamente: e indichiamo con $A_1M_1N_1$ il triangolo fondamentale della trasformazione quadratica nel piano Π. Ad una retta di questo piano corrisponde, per la trasformazione quadratica una conica C' passante per A, M, N. Alla conica variabile C', per l'involuzione nel piano P, corrisponde una curva C'' variabile, la quale passa evidentemente pei punti isolati del piano P con rami separati e variabili. Sicchè, passando dal piano P a Π, la curva C'' si trasformerà in una C''' che avrà la medesima proprietà nei punti corrispondenti ai detti punti isolati. Dai punti fondamentali isolati del piano P nascono quindi punti fondamentali isolati di Π. Oltre a ciò avremo in Π altri punti isolati. Cioè: ai punti M, N corrisponderanno, per l'involuzione, due punti M', N' (che non giaceranno sopra AM, AN perchè abbiamo escluse le trasformazioni di Jonquières): e a questi punti M', N' corrisponderanno quadraticamente due punti fondamentali (semplici) isolati nella involuzione del piano Π. Per la quale saranno inoltre punti isolati A', M', N': giacchè alla AM per es. corrisponderà una certa curva e ai punti d'intersezione variabili di questa con C', punti d'intersezione variabili di AM e di C'' e però, ecc. I punti di aggruppamento distinti da A avranno in Π per corrispondenti altri punti di aggruppamento collo stesso numero di punti fondamentali. In quanto al punto A osserviamo che la curva C'' avrà certi punti multipli in A e nei punti fondamentali che si sono accostati ad A in una stessa o in differenti direzioni. Passando al piano Π, si troveranno sopra MN, corrispondentemente alle dette direzioni, punti che potranno essere in generale di aggruppamento, ma ciascuno de'quali, per proprietà note (*), comprenderà un numero di punti fondamentali minore di quello compreso nel punto A. A questi punti si potranno, operando in modo analogo con trasformazioni quadratiche, sostituirne altri e così di seguito, finchè si giungerà ad una trasformazione involutoria di ordine maggiore della primitiva, avente un certo numero, pure maggiore che in questa, di punti isolati, ma nella quale il numero dei punti di aggruppamento è diminuito di uno. Continuando, si dimostra il teorema.

Per maggior chiarezza della dimostrazione si può ritenere la trasformazione involutoria data nel piano P, come limite di una trasformazione univoca (in generale non involutoria) del piano P in sè stesso, per la quale i punti fondamentali si accostano indefinitamente (**).

(*) Cfr. per es. Lindemann, l. c., pag. 491 e seg.

(**) Del resto il ragionamento si può illustrare con molteplici esempî. Sia, per es., una trasformazione involutoria dell'8° ordine con tre punti semplici 7, 8, 9, tre doppî 4, 5, 6 e tre quadrupli 1, 2, 3 (la qual soluzione è da aggiungere nella tavola per $n = 8$ a pag. 17 del lavoro citato di Cremona) e sia quella nascente, col fare una trasformazione quadratica arbitraria, dall'inversione quadrica, quando il polo si avvicini indefinitamente alla conica fondamentale. Il sistema delle curve fondamentali è

$$J \equiv (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 9)^1_1 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 7 8)^1_2 (1^2 2^2 3^2 4 5 6 8 9)^1_3 (1 2 3 5 6)^2_4 (1 2 3 4 5)^2_5 (1 2 3 4 6)^2_6 (1 2)^1_7 (2 3)^1_8 (1 3)^1_9$$

[e $\Gamma = (1^2 2^2 3^2 5 6)^4$]. Per l'ipotesi fatta i tre punti doppî 4, 5, 6 sono infinitamente vicini sulla stessa direzione. Trasformando quadraticamente nel modo detto (n.° 51), si giunge ad una involuzione del 24° ordine con un punto 14$^{\text{uplo}}$, due 10$^{\text{upli}}$, tre 7$^{\text{upli}}$, tre doppi e due semplici tutti isolati e inoltre due punti tripli successivi, ecc.

52. Dunque, se si potrà dimostrare che le trasformazioni involutorie aventi i punti fondamentali a distanze finite e per le quali (essendo $\alpha_{ii} > 3$) esistono (soltanto) sistemi $[L]$ di curve a due a due corrispondenti, sono riducibili ai casi *a*), *b*), *c*), *d*), sarà dimostrato che tutte le *possibili* trasformazioni involutorie (incluse anche quelle per le quali le curve fondamentali si spezzano) sono riducibili a questi casi.

Spero di potere in un prossimo lavoro chiarire quest'ultimo punto e compiere così queste ricerche.

53. Tralascio di esporre diffusamente l'altro metodo accennato nell'introduzione col quale ho tentato di superare direttamente le difficoltà prodotte dallo spezzamento delle curve fondamentali. Ecco un cenno, omesse le dimostrazioni:

1) Se una linea fondamentale corrispondente ad un punto fondamentale si spezza, le curve di cui si compone sono tutte, ovvero tutte meno una, corrispondenti a punti fondamentali infinitamente vicini a quel punto;

2) Esiste sempre almeno una curva fondamentale che non si spezza (quella d'ordine minimo), per la quale valgono le (13) (14). Se questa curva fondamentale è quella corrispondente al punto 1 si ha, invece delle (15)

$$1 + r_1 r_k \geqq \Sigma_s \alpha_{s1} \alpha_{sk},$$

ovvero

$$r_1 r_k \geqq \Sigma_s \alpha_{s1} \alpha_{sk}$$

secondochè la curva fondamentale corrispondente ad 1 fa parte o no della curva fondamentale corrispondente a k;

3) Se L_1 (d'ordine r_1) è la curva fondamentale d'ordine minimo ed m, q, p i punti fondamentali della trasformazione pei quali le moltiplicità di L_1 sono più elevate si ha (*)

$$\alpha_{m1} + \alpha_{q1} + \alpha_{p1} = r_1 + \beta_1 + 1, \qquad \beta_1 \geqq 0. \tag{25}$$

Si consideri la curva Λ_1 (composta o no di parti), di ordine $r_1 - 1$, avente tutte le proprietà di L_1 tranne che nei punti m, q, p abbia le moltiplicità $\alpha_{m1} - 1$, $\alpha_{q1} - 1$, $\alpha_{p1} - 1$, il che per la (25) è permesso; e si dicano Λ'_1 la curva corrispondente a Λ_1 nella trasformazione involutoria, ρ_1 l'ordine di Λ_1' e $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_h$ le sue moltiplicità nei punti fondamentali 1, 2,... h. Prendendo

(*) Veggasi la mia Nota: *Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli.* Giornale di Napoli, t. 15.

m, q, p per punti fondamentali di una trasformazione quadratica, per la (18), si ha

$$n' \leq n - 3\rho_1 + \gamma_m + \gamma_q + \gamma_p + 3,$$

donde

$$n' \leq n - \rho_1 + 3.$$

Se $\beta_1 > 0$ si dimostra che $\rho_1 > 3$ e allora $n' < n$; cioè, se per la curva fondamentale d'ordine minimo si ha

$$\alpha_{m1} + \alpha_{q1} + \alpha_{p1} > r_1 + 1,$$

la trasformazione è riducibile ad ordine minore. Questo risultato è ottenuto nell'ipotesi che si possano effettuare le trasformazioni quadratiche indicate. Che cosa accade se i punti m, q, p diventano infinitamente vicini in direzioni diverse? Possono allora essere applicate altre trasformazioni quadratiche che producano lo stesso risultato? (cfr. n.° 9).

Se $\beta_1 = 0$ si ha

$$\alpha_{m1} + \alpha_{q1} + \alpha_{p1} = r_1 + 1,$$

cioè la curva fondamentale d'ordine minimo ha la somma delle moltiplicità più elevate eguale all'ordine accresciuto di 1 e allora deve essere necessariamente (*) una delle seguenti (oltre la retta):

una curva di 5° ordine con sei punti doppî;
una curva di 6° ordine con un punto triplo e sette punti doppî;
una curva di 8° ordine con sette punti tripli;
una curva di 11° ordine con sette punti quadrupli e un punto triplo;
una curva del 17° ordine con otto punti sestupli;
una curva del 20° ordine con otto punti settupli;
una curva di ordine r (r qualunque > 1) con un punto $(r-1)^{\text{uplo}}$.

Tutte le trasformazioni involutorie sarebbero riducibili a quelle che ammettono per curva fondamentale d'ordine minimo una delle precedenti. Sarebbe quindi da fare la discussione di questi casi. . . . .

Pisa, giugno 1877.

(*) Veggasi la Nota: *Sulle curve*, ecc., citata precedentemente.

Note on the Correlation of two Planes.

(*By* T. Archer Hirst, F.R.S. *Greenwich.*)

Introduction.

65. In a former paper (*) on this subject, the nature and properties were described—*first,* of an ordinary correlation satisfying any eight given conditions; *secondly,* of an exceptional correlation of the first order, possessing either a singolar point or a singular line in each plane, and satisfying seven conditions; and, *thirdly,* of an exceptional correlation of the second order, having in each plane not only a singular point, but also a singular line passing through that point, and satisfying six conditions. Moreover, the two following numerical relations were established (art. 20) between the π and the λ exceptional correlations of the first order, with singular points and singular lines, respectively, which satisfy any seven conditions, and the μ and the ν ordinary correlations which, besides satisfying these same conditions, possess a given pair of conjugate points and of conjugate lines, respectively:

$$2\nu=\mu+\pi,$$
$$2\mu=\nu+\lambda.$$

It was by means of these relations, in fact, that the number of ordinary correlations was determined which satisfy any eight elementary conditions (art. 22). Before they could be applied, however, the exceptional correlations of the first order which satisfy any seven elementary conditions had to be directly determined, and this determination not unfrequently necessitated the consideration of the projective properties of curves of high order.

(*) See Annali di Matematica, vol. VI, pag. 260. — In order that the articles of my former paper may be conveniently cited, those of the present one bear the next succeeding numbers.

In the present paper I propose to show that the object just referred to can be attained in a very much simpler manner by means of two numerical relations, hitherto unobserved, connecting the exceptional correlations of the second order which satisfy six conditions, with the exceptional correlations of the first order which, besides satisfying the six conditions in question, possess a given pair either of conjugate points or conjugate lines.

Correlations satisfying six conditions.

66. The correlations which satisfy six conditions obviously form a two-fold system. They consist, in general, of a doubly infinite number of ordinary correlations, a singly infinite number of exceptional correlations of the first order, and a finite number θ of exceptional correlations of the second order (*).
The exceptional correlations of the first order will, in general, arrange themselves into two one-fold systems; those of the one system having singular points (*centres*), whilst those of the other have singular lines (*axes*). They may be more conveniently distinguished as *central* correlations and *axial* correlations, respectively. In each plane the centres of the former will, in general, have a certain locus, and the axes of the latter a certain envelope. Moreover, between the points of the two *loci of centres,* as well as between the tangents of the two *envelopes of axes,* there will be a (1, 1) correspondence, corresponding elements being, in the one case, associated centres, and in the other, associated axes (**).
An exceptional correlation of the second order presents itself whenever the associated centres of a central correlation lie on the associated axes of an axial one. Such exceptional correlations of the second order, in fact, may be appropriately termed *central and axial,* and they may be regarded as the connecting links between the two systems of exceptional correlations of the first order above alluded to.

67. In the one-fold system of central correlations which satisfy six conditions there will be a certain number π for which two given points are con-

(*) I do not consider cases where, in consequence of the peculiar nature of the six conditions, no such distribution of correlations prevails,—where, for instance, θ is infinite.

(**) The further consideration of these loci and envelopes, being foreign to the purpose of the present note, is omitted. Their determination, when the conditions are of an elementary character, presents, however, no difficulty whatever.

jugate, and a certain number $\bar{\pi}$ for which two given lines are conjugate. In like manner, the one-fold system of axial correlations which satisfy the same six conditions will include a certain number $\dot{\lambda}$ for which two given points are conjugate, and another number $\bar{\lambda}$ for which two given lines are conjugate. This being the case, the two new relations, referred to in art. 65, may be thus expressed:

$$2\dot{\pi} = \bar{\pi} + \theta,$$

$$2\bar{\lambda} = \dot{\lambda} + \theta,$$

where θ denotes the number of central and axial correlations which satisfy the six conditions under consideration.

Since each of these equations is deducible from the other by the Principle of Duality, a demonstration of the first one will clearly suffice. To this end let a_1 and a_2 denote any two lines whatever in the first and second planes respectively, and A'_2, A''_2 any two points whatever in a_2. A point A'_1 being taken arbitrarily in a_1, we have by hypothesis $\dot{\pi}$ central correlations in which A'_1 and A'_2 are conjugate points; and since in each of these correlations A''_2 will also have a conjugate point A''_1 in a_1, we may say that to each point A'_1 in a_1 correspond $\dot{\pi}$ points A''_1, and in like manner that to each point A''_1 correspond $\dot{\pi}$ points A'_1. By a wellknown theorem, therefore, there will, in general, be $2\dot{\pi}$ points in a_1 with each of which two corresponding points A'_1, A''_1 will coincide.

The circumstances under which such coincidences take place can be readily assigned. One will present itself in each of the θ central and axial correlations which satisfy the six conditions under consideration; for A'_2 and A''_2 being arbitrary points, their corresponding lines in any such correlation will coincide with the axis thereof (art. 16, third case). The only other central correlations, however, in which such a coincidence can occur are those which have a centre either in a_1 or in a_2; the lines corresponding to A'_2 and A''_2 will in the former case both pass through the centre in a_1, whilst in the latter case these will coincide with one another (art. 16, first case).

But the correlations which have a centre in a_1, together with those which have a centre in a_2, precisely make up the total number $\bar{\pi}$ of correlations in which a_1 and a_2 are conjugate lines; for the point which corresponds to a_1 in a correlation whose centre Σ_1 lies in a_1, being an indeterminate point of a line passing through the associated centre Σ_2 (art. 16, first case), may be regarded as situated in a_2; whilst in any correlation whose centre Σ_1 ist not in

a_1, the associated centre Σ_2 will itself correspond to a_1; so that this line will be conjugate to a_2 when, and only when, Σ_2 falls in the latter line (*).

The first of the above equations, therefore, is simply an expression of the fact that the $2\dot{\pi}$ coincidences of A'_1, and A''_1 are, individually, produced by the $\theta+\bar{\pi}$ correlations above specified.

Central and Axial Correlations satisfying six elementary conditions.

68. In order to apply the two equations just established to the problem referred to in art. 65, the central and axial correlations which satisfy any six elementary conditions must, of course, be first directly determined. It doing so, it will be assumed, as in art. 27, that no special relations of position exist between the given points and lines which these conditions involve.

If any combination of such conditions be represented by its signature $(\alpha\beta\gamma\delta)$, where, as before (art. 23), α denotes the number of given points in the first plane which correspond, individually, to given lines in the second, β the number of lines in the first plane which correspond to given points in the second, γ the number of given pairs of conjugate points, δ the number of given pairs of conjugate lines $(2\alpha+2\beta+\gamma+\delta=6)$; and if, moreover, it be remembered that $(\alpha\beta\gamma\delta)$ and $(\beta\alpha\gamma\delta)$ represent essentially the same conditions, it will be readily seen that the total number of cases to be considered amounts to twenty. From the Principle of Duality, however, it is manifest that the values of θ must be the same for the two signatures $(\alpha\beta\gamma\delta)$ and $(\alpha\beta\delta\gamma)$; so that we may confine our attention to the thirteen cases indicated in the twelve next following articles.

The process of reasoning which leads to the determination of θ is in all cases very simple, being based entirely upon the following three obvious *properties of a central and axial correlation* (art. 16, third case):

a) If a point and line correspond to one another, one of the associated centres will either coincide with the point or lie on the line, and one of the associated axes will either coincide with the line or pass through the point.

b) If two lines be conjugate to each other, one of the associated centres will lie on one of the lines.

(*) From this it follows that $\bar{\pi}$ is equal to the sum of the orders of the two *loci of centres* (art. 66).

c) If two points be conjugate to each other, one of the associated axes will pass through one of the points.

69. The signature being (3000), let the data be denoted by (3000)

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix},$$

and the associated centres and axes of any central and axial correlation satisfying the conditions by Σ_1, σ_1 and Σ_2, σ_2. $\theta=6$

Since one, at least, of the three points $P_1Q_1R_1$ will not lie in σ_1, it follows from art. 68, *a*), that σ_2 must coincide with one of the three lines $p_2q_2r_2$, say p_2, and that the axis σ_1 associated therewith must pass through the two non-corresponding points Q_1R_1. Moreover, by the Principle of Duality, the centre Σ_1 in σ_1 must coincide with one of these two points, say Q_1, and its associate Σ_2 with the intersection of the two non-corresponding lines r_1p_1. From this we at once conclude that there are but six different distributions of the associated centres and axes admissible. On the other hand, for each distribution, such as

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
Q_1	$\overline{Q_1R_1}$	(p_2r_2)	p_2

one central and axial correlation, and only one, satisfying the given six conditions, is clearly possible. Hence $\theta = 6$.

70. In the next case, the signature of the six conditions is (2100), the corresponding data being (2100)

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & r_1' \\ p_2 & q_2 & R_2 \end{vmatrix}$$

Since one, at least, of the lines p_2q_2 will not coincide with the axis σ_2, $\theta=1$
its associate σ_1 will necessarily pass through one, at least, of the points P_1Q_1, and therefore not coincide with r_1. But under these circumstances σ_2 will necessarily pass through R_2, and therefore coincide neither with p_2 nor q_2; whence we conclude that σ_1 must pass through both the points P_1Q_1. Correlatively, the centre Σ_1 must lie in r_1, and Σ_2 must coincide with the intersection of p_2 and q_2. The only admissible distribution of the associated centres and axes, therefore, is

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
$(\overline{P_1Q_1}, r_1)$	$\overline{P_1Q_1}$	(p_2q_2)	$\overline{(p_2q_2)R_2}$

With this arrangement, however, a central and axial correlation satisfying the conditions is clearly possible; hence $\theta = 1$.

(2020) 71. In the two cases above treated the conditions were all double ones; in all the remaining cases an even number of single conditions are involved, and the properties *b*) and *c*) of art. 68 have to be borne in mind. The first of such cases has the signature (2020), the data being

$$\left| \begin{matrix} P_1 & Q_1 & A_1 & B_1 \\ p_2 & q_2 & A_2 & B_2 \end{matrix} \right|.$$

$\theta=2$ Here, as in the last case, we know that σ_1 must pass through one, at least, of the two points $P_1 Q_1$, and hence that one, at least, of the two points $A_1 B_1$ will certainly not lie on σ_1; but if so, σ_2 will necessarily pass through one, at least, of the points $A_2 B_2$, and accordingly coincide with neither p_2 nor q_2. Hence σ_1 will necessarily pass through both P_1 and Q_1, and ist associate σ_2 through A_2 and B_2. Moreover, as in art. 69, Σ_1 must coincide with one or other of the two points $P_1 Q_1$, and its associate on $\overline{A_2 B_2}$ must lie on the non-corresponding line q_2 or p_2. The only two admissible distributions, therefore, are

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
P_1	$\overline{P_1 Q_1}$	$(q_2, \overline{A_2 B_2})$	$\overline{A_2 B_2}$
Q_1	$\overline{P_1 Q_1}$	$(p_2, \overline{A_2 B_2})$	$\overline{A_2 B_2}$

and since a central and axial correlation is possible with each, we have $\theta = 2$.

(2011) 72. The signature in the next case is (2011), the data being

$$\left| \begin{matrix} P_1 & Q_1 & A_1 & b_1 \\ p_2 & q_2 & A_2 & b_2 \end{matrix} \right|$$

$\theta=7$ As before, σ_1 must pass through one, at least, of the points $P_1 Q_1$; but here it may, or may not, pass also through A_1. If it do not, its associate σ_2 will pass through A_2, and, as in the last case, σ_1 will pass through both points $P_1 Q_1$. If, on the other hand, σ_1 pass through A_1, and therefore through one only of the points $P_1 Q_1$, σ_2 will necessarily coincide with the non-corresponding line q_2 or p_2. From the Principle of Duality we infer at once that the centre Σ_2 must either coincide with the intersection of p_2 with q_2, or with that of one of these lines and b_2. This being the case, it is obvious that the associated centres and axes must be distributed in one of the following seven ways:

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
$(\overline{P_1Q_1}, b_1)$	$\overline{P_1Q_1}$	(p_2q_2)	$\overline{A_2(p_2q_2)}$
P_1	$\overline{P_1Q_1}$	(b_2q_2)	$\overline{A_2(b_2q_2)}$
Q_1	$\overline{P_1Q_1}$	(p_2b_2)	$\overline{A_2(p_2b_2)}$
$(\overline{A_1Q_1}, b_1)$	$\overline{A_1Q_1}$	(p_2q_2)	p_2
Q_1	$\overline{A_1Q_1}$	(p_2b_2)	p_2
$(\overline{P_1A_1}, b_1)$	$\overline{P_1A_1}$	(p_2q_2)	q_2
P_1	$\overline{P_1A_1}$	(b_2q_2)	q_2.

Since each distribution determines, as before, one, and only one, central and axial correlation satisfying the given conditions, we have in the present case $\theta = 7$.

73. Passing next to the case (1120), where the data are (1120

$$\begin{vmatrix} P_1 & q_1 & A_1 & B_1 \\ p_2 & Q_2 & A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

I observe that σ_2 cannot coincide with p_2, because σ_1 would then coincide $\theta=4$
with q_1, whereas one of the associated axes ought to pass through one of the conjugate points A_1A_2 [art. 68, c)]. Hence σ_1 must pass through P_1 as well as through one of the points A_1B_1, and its associate σ_2 through Q_2 as well as through one of the points B_2A_2. Moreover the centre Σ_1 must either coincide with P_1 or lie in q_1, and its associate Σ_2 must, in the former case, coincide with Q_2, and in the latter lie in p_2. In short, the following four distributions of associated centres and axes are the only admissible ones; accordingly $\theta = 4$.

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
P_1	$\overline{P_1A_1}$	Q_2	$\overline{Q_2B_2}$
$(\overline{P_1A_1}, q_1)$	$\overline{P_1A_1}$	$(\overline{Q_2B_2}, p_2)$	$\overline{Q_2B_2}$
P_1	$\overline{P_1B_1}$	Q_2	$\overline{Q_2A_2}$
$(\overline{P_1B_1}, q_1)$	$\overline{P_1B_1}$	$(\overline{Q_2A_2}, p_2)$	$\overline{Q_2A_2}$.

74. In the next case (1111), where the data (1111)

$$\begin{vmatrix} P_1 & q_1 & A_1 & b_1 \\ p_2 & Q_2 & A_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\theta=2$ are of a perfectly symmetrical character, it is easily seen that, although the associated axes σ_1, σ_2 must, as before, pass through P_1, Q_2, respectively, these points cannot be associated centres, since one of two such centres must lie in one of the lines $b_1 b_2$. The following two distributions of associated centres and axes, therefore, are alone admissible, and $\theta=2$.

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
$(\overline{P_1 A_1},\ q_1)$	$\overline{P_1 A_1}$	$(p_2 b_2)$	$\overline{Q_2(p_2 b_2)}$
$(b_1 q_1)$	$\overline{P_1(b_1 q_1)}$	$(p_2,\ \overline{Q_2 A_2})$	$\overline{Q_2 A_2}$.

(1040) 75. The six conditions whose signature is (1040) cannot, in general, be
$\theta=0$ satisfied by any central and axial correlation. For four points in the first plane could not be conjugate to four given points in the second, unless σ_1 passed through two of the former and σ_2 through the conjugates of the remaining two; but if the positions σ_1 and σ_2 were thus determined, the residual double condition, in virtue of which a given point P_1 is to correspond to a given line p_2, would clearly not be satisfied, since, in general, σ_1 would neither pass through P_1 nor σ_2 coincide with p_2 [art. 68, *a*)].

(1031) 76. In the next case, however, where the signature is (1031) and the data

$$\begin{vmatrix} P_1 & A_1 & B_1 & C_1 & d_1 \\ p_2 & A_2 & B_2 & C_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

$\theta=6$ it may easily be shown that $\theta=6$. In fact, since σ_1 cannot pass through more than two of the three points $A_1 B_1 C_1$, σ_2 must pass through one, at least, of the three points $A_2 B_2 C_2$ [art. 68, *c*)]. From this, however, or rather from the fact that σ_2 cannot coincide with p_2, it follows that σ_1 must pass through P_1 [art. 68, *a*)], and hence that there will always be two, at least, of the three points $A_1 B_1 C_1$ through which σ_1 will not pass. Accordingly σ_2 will necessarily pass through two of the three points $A_2 B_2 C_2$, and σ_1 through P_1 and the conjugate of the third. But in each of the three positions of σ_1, thus proved to be admissible, Σ_1 may, and must, either coincide with P_1 or lie in d_1, whilst in the associated axis σ_2, Σ_2 will, in the one case, lie on d_2, and in the other on p_2. The six solutions require no further definition in the present case.

(1022) 77. When the signature is (1022), the data being

$$\begin{vmatrix} P_1 & A_1 & B_1 & c_1 & d_1 \\ p_2 & A_2 & B_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

σ_2 may coincide with p_2, provided σ_1 pass through the two points A_1B_1. There are, in fact, two, and only two, solutions of this kind, since Σ_1 may, and must, lie either on c_1 or on d_1, and Σ_2 either on d_2 or c_2, respectively. In all other cases σ_1 must pass through P_1, and σ_2 through one, at least, of the points A_2B_2. From the Principle of Duality, applied to the preceding reasoning, we at once infer that in two of these cases Σ_1 will coincide with P_1 and Σ_2 with (c_2d_2); in all the remaining ones, however, Σ_2 will lie in p_2, and Σ_1 in one, at least, of the lines c_1d_1. If Σ_2, indeed, do not coincide with either of the intersections of p_2 with c_2 and d_2, Σ_1 will lie in both the lines c_1d_1, and σ_2 will pass through both the points A_2B_2. But if, on the other hand, Σ_2 coincide either with (c_2p_2) or (d_2p_2), σ_2 passing of course through A_2 or B_2, σ_1 will pass, respectively, through B_1 or A_1, and Σ_1 will lie in d_1 or c_1; there are clearly four solutions of this kind. For the sake of greater clearness the nine distributions of associated centres and axes above indicated are collected in the following table: $\theta=9$

Σ_1	σ_1	Σ_2	σ_2
$(c_1, \overline{A_1B_1})$	$\overline{A_1B_1}$	(d_2p_2)	p_2
$(d_1, \overline{A_1B_1})$	$\overline{A_1B_1}$	(c_2p_2)	p_2
P_1	$\overline{A_1P_1}$	(c_2d_2)	$\overline{B_2(c_2d_2)}$
P_1	$\overline{B_1P_1}$	(c_2d_2)	$\overline{A_2(c_2d_2)}$
(c_1d_1)	$\overline{(c_1d_1)P_1}$	$(p_2, \overline{A_2B_2})$	$\overline{A_2B_2}$
$(d_1, \overline{B_1P_1})$	$\overline{B_1P_1}$	(c_2p_2)	$\overline{A_2(c_2p_2)}$
$(c_1, \overline{B_1P_1})$	$\overline{B_1P_1}$	(d_2p_2)	$\overline{A_2(d_2p_2)}$
$(d_1, \overline{A_1P_1})$	$\overline{A_1P_1}$	(c_2p_2)	$\overline{B_2(c_2p_2)}$
$(c_1, \overline{A_1P_1})$	$\overline{A_1P_1}$	(d_2p_2)	$\overline{B_2(d_2p_2)}$.

It is scarcely necessary to add that one, and only one, central and axial correlation satisfying the required conditions exists with each of the above distributions; so that we have $\theta=9$.

78. The only combinations of six conditions which remain to be treated are those in which these conditions are all single ones. In the two cases (0060) and (0051), where more than four pairs of conjugate points are given, the six conditions, clearly, cannot be satisfied by any axial correlation whatever (see arts. 34 and 75). (0060) (0051) $\theta=0$

(0042) 79. In the case whose signature is (0042) it is easy to see that $\theta = 12$.
$\theta=12$ For σ_1 must be one of the six lines passing through two of the four given points in the first plane, and Σ_1 must lie in one or other of the two given lines in that plane; the axis σ_2 associated with the former will, of course, pass through the conjugates of the remaining two points, and the centre Σ_2, associated with the latter, will lie in the conjugate of the remaining line.

(0033) 80. Finally, in the case where the signature is (0033), and the symmetry
$\theta=18$ between the two planes is perfect, it is just as easy to see that there will be eighteen solutions, or $\theta = 18$. In nine of these σ_1 will pas through two of the given points of the first plane, and σ_2 through the conjugate of the third as well as through the intersection of two of the three given lines in the second plane; with this intersection, moreover, the centre Σ_2 will coincide whilst its associate Σ_1 will lie on the conjugate of the line which does not pass through Σ_2. In the nine remaining solutions the distribution of associated centres and axes is of the same character, the two planes being merely interchanged.

Axial (or Central) Correlations satisfying seven elementary conditions.

81. The values of θ for any six elementary conditions being now known, we have merely to show how, by means of the two equations of art. 67, the number of exceptional correlations of the first order (central or axial) may be determined which satisfy any seven such conditions.

The number λ of axial correlations, for instance, which satisfy the seven conditions $(\alpha\beta\gamma\delta)$ is, by definition, identical with the value of $\bar{\lambda}$ answering to the six conditions $(\alpha\beta\overline{\gamma-1}\,\delta)$ (art. 67). If this number were known, as well as the value of θ for these six conditions, the second equation in art. 67 would at once give the value of $\bar{\lambda}$ for these conditions, or, in other words, the value of λ for the seven conditions $(\alpha\beta\overline{\gamma-1}\;\overline{\delta+1})$. The values of λ, therefore, answering to the several combinations $(\alpha\beta\gamma\delta)$ of a group of seven conditions in which α and β retain their values, may be successively deduced from the value of λ answering to any one of them (*);—for instance, from the value of λ for the signature $(\alpha\beta\overline{7-2\alpha-2\beta}\;0)$ in which no conjugate lines are involved.

(*) A similar conclusion will obviously hold if, in place of the above elementary double conditions, any conditions, which are invariable for one and the same group, are substituted.

From this it follows at once that the values of λ for all possible cases, of seven elementary conditions may be deduced from the values of λ which correspond to the following six combinations of such conditions:

$$(3010),\quad (2110),\quad (2030),\quad (1130),\quad (1050),\quad (0070).$$

But these values may be very readily determined directly; in fact, they have already been found to be

$$0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$$

respectively. (See arts. 28, 29, 30, 32, 34, 37.)

82. The number π of central correlations which satisfy any seven elementary conditions $(\alpha\beta\gamma\delta)$ may be found in a precisely similar manner. Since this number, however, by the Principle of Duality, is the same as the number λ of axial correlations which satisfy the conditions $(\alpha\beta\delta\gamma)$, it will suffice here to tabulate the numbers given, in the several cases, by the second equation of art. 67. The grouping of these cases corresponds to that adopted in my former paper. For each group the value of $\bar{\lambda}$ occurring on any line is, for obvious reasons, the same as the value of $\dot{\lambda}$ on the next succeeding line; the values of $\dot{\lambda}$ in the first lines of the several groups correspond, of course, to the special values of λ given in the last art. The values of θ include those which have been directly determined in arts. 69-80; the latter have been supplemented, however, by means of the Principle of Duality.

Group.	$(\alpha\beta\gamma\delta)$	θ	$\dot{\lambda}$	$\bar{\lambda}$
I	(3000)	6	0	3
II	(2100)	1	1	1
III	(2020)	2	0	1
	(2011)	7	1	4
	(2002)	2	4	3
IV	(1120)	4	0	2
	(1111)	2	2	2
	(1102)	4	2	3
V	(1040)	0	0	0
	(1031)	6	0	3
	(1022)	9	3	6
	(1013)	6	6	6
	(1004)	0	6	3

Group.	$(\alpha\beta\gamma\delta)$	θ	$\dot{\lambda}$	$\bar{\lambda}$
VI	(0060)	0	0	0
	(0051)	0	0	0
	(0042)	12	0	6
	(0033)	18	6	12
	(0024)	12	12	12
	(0015)	0	12	6
	(0006)	0	6	3.

Ordinary Correlations satisfying eight elementary conditions.

83. The numbers in the last column of the above table, together with those in the last column but one which stand at the head of each group, are precisely the values of λ tabulated in art. 41. These same numbers, taken, of course, in inverted order for each group, likewise coincide with the values of π given in the table just referred to. They provide all the data, therefore, which are required for the determination, by means of the two formulæ of art. 65, of the number of ordinary correlations which satisfy any eight elementary conditions (*) (see art. 42).

With respect to each of the three exceptional cases (4000), (3100), (2200), where, the conditions being all double ones, the above mode of treatment is inapplicable, I may observe that, although the number of solutions is well known to be 1, 1, 0, respectively (see art. 43), this fact may be verified by means of either of the two general theorems given in the next article. By their aid, in fact, we may always pass from the case of two single conditions to one double one, or *vice vêrsa*,—a passage which, especially when the conditions are no longer elementary ones, may often be made advantageously.

84. The theorems in question may be thus enunciated:

Theorem I.—In a two-fold system of correlations satisfying any six conditions, the number of correlations having likewise two pairs of conjugate points exceeds the number of those in which a given line corresponds to a

(*) It is due to Prof. Schroeter to state that, in his Memoir entitled « *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova* », which was published at Breslau in 1862 as an professorial dissertation, and afterwards in « Crelle's Journal » (vol. 62, p. 215), he was, I believe, the first to prove that there is one, and only one, solution in each of the cases: (3020), (2040), (1060) and (0080).

given point, by the number of axial correlations in the system which have an axis passing through the latter point (*).

Theorem II.—In a two-fold system of correlations satisfying any six given conditions, the number of correlations having likewise two pairs of conjugate lines exceeds the number of those in which a given point corresponds to a given line, by the number of central correlations in the system which have a centre situated on the latter line (**).

In proof of the first of the above theorems (the second follows therefrom by the Principle of Duality) it may be observed: *first,* that, although the *character* of some of the correlations which satisfy the six conditions and have likewise the two pairs of conjugate points $\begin{pmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{pmatrix}$ may possibly change when two of these points, say A_1 and B_1, are allowed to coincide, their *number* will remain unaltered; *secondly,* that the line which corresponds to any point $A_1 \equiv B_1$ always passes through the conjugates A_2, B_2 of that point, no matter whether the correlation satisfying the six given conditions be an ordinary one, a central one, or an axial one, provided, in the last case, the axis do not pass through $A_1 \equiv B_1$; and *lastly,* that in every axial correlation which, besides satisfying the six conditions in question, has an axis σ_1 passing through a given point $A_1 \equiv B_1$, the line corresponding to that point being an *indeterminate line through a determinate point* of the associated axis σ_2, will not, in general, pass through *two* given points A_2, B_2, although each of these points, as indeed any point whatever of the plane, may properly be regarded as conjugate to $A_1 \equiv B_1$.

In illustration of the first of these theorems, it may be noted that the number of solutions [4000], as also the number [3100], is the same as the number [3020] = 1 (art. 42), because the system of correlations satisfying the six conditions (3000) does not contain any axial ones having an axis passing through an arbitrary point (art. 69). Again, the number [2200] is zero, or less by one than the number [2120] = 1, because amongst the correlations which satisfy the six conditions (2100) (art. 70) there is clearly an axial one whose axis passes through an arbitrary point of the second plane; it passes also

(*) The excess in question is obviously equal to the class of one of the two *envelopes of axes* of axial correlations satisfying the six conditions (art. 66).

(**) The excess in question is equal to the order of one of the two *loci of centres* of central correlations satisfying the six conditions (art. 66).

through the given point in that plane, and has, for associate, the line joining the two given points in the first plane.

I may observe, in conclusion, that by means of the above two theorems we might, without difficulty, deduce successively from the well known result $[4000]=1$, or from the still simpler one $[2200]=0$, all those, contained in the table of art. 42, in which an even number of pairs of conjugate points or conjugate lines are involved.

Rome, April 11, 1877.

Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra loro.

(*Memoria di* Enrico Betti, *a Pisa.*)

La determinazione del moto di un sistema di un numero qualunque n di punti che si attraggono o si respingono reciprocamente con forze funzioni soltanto delle loro distanze, e che quindi ha un potenziale dipendente soltanto dalla sua configurazione, si può ottenere mediante la risoluzione dei due problemi seguenti: 1.° dati la configurazione e il moto iniziali del sistema, determinare per un tempo qualunque le $3n-6$ quantità che determinano la configurazione e le loro derivate prime; 2.° determinate in funzione del tempo queste quantità dedurne le coordinate e le componenti delle velocità di ciascuno degli n punti, rispetto a tre assi fissi nello spazio. Fu il primo Lagrange nel 1772 (*) che fece questa separazione nel problema dei tre corpi, e ridusse la risoluzione del 1.° problema alla effettuazione di 7 integrazioni, e la risoluzione del 2.° a una sola quadratura. Un secolo dopo Otto Hesse trattò (**), però meno felicemente, la stessa separazione nello stesso problema. In questa Memoria io considero il problema generale degli n corpi, e riduco la risoluzione del 1.° problema alla effettuazione di $6n-12$ integrazioni e a una quadratura, e ne deduco la risoluzione del 2.° mediante una sola quadratura. Quindi il problema dei tre corpi è ridotto soltanto a 6 integrazioni.

1.

Siano n punti m_1, m_2,... m_n che si attraggono o si respingono con una forza funzione soltanto della loro distanza. Denotiamo rispettivamente con m_1,

(*) Oeuvres de Lagrange, t. 6, pag. 229.
(**) Crelle, vol. 74, pag. 97.

$m_2, \ldots m_n$ le loro masse, con r_{ab} la distanza di m_a da m_b, con x_a, y_a, z_a le coordinate cartesiane di m_a, e poniamo

$$\xi_{ab} = x_a - x_b, \qquad \eta_{ab} = y_a - y_b, \qquad \zeta_{ab} = z_a - z_b. \tag{1}$$

Il potenziale del sistema sarà

$$P = \sum_{ab} m_a m_b f(r_{ab}) \tag{2}$$

e ponendo

$$(ab) = -\frac{f'(r_{ab})}{r_{ab}} \tag{3}$$

le equazioni del moto saranno

$$\frac{d^2 x_a}{dt^2} = \sum_s m_s (sa) \xi_{sa},$$

$$\frac{d^2 y_a}{dt^2} = \sum_s m_s (sa) \eta_{sa},$$

$$\frac{d^2 z_a}{dt^2} = \sum_s m_s (sa) \zeta_{sa}.$$

Sottraendo da queste equazioni rispettivamente quelle che si ottengono mutando l'indice a nell'indice b, avremo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 \xi_{ab}}{dt^2} &= -M(ab)\xi_{ab} + \sum_c m_c [(ab)\xi_{ab} + (bc)\xi_{bc} + (ca)\xi_{ca}] \\
\frac{d^2 \eta_{ab}}{dt^2} &= -M(ab)\eta_{ab} + \sum_c m_c [(ab)\eta_{ab} + (bc)\eta_{bc} + (ca)\eta_{ca}] \\
\frac{d^2 \zeta_{ab}}{dt^2} &= -M(ab)\zeta_{ab} + \sum_c m_c [(ab)\zeta_{ab} + (bc)\zeta_{bc} + (ca)\zeta_{ca}]
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dove

$$M = \sum_s m_s.$$

2.

Poniamo:

$$p_{abc} = \xi_{ab}\xi_{bc} + \eta_{ab}\eta_{bc} + \zeta_{ab}\zeta_{bc}. \tag{5}$$

Avremo

$$p_{abc} + p_{acb} = \sum (\xi_{ab} + \xi_{ca}) \xi_{bc}$$

ed essendo

$$\xi_{ab} + \xi_{ca} = \xi_{cb}$$

otterremo

$$p_{abc} + p_{acb} = - r^2_{bc} \tag{6}$$

e analogamente

$$p_{bca} + p_{bac} = - r^2_{ac}$$

$$p_{cab} + p_{cba} = - r^2_{ab}$$

sommando la prima e la terza e sottraendo la seconda di quest'equazioni, avremo

$$p_{abc} = \frac{r^2_{ac} - r^2_{ab} - r^2_{bc}}{2} \tag{7}$$

e quindi p_{abc} funzione delle sole distanze scambievoli dei punti m.

Se ora moltiplichiamo rispettivamente le equazioni (4) per ξ_{ab}, η_{ab}, ζ_{ab}, sommiamo e poniamo

$$q_{abc} = (ab) - (bc) \tag{8}$$

avremo

$$\xi_{ab} \frac{d^2 \xi_{ab}}{dt^2} + \eta_{ab} \frac{d^2 \eta_{ab}}{dt^2} + \zeta_{ab} \frac{d^2 \zeta_{ab}}{dt^2} = - M(ab) r^2_{ab} + \sum_s m_s (p_{sab} q_{sab} + p_{sba} q_{sba}).$$

Ponendo

$$\left(\frac{d\xi_{ab}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_{ab}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_{ab}}{dt}\right)^2 = u^2_{ab}$$

e sommando questa colla equazione precedente, otterremo

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r_{ab})^2}{dt^2} = u^2_{ab} - M(ab) r^2_{ab} + \sum_s m_s (p_{sab} q_{sab} + p_{sba} q_{sba}). \tag{9}$$

3.

Poniamo

$$\rho_{abc} = \sum \xi'_{ab} \xi_{bc} - \sum \xi_{ab} \xi'_{bc} \tag{10}$$

denotando le derivate al modo di Lagrange.

Con una trasposizione degl'indici a e c si ha

$$\rho_{cba} = \sum \xi'_{cb} \xi_{ba} - \sum \xi_{cb} \xi'_{ba}$$

e sommando

$$\rho_{abc} + \rho_{cba} = 0. \tag{11}$$

Dunque le ρ_{abc} per una trasposizione degl'indici estremi non mutano in valore assoluto ma soltanto nel segno.

Permutando circolarmente i tre indici si ha

$$\rho_{bca} = \sum \xi'_{bc} \xi_{ca} - \sum \xi_{bc} \xi'_{ca}$$

sottraendo questa equazione dalla (10), abbiamo

$$\rho_{abc} - \rho_{bca} = 0. \tag{12}$$

Dunque le ρ_{abc} non mutano valore permutando circolarmente i tre indici.

Poichè qualunque permutazione degl'indici si ottiene mediante una sola trasposizione e una sostituzione circolare, le permutazioni sugl'indici non danno nessuna nuova funzione ρ_{abc}.

Tra le quattro funzioni ρ_{abc}, ρ_{bcd}, ρ_{cda}, ρ_{dab} esiste sempre una relazione. Infatti

$$\begin{aligned}
\rho_{abc} &= \sum \xi'_{ab} \xi_{bc} - \sum \xi_{ab} \xi'_{bc} \\
\rho_{bcd} &= \sum \xi'_{bc} \xi_{cd} - \sum \xi_{bc} \xi'_{cd} \\
\rho_{cda} &= \sum \xi'_{cd} \xi_{da} - \sum \xi_{cd} \xi'_{da} \\
\rho_{dab} &= \sum \xi_{da} \xi_{ab} - \sum \xi_{da} \xi'_{ab}
\end{aligned}$$

sommando la prima e la terza, e sottraendo la seconda e la quarta di queste equazioni, si ha

$$\rho_{abc} - \rho_{bcd} + \rho_{cda} - \rho_{dab} \begin{array}{l} = \sum (\xi'_{ab} + \xi'_{cd})(\xi_{bc} + \xi_{da}) \\ - \sum (\xi'_{bc} + \xi'_{da})(\xi_{ab} + \xi_{cd}) \end{array}$$

ed essendo

$$\begin{aligned}
\xi_{ab} + \xi_{cd} &= -(\xi_{bc} + \xi_{da}) \\
\xi'_{ab} + \xi'_{cd} &= -(\xi'_{bc} + \xi'_{da})
\end{aligned}$$

avremo

$$\rho_{abc} - \rho_{bcd} + \rho_{cda} - \rho_{dab} = 0 \tag{13}$$

quindi per mezzo delle $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ funzioni con un indice comune ed uguale per esempio alla unità, si esprimono tutte le altre, e il numero delle ρ_{abc} essenzialmente distinte è uguale ad $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Sommando colla (10) la equazione

$$p'_{abc} = \sum \xi'_{ab} \xi_{bc} + \sum \xi_{ab} \xi'_{bc}$$

abbiamo

$$\sum \xi'_{ab} \xi_{bc} = \tfrac{1}{2}(p'_{abc} + \rho_{abc}). \tag{14}$$

Se ora moltiplichiamo le equazioni (4) rispettivamente per ξ'_{ab}, η'_{ab}, ζ'_{ab} e sommiamo, avremo

$$\tfrac{1}{2}\frac{d^2(u^2_{ab})}{dt^2}=Mf'(r_{ab})+\tfrac{1}{2}\sum_s m_s(\rho_{abc}q_{abc}+p'_{bac}q_{bac}+p'_{bca}q_{bca}). \tag{15}$$

4.

Moltiplichiamo rispettivamente le equazioni (4) per ξ_{bc}, η_{bc}, ζ_{bc} e sommiamo. Osservando che si ha

$$\sum\xi_{bd}\xi_{bc}=\sum\xi_{bd}(\xi_{bd}+\xi_{dc})=p_{bdc}+r^2_{bd}$$
$$\sum\xi_{da}\xi_{bc}=\sum\xi_{da}(\xi_{bd}+\xi_{dc})=p_{bda}-p_{cda}$$

otteniamo

$$\sum\xi''_{ab}\xi_{bc}=-M(ab)p_{abc}+\sum_s m_s[(ab)p_{abc}+(bs)(p_{bsc}+r^2_{bs})+(sa)(p_{bsa}-p_{csa})]$$

$$\sum\xi''_{cb}\xi_{ba}=-M(bc)p_{abc}+\sum m_s[(bc)p_{abc}+(cs)(p_{csb}-p_{asc})+(sb)(p_{asb}+r^2_{bs})]$$

sottraendo si ottiene

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\rho_{abc}}{dt}&=-m_b p_{abc}q_{abc}-m_c p_{bca}q_{bca}-m_a p_{cab}q_{cab}\\&+\sum_s m_s(p_{bsc}q_{bsc}+p_{csa}q_{csa}+p_{asb}q_{asb}).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

5.

Le equazioni (9), (15) e (16) insieme coll'equazione

$$\frac{dr_{ab}}{dt}=r'_{ab} \tag{17}$$

formano un sistema di $\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ equazioni differenziali di 1° ordine fra altrettante funzioni r, r', u e ρ. Queste $\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ quantità sono funzioni delle $\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ distanze reciproche dei $2n-1$ punti che hanno per coordinate

$$(0,\ 0,\ 0),\qquad (\xi_{1a},\ \eta_{1a},\ \zeta_{1a}),\qquad (\xi'_{1a},\ \eta'_{1a},\ \zeta'_{1a}),$$

le quali hanno tra loro $\frac{(2n-4)(2n-5)}{2}$ relazioni, quindi si avranno altrettante equazioni tra le quantità r, r', u e ρ. Queste relazioni si otterranno inalzando a quadrato, ed uguagliando a zero, i determinanti dei tre tipi seguenti

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{1a} & \xi_{1b} \\ \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{1a} & \eta_{1b} \\ \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{1a} & \zeta_{1b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{1a} & \xi'_{1b} \\ \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{1a} & \eta'_{1b} \\ \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{1a} & \zeta'_{1b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} & \xi'_{1a} & \xi'_{1b} \\ \eta_{12} & \eta_{13} & \eta'_{1a} & \eta'_{1b} \\ \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta'_{1a} & \zeta'_{1b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il numero dei primi è di $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$; il numero dei secondi è di $(n-1)(n-3)$, il numero dei terzi è di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Quindi in tutti saranno precisamente $\frac{(2n-4)(2n-5)}{2}$.

Inalzando a quadrato e ponendo

$$\pi_{abc} = \xi'_{ab}\xi'_{bc} + \eta'_{ab}\eta'_{bc} + \zeta'_{ab}\zeta'_{bc}$$

avremo:

$$L_{ab} = \begin{vmatrix} -r_{12}^2 & p_{213} & p_{21a} & p_{21b} \\ p_{312} & -r_{13}^2 & p_{31a} & p_{31b} \\ p_{a12} & p_{a13} & -r_{1a}^2 & p_{a1b} \\ p_{b12} & p_{b13} & p_{b1a} & -r_{1b}^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$M_{ab} = \begin{vmatrix} -r_{12}^2 & p_{213} & p_{21a} & \frac{1}{2}(p'_{b12}+\rho_{b12}) \\ p_{312} & -r_{13}^2 & p_{31a} & \frac{1}{2}(p'_{b13}+\rho_{b13}) \\ p_{a12} & p_{a13} & -r_{1a}^2 & \frac{1}{2}(p'_{b1a}+\rho_{b1a}) \\ \frac{1}{2}(p'_{b12}+\rho_{b12}) & \frac{1}{2}(p'_{b13}+\rho_{b13}) & \frac{1}{2}(p'_{b1a}+\rho_{b1a}) & -u^2_{ab} \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

$$N_{ab} = \begin{vmatrix} -r_{12}^2 & p_{213} & \frac{1}{2}(p'_{a12}+\rho_{a12}) & \frac{1}{2}(p'_{b12}+\rho_{b12}) \\ p_{312} & -r_{13}^3 & \frac{1}{2}(p'_{a13}+\rho_{a13}) & \frac{1}{2}(p'_{b13}+\rho_{b13}) \\ \frac{1}{2}(p'_{a12}+\rho_{a12}) & \frac{1}{2}(p'_{a13}+\rho_{a13}) & -u_{1a}^2 & \pi_{a1b} \\ \frac{1}{2}(p'_{b12}+\rho_{b12}) & \frac{1}{2}(p'_{b13}+\rho_{b13}) & \pi_{a1b} & -u_{1b}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Nei casi nei quali gl'indici a e b siano uguali ai due indici 2 e 3, o uno dei due indici a e b sia uguale a uno dei due indici 2 e 3, si hanno differenti alcuni elementi del determinante, che si ottengono con molta facilità.

6.

Dalle equazioni (4) si deduce

$$\begin{vmatrix} \xi_{ab} & \xi''_{ab} \\ \eta_{ab} & \eta''_{ab} \end{vmatrix} = \sum_s m_s \left\{ \begin{vmatrix} \xi_{ab} & \xi_{bs} \\ \eta_{ab} & \eta_{bs} \end{vmatrix} (bs) + \begin{vmatrix} \xi_{ab} & \xi_{sa} \\ \eta_{ab} & \eta_{sa} \end{vmatrix} (sa) \right\}$$

onde

$$\sum_{ab} m_a m_b \begin{vmatrix} \xi_{ab} & \xi''_{ab} \\ \eta_{ab} & \eta''_{ab} \end{vmatrix} = 0.$$

Analogamente

$$\sum_{ab} m_a m_b \begin{vmatrix} \eta_{ab} & \eta''_{ab} \\ \zeta_{ab} & \zeta''_{ab} \end{vmatrix} = 0$$

$$\sum_{ab} m_a m_b \begin{vmatrix} \zeta_{ab} & \zeta''_{ab} \\ \xi_{ab} & \xi''_{ab} \end{vmatrix} = 0.$$

Integrando e ponendo

$$\alpha_{ab} = \begin{vmatrix} \eta_{ab} & \eta'_{ab} \\ \zeta_{ab} & \zeta'_{ab} \end{vmatrix}, \qquad \beta_{ab} = \begin{vmatrix} \zeta_{ab} & \zeta'_{ab} \\ \xi_{ab} & \xi'_{ab} \end{vmatrix}, \qquad \gamma_{ab} = \begin{vmatrix} \xi_{ab} & \xi'_{ab} \\ \eta_{ab} & \eta'_{ab} \end{vmatrix}$$

avremo

$$\left.\begin{aligned} \sum m_a m_b \alpha_{ab} &= c_1 \\ \sum m_a m_b \beta_{ab} &= c_2 \\ \sum m_a m_b \gamma_{ab} &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

dalle quali, inalzando a quadrato, sommando e ponendo

$$K^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

si deduce

$$K^2 = \sum m^2{}_a m^2{}_b (\alpha^2{}_{ab} + \beta^2{}_{ab} + \gamma^2{}_{ab}) + 2 \sum m_a m_b m_c m_d (\alpha_{ab}\alpha_{cd} + \beta_{ab}\beta_{cd} + \gamma_{ab}\gamma_{cd}). \tag{22}$$

Per un noto teorema dei determinanti

$$\alpha^2{}_{ab} + \beta^2{}_{ab} + \gamma^2{}_{ab} = r^2{}_{ab}(u^2{}_{ab} - r'^2{}_{ab}) \tag{23}$$

$$\alpha_{ab}\alpha_{cd} + \beta_{ab}\beta_{cd} + \gamma_{ab}\gamma_{cd} = (p_{acd} - p_{bcd})(\pi_{acd} - \pi_{bcd}) - \tfrac{1}{4}\{(p'_{acd} - p'_{bcd})^2 - (p_{acd} - p_{bcd})^2\}. \tag{24}$$

Onde, sostituendo nella equazione (22) i valori (23) e (24) si ha

$$\left.\begin{aligned} \sum m^2{}_a m^2{}_b r^2{}_{ab}(u^2{}_{ab} - r'^2{}_{ab}) + 2 \sum m_a m_b m_c m_d \{(p_{acd} - p_{bcd})(\pi_{acd} - \pi_{bcd}) \\ - \tfrac{1}{4}[(p'_{acd} - p'_{bcd})^2 - (\rho_{acd} - \rho_{bcd})^2]\} = K^2. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ora moltiplichiamo rispettivamente le equazioni (4) per $m_a m_b \xi_{ab}$, $m_a m_b \eta_{ab}$, $m_a m_b \zeta_{ab}$ e sommiamo; avremo

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m_a m_b u^2_{ab} = M\sum(ab) r_{ab} r'_{ab}.$$

Ma dalle equazioni (3) e (2) si ha

$$\sum m_a m_b (ab) r_{ab} r'_{ab} = \sum m_a m_b f'(r_{ab}) = \frac{dP}{dt}.$$

Onde

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m_a m_b u^2_{ab} = M\frac{dP}{dt}$$

e integrando

$$\tfrac{1}{2}\sum m_a m_b u^2_{ab} = P + h. \tag{26}$$

7.

Tra le $(2n-1)(n-1)$ quantità r, r', u e ρ, abbiamo le equazioni (18), (19) e (20) in numero di $(n-2)(2n-5)$, e le due equazioni (25) e (26). Quindi in tutto $2n^2-9n+12$ equazioni, le quali possono riguardarsi come altrettanti integrali del sistema di $(2n-1)(n-1)$ equazioni differenziali di 1° ordine (9), (15), (16) e (17). Rimangono dunque a effettuarsi soltanto $(2n-1)(n-1)-2n^2+9n-12=6n-11$ integrazioni. Poichè il tempo t non comparisce esplicitamente in questo sistema di equazioni, se prendiamo per variabile indipendente una delle ρ per es. ρ_{213}, sarà da farsi un'integrazione di meno. Dunque con $6n-12$ integrazioni potremo determinare tutte le quantità r, r', u e ρ in funzione di ρ_{213} e di $6n-12$ costanti arbitrarie. Poi per mezzo di una quadratura dall'equazione (16) in cui è posto $a=2$, $b=1$, $c=3$ ricaveremo t espresso per ρ_{213} e anche ρ_{213} in funzione di t, e quindi le quantità r, r', u e ρ espresse in funzione del tempo e delle costanti arbitrarie.

Le costanti arbitrarie saranno $6n-9$, cioè $6n-12$ portate dalle integrazioni, una dalla quadratura e le due h e K. Per determinarle basterà che siano date le $3n-6$ quantità che determinano la configurazione iniziale, le $3n-6$ derivate delle medesime rispetto al tempo, tre sole delle velocità relative iniziali u.

Così è ridotta la risoluzione del 1.° problema alla effettuazione di $6n-12$ integrazioni e ad una quadratura.

8.

Per risolvere il secondo problema, cioè per dedurre dalla risoluzione del primo problema la determinazione del moto del sistema rispetto a un sistema di assi fisso nello spazio, ci serviremo delle equazioni (21), nelle quali, se prendiamo per piano delle xy il piano invariabile, dovrà porsi

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0, \qquad K = c_3 \tag{27}$$

e del principio della conservazione del centro di gravità.

Poniamo

$$G_{abc} = \begin{vmatrix} \xi_{ab} & \xi_{bc} & \xi'_{bc} \\ \eta_{ab} & \eta_{bc} & \eta'_{bc} \\ \zeta_{ab} & \zeta_{bc} & \zeta'_{bc} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Inalzando a quadrato, avremo

$$G^2_{abc} = \begin{vmatrix} r^2_{ab} & p_{abc} & \frac{1}{2}(p'_{abc} - \rho_{abc}) \\ p_{abc} & r^2_{bc} & \frac{1}{2}(p'_{abc} + \rho_{acb}) \\ \frac{1}{2}(p'_{abc} - \rho_{abc}) & \frac{1}{2}(p_{abc} + \rho_{acb}) & u^2_{ab} \end{vmatrix} \tag{29}$$

cioè G_{abc}, che esprime il sestuplo del volume della piramide che ha per vertici i punti m_a, m_b, m_c e il punto di coordinate $(\xi'_{bc}, \eta'_{bc}, \zeta'_{bc})$, è funzione soltanto delle quantità r, r', u, e ρ.

Dalle (28) si ha immediatamente

$$G_{aba} = 0 \tag{30}$$

e riprendendo i valori di α_{ab}, β_{ab}, γ_{ab} del n.° 6,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ab}\xi_{cd} + \beta_{ab}\eta_{cd} + \gamma_{ab}\zeta_{cd} &= \alpha_{ab}\xi_{ca} + \beta_{ab}\eta_{ca} + \gamma_{ab}\zeta_{ca} - \alpha_{ab}\xi_{da} - \beta_{ab}\eta_{da} - \gamma_{ab}\zeta_{da} \\ &= G_{cab} - G_{dab}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Poniamo anche

$$\Gamma_{abc} = \begin{vmatrix} \xi'_{ab} & \xi_{bc} & \xi'_{bc} \\ \eta'_{ab} & \eta_{bc} & \eta'_{bc} \\ \zeta'_{ab} & \zeta_{bc} & \zeta'_{bc} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Inalzando a quadrato, otterremo

$$\Gamma^2_{abc} = \begin{vmatrix} u^2_{ab} & \pi_{abc} & \frac{1}{2}(p'_{abc} + \rho_{abc}) \\ \pi_{abc} & u^2_{bc} & \frac{1}{2}(p'_{abc} + p'_{acb}) \\ \frac{1}{2}(p'_{abc} + \rho_{abc}) & -\frac{1}{2}(p'_{abc} + p'_{acb}) & r^2_{bc} \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Quindi Γ_{abc}, cioè il sestuplo del volume della piramide che ha per vertici i punti m_b, m_c e i due di coordinate $(\xi'_{ab}, \eta'_{ab}, \zeta'_{ab})$, $(\xi'_{bc}, \eta'_{bc}, \zeta'_{bc})$, è funzione soltanto delle quantità r, r', u e ρ. La espressione di Γ_{abc} si deduce da quella di G_{abc}, mutando le r nelle u, le p nelle π e viceversa, mutando il segno alle ρ, e lasciando invariate le p'.

Dalla (33) si deduce immediatamente

$$\Gamma_{aba} = 0 \quad (34)$$

$$\alpha_{ab}\xi'_{cd} + \beta_{ab}\eta'_{cd} + \gamma_{ab}\zeta'_{cd} = \Gamma_{cab} - \Gamma_{dab}. \quad (35)$$

Moltiplichiamo ora le equazioni (21), nelle quali sono posti i valori (27), rispettivamente per ξ_{cd}, η_{cd}, ζ_{cd}, sommiamo, osservando la (31), avremo

$$K\zeta_{cd} = \sum m_a m_b (G_{cab} - G_{dab}) \quad (36)$$

e moltiplicando per ξ'_{cd}, η'_{cd}, ζ'_{cd}, sommando, ed osservando l'equazione (35), otterremo

$$K\zeta'_{cd} = \sum m_a m_b (\Gamma_{cab} - \Gamma_{dab}). \quad (37)$$

Se moltiplichiamo rispettivamente per α_{cd}, β_{cd}, γ_{cd} e sommiamo, osservando le equazioni (23) e (24), avremo

$$K\gamma_{cd} = \sum m_a m_b \{(p_{cab} - p_{dab})(\pi_{cab} - \pi_{dab}) - \tfrac{1}{4}[(p'_{cab} - p'_{dab})^2 - (\rho_{cab} - \rho_{dab})^2]\}. \quad (38)$$

Poniamo ora

$$\delta^2_{ab} = \xi^2_{ab} + \eta^2_{ab} = r^2_{ab} - \zeta^2_{ab}$$

a cagione dell'equazione (36) le δ_{ab} saranno funzioni delle sole r, r', u e ρ. Ponendo

$$\xi_{cd} = \delta_{cd}\cos\varphi_{cd}$$

$$\eta_{cd} = \delta_{cd}\operatorname{sen}\varphi_{cd}$$

avremo

$$\gamma_{cd} = \delta^2_{cd}\varphi'_{cd}$$

e dalla (38) si ricaverà φ'_{cd} mediante una quadratura e così avremo ξ_{cd}, η_{cd}, ζ_{cd} espresse per il tempo e le costanti arbitrarie. Trovate le coordinate relative di due soli punti del sistema si hanno tutte le altre senza ulteriori integrazioni. Infatti abbiamo

$$\xi_{cd}\xi_{cb}+\eta_{cd}\eta_{cb}=-p_{bcd}-\zeta_{cd}\zeta_{cb}=l$$

ed l funzione soltanto del tempo e delle costanti arbitrarie. Quindi

$$\delta_{cd}\delta_{cb}\cos(\varphi_{cd}-\varphi_{cb})=l$$

dalla quale si ricava φ_{cb} e in conseguenza ξ_{cd}, η_{cd}, ζ_{cd} in funzione del tempo e delle costanti arbitrarie.

9.

Determinate le coordinate relative in funzione del tempo e delle costanti arbitrarie si avranno le coordinate assolute per mezzo del principio della conservazione del centro di gravità. Se X, Y, Z sono le coordinate del centro di gravità, avremo

$$X=A_1t+B_1,\qquad Y=A_2t+B_2,\qquad Z=A_3t+B_3$$

$$\sum m_a x_a=MX$$

$$\sum m_a y_a=MY$$

$$\sum m_a z_a=MZ.$$

Ora

$$x_a=\xi_{ab}+x_b,\qquad y_a=\eta_{ab}+y_b,\qquad z_a=\zeta_{ab}+z_b$$

dando a b tutti i valori da 1 ad n e moltiplicando rispettivamente le equazioni che si ottengono per m_b e sommando si ottiene

$$Mx_a=MX+\sum_b m_b\xi_{ab}$$

$$My_a=MY+\sum_b m_b\eta_{ab}$$

$$Mz_a=MZ+\sum_b m_b\zeta_{ab}.$$

Quindi con $6n-12$ integrazioni e una sola quadratura si determina la configurazione del sistema indipendentemente dalla sua posizione nello spazio. Con un'altra sola quadratura si ottiene poi il moto del sistema rispetto a tre assi fissi nello spazio.

Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver.

(*Par* E. de Jonquières.)

1. L'équation générale, du degré n, entre les coordonnées courantes x et y,

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + \cdots + Lxy^{n-1} + My^n + \cdots + Px + Qy + R = 0 \qquad (1)$$

représente sur le plan, dans le système de Descartes, une courbe du degré n, c'est-à-dire une courbe qui est rencontrée en n points par une droite quelconque, et cette propriété fondamentale, de laquelle dérive la dénomination même de la courbe, subsiste, quelles que soient les valeurs des coefficients, pourvu que le degré de l'équation en x et en y ne soit pas abaissé.

2. Les relations qui existent entre une telle courbe et des courbes ou des points étrangers s'exprimant, en définitive, par le résultat de l'élimination entre son équation et celles de droites passant par ces points ou des courbes dont il s'agit, subsisteront aussi dans toute leur généralité pour toutes les valeurs des coefficients, s'il n'y a que des questions de nombre impliquées dans celles auxquelles ces relations se rapportent.

3. L'infini pouvant, dans les raisonnements géométriques, être regardé sur le plan comme étant une ligne droite, la courbe définie par l'équation (1) possède n points à l'infini, aussi bien que sur toute autre droite. Comme elle a d'ailleurs, en vertu de la continuité des fonctions algébriques, une tangente en chacun de ses points, et, en général, une seule, il s'ensuit qu'elle possède n asymptotes, savoir les n tangentes menées par les n points situés à l'infini et en ces points, aux n branches hyperboliques qui y aboutissent.

4. Parmi l'infinie variété des courbes du degré n qu'on obtient en faisant varier à volonté les coefficients de l'équation (1), il y en a qui possèdent effec-

tivement n branches hyperboliques, et l'on conçoit que, par une altération successive et convenable des coefficients, par laquelle chaque branche hyperbolique se rapprocherait insensiblement de son asymptote, on arrive au cas limite où ces branches se confondent toutes avec leurs asymptotes respectives, circonstance qui se présente lorsque l'équation (1) peut se décomposer en n facteurs trinômes du premier degré, savoir:

$$(a_1x+b_1x+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\ldots(a_nx+b_ny+c_n)=0. \tag{2}$$

Dans cet état, où nous la supposons parvenue par une dégénérescence continue et progressive, la courbe ne peut manquer de posséder encore quelques-unes des propriétés générales dont elle n'a cessé d'être douée dans toute la suite non interrompue de ses états successifs, je veux dire de celles relatives au nombre qui exprime son degré; car, puisque ces propriétés reposent uniquement sur la forme générale et le degré de l'équation (1), sans aucune hypothèse quant aux coefficients, elles ne peuvent cesser dans le cas de l'équation (2), la circonstance qui caractérise cette équation (1) n'affectant ni cette forme, ni ce degré.

5. Dans l'état particulier dont il s'agit, la courbe est dégénérée en un système de n droites, considérées simultanément avec leurs dépendances mutuelles et non pas isolément. A la vérité, tout ce qui touche intimement à la courbure et aux affections qui s'y rattachent disparaît alors; mais les autres propriétés générales subsistent en vertu de la continuité, et peuvent, en conséquence, être étudiées directement sur un tel système, toutes les fois que cette substitution plus simple d'un système de n droites à une courbe C^n n'est pas de nature à empêcher l'étude d'une question proposée et n'en masque pas les caractères distinctifs.

6. Les mêmes raisonnements et conclusions s'étendent naturellement aux surfaces algébriques, dont les propriétés générales, relatives au nombre qui exprime leur degré, peuvent, en conséquence, être étudiées sur un système de n plans, considérés simultanément, c'est-à-dire en tenant compte de leurs dépendances mutuelles, et non pas isolément.

Et ce qui est dit ici des questions relatives au degré des courbes et des surfaces algébriques, s'étend, en vertu du principe de dualité, aux questions relatives à la classe des courbes et des surfaces, de telle sorte que:

7. « *Dans les questions où n'intervient ni directement, ni indirectement,* » *la courbure des courbes et des surfaces algébriques, on peut écarter la con-* » *sidération de cette courbure, pour n'avoir affaire qu'au point, à la ligne*

» *droite et au plan* », loi générale, simple et féconde, que j'ai formulée il y a longtemps, avec plusieurs développements, dans un Mémoire: *Sur les contacts multiples des courbes de degré* n, *d'un système d'ordre* p, *avec une courbe fixe d'ordre* r, inséré au tome 66 du « Journal de mathématiques de Borchardt »; cette loi ramène au plus haut degré de simplicité la solution d'un grand nombre de questions de la nature de celles dont il s'agit, en ne les faisant dépendre que des premiers éléments de la géométrie.

J'en ai déjà donné plusieurs exemples dans le Mémoire précité, où je fais allusion à d'autres plus anciens encore, et j'en donnerai de nouveaux dans ce qui va suivre. Mais je veux montrer d'abord comment des théorèmes, qui sont fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces, dérivent, en quelque sorte intuitivement, de cette conception et de la loi qui l'exprime.

8. Ce point de départ étant ainsi établi, non pas seulement comme une « simple observation expérimentale », mais comme une déduction logique de la continuité des fonctions algébriques, on en conclut immédiatement que:

1.° Deux courbes, de degrés m et n, respectivement, se coupent en mn points, généralement distincts, et que ce nombre s'abaisse de pq, si l'une d'elles a un point multiple d'ordre p coïncidant avec un point multiple d'ordre q de la seconde courbe;

2.° Deux surfaces, de degrés m et n, respectivement, se coupent suivant une ligne à double courbure du degré mn, c'est-à-dire qui est rencontrée en mn points par un plan quelconque;

3.° Trois surfaces, de degrés respectifs m, n, p, ont mnp points communs, généralement distincts.

Car ces trois théorèmes, qu'on a coutume, je crois, d'admettre sans démonstration, sont ici, d'après le principe de continuité invoqué, une conséquence de ce qu'ils ont lieu intuitivement dans le cas limite où les courbes, ou bien les surfaces, dégénèrent en systèmes de lignes droites, ou de plans.

9. Une transversale, issue d'un point 0, coupant une courbe C^n en n points, il existe, sur cette transversale, $\frac{1}{2}n(n-1)$ segments, c'est-à-dire $\frac{1}{2}n(n-1)$ distances mutuelles des n points d'intersections. La longueur de chacun de ces segments varie lorsque la transversale pivote autour du point 0 et passe par divers états de grandeur à compter de zéro. Chaque fois qu'il arrive que l'un des segments est nul, la transversale rencontre la courbe en deux points infiniment voisins, ou bien confondus en un seul; elle est alors tangente à la courbe en ce point, ou bien elle la rencontre en un point de croisement de

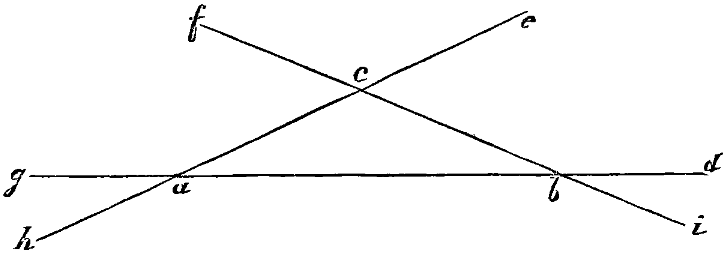
deux branches (point double), ce qui, analytiquement parlant, est la même chose.

Lorsque la courbe n'a que des branches hyperboliques, la longueur des segments varie depuis zéro jusqu'à l'infini, et si on la suppose dégénérée en n droites, comme celles-ci ont $\frac{1}{2}n(n-1)$ intersections deux à deux, il s'ensuit que, par un point donné n'appartenant pas à la courbe, on peut mener $n(n-1)$ tangentes à la courbe; car chacune des transversales allant du point fixe au point de rencontre de deux droites du système C^n, doit être comptée pour deux tangentes et non pour une seule, puisqu'on peut arriver à cette position limite de deux manières différentes en faisant tourner la transversale, soit dans un sens, soit dans le sens opposé, et en réduisant ainsi à zéro, dans les deux cas, le segment que la courbe y intercepte. Par exemple, si le système ne se compose que de deux droites, représentant une C^2, la transversale qui passe par leur point de rencontre représente à elle seule les deux tangentes, généralement distinctes, mais dans ce cas superposées, qu'on peut mener à une hyperbole du second degré, dont ce système n'est que l'une des formes limites, savoir celle où les deux branches infinies sont devenues rectilignes, en même temps que les deux sommets se sont successivement rapprochés l'un de l'autre pour finir par se confondre en un seul et même point, sorte de sommet du système des deux droites.

10. On peut donc, à volonté et selon l'utilité qu'on y trouve pour l'étude de la question qu'on a en vue, regarder un système de n droites, soit comme représentant une C^n la plus générale de son degré, à laquelle on peut mener $n(n-1)$ tangentes par un point extérieur, et qui est, par conséquent, de la classe $n(n-1)$; soit comme une C^n douée de $\frac{1}{2}n(n-1)$ points doubles, à laquelle on ne peut mener aucune tangente proprement dite par un point extérieur, et qui est par conséquent de la classe zéro; soit enfin comme une C^n, douée de p points doubles $\left(p<\frac{n(n-1)}{2}\right)$, à laquelle on peut mener $n(n-1)-2p$ tangentes proprement dites par un point extérieur, et dont ce dernier nombre exprime la classe.

11. Pareillement, un système de n plans peut représenter une surface S^n, du degré n, douée de n nappes infinies, de $\frac{1}{2}n(n-1)$ arêtes doubles et de $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ points triples. Je reviendrai ci-après sur ce qui concerne un tel système et la surface qu'il représente.

12. Avant d'aller plus loin, il ne semble pas superflu de montrer qu'un système de n droites, envisagées simultanément, est doué de continuité, au même titre qu'une courbe C^n proprement dite: je veux dire qu'un mobile, partant d'un point quelconque du système peut le parcourir, en entier et revenir au point de départ, sans avoir passé deux fois sur une même partie du système. Soit, par exemple, un système de trois droites ab, bc, ca.



Un mobile partant de a ira, par exemple (voir la figure), de a en b, de b en c, de c en a; puis de a vers h jusqu'à l'infini, reviendra de l'∞ vers e et c, continuera de c vers f jusqu'à l'∞, puis de l'infini vers i et b, enfin de b en d a l'∞ et de l'∞ vers g et a, ayant traversé deux fois les seuls points a, b, c, qui sont des points doubles du système, mais n'ayant passé deux fois sur aucun autre point des droites qui le composent.

13. Parmi les n droites dont le système se compose, plusieurs peuvent se couper en un même point, qui devient ainsi un point triple, quadruple, etc., du système. Si elles y aboutissent toutes, ce point commun de rencontre est un point n^{tuple}.

14. Toute transversale passant par un point m^{tuple}, y rencontre la courbe en m points confondus en un seul et ne coupe plus la courbe qu'en $n-m$ autres points distincts. Il est aisé de voir que cette transversale doit compter à elle seule pour $m(m-1)$ tangentes confondues en une seule; car, si le système C^n se compose de n droites, les $(n-m)$ droites restantes, c'est-à-dire celles qui ne passent pas par le point m^{tuple}, ont entre elles $\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)$ autres points d'intersection; les droites qui joignent ces points de rencontre à un point pris arbitrairement en dehors de la courbe représentent donc $(n-m)(n-m-1)$ tangentes, et, par suite, celles qu'on peut, en totalité, mener de ce point à la courbe se composent des droites qui aboutissent aux points de rencontre des m droites issues du point multiples avec les $n-m$ droites qui n'y passent pas, et de la tangente multiple dont il s'agit. D'ailleurs comme le nombre total de

ces tangentes doit être équivalent à $n(n-1)$, on doit avoir, en appellant x le degré de multiplicité de la tangente multiple, l'égalité

$$x+2m(n-m)+(n-m)(n-m-1)=n(n-1),$$

d'où l'on tire

$$x=m^2-m=m(m-1). \qquad \text{c. q. f. d.}$$

15. Si le point de concours des droites du système est n^{tuple}, toute transversale qui y passe, y rencontre le système en n points coïncidents, donc ne peut plus en avoir aucun autre de commun avec lui, à moins toutefois qu'elle ne fasse elle-même partie intégrante du système. Plus généralement, une courbe de degré m qui en rencontre une autre de degré n en un nombre de points supérieur à mn, a une infinité de points communs avec celle-ci, c'est-à-dire n'est autre qu'une branche même de cette courbe.

16. Toute transversale, menée d'un point extérieur 0 au point de rencontre de deux des n droites d'un système C^n, étant perpendiculaire à une certaine transversale qu'on peut mener en ce point, et celle-ci représentant deux tangentes de C^n superposées (9), il s'ensuit qu'elle représente elle-même deux normales de C^n confondues en une seule; ce qui donne d'abord $n(n-1)$ normales. En outre, on peut, du point 0, abaisser sur les n droites de C^n n perpendiculaires, qui sont aussi des normales. Donc le nombre des normales qu'on peut mener à une C^n générale, par un point extérieur, est égal à

$$n(n-1)+n=n^2.$$

Si le système est regardé comme une C^n possédant un certain nombre de points doubles, le nombre des normales effectives est diminué de 2 unités par chacun de ces points doubles.

17. *Théorème.* Le nombre des points simples donnés, suffisant et nécessaire pour déterminer une courbe de degré n, est égal à $\frac{1}{2}n(n+3)$.

Démonstration. On va démontrer que si le théorème est vrai pour les courbes de degrés m et p, $(m+p=n)$, il l'est aussi pour celles du degré n.

Le système complet, du degré $n=m+p$, est évidemment déterminé par les deux courbes intégrantes C^m, C^p, considérées indépendamment l'une de l'autre, et, en outre, par leurs mp points d'intersection, dont il faut tenir compte pour exprimer qu'elles ne sont pas indépendantes entre elles, mais qu'elles forment un système C^{m+p}.

Or un point donné qui doit être double équivaut, quant à la détermination de la courbe, à 3 points simples donnés, comme on le voit immédiatement par cette considération que 5 points sont nécessaires pour déterminer une conique, tandis qu'il n'en faut plus que 2, en sus du point double, pour déterminer une conique à point double, c'est-à-dire le système de deux droites.

Les mp points de rencontre représentent donc, à titre de points doubles, $3mp$ points simples donnés; mais ils ne doivent pas êtres comptés pour ce même nombre, attendu qu'ils sont déjà entrés, explicitement ou implicitement, à titre de points simples, dans la détermination de chacune des courbes C^m, C^p dont ils font partie, de telle sorte qu'ils n'introduisent, en définitive, que $3mp-2mp=mp$ nouvelles conditions simples. En résumé, le nombre cherché x est donné par la formule

$$x=\frac{1}{2}m(m+3)+\frac{1}{2}p(p+3)+mp=\frac{1}{2}(m+p)(m+p+3)=\frac{1}{2}n(n+3).$$

Or le théorême est vrai pour $m=1$ et $p=1$; donc il est démontré pour $n=2$ et, de proche en proche, pour n quelconque.

18. Pour résoudre la question précédente dans toute sa généralité, il faut encore connaître à combien de points simples équivaut, dans les données, pour la détermination de C^n, un point donné qui doit être, sur cette courbe, multiple d'ordre p.

Supposons la C^n décomposée en deux autres, l'une d'ordre $(n-p)$, l'autre d'ordre p, celle-ci étant représentée par un faisceau de p droites, issues du point qui doit être multiple.

Le système complet sera déterminé: 1.° par les $\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ points simples nécessaires à la détermination de la courbe partielle C^{n-p}; 2.° par les $p(n-p)$ points de rencontre de cette courbe avec les p branches de l'autre courbe partielle C^p, comptés une fois seulement, ainsi qu'on l'a expliqué ci-dessus (17); 3.° enfin par les points nécessaires à la détermination de C^p. Or celle-ci, composée de p droites issues d'un même point, n'exige, pour être déterminée, que p points simples, en sus de celui qui doit être multiple, auquel aboutissent toutes ces droites, et dont nous désignerons l'équivalence inconnue par la lettre x. En vertu du théorême précédent, on doit avoir

$$x+p+p(n-p)+\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)=\frac{1}{2}n(n+3),$$

d'où

$$x=\frac{1}{2}p(p+1).$$

Ainsi un point qui est donné avec la condition d'être multiple d'ordre p, équivaut à $\frac{1}{2}p(p+1)$ points simples donnés, quant à la détermination d'une courbe du degré n.

19. Il résulte du théorème (17) que, par $\frac{n}{2}(n+3)-1$ points donnés, il passe une infinité de courbes C^n, dont chacune est déterminée par un point de plus. Or on démontre aisément qu'il y a $2(n-1)$ courbes de ce faisceau qui touchent une droite donnée. Donc, si l'on demande combien il y en a qui touchent une courbe donnée C^p, du degré p, il suffit de résoudre le même problème pour le cas où celle-ci se compose de p droites, ce qui donne immédiatement pour le nombre cherché N, la formule

$$N=2(n-1)p+p(p-1)=p(2n+p-3).$$

20. Si l'on demande, plus généralement, combien, parmi les courbes C^n qui ont en commun $\frac{n(n+3)}{2}-r$ points simples, il y en a qui touchent r courbes données de degrés p, p', p'', il suffira, pour résoudre la question, de supposer que ces r courbes sont dégénérées, respectivement, en r systèmes de p, p', p'', lignes droites, et la solution complète se composera de celles des diverses questions suivantes, savoir:

Combien y a-t-il de C^n 1.° qui passent par q points $\left(\text{en écrivant, pour abréger, } q=\frac{n(n+3)}{2}-r\right)$ et touchent r droites; 2.° qui passent par $q+1$ points et touchent $r-1$ droites; 3.° qui passent par $q+2$ points et touchent $r-2$ droites;..., enfin qui passent par $q+(r-1)$ points et touchent une droite.

On fera ensuite le total de tous ces résultats partiels, après avoir multiplié: par 2, le nombre de celles de ces courbes qui passent par un point double de l'une des courbes C^p, $C^{p'}$, $C^{p''}$; par 4, le nombre de celles qui passent par deux points doubles appartenant à deux courbes distinctes C^p, $C^{p'}$; et, en général, par 2^k, le nombre de celles qui passent par k points doubles appartenant à k de ces courbes.

C'est ainsi, pour ne citer qu'un seul exemple, parmi plusieurs autres questions du même genre, même plus générales, traitées par moi dès l'année 1859 (mois de février), que j'avais trouvé le nombre 3264 pour celui des coniques qui touchent cinq coniques données, alors qu'on croyait encore que ce nombre était égal à 7776, ainsi qu'on l'avait énoncé, ou plutôt conjecturé jusque là (*).

21. On pourrait résoudre le même problème pour des courbes d'ordre n, c'est-à-dire trouver le nombre de ces courbes qui touchent par exemple $\frac{n(n+3)}{2}$ autres courbes fixes d'ordre quelconque, si l'on connaissait exactement, dans chaque cas, combien il y a de C^n qui passent par p points donnés et touchent $\frac{n(n+3)}{2}-1$ droites données. Mais ce renseignement fait défaut dès que le nombre p est inférieur à $2n-1$, ainsi que je l'ai démontré dans un Mémoire intitulé: *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes* (**).

22. Je me suis un peu étendu sur la solution du problème précédent, afin de montrer par cet exemple (qui présente un certain intérêt historique), comment il se fait que, dans la solution de problèmes en apparence très compliqués, relatifs aux courbes planes, on ne se trouve en définitive avoir affaire qu'au point et à la ligne droite, ce qui fait dépendre la solution des considérations les plus élémentaires de la géométrie. Mais il est facile et il ne sera pas inopportun d'en donner quelques autres, d'ailleurs pris au hasard parmi un grand nombre qu'on pourrait citer.

23. Supposons qu'on demande le degré du lieu d'un point d'où l'on peut mener à une courbe V_1, d'ordre m_1, douée ou non de points doubles ou multiples, des tangentes égales, en longueur, à la distance de ce point à un point fixe O.

Admettons que V_1 posséde, effectivement ou par équivalence, p points doubles, et prenons, pour représenter cette courbe, un système de m_1 lignes droites. Parmi les $\frac{1}{2}m_1(m_1-1)$ points d'intersection des droites de ce système, il y en aura p qui seront regardés comme étant des points doubles, et la classe n_1 de V_1 sera exprimée par le nombre $n_1=m_1(m_1-1)-2p$, de telle sorte que, par un point extérieur à V_1, on pourra lui mener n_1 tangentes effectives, savoir:

Les droites (chacune comptant pour deux) qu'on peut mener de ce point à tous les points d'intersection des droites du système, autres que ceux choisis pour représenter les points doubles ou sommets de V_1. Prenons l'un de ces

(*) Voir, à ce sujet, une Note insérée au tome 58 des Comptes Rendus de l'Académie des sciences, séance du 15 février 1864, pag. 308, au bas de la page.

(**) In 4°, éditeur Gauthier-Villars (décembre 1866).

sommets. La perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui se termine à ce point et au point fixe 0, fait partie du lieu cherché, et elle en fait partie deux fois, parce que toute droite qui part d'un point de cette perpendiculaire pour aboutir au sommet, représente deux tangentes de V_1 superposées, donc satisfait deux fois à la question.

Le lieu se compose donc d'abord de $\frac{n_1}{2}$ perpendiculaires semblables à celle dont on vient de parler, et dont chacune doit être comptée deux fois, ce qui donne n_1 droites faisant partie du lieu. En outre, tout point de l'une quelconque des m_1 droites du système satisfait doublement à la question; car si l'on prend, de part et d'autre de ce point, une longueur égale à la distance qui le sépare du point 0, on peut regarder ce segment comme faisant partie d'une droite tangente à V_1 en son extrémité; d'où $2m_1$ autres droites faisant partie du lieu cherché. Le degré de ce lieu est par conséquent égal à

$$2m_1 + n_1.$$

24. Si l'on demande le lieu d'un point d'où l'on peut mener à deux courbes données $C_{n_1}^{m_1}$, $C_{n_2}^{m_2}$ des tangentes égales, on trouve, par un raisonnement du même genre, que, dans le cas où ces courbes sont des systèmes de m_1 et m_2 droites (dont n_1 et n_2 représentent les classes), le lieu se compose:

1.° des perpendiculaires élevées sur le milieu des droites joignant les sommets du 1^er^ système aux sommets du 2^e^ système, comptées chacune deux fois; d'où, en totalité ou par équivalence, $n_1 n_2$ perpendiculaires;

2.° des droites du 1^er^ système comptées autant de fois deux fois qu'on peut les associer de façons différentes avec l'un des sommets du 2^e^ système; d'où $2m_1n_2$ droites;

3.° des droites du 2^e^ système comptées autant de fois deux fois qu'on peut les associer de façons différentes avec l'un des sommets du premier système; d'où encore $2n_1m_2$ droites; de telle sorte que le degré du lieu cherché est, en définitive,

$$N = n_1n_2 + 2m_1n_2 + 2m_2n_1.$$

25. Les deux problèmes analogues, relatifs aux normales, au lieu des tangentes, se résolvent par les mêmes considérations, et avec la même *facilité*.

Soit encore l'énoncé suivant, qui est une généralisation d'un théorème connu:

Lorsqu'une droite, roulant sur une courbe V_n, rencontre des courbes V^{m_1}, V^{m_2}, en des points a_1 et a_2, les tangentes menées des points a_1 de la première à une courbe $V_{n'}$ rencontrent les tangentes menées des points a_2 de la seconde à une courbe $V_{n''}$, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2nn'n''m_1m_2$.

Supposons que toutes les courbes fixes données sont dégénérées en des systèmes de droites, d'ordres respectifs m_1, m_2 et de classes respectives n, n', n''.

Une tangente à V_n sera, pour nous, une droite pivotant autour d'un des points sommets de cette courbe. Les deux points où cette droite rencontre une branche rectiligne de V^{m_1} et une branche rectiligne de V^{m_2} forment, sur ces deux droites, deux ponctuelles homographiques, et si l'on joint les points homologues de ces divisions à deux sommets pris sur $V_{n'}$ et $V_{n''}$, respectivement, ces droites de jonction se couperont en un point appartenant à une conique. On obtiendra ainsi autant de coniques qu'on peut faire de combinaisons distinctes des sommets de V_n avec les droites composantes des systèmes V^{m_1}, V^{m_2} et avec les sommets des courbes $V^{n'}$, $V^{n''}$, savoir $nn'n''m_1m_2$. Le lieu cherché se compose de l'ensemble de toutes ces coniques. Donc son degré est $2nn'n''m_1m_2$.

On démontre d'une façon analogue le théorème correlatif du précédent, dont l'énoncé est:

Lorsque de chaque point d'une courbe V_m, du degré m, on mène les tangentes de deux courbes $V_{n'}$, $V_{n''}$, de classe n', n'', et que ces droites rencontrent deux courbes V_{m_1}, V_{m_2}, de degré m_1, m_2, en deux points a_1, a_2, la droite a_1a_2 enveloppe une courbe de la classe $2mm_1m_2n'n''$.

26. On voit, sans qu'il soit nécessaire de multiplier ces exemples, avec quelle facilité et avec combien peu de frais on transforme des théorèmes connus, parfois les plus élémentaires, relatifs à des points et à des droites, en d'autres concernant des courbes quelconques et qui, par le seul fait de cette transformation, prennent immédiatement l'apparence d'une grande complication. Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, qui n'a d'intérêt que par le principe sur lequel repose le procédé de transformation (7), et je passerai immédiatement à ce qui me reste à dire sur les surfaces, où l'on verra se reproduire les mêmes simplifications.

27. L'ensemble de deux plans représente une surface du second degré, douée d'une arête double. C'est la limite des cylindres à base hyperbolique, dont les génératrices sont parallèles à la droite d'intersection des deux plans, l'hyperbole qui sert de base ayant alors dégénérée en deux droites, celles suivant lesquelles les deux plans sont coupés par un troisième plan normal à cette intersection.

On sait que, par une droite quelconque, on peut mener, en général, deux plans tangents à une surfaces du second degré. Dans le cas où cette surface est un cône, c'est le plan passant par la droite donnée et par le sommet du cône qui représente à lui seul les deux plans tangents; il coupe en effet celui-ci suivant deux droites (*), c'est-à-dire suivant une conique douée d'un point double, ce qui est le caractère le plus général du plan tangent. Conséquemment, toute droite passant par le sommet du cône, est une normale à la surface et doit être comptée pour deux. Si le sommet du cône s'éloigne à l'infini, en d'autres termes, si la surface devient un cylindre, c'est donc le plan mené par la droite donnée parallèlement aux génératrices, qui représentera à lui seul les deux plans tangents de la surface. Enfin, si le cylindre dégénère lui-même en deux plans, c'est le plan mené par la droite, parallèlement à l'intersection des deux plans, qui représentera les deux plans tangents à la surface, et d'après ce qui précède, toute droite parallèle à cette intersection devra être considérée comme une normale et être comptée pour deux dans le nombre de celles-ci. Plus généralement, lorsqu'une surface S^n, du degré n, sera représentée par un système de n plans, toute surface passant par le point situé à l'infini sur chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes doubles du système, devra être considérée comme tangente a S^n et être comptée pour deux surfaces tangentes.

28. Toute surface tangente à la droite d'intersection de deux plans, considérés comme représentant une surface du second degré ou, plus généralement, deux nappes d'une surface du degré n, doit être considérée comme étant tangent à cette surface. En effet, le plan qui touche la première surface à ce point de contact coupe S^n suivant la droite même d'intersection des deux plans; or, par la même raison qu'une droite, qui passe par le point de concours de deux droites représentant une C^2, représente deux tangentes superposées de cette C^2, le plan dont il s'agit ici doit être regardé comme étant la superposition de deux plans tangents à S^n le long de l'arête double par laquelle il est mené. Conséquemment aussi, toute perpendiculaire à une arête doit être regardée comme representant deux normales de la surface, superposées.

29. Lorsque trois plans forment un système représentant une surface S^3 du troisième degré, tout plan mené par le point de rencontre des trois plans (point triple de la surface) représente à lui seul six plans tangents superposés. C'est une conséquence du théorème analogue dans la théorie des courbes; et toute droite passant par un tel point représente six normales de la surface.

(*) Droites réelles ou imaginaires.

30. Ces principes préliminaires étant établis, il est facile de démontrer plusieurs des théorèmes les plus importants de la théorie des surfaces.

Cherchons d'abord le nombre des plans tangents qu'on peut mener par une droite donnée à une surface S^n.

Ce nombre se compose de celui des plans menés par la droite, parallèlement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes du système, comptés deux fois (27), soit $n(n-1)$, augmenté de six fois celui des plans menés par la droite et par les points triples du système, dont le nombre est $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

D'où

$$N = n(n-1) + n(n-1)(n-2) = n\overline{(n-1)}^2.$$

31. Cherchons ensuite le nombre des normales qu'on peut, par un point donné 0, mener à une surface S^n. Ce nombre N se compose:

1.° des n perpendiculaires qu'on peut abaisser du point 0 sur les n plans du système qui représente S^n;

2.° des $\frac{n(n-1)}{2}$ droites menées par le point 0 parallèlement aux arêtes doubles, comptées chacune deux fois;

3.° des $\frac{n(n-1)}{2}$ perpendiculaires abaissées du point 0 sur les arêtes doubles, comptées aussi deux fois chacune;

4.° enfin des $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ droites joignant le point 0 aux point triples du système, comptées six fois chacune; d'où, en résumé,

$$N = n + n(n-1) + n(n-1) + n(n-1)(n-2) = n^3 - n^2 + n.$$

32. Cherchons actuellement quel est le nombre de points simples donnés, nécessaire et suffisant pour déterminer une surface, de degré n. Pour y parvenir, nous supposerons, conformément à la méthode générale développée dans le cours de cet écrit, que cette S^n est dégénérée en un système de n plans.

Etablissons d'abord les deux lemmes suivants:

I. Chaque arête du système, si elle est donnée, équivaut à trois points simples donnés pour ce qui concerne la détermination de la surface, en sus des trois nécessaires pour déterminer chacun des deux plans qui se coupent suivant cette arête.

En effet, les deux plans dont il s'agit n'exigeraient en tout pour leur détermination complète, que six points, s'ils étaient considérés comme étant indépendants entre eux. Mais leur ensemble, par cela même qu'il représente une S^2, en exige 9, comme on le sait par ailleurs. Donc la droite d'intersection intervient à elle seule pour trois points de plus.

II. Trois plans indépendants exigent 9 points, donnés 3 à 3, pour être déterminés. Si, au contraire, on les considère simultanément, comme représentant une S^3, leur système exige que l'on tienne compte:

1.° des trois droites suivant lesquelles ils se coupent, et qui équivalent, quant aux données, à 9 autres points simples donnés (I);

2.° de leur point de concours, point triple du système.

Or, si l'on emprunte aux résultats de l'analyse ce fait, qu'il faut en tout 19 points simples pour déterminer une surface du 3^e^ ordre, on en conclut que la condition, introduite dans les données par le point triple donné, équivaut à un seul point simple de plus, en sus de ceux qui dépendent déjà des trois plans donnés et des trois arêtes qui aboutissent à ce point.

33. D'après cela, le nombre N des points simples suffisant et nécessaire pour déterminer S^n, se compose:

1.° de 3 fois le nombre n des plans du système, soit $3n$;

2.° de 3 fois le nombre des arêtes doubles du système, soit $\frac{3}{2}n(n-1)$;

3.° du nombre $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ des points triples; d'où

$$N = 3n + \frac{3}{2}n(n-1) + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}(n^3 + 6n^2 + 11n),$$

formule qu'on a coutume d'écrire ainsi

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6}. \qquad (a)$$

Autrement. On peut donner du même théorème une seconde démonstration, semblable à celle dont on a fait usage ci-dessus pour les courbes.

Nous allons prouver que si la formule (a), que, pour abréger, nous écrirons symboliquement $\boxed{n}$, est vraie pour les surfaces de degrés m et n, elle l'est aussi pour la surface du degré $m+n=r$.

Nous supposerons que la surface S^r est représentée par l'ensemble de deux surfaces S^m, S^n, de degrés m et n, cette décomposition n'altérant pas la généralité de la démonstration, en vertu de la loi de continuité sur laquelle reposent tous nos raisonnements.

Si les surfaces S^m, S^n étaient considérées indépendamment l'une de l'autre, il faudrait, d'après l'hypothèse, $\boxed{m}$ et $\boxed{n}$ points, respectivement, pour les déterminer, en tout $\boxed{m}+\boxed{n}$. Mais puisqu'il s'agit de considérer leur ensemble, qui représente une surface S^{m+n}, il faut, en outre, tenir compte du nombre des points donnés auxquels équivalent leurs relations mutuelles.

Dans le cas de deux surfaces générales S^m, S^n, ces relations se réduisent à leur courbe d'intersection, qui est du degré mn. Afin de pouvoir en distinguer plus aisément les particularités, il convient, pour l'objet que nous avons en vue, de supposer que ces surfaces se décomposent elles-mêmes en deux systèmes de m et de n plans, respectivement. On voit alors immédiatement que l'influence exercée par leur connexion sur la détermination du système total, de degré $r=m+n$, ne peut provenir que des deux circonstances suivantes, savoir:

1.° l'intersection totale des m plans qui représentent S^m par les n plans qui représentent S^n, intersection qui se compose de mn droites;

2.° les points doubles du système, provenant des intersections de S^m par les $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes de S^n, et des intersections de S^n par les $\frac{m(m-1)}{2}$ arêtes de S^m, donc en totalité $mn\left(\frac{m+n-2}{2}\right)$ points.

L'influence propre de ces singularités individuelles, évaluée en nombres de points simples donnés, étant représentée respectivement par les coefficients α et β, on aura, en définitive, pour exprimer le nombre N des points nécessaires à la détermination de S^r, la formule

$$N=\boxed{m}+\boxed{n}+\alpha\cdot mn+\beta\cdot mn\left(\frac{m+n-2}{2}\right).$$

Or, on a vu ci-dessus (32-I) que $\alpha=3$.

Pour déterminer β, nous prendrons $m=1$ et $n=2$, d'où

$$\boxed{m}=3, \qquad \boxed{n}=9, \qquad mn=2$$

et

$$N=3+9+3\cdot 2+\beta=18+\beta.$$

Or $m+n$ étant, dans ce cas particulier, égal à 3, on sait que $N=19$; donc $\beta=1$, et la formule générale devient

$$N=\boxed{m}+\boxed{n}+3mn+\frac{mn}{2}(m+n-2)=\boxed{m}+\boxed{n}+\frac{mn}{2}(m+n+4).$$

D'ailleurs, par hypothèse, on a

$$\boxed{m} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)-6}{6} \quad \text{et} \quad \boxed{n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6}$$

d'où l'on tire enfin

$$N = \frac{(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)-6}{6} = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)-6}{6}.$$

Or le théorème est vrai pour $m=1$, $n=1$, et $r=2$, et pour $m=1$, $n=2$, $r=3$; donc il l'est pour r quelconque. c. q. f. d.

34. Puisqu'il faut $\boxed{n}$ points simples pour déterminer une surface du degré n, il passe une infinité de ces surfaces par $\boxed{n}-1$ points. Ces surfaces forment un faisceau tel, qu'il en passe une seule par un point quelconque.

On peut demander combien il y en a, dans le faisceau, qui sont tangentes à une surface donnée S^m, du degré m.

Pour résoudre la question, nous supposerons que cette surface fixe se compose de m plans, et, dans ces conditions, il résulte des considérations précédentes (27, 28, 29) que le nombre cherché N se compose:

1.° de celles des surfaces du faisceau qui touchent les m plans du système S^m; le nombre de celles-ci est, comme on sait, $3(n-1)^2$ pour un seul plan donné; donc il est $3m\overline{(n-1)}^2$ pour les m plans du système.

2.° de celles des surfaces du faisceau qui passent par le sommet (point à l'∞) de chaque arête du système, comptées chacune deux fois, donc $m(m-1)$ pour tout le système;

3.° de celles qui sont tangentes aux arêtes du système et qu'il faut aussi compter deux fois. On sait que le nombre des surfaces S^n qui touchent une droite donnée est $2(n-1)$; celles dont il s'agit ici sont donc au nombre de $m(m-1)\cdot 2(n-1)$;

4.° des surfaces du faisceau qui passent par les points triples du système, comptées chacune six fois; d'ou $m(m-1)(m-2)$ surfaces.

En résumé, on a

$$\begin{aligned} N &= 3m\overline{(n-1)}^2 + m(m-1) + 2(n-1)m(m-1) + m(m-1)(m-2) \\ &= m(3n^2 + m^2 + 2mn - 8n - 4m + 6) \end{aligned}$$

formule d'où l'on tire, comme cas particulier, celles que nous avons déjà données plus haut en y faisant $n=1$, ou en y laissant n quelconque et faisant $m=1$.

35. On peut, par analogie avec ce qui a été fait ci dessus (20), chercher combien il existe de surfaces S^n, d'ordre n, qui passent par $\boxed{n}-r$ points et touchent r surfaces données, d'ordres p, p', p''. La solution de ce problème, si l'on prend pour les surfaces des systèmes de p, p', p'' plans, se trouve ramenée, comme pour les courbes, à celles-ci (on pose, pour abréger, $\boxed{n}-r=q$):

1.° combien, y a-t-il de surfaces passant par $q+(r-1)$ points et touchant un plan;

2.° combien, passant par $q+(r-2)$ points et touchant deux plans...; combien, passant par q points et touchant r plans.

Mais, dans l'état présent de nos connaissances géométriques, la solution complète n'est possible que si les données du problème se trouvent renfermées entre des limites que j'ai indiquées dans le Mémoire precité: *Recherches sur les séries ou systèmes,* etc. (1866).

36. Je n'entrerai pas dans plus de détails sur les applications de cette méthode qui est propre à simplifier l'étude d'un grand nombre de questions relatives aux surfaces, aussi bien que pour les courbes planes ou à double courbure; il me suffit, pour le moment, d'en avoir précisé les procédés.

Je dirai d'ailleurs, en terminant, que dans son *Traité des propriétés projectives,* notre illustre Poncelet avait déjà ouvert cette voie philosophique et féconde, en cherchant dans le cercle les propriétés des coniques, c'est-à-dire en utilisant le principe mathématique qu'il a mis en relief sous le nom de principe de continuité, pour déduire de verités connues dans un cas particulier, celles qui s'appliquent au cas général d'une question donnée. Le pas qui restait à faire, je l'ai tenté dès 1859, trop timidement, il est vrai, je veux dire sans publicité; mais bientôt, enhardi par la confiance qu'il m'a paru que d'autres géomètres éminents accordaient à ce principe même dont ils ne craignaient plus de faire quelques usages restreints, je n'ai pas hésité à le formuler, tel qu'il l'est ci-dessus (7), dans le Mémoire que j'ai inséré au « Journal de Borchardt », et dont j'ai rappelé ci-dessus le titre et la date.

Juillet 1877.

Nota. — Le Mémoire qu'on vient de lire a été rédigé en réponse à une question que Mr. le commandant Dewülf m'avait fait l'honneur de m'adresser.

Ce retour inopiné vers d'anciennes études à peu près oubliées ne manque pas d'à propos. Il m'a d'ailleurs fourni l'occasion d'ajouter quelques développements nouveaux à ceux que j'avais donnés sur le même sujet il y a onze ans, et d'étendre aux surfaces la question que ce géomètre distingué me posait pour les courbes seulement.

Fine del Tomo VIII.° (Serie II.ª)