EXERCICES
DE CALCUL INTÉGRAL.

EXERCICES

DE

CALCUL INTÉGRAL

SUR

DIVERS ORDRES DE TRANSCENDANTES

ET SUR LES QUADRATURES;

PAR A. M. LE GENDRE, Membre de l'Académie royale des Sciences et du Bureau des Longitudes, de la Société royale de Londres, etc.

TOME SECOND.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES, rue du Jardinet, n° 12, quartier Saint-André-des-Arcs.

1817.

AVERTISSEMENT.

Le volume précédent, publié en 1811, fut suivi d'un Supplément à la première partie, qui parut au commencement de 1813. Je regardais alors l'Ouvrage comme terminé, et je ne pensais guère à lui donner une continuation ; mais les travaux récens de plusieurs Géomètres sur les intégrales définies, et de nouveaux moyens que j'ai aperçus de perfectionner la théorie exposée dans la seconde partie, m'ont engagé à publier successivement la quatrième et la cinquième parties, l'une en juin 1814, l'autre en août 1815. Revenant ensuite à la théorie des Fonctions elliptiques, qui est l'objet principal de cet Ouvrage, j'ai cru devoir donner, avec tout le détail nécessaire, des méthodes propres à construire les Tables elliptiques : j'en ai pris occasion de traiter quelques points de la théorie de ces fonctions, et de simplifier surtout les formules relatives aux approximations ; enfin j'y ai joint quelques Tables utiles dans la pratique, et particulièrement celle qui donne, avec douze décimales ou plus, les logarithmes des fonctions complètes F^1c, E^1c ; Table qui m'a coûté beaucoup de peine et de temps, malgré toutes les ressources que j'ai pu tirer de l'analyse.

Cette partie, intitulée *Construction des Tables elliptiques*, qui a été publiée en juillet 1816, devra commencer le troisième volume ; mais il reste à construire une suite de Tables par le moyen desquelles on puisse trouver, sans un calcul trop pénible, la valeur de chacune des fonctions F et E, correspondante à des valeurs données du module et de l'amplitude.

En attendant que ce travail, qui compléterait le troisième volume, soit exécuté, je donne en ce moment, pour terminer le second volume, une sixième partie qui contient plusieurs applications de la théorie des Fonctions elliptiques, propres à en faire sentir tous les avantages.

Les améliorations successives qu'ont reçues quelques parties de cet Ouvrage, et la liberté que me laissait son titre, me serviront d'excuse auprès des lecteurs bienveillans, pour les imperfections nombreuses qu'ils y remarqueront. Si je pouvais espérer d'en donner par la suite une seconde édition, il me serait facile alors de faire disparaître une partie de ces imperfections, en refondant les articles qui traitent d'un même sujet, et mettant plus d'ordre dans les matières. Mais cette circonstance n'étant guère probable, je me croirai suffisamment récompensé de mon travail, si on juge que j'ai atteint le but principal que je me suis proposé, celui de mettre dans tout son jour la théorie des Fonctions elliptiques, et de faire voir qu'un nouvel algorithme, fondé sur cette théorie, peut servir à étendre les applications du Calcul intégral, en soumettant à un calcul régulier et uniforme, semblable à celui des fonctions circulaires et logarithmiques, toutes les formules que les Géomètres avaient ramenées jusqu'ici à la rectification des sections coniques, et une infinité d'autres encore plus composées.

Paris, le 1er juin 1817.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

CINQUIÈME PARTIE.

SIXIÈME PARTIE.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA du Tome II.

Page.	Ligne.	Corrections.
66	28	$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{\pi x}{\sin \pi x}$
72	dern.	$\pi^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+x)$
84	2	l'article 51
Ib.	4	$C+M\frac{d\log \Gamma(1+a)}{da}$
104	8	$+\frac{1}{3^2}(1-\cos 3\theta)$
110	17	$\int\frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x)^r(1+ax)^n}$
125	10	$\log(1+r^2+2r\cos 2az)$
136	2	$\frac{(-1)^{n+1}\sin a\pi}{\sqrt{\pi}}$
174	18	$\frac{\sin\theta}{\pi^2-b^2x^2}$
213	dern.	$\log(2+2a+2\omega)$
216	dern.	$1-2c\cos x+2c^2\cos 2x$
221	dern.	pag. 88, Ire partie
222	22	$2+b^{(\mu-2)}-\frac{2b^{(\mu)}}{P^{\mu-1}}$
240	14	$-\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2\sin 4x-\frac{1}{3}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^3\sin 6x$
263	10	$+\frac{d(r^2dV)}{dr^2}=0$
270	12	$\frac{d^kP^m}{dp^k}\cdot\frac{d^kX^m}{dx^k}$
271	3	$+\,6''\cos 3\theta$
274	14	$1+\frac{1-n}{1}\cdot\frac{\lambda+1-n}{\lambda+1}a^2+$
293	25	On en jugera
310	6	qui lui sont
Ib.	25	complémentaires
338	19	celle
378	18	$\delta\left(1+\frac{a^2}{4c^2}\right)$
392	dern.	apsides

EXERCICES
DE CALCUL INTÉGRAL.

QUATRIÈME PARTIE.

Cette partie est divisée en deux sections.

Dans la première, notre objet a été de compléter la théorie exposée dans la seconde partie de cet ouvrage ; nous nous sommes attachés surtout à développer avec toute l'étendue nécessaire, les propriétés de la fonction Γ, qui est le lien mutuel d'une multitude de transcendantes, et la source d'où se tirent aisément toutes les formules qui concernent la comparaison de ces transcendantes, leur réduction et leur évaluation. Nous espérons que cette théorie, considérée sous un nouveau point de vue et augmentée d'un grand nombre de formules nouvelles, méritera de fixer l'attention des Géomètres, et qu'ils y verront une nouvelle branche d'analyse amenée à peu près au point de perfection dont elle est susceptible.

Pour étendre davantage les applications de cette théorie, il était utile de calculer de nouveau avec un plus grand nombre de décimales, la table qui termine la seconde partie ; c'est ce qu'on a exécuté avec tout le soin nécessaire : on a porté la précision jusqu'à douze décimales ; et on peut assurer que le douzième chiffre sera rarement en erreur d'une unité, jamais de plus de deux. Ces calculs ont donné lieu de rectifier et de porter à une étendue à peu près double, la table donnée par Euler, page 456 de son Calcul différentiel, pour les sommes des puissances réciproques des nombres naturels.

La seconde section contient diverses recherches qui peuvent être regardées comme faisant suite à la troisième partie. On y trouvera la démonstration d'un assez grand nombre de formules, dont quelques-unes sont ou entièrement nouvelles, ou d'une découverte récente; de ce dernier nombre sont plusieurs intégrales définies données par M. *Bidone*, dans les Mémoires de Turin, année 1812. Nous avons donné aussi quelques vues nouvelles sur la sommation de différentes suites et sur les formules qui servent à trouver la somme d'une suite dont le terme général est donné.

PREMIÈRE SECTION.

§ I. *Propriétés générales des intégrales Eulériennes.*

(1). En désignant par $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'intégrale $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, Euler avait pour but de comparer entr'elles les diverses intégrales de cette forme qui répondent à une même valeur de n, et il supposait d'ailleurs les nombres p, q, n entiers; mais on peut considérer les choses d'une manière plus générale.

Soit $x^n = y$, on aura la transformée $\frac{1}{n}\int y^{\frac{p}{n}-1} dy\,(1-y)^{\frac{q}{n}-1}$; mettant dans celle-ci p et q à la place de $\frac{p}{n}$ et $\frac{q}{n}$, elle deviendra $\frac{1}{n}\int y^{p-1}dy\,(1-y)^{q-1}$, nouvelle intégrale qui devra toujours être prise entre les limites $y=0$, $y=1$.

De là on voit que l'intégrale $\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1}$, prise entre les limites $x=0$, $x=1$, comprend l'intégrale d'Euler, lorsque p et q sont supposés rationnels; mais elle pourra en représenter une infinité d'autres.

Nous désignerons cette nouvelle intégrale par le symbole (p, q), qui ne laisse rien de sous-entendu; les nombres p et q seront à volonté rationnels ou irrationnels; mais ils devront être positifs l'un et l'autre, parce que sans cette condition, l'intégrale aurait une valeur infinie. Au moyen de ce nouveau symbole, l'intégrale Eulérienne s'exprime ainsi,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right).$$

(2). Il est essentiel d'observer que l'intégrale désignée par (p, q) peut être regardée comme une fonction continue de p et q, ou comme la troisième coordonnée d'une surface courbe dont p et q seraient les deux autres coordonnées. En effet, si l'on fait croître par degrés insensibles l'une ou l'autre des variables p et q, la fonction (p, q) diminuera de même progressivement. Si, par exemple, on augmente p de la quantité infiniment petite α, la puissance x^{p-1} deviendra $x^{p-1}\left(1-\alpha \log \frac{1}{x}\right)$, et l'intégrale dont il s'agit diminuera de la quantité infiniment petite............ $\alpha \int x^{p-1}\, dx \log \frac{1}{x} (1-x)^{q-1}$.

(3). Pour découvrir plus facilement les propriétés de la fonction (p, q), il est utile de considérer en même temps les intégrales Eulériennes de la seconde espèce. En donnant à ces intégrales la forme $\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}-1}$, Euler supposait que les nombres p et q sont entiers, et son objet était de comparer entr'elles les diverses valeurs de l'intégrale qui répondent à une même valeur de q; mais nous avons déjà observé qu'on peut considérer l'intégrale dont il s'agit, comme une fonction continue de la variable $\frac{p}{q}$, qu'on supposera positive, mais qui peut être un nombre quelconque rationnel ou irrationnel. Ainsi nous regarderons l'intégrale $\int dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, comme une fonction continue de a, que nous désignerons par Γa, et dans laquelle a pourra avoir toutes les valeurs, depuis $a=0$ jusqu'à $a=\infty$.

(4). Si l'on fait $V=x\left(l \frac{1}{x}\right)^a$, on aura $dV=dx\left(l \frac{1}{x}\right)^a - a dx\left(l \frac{1}{x}\right)^{a-1}$. Intégrant de part et d'autre depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et observant que V s'évanouit dans ces deux limites, on aura

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma a; \tag{1}$$

c'est la première et la principale propriété des fonctions Γ. La démonstration que nous venons d'en donner suppose a positif, sans quoi V ne s'évanouirait pas lorsque $x=1$.

On peut distinguer dans les valeurs successives de Γa, plusieurs périodes; la première comprise depuis $a=0$ jusqu'à $a=1$, la seconde depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$, et ainsi de suite à l'infini. Cela posé, il résulte de l'équation précédente que si l'on connaît la fonction Γ dans toute l'étendue d'une de ces périodes, on pourra déterminer cette fonction dans toute autre période.

Par exemple, si la seconde période est donnée, on connaîtra $\Gamma\frac{1}{3}$ qui appartient à la première période, et $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ qui appartient à la quatrième, par les valeurs suivantes, déduites de l'équation (1),

$$\Gamma\tfrac{1}{3}=3\Gamma\left(\tfrac{4}{3}\right), \quad \Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right)=\tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right).$$

(5). La fonction Γa est la plus simple lorsque $a=1$; alors on a $\Gamma(a)=\int dx=x=1$. Donc lorsque a est un nombre entier, on a généralement

$$\Gamma a=1.2.3.4\ldots\ldots(a-1); \tag{2}$$

c'est-à-dire que la fonction Γa est égale au produit de tous les nombres entiers moindres que a.

Cette notion, fort claire lorsque a est un entier, ne présente plus aucun sens lorsque a est fractionnaire; mais l'analyse y supplée en donnant pour valeur de la fonction, l'intégrale $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; intégrale qu'il sera toujours possible d'évaluer avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

(6). La fonction Γa est très-remarquable par l'utilité dont elle est dans la théorie des intégrales définies. Nous pensons qu'il est nécessaire de lui imposer un nom particulier, et nous proposons de prendre pour ce nom celui de la lettre grecque Γ. Nous appellerons donc en général *gamma* du nombre a, le produit de tous les nombres inférieurs à a, savoir, $1.2.3\ldots\ldots(a-1)$.

Lorsque a ne sera pas un nombre entier, le gamma du nombre a sera en général une transcendante. Mais nous verrons que ces transcendantes ont beaucoup de propriétés, et qu'elles peuvent être évaluées dans tous les cas avec presqu'autant de facilité que les arcs de cercle et les logarithmes.

Réciproquement le nombre a pourra être regardé comme l'exposant ou la *racine* de la fonction Γa, et nous le désignerons de cette manière.

(7). Revenons maintenant à l'intégrale définie $\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1}$, que nous avons représentée par (p, q). Cette intégrale est facile à déterminer lorsque l'un des deux nombres p et q est entier. Supposons que ce soit q, et faisons $U = x^p\,(1-x)^{q-1}$, nous aurons par la différentiation,

$$dU = (p+q-1)\,x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} - (q-1)\,x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-2}.$$

Intégrant de part et d'autre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, et observant que dans ces deux limites U est nul, puisqu'on suppose à la fois $p > 0$ et $q > 1$, on aura

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} = \frac{q-1}{p+q-1}\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-2};$$

on aurait de la même manière

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-2} = \frac{q-2}{p+q-2}\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-3},$$

et ainsi successivement, jusqu'à ce qu'on parvienne à l'intégrale $\int x^{p-1}dx$ qui, dans les limites données, se réduit à $\frac{1}{p}$. Donc q étant un nombre entier, on a généralement

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{q-1} = \frac{q-1 . q-2 \ldots . 1}{p+q-1 . p+q-2 \ \ldots . p+1} \cdot \frac{1}{p}.$$

Mais dans la même hypothèse on a, par l'équation (1),

$$\Gamma q = 1.2.3 \ldots . q-1,$$
$$\Gamma(q+p) = (q+p-1)\,(q+p-2) \ldots . p\Gamma p;$$

donc la valeur de l'intégrale trouvée peut se mettre sous cette forme

$$\int x^{p-1}dx(1-x)^{q-1} = \frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)}.$$

On aurait trouvé le même résultat en supposant p entier et q un nombre quelconque, ce qui d'ailleurs se voit immédiatement en mettant $1-x$ à la place de x.

(8). L'équation précédente ne contenant plus de facteurs en nombre indéfini, acquiert une plus grande généralité, et ne suppose plus que l'un des deux nombres p et q est entier ; car d'ailleurs chaque membre doit se réduire à une même fonction de p et q, laquelle est

$$\frac{1}{p} - \frac{q-1}{1}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{q-1\,.\,q-2}{1.2}\cdot\frac{1}{p+2} - \frac{q-1\,.\,q-2\,.\,q-3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{p+3} + \text{etc.}$$

Nous aurons donc, quels que soient p et q, l'équation

$$(p, q) = \frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)}, \tag{3}$$

qui sert à exprimer généralement la fonction (p, q) au moyen des fonctions Γ.

(9). L'équation (3) simplifie considérablement la théorie des fonctions (p, q), puisqu'elle fait voir que ces fonctions, qui dépendent en général de deux variables, peuvent se déterminer par la fonction Γ qui n'en contient qu'une. Cette même équation, en établissant une relation entre les fonctions (p, q) et les fonctions Γ, va donner les moyens de découvrir les propriétés des unes et des autres. Et d'abord on voit que dans la fonction (p, q), les quantités p et q peuvent être échangées entr'elles, puisqu'il en résulte toujours la même valeur de (p, q). On a donc la formule

$$(p, q) = (q, p). \tag{4}$$

On a ensuite, d'après l'équation (3),

$$(p, q) = \frac{\Gamma p\, \Gamma q}{\Gamma(p+q)},$$

$$(p+q, r) = \frac{\Gamma(p+q)\, \Gamma r}{\Gamma(p+q+r)},$$

et celles-ci étant multipliées entr'elles donnent

$$(p, q)(p+q, r) = \frac{\Gamma p\, \Gamma q\, \Gamma r}{\Gamma(p+q+r)}.$$

Si l'on observe maintenant que dans le second membre de cette équation deux des lettres p, q, r, peuvent être échangées entr'elles à volonté, on en conclura cette nouvelle formule

$$(p, q)(p+q, r) = (p, r)(p+r, q) = (q, r)(q+r, p), \qquad (5)$$

laquelle contient une propriété fondamentale des fonctions (p, q).

Ces propriétés, au reste, s'accordent avec celles que nous avons démontrées dans la deuxième partie, relativement à la fonction désignée par $\left(\frac{p}{q}\right)$; mais elles ont dans notre nouvelle notation une plus grande généralité, puisqu'elles ne sont pas restreintes à la supposition que p et q soient des nombres rationnels.

(10). L'intégrale (p, q) peut être déterminée exactement lorsque $p+q=1$; en effet, considérons la formule

$$(a, 1-a) = \int x^{a-1} dx (1-x)^{-a};$$

si l'on fait $1-x = \frac{x}{z}$, ou $x = \frac{z}{1+z}$, l'intégrale aura pour transformée $\int \frac{z^{a-1} dz}{1+z}$, laquelle devra être prise entre les limites $z=0$, $z=\infty$. Or Euler a prouvé que cette dernière intégrale $= \frac{\pi}{\sin a\pi}$; ainsi on aura généralement

$$(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Mais

Mais par l'équation (3) on a aussi

$$(a,\ 1-a) = \frac{\Gamma a \Gamma(1-a)}{\Gamma 1} = \Gamma a \Gamma(1-a).$$

Donc entre les fonctions Γa, $\Gamma(1-a)$, on a cette équation très-remarquable

$$\Gamma a\ \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}: \tag{6}$$

c'est la seconde propriété générale des fonctions Γ.

(11). On voit par cette équation que les fonctions Γa, $\Gamma(1-a)$, placées symétriquement dans la première période, peuvent se déduire l'une de l'autre, puisque leur produit est toujours une quantité connue. Et parce que les racines a, $1-a$, sont complémens l'une de l'autre, nous regarderons la fonction $\Gamma(1-a)$ comme étant le *complément* de Γa, et réciproquement.

On a déjà remarqué que pour déterminer la fonction Γa dans toute son étendue, il suffit de connaître cette fonction dans la première période, depuis $a=0$ jusqu'à $a=1$, ou dans une autre période quelconque, comprise entre deux entiers consécutifs m, $m+1$. En vertu de l'équation (6), il suffira de connaître la fonction Γa dans la moitié d'une période, par exemple depuis $a=0$ jusqu'à $a=\frac{1}{2}$, ou depuis $a=\frac{1}{2}$ jusqu'à $a=1$.

Dans la seconde période, les fonctions $\Gamma(1+a)$, $\Gamma(2-a)$, également éloignées des extrémités de la période, seront pareillement regardées comme complémens l'une de l'autre; et puisque d'après l'équation (1) on a $\Gamma(1+a)=a\Gamma a$ et $\Gamma(2-a)=(1-a)\Gamma(1-a)$, il s'ensuit que les deux fonctions $\Gamma(1+a)$, $\Gamma(2-a)$ pourront se déduire l'une de l'autre par l'équation

$$\Gamma(1+a)\ \Gamma(2-a) = \frac{a(1-a)\pi}{\sin a\pi}.$$

On trouverait de même, dans la troisième période, que les fonctions $\Gamma(2+a)$ et $\Gamma(3-a)$ se servent mutuellement de complément et se déterminent l'une par l'autre.

(12). Ces formules entre les fonctions complémentaires prendront une forme plus élégante en les comptant du milieu de chaque période ; alors on aura pour les périodes successives les équations

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-a)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+a) = \frac{\pi}{\cos a\pi},$$
$$\Gamma(\tfrac{3}{2}-a)\,\Gamma(\tfrac{3}{2}+a) = (\tfrac{1}{4}-a^2)\,\frac{\pi}{\cos a\pi},$$
$$\Gamma(\tfrac{5}{2}-a)\,\Gamma(\tfrac{5}{2}+a) = (\tfrac{1}{4}-a^2)(\tfrac{9}{4}-a^2)\,\frac{\pi}{\cos a\pi},$$
etc.

Si l'on fait $a=0$ dans ces diverses équations, on aura les valeurs des fonctions qui se rapportent au milieu des périodes, savoir :

$$\Gamma\tfrac{1}{2}=\sqrt{\pi},\ \Gamma\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma\tfrac{5}{2}=\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma\tfrac{7}{2}=\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}\sqrt{\pi},\ \text{etc.}$$

Ces fonctions, et celles où a est un entier, sont les seules qu'on puisse déterminer exactement, sans employer de transcendantes plus composées que les arcs de cercle et les logarithmes.

(13). Si l'on considère les fonctions successives $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots$ $\Gamma\frac{n-1}{n}$, dans lesquelles n est un nombre entier, il suffira de connaître les $\frac{n-1}{2}$ premiers termes de cette suite, si n est impair, et les $\frac{n}{2}-1$ premiers seulement, si n est pair. Les autres se détermineront par l'équation (6), à laquelle on joindra, dans le second cas, l'équation $\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$.

A l'égard des intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui, dans la notation d'Euler, répondent à une même valeur de n, elles s'expriment par les fonctions Γ, de la manière suivante :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{(p+q-n)\Gamma\left(\frac{p+q}{n}-1\right)}, \tag{8}$$

la première devant être employée si l'on a $p+q<n$, et la seconde si l'on a $p+q>n$.

Au moyen de ces deux formules et de l'équation (6), toutes les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans lesquelles les nombres p et q sont pris à volonté dans la série 1, 2, 3...n, pourront s'exprimer par les premiers termes de la suite $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}$, etc., savoir, par $\frac{n-1}{2}$ termes si n est impair, et par $\frac{n}{2}-1$ si n est pair.

(14). Comme on a $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$, on pourra toujours supposer que p n'est pas $>q$; alors les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n pourront être disposées dans un ordre triangulaire, comme il suit :

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{1}\right), \\
\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \\
\left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \\
\vdots \\
\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{2}{n}\right), \left(\frac{3}{n}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right).
\end{array}$$

Le nombre de toutes ces fonctions est donc $\frac{n}{2}(1+n)$. Il faut déduire de ce nombre, 1°. les n fonctions de la forme $\left(\frac{p}{n}\right)$, dont la valeur exacte est $\frac{1}{p}$; 2°. les fonctions de la forme $\left(\frac{p}{n-p}\right)$, dont la valeur est $\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}$; le nombre de celles-ci est $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$, selon que n est impair ou pair. Il restera donc dans la série des intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$, un nombre de transcendantes égales à $\frac{1}{2}(n-1)^2$, si n est impair, et à $\frac{n}{2}(n-2)$ si n est pair.

Dans le premier cas, un nombre $\frac{1}{2}(n-1)^2$ de transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ peuvent s'exprimer par les $\frac{n-1}{2}$ premiers termes de la suite $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}$, etc.; dans le second, un nombre $\frac{n}{2}(n-2)$ de transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ peuvent s'exprimer par les $\frac{n}{2}-1$ premiers termes de la même suite.

De là on voit qu'il peut être établi un grand nombre de comparaisons entre les transcendantes $\left(\frac{p}{q}\right)$ qui répondent à une même valeur de n, et qu'elles peuvent toutes être exprimées par un petit nombre d'entr'elles; nombre qui sera $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$, selon que n est impair ou pair. Mais ce nombre, dans le cas où n n'est pas premier, pourra être réduit ultérieurement par les autres propriétés de la fonction Γ, que nous démontrerons ci-après.

(15). Considérons maintenant le cas où les deux nombres p et q sont égaux dans la fonction (p, q); alors on aura

$$(a, a) = \int x^{a-1}dx(1-x)^{a-1}.$$

Soit $x = \frac{1}{2}(1+y)$, la transformée sera $2^{1-2a}\int dy(1-y^2)^{a-1}$; et comme cette nouvelle intégrale doit être prise depuis $y=-1$ jusqu'à $y=+1$, il revient au même de la prendre depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et de doubler le résultat. On aura ainsi

$$(a, a) = 2^{2-2a}\int dy(1-y^2)^{a-1}.$$

Mettant x à la place de y^2, ce qui ne change pas les limites, il viendra $(a, a) = 2^{1-2a}\int x^{-\frac{1}{2}}dx(1-x)^{a-1}$, ou

$$(a, a) = 2^{1-2a}\left(\tfrac{1}{2}, a\right),$$

formule qui s'accorde avec l'équation (r) de la page 232.

Mais d'après l'équation (3) ci-dessus, on a

$$(a, a) = \frac{\Gamma a\,\Gamma a}{\Gamma(2a)}, \qquad \left(\tfrac{1}{2}, a\right) = \frac{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma a}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)};$$

donc en substituant ces valeurs, l'équation précédente donne

$$\Gamma a \Gamma(\tfrac{1}{2}+a) = 2^{1-2a}\Gamma\tfrac{1}{2}\,\Gamma(2a) = 2^{1-2a}\pi^{\frac{1}{2}}.\Gamma(2a): \qquad (9)$$

c'est la troisième propriété générale des fonctions Γ.

(16). Il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut parvenir à ce résultat par une autre voie.

Considérons pour cet effet la fonction $\psi(n)$, dont la valeur est

$$\psi(n) = \frac{2n+2.2n+4.2n+6\ldots 4n}{1\;.\;3\;.\;5\ldots\ldots 2n-1};$$

si l'on met $n+1$ à la place de n, on aura

$$\psi(n+1) = \frac{2n+4.2n+6.2n+8\ldots 4n+4}{1\;.\;3\;.\;5\ldots\ldots\ldots 2n+1};$$

de là résulte

$$\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = \frac{4n+2.4n+4}{2n+2.2n+1} = 4.$$

Donc en général $\psi(n) = A.4^n$, A étant une constante qu'il faut déterminer dans un cas particulier. Or en faisant $n=1$, on a $\psi(n)=4$; donc $A=1$; donc n étant un nombre entier quelconque, on aura

$$\frac{2n+2.2n+4.2n+6\ldots 4n}{1\;.\;3\;.\;5\ldots\ldots 2n-1} = 4^n.$$

Mais en vertu de l'équation (1), on a

$$(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)}.$$

Faisant successivement $m=n$ et $m=-\frac{1}{2}$, cette formule donne

$$(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)},$$

$$\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}\ldots\frac{2n-1}{2} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}}.$$

Divisant la première équation par la seconde, il vient

$$\frac{2n+2.2n+4\ldots4n}{1\;.\;3\ldots\ldots2n-1}=\frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

Lorsque n est un nombre entier, le premier membre se réduit à 2^{2n}; ainsi dans ce même cas on aura

$$\frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}=2^{2n}.$$

Cette équation ayant lieu lorsque n est un nombre entier à volonté, elle aura également lieu pour toute valeur de n, puisque Γa est une fonction continue de n. Si l'on fait ensuite $n=a-\frac{1}{2}$, on retombera exactement sur l'équation (9).

(17). Si l'on combine l'équation (9) avec la première des équations de l'art. 12, on aura l'équation (ν) de l'art. 61, dont nous avons montré l'usage pour déterminer la fonction Γa dans toute l'étendue de la racine a, pourvu qu'on connaisse la valeur de cette fonction depuis $a=\frac{3}{4}$ jusqu'à $a=1$. On pourrait prendre également pour intervalle connu celui de $a=0$ à $a=\frac{1}{4}$, ou celui de $a=1$ à $a=\frac{5}{4}$, comme on le verra ci-après.

(18). Pour revenir maintenant aux réductions dont nous avons parlé dans l'article 14, il faut voir quel usage nous pourrons faire de l'équation (9).

Si n est impair, il n'y a pas lieu de faire usage de cette équation, parce qu'il en naîtrait de nouvelles transcendantes dans lesquelles les quantités a auraient des valeurs fractionnaires dont le dénominateur serait $2n$, et qui ne seraient plus comprises dans la suite des transcendantes $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}$, etc.

Mais si n est pair, l'application de l'équation (9) aux valeurs successives $a=\frac{1}{n}$, $a=\frac{2}{n}$, etc. permettra de réduire le nombre des transcendantes $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, etc. à $\frac{n-2}{4}$ ou $\frac{n}{4}$, selon que n sera de la forme $4i+2$ ou $4i$.

(19). Toute la théorie des intégrales Eulériennes, tant de l'espèce $\left(\frac{p}{q}\right)$ que de l'espèce Γa, est comprise dans le petit nombre de formules que nous venons d'exposer. On en peut déduire, sans exception, toutes les formules qu'Euler a données dans ses différens Mémoires sur ces intégrales, et toutes celles que nous leur avons ajoutées, d'après l'équation (d'), page 237, qui n'était pas connue de cet illustre auteur, non plus que l'équation (ν), page 284, qui en est une conséquence.

L'application de ces formules au cas de $n=12$ a été donnée avec détail dans l'art. 18, page 238. On y a fait voir que, dans la méthode d'Euler, cinq transcendantes A, A_2, A_3, A_4, A_5 sont nécessaires pour déterminer toutes les intégrales $\left(\frac{p}{q}\right)$; elles suffisent aussi pour déterminer toutes les fonctions $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}\ldots\Gamma\frac{11}{12}$, ainsi qu'il résulte des formules des art. 59 et 60.

Au moyen de l'équation (d'), ces cinq transcendantes ont été réduites à trois seulement, savoir, A_1, A_2, A_3, ce qui s'accorde avec le résultat général de l'art. précédent, qui donne $\frac{n}{4}$ pour le nombre de transcendantes nécessaires lorsque n est un multiple de 4.

Enfin, au moyen de diverses intégrations dont le résultat a été donné n° 155 de la première partie, on est parvenu, dans l'art. 19, à déterminer exactement le rapport de A_1 à A_3, ce qui réduit les trois transcendantes aux deux seules A_1, A_2. On peut donc réduire à deux seulement les fonctions $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}\ldots\Gamma\frac{11}{12}$, de manière que ces deux fonctions étant connues, toutes les autres peuvent en être déduites.

Cette dernière réduction, qu'on n'avait obtenue que par des intégrations très-compliquées, méritait une attention particulière; elle donnait lieu de croire que la théorie des fonctions Γ devait contenir d'autres formules propres à opérer leur réduction. Ces formules ont en effet été découvertes par des recherches ultérieures, dont nous allons donner le résultat.

§ II. *Recherches ultérieures sur les propriétés des fonctions* Γ.

(20). Considérons la fonction $\varphi(x)$ exprimée par la suite infinie

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2+x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3+x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{4+x} + \text{etc.},$$

dans laquelle nous supposerons $x < 1$. Si l'on développe cette quantité suivant les puissances de x, et qu'on désigne, comme ci-dessus, par S_n la somme des puissances réciproques, de degré n, des nombres naturels, on aura

$$\varphi(x) = S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - S_5 x^4 + \text{etc.}$$

Mais par l'équation (ω) du n° 77, deuxième partie, on a

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \text{etc.}$$

Différenciant celle-ci et comparant le résultat à la valeur de $\varphi(x)$, on en tire

$$\varphi(x) = C + \frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx}; \qquad (10)$$

d'où l'on voit que la suite désignée par $\varphi(x)$ peut être sommée immédiatement, au moyen du coefficient différentiel de la fonction $\log\Gamma(1+x)$, puisque d'ailleurs C est une constante dont la valeur a été donnée n° 73.

Observons que la fonction $\varphi(x)$ peut être mise sous la forme

$$\left(1-\frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3+x}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4+x}\right) + \text{etc.};$$

alors on voit qu'elle est la différence de deux suites qui ont l'une et l'autre une somme infinie, mais qui étant ainsi retranchées terme à terme, se réduisent à une quantité finie. Cette quantité est d'ailleurs la même qui a été désignée par C′— N dans l'art. 75, et elle représente par conséquent aussi la somme de la suite

suite harmonique

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{x}.$$

(21). Puisqu'on a généralement

$$\left(1-\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3+x}\right)+\text{etc.}=C+\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx};$$

on trouvera, par des différentiations successives, les sommes de différentes séries, savoir :

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\frac{1}{(3+x)^2}+\frac{1}{(4+x)^2}+\text{etc.}=\frac{ddl\Gamma(1+x)}{dx^2},$$
$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(2+x)^3}+\frac{1}{(3+x)^3}+\frac{1}{(4+x)^3}+\text{etc.}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{d^3l\Gamma(1+x)}{dx^3},$$
$$\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{1}{(2+x)^4}+\frac{1}{(3+x)^4}+\frac{1}{(4+x)^4}+\text{etc.}=\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^4l\Gamma(1+x)}{dx^4},$$
$$\frac{1}{(1+x)^5}+\frac{1}{(2+x)^5}+\frac{1}{(3+x)^5}+\frac{1}{(4+x)^5}+\text{etc.}=-\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{d^5l\Gamma(1+x)}{dx^5},$$
etc.

Et en général, si l'on désigne par $\psi_n(1+x)$ la somme de la suite

$$\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{(2+x)^n}+\frac{1}{(3+x)^n}+\frac{1}{(4+x)^n}+\text{etc.},$$

on aura

$$\psi_n(1+x)=\frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\frac{d^nl\Gamma(1+x)}{dx^n},$$

de sorte que les sommes de toutes ces suites se déterminent par les coefficiens différentiels successifs de la fonction $l\Gamma(1+x)$; il faut seulement excepter le premier terme $\psi_1(1+x)$, d'où l'on a déduit tous les autres, et qui ne se détermine par $-\frac{dl\Gamma(1+x)}{dx}$, qu'en ajoutant la constante infinie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc.

(22). Dans l'art. 41, deuxième partie, nous avons représenté par $(a, n)^m$ la somme de la suite infinie

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+n)^m} + \frac{1}{(a+2n)^m} + \frac{1}{(a+3n)^m} + \text{etc.}$$

Si l'on fait $a = nx$, cette suite devient

$$\frac{1}{n^m}\left(\frac{1}{x^m} + \frac{1}{(1+x)^m} + \frac{1}{(2+x)^m} + \text{etc.}\right).$$

Ainsi en faisant $x = \frac{a}{n}$, l'expression générale de la transcendante $(a, n)^m$ sera

$$(a, n)^m = \frac{1}{n^m}.\psi_m(x) = \frac{(-1)^m}{1.2.3\ldots m-1}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot\frac{d^m\, l\Gamma x}{dx^m}.$$

On peut encore remarquer qu'en faisant

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\ldots + \frac{1}{x^n},$$

on aura en général $\varphi_n(x) + \psi_n(1+x) = \text{const.} = S_n$; donc

$$\varphi_n(x) = S_n - \psi_n(1+x) = S_n + \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\frac{d^n\, l\Gamma(1+x)}{dx^n}.$$

C'est simplifier la théorie de ces diverses transcendantes, que de faire voir qu'elles dépendent d'une même fonction $l\Gamma(1+x)$ et de ses coefficiens différentiels successifs.

(23). Considérons maintenant d'une manière particulière l'équation

$$\frac{dd\, l\Gamma(1+x)}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(3+x)^2} + \text{etc.},$$

que nous mettrons sous la forme

$$\frac{dd\, l\Gamma x}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \frac{1}{(3+x)^2} + \text{etc.} \qquad (12)$$

Cette formule est le principe d'où nous allons déduire de nouveaux théorèmes, qui serviront à perfectionner et même à compléter entièrement la théorie des fonctions Γ.

Soit, pour abréger, $f(x)$ la fonction qui forme le second membre de l'équation (12); si l'on met $2x$ à la place de x, on aura

$$f(2x)=\tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(\frac{1}{2}+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(\frac{3}{2}+x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\text{etc.}\right]:$$

dans la suite renfermée en parenthèses, les termes de rang impair ont pour somme $f(x)$, et les termes de rang pair ont pour somme $f(\frac{1}{2}+x)$. Ainsi on a

$$f(2x)=\tfrac{1}{4}f(x)+\tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{2}+x):$$

or l'équation (12) donne $f(x)=\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}$, $f(\frac{1}{2}+x)=\frac{ddl\Gamma(\frac{1}{2}+x)}{dx^2}$, $f(2x)=\frac{ddl\Gamma(2x)}{4dx^2}$; substituant ces valeurs, il vient

$$\frac{ddl\Gamma(2x)}{dx^2}=\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{1}{2}+x)}{dx^2};$$

multipliant par dx et intégrant, on a

$$\frac{dl\Gamma(2x)}{dx}=\frac{dl\Gamma x}{dx}+\frac{dl\Gamma(\frac{1}{2}+x)}{dx}+\alpha.$$

Multipliant encore par dx et intégrant, il vient

$$\log\Gamma(2x)=\log\Gamma x+\log\Gamma(\tfrac{1}{2}+x)+\alpha x+\beta,$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{2}+x)=Ae^{-\alpha x}\Gamma(2x).$$

Il reste à déterminer les deux constantes A, α, introduites par l'intégration. Pour cela, soit x infiniment petit, on aura $\Gamma x=\frac{1}{x}$ et $\Gamma(2x)=\frac{1}{2x}$; donc $A=2\Gamma\frac{1}{2}$. Soit ensuite $x=\frac{1}{2}$, on aura $Ae^{-\frac{1}{2}\alpha}=\Gamma\frac{1}{2}$, donc $e^{\frac{1}{2}\alpha}=2$; donc l'équation générale est

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{2}+x)=\Gamma(2x).2^{1-2x}\Gamma\tfrac{1}{2}.$$

Nous retombons ainsi sur l'équation (9) déjà démontrée de deux autres manières ; mais la même méthode va nous faire découvrir de nouvelles propriétés.

(24). En appelant toujours $f(x)$ le second membre de l'équation (12), si l'on met $3x$ à la place de x, on aura

$$f(3x)=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(\frac{1}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{2}{3}+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(\frac{4}{3}+x)^2}+\text{etc.}\right].$$

La suite contenue dans le second membre se décompose en trois autres, savoir :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\text{ etc. }=f(x);$$
$$\frac{1}{(\frac{1}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{4}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{7}{3}+x)^2}+\text{ etc. }=f(\tfrac{1}{3}+x);$$
$$\frac{1}{(\frac{2}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{5}{3}+x)^2}+\frac{1}{(\frac{8}{3}+x)^2}+\text{ etc. }=f(\tfrac{2}{3}+x);$$

donc on a

$$f(3x)=\tfrac{1}{9}[f(x)+f(\tfrac{1}{3}+x)+f(\tfrac{2}{3}+x)].$$

Remettant au lieu de $f(x)$ sa valeur $\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}$, et semblablement pour les autres termes, il vient

$$\frac{ddl\Gamma(3x)}{dx^2}=\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{1}{3}+x)}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma(\frac{2}{3}+x)}{dx^2}.$$

Intégrant cette équation deux fois consécutives, on obtient pour résultat

$$\Gamma x\Gamma(\tfrac{1}{3}+x)\,\Gamma(\tfrac{2}{3}+x)=\Gamma(3x).Ae^{-\alpha x}.$$

Pour déterminer les deux constantes A et α, soit, 1°. x infiniment petit, on aura $A=3\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=2\pi\sqrt{3}$; soit, 2°. $x=\frac{1}{3}$, on aura $Ae^{-\frac{1}{3}\alpha}=\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{2}{3}=\frac{1}{3}A$, et par conséquent $e^{\alpha}=3^3$. Donc on a l'équation

$$\Gamma x \Gamma\left(\tfrac{1}{3}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{3}+x\right)=2\pi . 3^{\frac{1}{2}-3x}\,\Gamma(3x): \qquad (13)$$

c'est la quatrième propriété générale des fonctions Γ.

(25). Si l'on considère semblablement la fonction $f(5x)$, et qu'on décompose la suite qu'elle représente en cinq autres, provenant des termes comptés de cinq en cinq, à commencer par le 1er, le 2e, le 3e, le 4e et le 5e, on obtiendra l'équation

$$f(5x)=\tfrac{1}{25}\left[fx+f\left(\tfrac{1}{5}+x\right)+f\left(\tfrac{2}{5}+x\right)+f\left(\tfrac{3}{5}+x\right)+f\left(\tfrac{4}{5}+x\right)\right],$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$\frac{dd\,l\Gamma(5x)}{dx^2}=\frac{dd\,l\Gamma x}{dx^2}+\frac{dd\,l\Gamma\left(\frac{1}{5}+x\right)}{dx^2}+\frac{dd\,l\Gamma\left(\frac{2}{5}+x\right)}{dx^2}+\frac{dd\,l\Gamma\left(\frac{3}{5}+x\right)}{dx^2}+\frac{dd\,l\Gamma\left(\frac{4}{5}+x\right)}{dx^2},$$

dont l'intégrale est

$$\Gamma x\Gamma\left(\tfrac{1}{5}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{5}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{3}{5}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{4}{5}+x\right)=\Gamma(5x)\,.\,Ae^{-\alpha x}.$$

Pour déterminer les constantes A et α, on fera successivement x infiniment petit et $x=\frac{1}{5}$, ce qui donnera

$$A=5\Gamma\tfrac{1}{5}\,\Gamma\tfrac{2}{5}\,\Gamma\tfrac{3}{5}\,\Gamma\tfrac{4}{5},$$

$$Ae^{-\frac{\alpha}{5}}=\Gamma\tfrac{1}{5}\,\Gamma\tfrac{2}{5}\,\Gamma\tfrac{3}{5}\,\Gamma\tfrac{4}{5}=\tfrac{1}{5}A;$$

donc $e^{\alpha}=5^5$: ensuite on a, par l'équation (3),

$$\Gamma\tfrac{1}{5}\,\Gamma\tfrac{4}{5}=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{5}\pi},\qquad \Gamma\tfrac{2}{5}\,\Gamma\tfrac{3}{5}=\frac{\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi};$$

ce qui donne $A=\dfrac{5\pi^2}{\sin\frac{\pi}{5}\,\sin\frac{2\pi}{5}}=4\pi^2\sqrt{5}$. Donc enfin la fonction Γ satisfait encore à l'équation

$$\Gamma x\Gamma\left(\tfrac{1}{5}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{2}{5}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{3}{5}+x\right)\Gamma\left(\tfrac{4}{5}+x\right)=\Gamma(5x)\,.\,(2\pi)^2 . 5^{\frac{1}{2}-5x}: \qquad (14)$$

c'est la cinquième propriété générale des fonctions Γ.

(26). Il est facile de voir qu'on peut généraliser ces résultats et les comprendre dans une même formule. En effet, n étant un entier quelconque, la valeur de $f(nx)$ pourra se décomposer ainsi,

$$f(nx)=\frac{1}{n^2}\left[fx+f\left(\frac{1}{n}+x\right)+f\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}+x\right)\right];$$

il en résulte l'équation différentielle

$$\frac{ddl\Gamma(nx)}{dx}=\frac{ddl\Gamma x}{dx^2}+\frac{ddl\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)}{dx^2}\ldots\ldots+\frac{ddl\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)}{dx^2},$$

dont l'intégrale finie est

$$\Gamma x\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)=\Gamma(nx).\mathrm{A}e^{-\alpha x}.$$

Pour déterminer les deux constantes A et α, faisons successivement x infiniment petit et $x=\frac{1}{n}$, nous aurons ces deux équations

$$\mathrm{A}=n\Gamma\frac{1}{n}\Gamma\frac{2}{n}\Gamma\frac{3}{n}\ldots\Gamma\frac{n-1}{n},$$
$$\mathrm{A}e^{-\frac{\alpha}{n}}=\Gamma\frac{1}{n}\Gamma\frac{2}{n}\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}=\frac{\mathrm{A}}{n};$$

la dernière donne immédiatement $e^{\alpha}=n^n$. Pour avoir la valeur de A, il faut distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair.

Soit, 1°. $n=2m$, les fonctions $\Gamma\frac{1}{n}, \Gamma\frac{2}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-2}{n}, \Gamma\frac{n-1}{n}$ auront un terme moyen $\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$, et les termes également éloignés des extrêmes étant complémens l'un de l'autre, leur produit sera donné par l'équation (3); et on aura pour le produit total de ces fonctions,

$$\pi^{\frac{1}{2}}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}.\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}}\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{m-1}{n}\pi}=\frac{\pi^{m-\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{n}\pi}.$$

Mais en faisant z infiniment petit dans la formule qui termine l'art. 240, *Introd. in An. inf.*, on trouve

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{n}\pi=2^{\frac{1-n}{2}}\sqrt{n};$$

ce qui donne, dans le premier cas,

$$\Gamma\frac{1}{n}\,\Gamma\frac{2}{n}\,\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$A=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}.$$

Soit, 2°. $n=2m+1$, il n'y aura point de terme moyen dans la suite $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n}\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}$; mais les termes également éloignés des extrêmes étant toujours complémens l'un de l'autre, le produit de toutes ces fonctions sera

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\ldots\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi^m}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

D'une autre part, la formule citée d'Euler donne, lorsque n est impair,

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{m\pi}{n}=2^{\frac{1-n}{2}}\,n^{\frac{1}{2}};$$

donc on a encore dans ce cas,

$$\Gamma\frac{1}{n}\Gamma\frac{2}{n}\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$A=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, quel que soit le nombre entier n, on aura généralement la formule

$$\Gamma x\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right)=\Gamma(nx).(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\ldots.(15)$$

(27). Cette formule très-remarquable comprend comme cas particuliers, les formules (9), (13) et (14); elle en donnera tant d'autres qu'on voudra, en prenant pour n des valeurs en nombres entiers au-dessus de 5.

Il est bon néanmoins d'observer que les formules qui résultent de l'équation (15), en prenant pour n un nombre composé, ne sont que des conséquences de celles qui ont lieu en ne prenant pour n que des nombres premiers, et qu'ainsi il suffit de considérer ces dernières, en donnant à n les valeurs successives 2, 3, 5, 7, 11, etc. On obtiendra encore de cette manière une infinité d'équations auxquelles les fonctions Γ doivent satisfaire, et qui donnent les moyens de multiplier à l'infini les comparaisons et les réductions dont ce genre de transcendantes est susceptible.

(28). Nous observerons encore que dans les usages de la formule (15) et de toutes celles qui en dérivent, on peut se borner à faire $x < \frac{1}{n}$; car si l'on met $\frac{1}{n} + x$ à la place de x, la formule qui naît de cette substitution ne diffère pas de la formule (15); de sorte qu'on n'obtiendra entre les fonctions Γ que les mêmes relations qui peuvent être obtenues en supposant $x < \frac{1}{n}$.

(29). Nous pouvons même aller plus loin, et démontrer qu'il suffira de faire $x < \frac{1}{2n}$, parce que l'équation qui viendrait en supposant $x = \frac{1}{2n} + \omega$, ne différera pas essentiellement de celle que donne la supposition $x = \frac{1}{2n} - \omega$.

En effet, si l'on fait successivement ces deux substitutions dans l'équation (15), on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{2n}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{3}{2n}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{5}{2n}+\omega\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2n-1}{2n}+\omega\right)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\omega\right)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{n\omega},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2n}-\omega\right)\Gamma\left(\frac{3}{2n}-\omega\right)\Gamma\left(\frac{5}{2n}-\omega\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2n-1}{2n}-\omega\right)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\omega\right)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-n\omega};$$

multipliant ces deux équations entr'elles, et observant que chaque fonction Γ dans une équation, trouve son complément dans l'autre, on aura pour le produit total cette équation,

$$\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\pi\omega\right)}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{2n}+\pi\omega\right)}\cdots\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2n-1}{2n}\pi+\pi\omega\right)}=\frac{\pi\,(2\pi)^{n-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\omega\pi\right)},$$

laquelle

laquelle, en faisant $\frac{\pi}{2n} + \omega\pi = z$, peut être mise sous cette forme,

$$\sin nz = 2^{n-1} \sin z \sin\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \ldots \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi + z\right):$$

c'est l'équation déjà citée de l'art. 240, *Introd. in An. inf.*

De là on voit que les deux équations obtenues en faisant $x = \frac{1}{2n} + \omega$, $x = \frac{1}{2n} - \omega$, ne donnent qu'un seul et même résultat, et qu'ainsi dans l'application de l'équation (15), il suffira de faire $x < \frac{1}{2n}$.

On peut remarquer encore qu'en faisant $\omega = 0$, on a la formule

$$\Gamma\frac{1}{2n}\,\Gamma\frac{3}{2n}\,\Gamma\frac{5}{2n}\ldots\ldots\Gamma\frac{2n-1}{2n} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\tfrac{1}{2},$$

laquelle se déduirait aisément de la formule générale

$$\Gamma\frac{1}{n}\,\Gamma\frac{2}{n}\,\Gamma\frac{3}{n}\ldots\ldots\Gamma\frac{n-1}{n} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}.$$

(30). Il ne sera pas inutile de rassembler ici sous un même point de vue, toutes les équations qui contiennent les propriétés générales des fonctions Γ. Voici ces formules, accompagnées des lettres qui serviront dans la suite à les désigner.

(A) $\Gamma x = 1.2.3\ldots(x-1)$,

(B) $\Gamma(1+x) = x\,\Gamma x$,

(C) $\Gamma x\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

(D) $\Gamma x\,\Gamma(\frac{1}{2}+x) = \Gamma(2x).(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2x}$,

(E) $\Gamma x\,\Gamma(\frac{1}{3}+x)\,\Gamma(\frac{2}{3}+x) = \Gamma(3x).(2\pi)^{1}\,3^{\frac{1}{2}-3x}$,

(F) $\Gamma x\,\Gamma(\frac{1}{5}+x)\,\Gamma(\frac{2}{5}+x)\,\Gamma(\frac{3}{5}+x)\,\Gamma(\frac{4}{5}+x) = \Gamma(5x).(2\pi)^{2}\,5^{\frac{1}{2}-5x}$,

$\vdots$

(N) $\Gamma x\,\Gamma\left(\frac{1}{n}+x\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+x\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+x\right) = \Gamma(nx).(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}$.

Ces équations offrent une infinité de manières de comparer entre elles les fonctions Γ, et d'opérer toutes les réductions que leur nature comporte. On peut démontrer, par exemple, qu'il suffit de connaître la fonction Γ dans une petite partie de la première période, pour pouvoir déterminer cette fonction dans tout le reste de la période. On peut aussi considérer parmi les fonctions Γx, celles qui se rapportent aux diverses valeurs rationnelles de x qui ont un même dénominateur, et se proposer de réduire toutes ces transcendantes au moindre nombre possible. De là naissent différens problèmes curieux qui jetteront un nouveau jour sur la nature des fonctions Γ, et sur lesquels nous allons donner quelques recherches.

§ III. *Réduction générale des fonctions* Γ.

(31). Nous nous proposerons d'abord de faire voir qu'au moyen de l'équation (D), il suffit de connaître la fonction Γx depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{4}$, pour pouvoir déterminer cette fonction dans tout le reste de la première période, depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à $x = 1$.

Comme il s'agit ici non d'effectuer la solution, mais d'en démontrer la possibilité, nous ferons usage de quelques signes propres à abréger les calculs. Pour cet effet, désignons $\log \Gamma x$ par (x), les équations (C) et (D) pourront s'écrire ainsi,

$$(x) + (1 - x) = l\,\frac{\pi x}{\sin \pi x},$$
$$(x) + (\tfrac{1}{2} + x) - (2x) = \tfrac{1}{2}\,l(2\pi) + (\tfrac{1}{2} - 2x)\,l2.$$

Les seconds membres de ces équations étant des quantités connues lorsque x est donné, nous les représenterons par la lettre d, initiale du mot *donnée*, qui désignera également toute quantité composée de termes connus. Nos deux équations peuvent donc se représenter par la notation suivante,

(C) $$(x) + (1 - x) = d,$$

(D) $$(x) + (\tfrac{1}{2} - x) - (2x) = d.$$

Cela posé, si dans l'équation (D) on fait $x = \frac{1}{4} + \alpha$, on aura

$$(\tfrac{1}{4} + \alpha) + (\tfrac{3}{4} + \alpha) - (\tfrac{1}{2} + 2\alpha) = d.$$

Mais par l'équation (C) on a $(\frac{3}{4} + \alpha) = -(\frac{1}{4} - \alpha) + d$, et par l'équation (D), $(\frac{1}{2} + 2\alpha) = (4\alpha) - (2\alpha) + d$; donc

$$(\tfrac{1}{4} + \alpha) = (\tfrac{1}{4} - \alpha) + (4\alpha) - (2\alpha) + d.$$

Tant qu'on aura $\alpha < \frac{1}{12}$, cette équation déterminera la fonction (x) ou $(\frac{1}{4} + \alpha)$ par d'autres fonctions où x est moindre. Ainsi en donnant à α toutes les valeurs depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{12}$, on connaîtra la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à $x = \frac{1}{3}$.

(32). Par exemple, soit $x = \frac{7}{24}$ ou $\alpha = \frac{1}{24}$, on aura

$$(\tfrac{7}{24}) = (\tfrac{5}{24}) + (\tfrac{1}{6}) - (\tfrac{1}{12}) + d;$$

ainsi la valeur de $(\frac{7}{24})$ est composée de quantités connues.

Soit encore $x = \frac{19}{60}$ ou $\alpha = \frac{4}{15}$, on aura

$$(\tfrac{19}{60}) = (\tfrac{11}{60}) + (\tfrac{4}{15}) - (\tfrac{2}{15}) + d.$$

Dans le second membre, la fonction $(\frac{4}{15})$ n'est pas donnée immédiatement, puisque $\frac{4}{15}$ est $> \frac{1}{4}$; mais on aura sa valeur par la même formule, en faisant $\alpha = \frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$, ce qui donne

$$(\tfrac{4}{15}) = (\tfrac{14}{60}) + (\tfrac{4}{60}) - (\tfrac{2}{60}) + d;$$

d'où l'on voit que $(\frac{19}{60})$ deviendra entièrement connu.

(33). Lorsqu'on fait $x = \frac{1}{3}$ ou $\alpha = \frac{1}{12}$, la formule précédente ne détermine pas la fonction $(\frac{1}{3})$; mais alors les équations (C) et (D) donnent immédiatement

$$(\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{3}) = d, \quad (\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{2}{3}) - (\tfrac{1}{3}) = d;$$

d'où l'on tire la valeur cherchée

$$(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}) + d.$$

Connaissant la fonction (x) depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{3}$, il reste à la déterminer depuis $x = \frac{1}{3}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$. Or par la combinaison des équations (C) et (D), on a la formule

$$(\tfrac{1}{2} - \alpha) = (\alpha) - (2\alpha) + d.$$

Si l'on donne à α toutes les valeurs depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{6}$, le second membre sera connu ; ainsi on aura la valeur de la fonction (x) ou $(\frac{1}{2} - \alpha)$, depuis $x = \frac{1}{3}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$.

On peut donc déterminer la fonction Γx pour toute valeur de la racine x, pourvu qu'on connaisse cette fonction depuis $x = 0$ jusqu'a $x = \frac{1}{4}$.

Ce problème revient à celui que nous avons résolu dans l'art. 61, deuxième partie ; mais la méthode précédente fait voir plus clairement la possibilité de la solution.

(34). Il ne serait pas difficile d'ailleurs d'obtenir les solutions effectives, en réalisant les quantités désignées par d ; on trouverait alors les trois équations

$$(\tfrac{1}{4} + \alpha) = (\tfrac{1}{4} - \alpha) - (2\alpha) + (4\alpha) + (\tfrac{1}{2} + 2\alpha)\, l2 + l \sin(\tfrac{1}{4} - \alpha)\pi,$$
$$2(\tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{2}\, l\pi - \tfrac{2}{3}\, l2 - l \sin \tfrac{1}{3}\pi,$$
$$(\tfrac{1}{2} - \alpha) = (\alpha) - (2\alpha) + \tfrac{1}{2}\, l\pi - (1 - 2\alpha)\, l2 - l \cos \alpha\pi.$$

La première servira à déterminer la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{4}$ jusqu'à $x = \frac{1}{3}$; la seconde déterminera la fonction $(\frac{1}{3})$, et la troisième servira à déterminer la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{3}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$. Enfin, d'après ces données, l'équation (C) servira à déterminer la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$.

(35). Puisque l'emploi des équations (C) et (D) donne les moyens de réduire à $\frac{1}{4}$ la partie de la première période où la fonction Γx doit être connue, afin de déterminer cette fonction dans la période entière, on peut conjecturer de là que si à ces équations on joint l'équation (E), il sera possible de réduire ultérieurement à $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3})$ ou $\frac{1}{6}$, la partie de la période qui sert à déterminer tout le reste.

C'est ce que nous allons vérifier par une analyse semblable à la précédente.

Supposons que la fonction (x) est connue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{6}$; d'après l'équation (E) on aura

$$\left(\tfrac{1}{6} + \alpha\right) + \left(\tfrac{1}{2} + \alpha\right) + \left(\tfrac{5}{6} + \alpha\right) - \left(\tfrac{1}{2} + 3\alpha\right) = d.$$

Mais l'équation (D) donne $\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) = (2\alpha) - (\alpha) + d$, $\left(\frac{1}{2} + 3\alpha\right) = (6\alpha) - (3\alpha) + d$, et l'équation (C) donne $\left(\frac{5}{6} + \alpha\right) = -\left(\frac{1}{6} - \alpha\right) + d$; on a donc la formule

$$\left(\tfrac{1}{6} + \alpha\right) = \left(\tfrac{1}{6} - \alpha\right) + (\alpha) - (2\alpha) - (3\alpha) + (6\alpha) + d.$$

Tant que 6α sera plus petit que $\frac{1}{6} + \alpha$, ou tant qu'on prendra $\alpha < \frac{1}{30}$, cette équation donnera la valeur de (x) ou $\left(\frac{1}{6} + \alpha\right)$ par des fonctions dont la racine est moindre. Ainsi on connaîtra la valeur de la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{6}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5}$.

La formule précédente ne détermine pas la valeur de la fonction $\left(\frac{1}{5}\right)$; mais par une autre formule que nous donnerons ci-après (art. 45), on a

$$\left(\tfrac{1}{5}\right) = \left(\tfrac{1}{30}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right) + d.$$

(36). Il reste à déterminer la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{5}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$. Pour cela, soit $\alpha = \frac{1}{30} + z$, l'équation précédente deviendra

$$\left(\tfrac{1}{5} + 6z\right) = \left(\tfrac{1}{5} + z\right) + \left(\tfrac{1}{10} + 3z\right) + \left(\tfrac{1}{15} + 2z\right) - \left(\tfrac{1}{30} + z\right) - \left(\tfrac{2}{15} - z\right) + d.$$

Pour faire usage de cette formule, il faut supposer connue la fonction $\left(\frac{1}{5} + z\right)$ depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$, ω étant une quantité aussi petite qu'on voudra. Alors donnant à z toutes les valeurs depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{20}$, on connaîtra la fonction (x) ou $\left(\frac{1}{5} + 6z\right)$, depuis $x = \frac{1}{5}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$.

On peut aussi ne faire usage de la formule précédente que depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{45}$, ce qui fera connaître la fonction (x) depuis $x = \frac{1}{5}$ jusqu'à $x = \frac{1}{3}$. On déterminera ensuite cette fonction depuis

$x = \frac{1}{3}$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$, par la formule

$$\left(\tfrac{1}{2} - x\right) = (x) - (2x) + d.$$

Cette solution est fort simple, puisqu'elle est fondée sur une seule formule mise sous deux formes différentes; mais elle suppose qu'outre la partie de la période connue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{6}$, on connaît encore la partie comprise depuis $x = \frac{1}{5}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \omega$, ω étant une quantité qui, à la vérité, peut être aussi petite qu'on voudra, mais qui ne peut être tout à fait anéantie. Voici un autre moyen de résoudre le même problème, en supposant connues deux parties de la période non contiguës, mais telles que leur somme se réduit précisément à $\frac{1}{6}$.

(37). Supposons la fonction (x) connue dans deux parties de la première période, savoir, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{18}$, et depuis $x = \frac{5}{18}$ jusqu'à $x = \frac{7}{18}$: ces deux parties réunies font une somme égale à $\frac{1}{6}$; et pour déterminer la fonction (x) dans tout le reste de la période, il faudra exécuter les opérations suivantes :

1°. Par les formules (E) et (C), on a

$$(3\alpha) = (\alpha) + \left(\tfrac{1}{3} + \alpha\right) - \left(\tfrac{1}{3} - \alpha\right) + d :$$

le second membre est connu depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{18}$, ainsi on connaîtra la fonction (x) depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{6}$.

2°. D'après les équations (C) et (D), on a

$$\left(\frac{3+\alpha}{18}\right) = \left(\frac{6-\alpha}{18}\right) + \left(\frac{6+2\alpha}{18}\right) + d :$$

le second membre est connu depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{2}$; donc on connaîtra la fonction (x) depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{7}{36}$.

3°. Mettant $\alpha - 1$ à la place de α dans l'équation précédente, on en tire

$$\left(\frac{4+2\alpha}{18}\right) = \left(\frac{2+\alpha}{18}\right) - \left(\frac{7-\alpha}{18}\right) + d :$$

le second membre de celle-ci est connu depuis $\alpha = 0$ jusqu'à

$\alpha = \frac{1}{2}$; donc on connaîtra la fonction (x) depuis $x = \frac{4}{18}$ jusqu'à $x = \frac{5}{18}$.

Par ces trois premières opérations, la fonction (x) devient connue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{7}{36}$, et depuis $x = \frac{4}{18}$ jusqu'à $x = \frac{7}{18}$. Il faut maintenant remplir la lacune que laissent ces deux espaces, depuis $x = \frac{7}{36}$ jusqu'à $x = \frac{8}{36}$, ou depuis $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{180}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \frac{4}{180}$.

4°. D'après l'équation (D), on a

$$(\tfrac{1}{5} + z) + (\tfrac{7}{10} + z) - (\tfrac{2}{5} + 2z) = d:$$

les termes $(\frac{7}{10} + z)$, $(\frac{2}{5} + 2z)$ peuvent être remplacés par leurs complémens $-(\frac{3}{10} - z)$, $-(\frac{3}{5} - 2z)$; ensuite, par l'équation (D), le terme $(\frac{3}{5} - 2z)$ peut être remplacé par $(\frac{1}{5} - 4z) - (\frac{1}{10} - 2z)$. On aura donc

$$(\tfrac{1}{5} + z) + (\tfrac{1}{5} - 4z) = (\tfrac{3}{10} - z) + (\tfrac{1}{10} - 2z) + d.$$

Dans cette équation, le second membre sera toujours connu, pourvu que z positif ou négatif ne surpasse pas $\frac{1}{20}$.

Cela posé, donnons à z toutes les valeurs depuis $z = \frac{1}{720}$ jusqu'à $z = \frac{4}{180}$; la fonction $(\frac{1}{5} - 4z)$ est connue dans cet intervalle, ainsi on connaîtra la fonction (x) représentée par $(\frac{1}{5} + z)$, depuis $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{720}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \frac{4}{180}$. Donc l'intervalle où la fonction (x) reste inconnue ne s'étend plus que depuis $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{180}$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{720}$.

Donnons maintenant à z des valeurs négatives, depuis $z = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{720}$ jusqu'à $z = -\frac{4}{720}$; la fonction $(\frac{1}{5} - 4z)$ sera connue dans cet intervalle, ainsi on connaîtra la fonction $(\frac{1}{5} + z)$ depuis $z = -\frac{1}{2880}$ jusqu'à $z = -\frac{1}{180}$; de sorte que l'intervalle où la fonction (x) reste inconnue se trouve de nouveau resserré entre $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{2880}$ et $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{720}$.

On continuera de procéder de la même manière, en attribuant à z des valeurs alternativement positives et négatives. Si l'intervalle inconnu s'étend d'abord depuis $x = \frac{1}{5} - \omega$ jusqu'à $x = \frac{1}{5} + 4\omega$, une première opération resserrera cet intervalle entre les limites $x = \frac{1}{5} - \omega$, $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\omega$; une seconde opération le resserrera encore entre les limites $x=\frac{1}{5}-\frac{1}{16}\omega$ et $x=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\omega$, et ainsi de suite. D'où l'on voit que l'intervalle inconnu finira par s'anéantir dans la limite $x=\frac{1}{5}$; et en ce point on aura, toujours d'après la même formule,

$$(\tfrac{1}{5})=\tfrac{1}{2}(\tfrac{7}{10})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10})+d.$$

5°. La valeur de la fonction (x) étant connue depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{7}{18}$; pour la trouver depuis $x=\frac{7}{18}$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$, on fera usage de la formule

$$(\tfrac{1}{2}-x)=(x)-(2x)+d.$$

(38). On voit donc qu'il est possible de déterminer la valeur de la fonction Γx, dans toute l'étendue de la première période, et de là pour toute valeur de x, pourvu qu'on connaisse cette fonction dans une partie assez petite de cette période.

La partie qu'il faut connaître est $\frac{1}{2}$, quand on ne fait usage que de l'équation (C); elle se réduit à $\frac{1}{4}$, lorsqu'on fait usage des deux équations (C) et (D), et elle se réduit de nouveau à $\frac{1}{6}$, lorsqu'on fait usage des trois équations (C), (D), (E). Elle se réduirait ultérieurement en faisant usage de l'équation (F) et des suivantes; mais la proportion de cette réduction et la distribution des parties qui conduisent à la plus grande réduction, pourraient faire l'objet d'un genre de recherches analytiques qu'il ne nous paraît pas nécessaire de continuer plus loin. Nous nous contenterons de remarquer que les fonctions Γ se rapprochent, par ces propriétés, des fonctions circulaires, logarithmiques et même elliptiques, qu'il suffit de connaître dans un intervalle aussi petit qu'on voudra, pour pouvoir les déterminer dans toute leur étendue.

§ IV.

§ IV. *Formules pour réduire au moindre nombre possible les transcendantes contenues dans la suite* $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n} \dots \Gamma\frac{n-1}{n}$, n *étant un nombre entier donné.*

(39). Si n est un nombre premier, on ne pourra faire usage que de l'équation des complémens (C), et les transcendantes dont il s'agit ne pourront être réduites à un nombre moindre que $\frac{1}{2}(n-1)$. Mais si n est un nombre composé, chaque facteur premier de n donnera lieu à l'application de celle des équations (D), (E), (F), etc., qui est relative à ce facteur, et il en résultera des réductions d'autant plus multipliées, que n aura plus de facteurs simples.

Si n est divisible par 2, on pourra appliquer l'équation (D), dans laquelle on fera successivement $x=\frac{1}{n}$, $x=\frac{2}{n}$, $x=\frac{3}{n}$, etc., jusqu'à $x=\frac{1}{4}$, ce qui donnera autant d'équations de condition entre les fonctions $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n}$, $\Gamma\frac{3}{n} \dots \Gamma\frac{n-1}{2n}$. On se borne à chercher des relations entre ces fonctions, parce que les suivantes, jusqu'à $\Gamma\frac{n-1}{n}$, se déduisent de celles-ci par l'équation (C), excepté $\Gamma\frac{1}{2}$, dont la valeur est connue.

Si n est divisible par 3, on fera l'application de l'équation (E), en donnant à x les valeurs successives $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n} \dots$ jusqu'à $\frac{1}{6}$ exclusivement, ce qui donnera de nouvelles équations de condition.

On fera un semblable usage de l'équation (E), si n est divisible par 5; de l'équation (F), si n est divisible par 7, et ainsi de suite.

On aura de cette manière toutes les équations de condition qui serviront à réduire au moindre nombre possible les transcendantes $\Gamma\frac{1}{n}$, $\Gamma\frac{2}{n} \dots \Gamma\frac{n-1}{n}$, et qui feront connaître en même temps celles de ces fonctions qui sont nécessaires pour exprimer toutes les autres.

(40). Considérons pour premier exemple le cas de $n=12$, et désignons, pour abréger, $\log\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$ par Zk; la question est de réduire au moindre nombre possible les transcendantes $Z1$, $Z2$, $Z3$, $Z4$, $Z5$; et pour cela nous aurons à faire l'application des équations (D) et (E), puisque n a pour facteurs premiers 2 et 3.

Les valeurs à substituer dans l'équation (D) se réduisent à deux seulement, $x=\frac{1}{12}$, $x=\frac{2}{12}$, parce qu'on doit supposer $x<\frac{1}{4}$; il en résulte les deux équations de condition

$$Z1+Z7-Z2=\tfrac{1}{2}l\pi+\tfrac{5}{6}l2,$$
$$Z2+Z8-Z4=\tfrac{1}{2}l\pi+\tfrac{4}{6}l2.$$

Au lieu de $Z7$ et $Z8$ il faut introduire leurs complémens $Z5$ et $Z4$, ce qui se fera par l'équation (C), qui donne, en faisant $\frac{1}{12}\pi=\omega$,

$$Z5+Z7=l\frac{\pi}{\sin 5\omega}=l\pi+2l2+l\sin\omega,$$

$$Z4+Z8=l\frac{\pi}{\sin 4\omega}=l\pi+\ l2-\tfrac{1}{2}l3.$$

Cette substitution donnera

$$Z5=Z1-Z2+\tfrac{1}{2}l\pi+\tfrac{7}{6}l2+l\sin\omega,$$
$$Z4=\tfrac{1}{2}Z2+\tfrac{1}{4}l\pi+\tfrac{1}{6}l2-\tfrac{1}{4}l3.$$

L'équation (D) ayant fourni deux équations de condition, on voit que les cinq transcendantes dont il s'agit se réduisent à trois, qui sont $Z1$, $Z2$, $Z3$; et cette solution est dans le fond la même que celle de l'art. 18, deuxième partie, où l'on n'a fait usage que des équations qui, pour les fonctions $\left(\frac{p}{q}\right)$, répondent aux deux équations (C) et (D) relatives aux fonctions Γ. Mais l'application de l'équation (E), due au facteur premier 3, fournira encore une nouvelle réduction.

Puisqu'on doit prendre $x<\frac{1}{6}$, on n'aura à substituer dans l'équation (E) que la seule valeur $x=\frac{1}{12}$, ce qui donnera l'équation de condition

$$Z1 + Z5 + Z9 - Z3 = l(2\pi) + \tfrac{1}{4} l3;$$

mais par l'équation (C) on a $Z3 + Z9 = l\frac{\pi}{\sin 3\omega} = l\pi + \frac{1}{2} l2$; donc

$$Z1 + Z5 - 2Z3 = \tfrac{1}{2} l2 + \tfrac{1}{4} l3.$$

Substituant dans celle-ci la valeur de $Z5$ exprimée par $Z1$ et $Z2$, il viendra

$$Z3 = Z1 - \tfrac{1}{2} Z2 + \tfrac{1}{4} l\pi + \tfrac{1}{3} l2 - \tfrac{1}{8} l3 + \tfrac{1}{2} l \sin\omega;$$

d'où l'on voit que les deux transcendantes $Z1$, $Z2$ suffisent pour déterminer toutes les autres : c'est le dernier terme des réductions qui peuvent avoir lieu entre les diverses transcendantes désignées par $\Gamma\frac{k}{12}$.

(41). Nous avions déjà atteint ce terme dans les formules de l'art. 19, deuxième partie; mais nous n'y étions parvenus qu'à l'aide de diverses intégrations fort compliquées, dont le résultat est contenu dans l'art. 155, première partie. En vertu de ces intégrations, on a déterminé (art. 19) le rapport des deux quantités M_1, M_3, comme il suit :

$$\frac{M_1}{M_3} = 2^{\frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \cos\omega = \frac{2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}}}{\sin\omega}.$$

Or, par la formule du n° 13, on a

$$M_1 = \left(\tfrac{1}{1}\right) = \frac{\Gamma\frac{1}{12}\Gamma\frac{1}{12}}{12\,\Gamma\frac{2}{12}},$$

$$M_3 = \left(\tfrac{3}{3}\right) = \frac{\Gamma\frac{3}{12}\Gamma\frac{3}{12}}{12\,\Gamma\frac{1}{2}};$$

donc

$$\frac{M_1}{M_3} = \left(\frac{\Gamma\frac{1}{12}}{\Gamma\frac{3}{12}}\right)^2 \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{2}{12}} = \frac{2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}}}{\sin\omega}.$$

Cette équation permet de déterminer $\Gamma\frac{3}{12}$ par le moyen des deux transcendantes $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}$, et on en tire, suivant la notation précédente,

$$Z3 = Z1 - \tfrac{1}{2}Z2 + \tfrac{1}{4}l\pi + \tfrac{1}{3}l2 - \tfrac{1}{8}l3 + \tfrac{1}{2}l\sin\omega,$$

valeur qui s'accorde entièrement avec celle qu'on a déduite de l'équation (E).

Ainsi le résultat qui avait été trouvé presque fortuitement par des intégrations très-difficiles, est donné immédiatement par l'équation (E). En général, il paraît que les seules réductions qui peuvent avoir lieu entre les fonctions Γ, sont celles que donnent les équations (C), (D), (E) et les suivantes, lorsque l'application peut en être faite, à raison des nombres premiers qui sont diviseurs de n. Ces équations ont d'ailleurs l'avantage de conduire aux réductions par la voie la plus simple et la plus courte, comme on vient d'en voir un exemple; elles paraissent donc ne rien laisser à desirer sur la théorie des fonctions Γ.

(42). Dans l'exemple dont nous venons de développer la solution, le calcul nous a conduits à prendre $Z1$ et $Z2$ pour les termes avec lesquels on devait exprimer tous les autres. Mais $Z1$ et $Z2$ étant relatifs aux fonctions $\Gamma\frac{1}{12}$, $\Gamma\frac{2}{12}$, il peut paraître plus simple de prendre pour termes de comparaison les fonctions $\Gamma\frac{1}{3}$ et $\Gamma\frac{1}{4}$. Dans cette hypothèse, il faudra exprimer $Z1$, $Z2$ et $Z5$ par le moyen de $Z3$ et $Z4$. C'est ce qu'on peut faire facilement, au moyen des formules précédentes, et voici le résultat du calcul dans lequel nous comprenons toutes les valeurs de $\log\Gamma\frac{k}{12}$, excepté $\log\Gamma\frac{1}{2}$.

$$l\Gamma\tfrac{1}{12} = l\Gamma\tfrac{1}{4} + l\Gamma\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}l2 + \tfrac{3}{8}l3 - \tfrac{1}{2}l\sin\frac{\pi}{12},$$
$$l\Gamma\tfrac{2}{12} = 2l\Gamma\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{3}l2 + \tfrac{1}{2}l3,$$
$$l\Gamma\tfrac{5}{12} = l\Gamma\tfrac{1}{4} - l\Gamma\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}l\pi + l2 - \tfrac{1}{8}l3 + \tfrac{1}{2}l\sin\frac{\pi}{12},$$
$$l\Gamma\tfrac{7}{12} = l\Gamma\tfrac{1}{3} - l\Gamma\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}l\pi + l2 + \tfrac{1}{8}l3 + \tfrac{1}{2}l\sin\frac{\pi}{12},$$
$$l\Gamma\tfrac{8}{12} = -l\Gamma\tfrac{1}{3} + l\pi + l2 - \tfrac{1}{2}l3,$$

$$l\Gamma\tfrac{9}{12} = -\,l\Gamma\tfrac{1}{4} + l\pi + \tfrac{1}{2}l2,$$
$$l\Gamma\tfrac{10}{12} = -\,2l\Gamma\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2}l\pi + \tfrac{4}{3}l2 - \tfrac{1}{2}l3,$$
$$l\Gamma\tfrac{11}{12} = -\,l\Gamma\tfrac{1}{4} - l\Gamma\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2}l\pi + \tfrac{1}{2}l2 - \tfrac{3}{8}l3 - \tfrac{1}{2}\,l\sin\tfrac{\pi}{12}.$$

(43). Dans les articles 18 et 19 de la deuxième partie, on a trouvé qu'en faisant $B = F^1(\sin 45^\circ)$ et $C = F^1(\sin 15^\circ)$, les transcendantes $\Gamma\frac{1}{3}$, $\Gamma\frac{1}{4}$ peuvent s'exprimer par les fonctions B et C, au moyen des équations

$$\Gamma^2\tfrac{1}{4} = 4B\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma^3\tfrac{1}{3} = 2^{\frac{7}{3}}3^{-\frac{1}{4}}C\pi;$$

mais par la théorie des fonctions elliptiques, on trouve les logarithmes vulgaires de B et C, comme il suit :

$$\log B = 0.26812\ 72224\ 1192,$$
$$\log C = 0.20361\ 53657\ 1262.$$

De là résultent les valeurs des transcendantes $\log\Gamma\frac{k}{12}$ et $\log\Gamma\left(1+\frac{k}{12}\right)$, comme on les voit dans le tableau suivant, qui pourra être fort utile dans diverses recherches d'analyse.

a.	$\log\Gamma a$.	$\log\Gamma(1+a)$.
$\frac{1}{12}$	1.06067 62454 1387	9.98149 49993 6625
$\frac{2}{12}$	0.74556 78577 5330	9.96741 66073 6966
$\frac{3}{12}$	0.55938 10750 4347	9.95732 10837 1551
$\frac{4}{12}$	0.42796 27493 1426	9.95084 14945 9460
$\frac{5}{12}$	0.32788 12161 8498	9.94766 99744 7338
$\frac{6}{12}$	0.24857 49363 4707	9.94754 49406 8309
$\frac{7}{12}$	0.18432 48784 0648	9.95024 16723 .7311
$\frac{8}{12}$	0.13165 64916 8402	9.95556 52326 2834
$\frac{9}{12}$	0.08828 37954 8265	9.96334 50588 7435
$\frac{10}{12}$	0.05261 20106 0482	9.97343 07645 5719
$\frac{11}{12}$	0.02347 73967 1089	9.98568 88358 2149

(44). Après avoir développé fort au long le cas de $n=12$, nous prendrons encore pour exemple quelques autres valeurs de n; mais ne voulant point entrer dans le détail des solutions effectives, nous nous contenterons d'en démontrer la possibilité, et à cet effet nous ferons usage des mêmes signes d'abréviation que dans l'art. 31.

Soit d'abord $n=24$, et soit désignée par (x) la quantité $\log\Gamma\left(\frac{x}{24}\right)$: on connaît déjà, par le cas de $n=12$, les réductions qui ont lieu entre les termes de rang pair $(2), (4), (6), (8), (10)$, puisqu'en général l'expression $(2k)$ désigne $l\Gamma\left(\frac{2k}{24}\right)$, qui est la même chose que $l\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$. Ainsi en appliquant les résultats trouvés dans le cas de $n=12$, on aura entre les cinq transcendantes dont il s'agit, ces trois équations :

$$\begin{aligned}
(6) &= (2) - \tfrac{1}{2}(4) + d, \\
(8) &= \tfrac{1}{2}(4) + d, \\
(10) &= (2) - (4) + d.
\end{aligned}$$

Pour obtenir d'autres réductions, on fera d'abord dans l'équation (D) les substitutions $x=\frac{1}{24}$, $x=\frac{3}{24}$, $x=\frac{5}{24}$, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
(1) + (13) - (2) &= d, \\
(3) + (15) - (6) &= d, \\
(5) + (17) - (10) &= d.
\end{aligned}$$

Mettant dans ces équations, au lieu des termes $(13), (15), (17)$, leurs complémens $-(11)$, $-(9)$, $-(7)$, on en tirera

$$\begin{aligned}
(11) &= (1) - (2) + d, \\
(9) &= (3) - (6) + d, \\
(7) &= (5) - (10) + d.
\end{aligned}$$

Ces équations font voir que sur les six transcendantes (1), (3), (5), (7), (9), (11), il suffit d'en connaître trois.

Mais de plus, l'équation (E) fournira de nouvelles réductions, en y substituant les valeurs $x=\frac{1}{24}$, $x=\frac{3}{24}$, toutes deux plus petites que $\frac{1}{6}$; cette substitution donne deux équations qui, au moyen des termes complémentaires, deviennent

$$(1)+(9)-(7)-(3)=d,$$
$$(3)+(11)-(5)-(9)=d.$$

Celles-ci, en vertu des relations déjà trouvées, se réduisent à une seule, qui donne

$$(5)=(1)-(2)+(6)+d.$$

Cela posé, on voit que les deux transcendantes (1) et (3) de numéro impair, et les deux (2), (4) de numéro pair, suffisent pour déterminer toutes les autres, puisqu'on a les valeurs suivantes :

$$(5)=(1)-\tfrac{1}{2}(4)+d,$$
$$(7)=(1)-(2)+\tfrac{1}{2}(4)+d,$$
$$(9)=(3)-(2)+\tfrac{1}{2}(4)+d,$$
$$(11)=(1)-(2)+d.$$

Ainsi dans le cas de $n=24$, les quatre transcendantes $\Gamma\frac{1}{24}$, $\Gamma\frac{2}{24}$, $\Gamma\frac{3}{24}$, $\Gamma\frac{4}{24}$ suffisent pour déterminer toutes celles qui sont comprises dans la même série, jusqu'à $\Gamma\frac{23}{24}$.

(45). Considérons enfin le cas de $n=60$, et proposons-nous de trouver combien il faut de termes de la suite $\Gamma\frac{1}{60}$, $\Gamma\frac{2}{60}\ldots\Gamma\frac{59}{60}$, pour déterminer tous les autres, et quels sont ces termes.

Désignant toujours $\log\Gamma\dfrac{k}{60}$ par (k), on pourra d'abord considérer les termes où k est un multiple de 5, et appliquer à ces termes les formules trouvées pour le cas de $n=12$, ce qui donnera

$$(15)=(5)-\tfrac{1}{2}(10)+d,$$
$$(20)=\tfrac{1}{2}(10)+d,$$
$$(25)=(5)-(10)+d.$$

Ainsi les deux termes (5) et (10) suffisent pour déterminer toutes les transcendantes (k) dans lesquelles k est un multiple de 5.

Si l'on considère séparément les termes où k est pair, on aura, par l'application des équations (D) et (C), les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
(28) &= (2) - (4) + d,\\
(26) &= (4) - (8) + d,\\
(24) &= (6) - (12) + d,\\
(22) &= (8) - (16) + d,\\
(18) &= (12) - (24) + d,\\
(16) &= (14) - (28) + d.
\end{aligned}$$

On trouvera ensuite, au moyen des équations (E) et (C),

$$\begin{aligned}
(2) + (22) - (18) - (6) &= d,\\
(4) + (24) - (16) - (12) &= d,\\
(6) + (26) - (14) - (18) &= d,\\
(8) + (28) - (12) - (24) &= d.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations combinées avec les six qui précèdent, offrent deux coïncidences, et ne déterminent que huit quantités, savoir :

$$\begin{aligned}
(28) &= (2) - (4) + d,\\
(26) &= (2) - (6) + d,\\
(24) &= (6) - (12) + d,\\
(22) &= 2(12) - (2) + d,\\
(18) &= 2(12) - (6) + d,\\
(16) &= (4) + (6) - 2(12) + d,\\
(14) &= (2) + (6) - 2(12) + d,\\
(8) &= (6) + (4) - (2) + d;
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que les quatre quantités (2), (4), (6), (12) suffisent pour déterminer tous les termes (k) dans lesquels k est pair et non divisible par 5.

Enfin l'application des équations (F) et (C) donne

$$\begin{aligned}
(2) + (14) + (26) - (22) - (10) - (10) &= d,\\
(4) + (16) + (28) - (20) - (8) - (20) &= d,
\end{aligned}$$

et

et ces deux-ci se réduisent à une seule, savoir,

$$(12) = (2) - \tfrac{1}{2}(10) + d;$$

d'où il suit que tous les termes (k) où k est pair, pourront s'exprimer au moyen des quantités (2), (4), (6), (10).

(46). Venons maintenant aux quantités où k est impair. On aura, par l'application des équations (D) et (C), ces six conditions :

$$\begin{aligned}
(29) &= (1) - (2) + d,\\
(27) &= (3) - (6) + d,\\
(23) &= (7) - (14) + d,\\
(21) &= (9) - (18) + d,\\
(19) &= (11) - (22) + d,\\
(17) &= (13) - (26) + d.
\end{aligned}$$

Ensuite les équations (E) et (C) en fourniront quatre, savoir :

$$\begin{aligned}
(1) + (21) - (19) - (3) &= d,\\
(3) + (23) - (17) - (9) &= d,\\
(7) + (27) - (13) - (21) &= d,\\
(9) + (29) - (11) - (27) &= d.
\end{aligned}$$

Mais ces quatre conditions se réduisent aux deux suivantes :

$$\begin{aligned}
(11) &= (1) + (9) - (2) - (3) + (6) + d,\\
(13) &= (3) + (7) - (9) + 2(2) - 2(6) - (10) + d.
\end{aligned}$$

Enfin l'équation (F) donnera deux conditions qui, en vertu des relations déjà trouvées, se réduisent à une seule, savoir,

$$(9) = (3) + (2) - (6) - \tfrac{1}{2}(10) + d.$$

De là on voit qu'avec les quatre données impaires (1), (3), (5), (7), jointes aux quatre données paires (2), (4), (6), (10), on pourra achever de déterminer toutes les transcendantes désignées par (k).

On aura en effet pour les termes impairs, ces expressions :

$$
\begin{aligned}
(9) &= (3) + (2) - (6) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(11) &= (1) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(13) &= (7) + (2) - (6) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(15) &= (5) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(17) &= (7) - \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(19) &= (1) - (2) + \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(21) &= (3) - (2) + \tfrac{1}{2}(10) + d,\\
(23) &= (7) + (2) - (6) - (10) + d,\\
(25) &= (5) - (10) + d,\\
(27) &= (3) - (6) + d,\\
(29) &= (1) - (2) + d.
\end{aligned}
$$

Quant aux termes où k est pair, nous avons donné ci-dessus leur expression, où il ne reste plus à substituer que la valeur $(12) = (2) - \frac{1}{2}(10) + d$.

(47). Remarquons que le nombre des transcendantes nécessaires pour déterminer toutes les autres, étant nommé N, on aura

$$
\begin{aligned}
&\text{pour } n = 12, \quad N = 2 = \tfrac{12}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3}\right),\\
&\text{pour } n = 24, \quad N = 4 = \tfrac{24}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3}\right),\\
&\text{pour } n = 60, \quad N = 8 = \tfrac{60}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)\left(1 - \tfrac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

Dans cette formation du nombre N, le facteur $\frac{1}{2}$ est dû à l'équation (C), le facteur $(1 - \frac{1}{2})$ à l'équation (D), le facteur $(1 - \frac{1}{3})$ à l'équation (E), et le facteur $(1 - \frac{1}{5})$ à l'équation (F).

En général, si α, β, γ, etc. sont les nombres premiers inégaux qui divisent N, on aura

$$N = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right), \text{ etc.},$$

nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à n et moindres que $\frac{1}{2}\, n$.

Cette loi a été vérifiée dans plusieurs autres exemples, et il y a lieu de croire qu'elle est vraie en général; d'où il suit qu'étant donné un nombre quelconque n, on peut trouver immédiatement combien il faut de termes de la suite $\Gamma\frac{1}{n}, \Gamma\frac{2}{n}, \Gamma\frac{3}{n} \ldots \Gamma\frac{n-1}{n}$, pour déterminer tous les autres.

Ainsi si l'on voulait construire avec le moins de données possible, une table des fonctions Γa pour toutes les valeurs de a, de millième en millième, depuis $a = 0.001$ jusqu'à $a = 1.000$, on pourrait le faire en supposant connu un nombre de termes de cette suite $= 500.\frac{1}{2}.\frac{4}{5} = 200$. Si au lieu de donner aux valeurs successives de a, le dénominateur commun 1000, on leur donnait le dénominateur 1050, qui a pour facteurs premiers 2, 3, 5, 7, le nombre des termes nécessaires serait $\frac{1050}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7} = 120$. Ainsi il ne faudrait que 120 termes pour en déterminer algébriquement 1050, et la table ne serait guère moins facile à interpoler que dans l'autre cas.

(48). On sait de cette manière combien il faut de transcendantes pour déterminer toutes les autres; mais il n'est pas aussi facile de prévoir quelles sont, pour chaque valeur de n, ces transcendantes. Dans le cas de $n = 60$, on aurait pu penser que ces quantités, dont le nombre est fixé à huit, pouvaient être les huit premiers termes de la suite $\Gamma\frac{1}{60}, \Gamma\frac{2}{60}, \Gamma\frac{3}{60}$, etc.; mais le calcul a fait voir que la fonction $\Gamma\frac{8}{60}$ doit être exclue comme étant déterminée par les précédentes, au moyen de l'équation $(8) = (6) + (4) - (2) + d$. Cette circonstance a forcé de prendre pour huitième terme la fonction $\Gamma\frac{10}{60}$. Au reste, le problème qu'on a résolu par les huit fonctions mentionnées, pourrait l'être de beaucoup d'autres manières; c'est-à-dire qu'une ou plusieurs de ces fonctions pourraient être remplacées par d'autres en nombre égal; ce qui ferait toujours huit transcendantes par lesquelles on déterminerait toutes les autres.

(49). Nous remarquerons encore que les équations que nous avons trouvées pour les cas de $n = 12$, $n = 24$, $n = 60$, et toutes celles qu'on trouverait de même pour d'autres valeurs de n, sont autant de théorèmes qui établissent des réductions plus ou moins remarquables entre les fonctions Γ.

Par exemple, l'équation $(12) = (2) - \frac{1}{2}(10) + d$, obtenue dans le cas de $n = 60$, est l'expression abrégée de ce théorème

$$\Gamma \tfrac{1}{5} = \Gamma \tfrac{1}{30} \cdot (\Gamma \tfrac{1}{6})^{-\frac{1}{2}} P,$$

P étant une fonction donnée de π et de quantités algébriques. Il est même facile de voir, *a priori*, de quelle manière π doit entrer dans cette fonction.

En effet, si dans les équations (C), (D), (E), etc., on fait $\Gamma x = \pi^{1-x} \Phi(x)$, Φ étant une nouvelle fonction, on trouvera que π disparaît entièrement de ces équations, de sorte que la quantité $\pi^{x-1} \Gamma x$ devra être indépendante de π dans tous les résultats qu'on tirera de ces équations.

Dans l'exemple précédent on a $\frac{4}{5} - \frac{29}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$; donc

$$\Gamma \tfrac{1}{5} = \Gamma \tfrac{1}{30} (\Gamma \tfrac{1}{6})^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} Q,$$

Q étant une fonction purement algébrique qui ne doit plus contenir π. Pour trouver cette fonction algébrique, il faudrait développer tout au long les équations qui ont conduit à l'expression abrégée $(12) = (2) - \frac{1}{2}(10) + d$, comme nous l'avons fait dans le cas de $n = 12$.

§ V. *Propriétés générales des coefficiens différentiels de la fonction log* Γx.

(50). D'après le théorème de l'art. 37, deuxième partie, si l'on fait

$$\int x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} = V, \quad \int \frac{x^{p-1} dx (1 - x^q)}{1 - x} = T,$$

on aura

$$\frac{dV}{dp} = -VT, \quad \text{ou} \quad \frac{d \log V}{dp} = -T.$$

Mais par l'équation (3) on a $V = \frac{\Gamma p \, \Gamma q}{\Gamma(p+q)}$, ou $\log V = l\Gamma p + l\Gamma q - l\,\Gamma(p+q)$; donc

$$\frac{d\,l\,\Gamma(p+q)}{d(p+q)} - \frac{d\,l\,\Gamma p}{dp} = T = \int \frac{x^{p-1}dx\,(1-x^q)}{1-x}.$$

Mettant r au lieu de $p+q$, on aura l'équation

$$\frac{d\log\Gamma r}{dr} - \frac{d\log\Gamma p}{dp} = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^p - x^r}{1-x}, \tag{16}$$

à laquelle on peut donner aussi la forme

$$\frac{d\log\Gamma(1+r)}{dr} - \frac{d\log\Gamma(1+p)}{dp} = \int \frac{(x^p - x^r)\,dx}{1-x}:$$

l'intégrale du second membre est prise à l'ordinaire entre les limites $x = 0$, $x = 1$.

(51). Soit $p = 0$ et $r = a$, le coefficient différentiel $\frac{d\,l\,\Gamma(1+p)}{dp}$ se réduira à $-C$ d'après la formule (ω) du n° 77, deuxième partie; ainsi on aura

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+a)}{da} = -C + \int \frac{(1-x^a)\,dx}{1-x}: \tag{17}$$

c'est l'expression du premier coefficient différentiel de la fonction $\log\Gamma(1+a)$. Ce coefficient pourra se déterminer exactement lorsque a sera un nombre rationnel, puisque sa valeur est composée de la constante connue $-C$ et d'une intégrale définie qui ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes.

Soit alors $a = \frac{m}{n}$, et soit $x = y^n$, on aura

$$\int \frac{(1-x^a)dx}{1-x} = \int \frac{ny^{n-1}dy\,(1-y^m)}{1-y^n} = \frac{n}{m}y^m - n\int \frac{dy}{y} \cdot \frac{y^m - y^n}{1-y^n}.$$

Cette dernière intégrale est la même qui a été désignée par B_m dans l'art. 35, deuxième partie; ainsi on aura

$$\int \frac{(1-x^a)\,dx}{1-x} = \frac{n}{m} - nB_m;$$

par conséquent pour toute valeur rationnelle $a = \frac{m}{n}$, le coefficient différentiel $\frac{d\,l\,\Gamma(1+a)}{da}$ aura pour expression

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+a)}{da} = -C + \frac{1}{a} - n\mathrm{B}_m,$$

ce qui donne aussi

$$\frac{d\,l\,\Gamma a}{da} = -C - n\mathrm{B}_m.$$

On pourra substituer dans ces expressions la valeur de B_m donnée dans l'article cité; mais il faut observer que cette valeur suppose $m < n$. Dans le cas contraire, il faudrait séparer de la différentielle $\frac{dy}{y} \cdot \frac{y^m - y^n}{1 - y^n}$, la partie entière qu'elle contient, et l'intégrer dans les limites $y = 0$, $y = 1$. Le reste de cette différentielle représenté par $\frac{dy}{y} \cdot \frac{y^\mu - y^n}{1 - y^n}$, aurait pour intégrale la quantité B_μ.

La même opération peut être faite d'une autre manière, en diminuant successivement la valeur de a jusqu'à ce qu'elle devienne plus petite que l'unité. On a pour cet effet les formules $\Gamma(1+a) = a\Gamma a$, $\Gamma(2+a) = (1+a)\,a\Gamma a$, etc.; d'où l'on tire

$$\frac{d\,l\,\Gamma(1+a)}{da} = \frac{1}{a} + \frac{d\,l\,\Gamma a}{da},$$

$$\frac{d\,l\,\Gamma(2+a)}{da} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{a} + \frac{d\,l\,\Gamma a}{da},$$

etc.

(52). On a déjà remarqué (art. 20) qu'en désignant par $\varphi(a)$ la somme de la suite harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{a}$, on a

$$\varphi(a) = C + \frac{d \log \Gamma(1+a)}{da}.$$

La fonction $\varphi(a)$ sera donc aussi exprimée par l'intégrale définie

$$\varphi(a) = \int \frac{(1-x^a)\,dx}{1-x}. \qquad (18)$$

Cette expression se vérifie immédiatement lorsque a est un nombre entier. En effet, dans ce cas on aura

$$\frac{1 - x^a}{1 - x}\, dx = (1 + x + x^2 \ldots + x^{a-1})\, dx,$$

et l'intégrale de ce polynome, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, donne la suite $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{a}$ désignée par $\varphi(a)$.

Ce résultat étendu à toutes les valeurs de a, en vertu de la continuité de la fonction $\varphi(a)$, aurait suffi pour donner l'expression de $\varphi(a)$ en intégrale définie, et de là celle du coefficient différentiel $\frac{d\, l\Gamma(1 + a)}{da}$, qu'on aurait trouvé ainsi sans le secours du théorème de l'article 37.

(53). Il résulte de la formule précédente que, toutes les fois que le nombre a sera rationnel, la somme $\varphi(a)$ de la série harmonique pourra être exprimée par le moyen des arcs de cercle et des logarithmes, ce qui est un théorème assez remarquable.

Pour avoir la valeur effective de $\varphi(a)$ dans le cas dont il s'agit, on observera d'abord que par la nature de cette fonction, on a

$$\varphi(a) = \frac{1}{a} + \varphi(a - 1);$$

d'où il suit que la détermination de la fonction $\varphi(a)$ se réduira toujours à celle d'une pareille fonction dans laquelle a sera plus petit que l'unité.

Soit alors $a = \frac{m}{n}$, m étant $< n$, et on aura, comme ci-dessus,

$$\varphi(a) = \frac{1}{a} - nB_m.$$

Les cas les plus simples peuvent être calculés directement par le moyen de l'intégrale définie. Ainsi on trouve

$$\varphi(\tfrac{1}{2}) = 2 - 2\int \frac{dy}{1 + y} = 2 - 2\, l2,$$

$$\varphi(\tfrac{1}{3}) = 3 - 3\int \frac{(1 - y^2)\, dy}{1 - y^3} = 3 - \tfrac{3}{2}\, l3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\varphi(\tfrac{1}{4}) = 4 - 4\int \frac{(1 - y^3)\, dy}{1 - y^4} = 4 - 3\, l2 - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Lorsque α est infiniment petit, on aura

$$\varphi(\alpha) = \int \frac{(1-x^\alpha)\,dx}{1-x} = \alpha \int \frac{dx\, l\frac{1}{x}}{1-x} = \alpha\,\frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur se déduirait aussi de la formule

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{dd \log \Gamma(1+a)}{da^2},$$

dont le second membre se réduit à S_2 ou $\frac{\pi^2}{6}$ lorsque $a=0$.

La fonction $\varphi(a)$ décroît donc continuellement depuis $a=1$ jusqu'à $a=0$; elle est égale à 1 dans la première limite, et à zéro dans la seconde.

Nous remarquerons qu'Euler a donné la valeur de $\varphi(\frac{1}{2})$ dans son Calcul différentiel, pag. 814, mais d'après une suite infinie qu'il ne somme que dans ce cas particulier.

(54). Si l'on différentie logarithmiquement les équations (C), (D), (E), etc., on aura diverses relations entre les coefficiens différentiels de même ordre de la fonction $\Gamma(x)$. Et d'abord l'équation (C) donne

$$\frac{d\,l\,\Gamma a}{da} - \frac{d\,l\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)} = -\pi \cot a\pi. \tag{19}$$

Ainsi le coefficient différentiel $\frac{d\,l\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)}$ peut se déduire du coefficient différentiel $\frac{d\,l\,\Gamma a}{da}$, que nous regardons comme son complément.

Cette équation fait connaître la différence de deux coefficiens qui sont complémens l'un de l'autre, et elle a l'avantage de donner cette différence pour toute valeur de a rationnelle ou irrationnelle.

L'équation (16) donnerait pour la même différence, cette valeur

$$\frac{d\,l\,\Gamma a}{da} - \frac{d\,l\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)} = \int \frac{dx}{x}\cdot\frac{x^{1-a}-x^a}{1-x};$$

donc

donc on a

$$\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^a - x^{1-a}}{1-x} = \pi \cot a\pi, \qquad (20)$$

formule qui a lieu pour toute valeur de a, et qu'il est aisé de vérifier lorsque a est rationnel. Cette formule s'accorde entièrement avec celle du n° 44, deuxième partie.

(55). Différenciant de même l'équation (D), et changeant x en a, on aura

$$\frac{d\,l\,\Gamma a}{da} + \frac{d\,l\,\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{d(\frac{1}{2}+a)} - \frac{2d\,l\,\Gamma(2a)}{d(2a)} = -2l2.$$

Le premier membre se compose de deux différences qui se déterminent par l'équation (16), et dont les valeurs sont

$$\frac{d\,l\,\Gamma a}{da} - \frac{d\,l\,\Gamma(2a)}{d(2a)} = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^{2a} - x^a}{1-x},$$

$$\frac{d\,l\,\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{d(\frac{1}{2}+a)} - \frac{d\,l\,\Gamma(2a)}{d(2a)} = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^{2a} - x^{\frac{1}{2}+a}}{1-x}.$$

Donc en faisant les substitutions, on aura la formule

$$\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^a + x^{\frac{1}{2}+a} - 2x^{2a}}{1-x} = 2\,l\,2.$$

De l'équation (E) on déduirait semblablement la formule

$$\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^a + x^{\frac{1}{3}+a} + x^{\frac{2}{3}+a} - 3x^{3a}}{1-x} = 3\,l\,3,$$

et ainsi des autres.

Ces formules peuvent aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\int x^{a-1}dx \cdot \frac{1 + x - 2x^a}{1-x^2} = l\,2,$$

$$\int x^{a-1}dx \cdot \frac{1 + x + x^2 - 3x^{3a}}{1-x^3} = l\,3,$$

$$\int x^{a-1}dx \cdot \frac{1 + x + x^2 + x^3 - 4x^{3a}}{1-x^4} = l\,4,$$

et l'on peut remarquer qu'elles sont toutes contenues dans la formule générale

$$\int\left(\frac{x^{a-1}dx}{1-x}-\frac{nx^{na-1}dx}{1-x^n}\right)=l\,n. \tag{21}$$

(56). Ce résultat est facile à vérifier lorsque a est un nombre entier. En effet, appelons $f(a)$ le premier membre de l'équation précédente ; si à la place de a on met $a+1$, on aura

$$f(a+1)=\int\left(\frac{x^a dx}{1-x}-\frac{nx^{na+n-1}dx}{1-x^n}\right).$$

Mais on a $\int\frac{x^a dx}{1-x}=-\frac{x^a}{a}+\int\frac{x^{a-1}dx}{1-x}$ et $\int\frac{nx^{na+n-1}dx}{1-x^n}=-\frac{x^{na}}{a}+\int\frac{nx^{na-1}dx}{1-x^n}$. Faisant $x=1$ dans les parties hors du signe, et retranchant une intégrale de l'autre, on aura $\mathrm{F}(a+1)=\mathrm{F}(a)$, et par conséquent $\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(1)$. Mais lorsque $a=1$, on a

$$\mathrm{F}(1)=\int\left(\frac{dx}{1-x}-\frac{nx^{n-1}dx}{1-x^n}\right)=l\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

faisant ensuite $x=1$, on aura $\mathrm{F}(1)=l\,n$; donc $\mathrm{F}(a)=l\,n$. La formule générale est donc démontrée lorsque a est un nombre entier.

(57). Supposons maintenant $a=\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers, si l'on fait $x=y^q$, on aura

$$\mathrm{F}(a)=\int\left(\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}-\frac{nqy^{np-1}dy}{1-y^{nq}}\right),$$

intégrale qui devra toujours être prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$.

Si l'on faisait $y^n=z$, la valeur de $\mathrm{F}(a)$ pourrait se mettre sous la forme

$$\mathrm{F}(a)=\int\left(\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}-\frac{qz^{p-1}dz}{1-z^q}\right),$$

c'est-à-dire que F serait la différence de deux intégrales de même forme et prises entre les mêmes limites; d'où il semble qu'on devrait conclure que F est nulle. Mais il faut observer que les intégrales dont il s'agit sont toutes deux infinies, et que leur différence, qui peut être finie, dépend de la relation qui existe entre z et y, et ne peut être trouvée que lorsqu'on aura écarté les infinis de part et d'autre.

Pour cela, je remarque que p et q étant toujours supposés des nombres entiers, on a, par les règles de la décomposition des fractions rationnelles,

$$\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}=\frac{dy}{1-y}+\frac{\mathrm{M}dy}{\mathrm{N}},$$

N étant un dénominateur qui ne s'évanouit pas lorsque $y=1$. On aura donc l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{qy^{p-1}dy}{1-y^q}=-l(1-y)+f(y),$$

$f(y)$ étant une fonction de y exprimée en arcs de cercle et logarithmes, laquelle est nulle lorsque $y=0$, et ne devient pas infinie lorsque $y=1$. On aura semblablement

$$\int\frac{qz^{p-1}dz}{1-z^q}=-l(1-z)+f(z),$$

$f(z)$ étant la même fonction de z que $f(y)$ est de y. De là résulte l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{F}=l\left(\frac{1-z}{1-y}\right)+f(y)-f(z);$$

ou, en mettant y^n à la place de z,

$$\mathrm{F}=l\left(\frac{1-y^n}{1-y}\right)+f(y)-f(y^n).$$

Maintenant si l'on fait $y=1$, comme on peut préalablement mettre $\frac{1-y^n}{1-y}$ sous la forme $1+y+y^2\ldots+y^{n-1}$, on aura la valeur cherchée

$$\mathrm{F}(a)=ln,$$

de sorte que la formule générale est démontrée *a priori* pour toute valeur rationnelle de a.

(58). Pour revenir à la fonction $\frac{d\,l\,\Gamma a}{da}$, que nous pouvons représenter par $Z'(a)$, on voit que les équations (C), (D), (E), etc., ne font connaître aucune propriété particulière de cette fonction, et qu'elles conduisent seulement à des formules relatives aux intégrales définies. Il ne reste par conséquent à considérer d'autre propriété de cette fonction, que celle qui est contenue dans l'équation (16), et qui consiste en ce que, toutes les fois que a sera rationnel, la fonction $Z'(a)$ pourra toujours s'exprimer par la constante $-C$ jointe à une quantité qu'on peut toujours évaluer par arcs de cercle et par logarithmes.

Nous avons traité fort au long des réductions qui peuvent avoir lieu entre les fonctions $\log \Gamma a$ ou $Z(a)$, lorsqu'on donne à la racine a les valeurs successives $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$. Un semblable problème n'a point lieu relativement aux fonctions $Z'(a)$, puisqu'elles sont toutes déterminables, ainsi qu'on vient de le dire. Passons donc aux coefficiens différentiels du second ordre $\frac{dd\,l\,\Gamma a}{da^2}$, que nous désignerons semblablement par $Z''(a)$.

(59). L'équation (16) étant différenciée par rapport à p, donne, en mettant a au lieu de p,

$$\frac{dd\,l\,\Gamma a}{da^2} = \int \frac{x^{a-1}dx\, l\frac{1}{x}}{1-x}.$$

Développant la différentielle du second membre en série, et intégrant les différens termes d'après la formule de l'art. 40, deuxième partie, on aura

$$\frac{dd\,l\,\Gamma a}{da^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \text{etc.}$$

Cette formule et celles qu'on pourrait en déduire par la différentiation, sont les mêmes qui ont été données dans l'art. 22; et comme on ne connaît aucun autre moyen d'obtenir l'intégrale $\int \frac{x^{a-1}dx\, l\frac{1}{x}}{1-x}$, il ne résultera de l'équation (16) aucune propriété des fonctions $Z''(a)$.

(60). L'équation (19) étant différenciée, donne

$$Z''(a) + Z''(1-a) = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}, \tag{22}$$

d'où l'on voit que la fonction $Z''(1-a)$ se détermine par la fonction $Z''(a)$, qui en est le complément.

Lorsque $a=\frac{1}{2}$, la formule précédente donne $Z''(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\pi^2$. Lorsque $a=1$, on a $Z''(1)=\frac{1}{6}\pi^2$; en effet, la valeur générale de $Z''(a)$ étant

$$Z''(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(2+a)^2} + \text{etc.},$$

cette quantité, dans le cas dont il s'agit, se réduit à S_2 ou $\frac{\pi^2}{6}$. C'est aussi ce qu'on déduirait des formules

$$\begin{aligned} Z'(1+a) &= -C + S_2 a - S_3 a^2 + S_4 a^3 - \text{etc.}, \\ Z''(1+a) &= \quad S_2 - 2S_3 a + 3S_4 a^2 - \text{etc.}, \end{aligned}$$

en faisant $a=0$.

Pour avoir d'autres propriétés de la fonction $Z''(a)$, on prendra la différentielle seconde logarithmique de l'équation (D), ce qui donnera

$$Z''(a) + Z''(\tfrac{1}{2}+a) - 4Z''(2a) = 0; \tag{23}$$

de même la différentielle seconde des équations (E) et (F) donnerait

$$\left.\begin{aligned} &Z''(a)+Z''(\tfrac{1}{3}+a)+Z''(\tfrac{2}{3}+a)-9Z''(3a)=0, \\ &Z''(a)+Z''(\tfrac{1}{5}+a)+Z''(\tfrac{2}{5}+a)+Z''(\tfrac{3}{5}+a)+Z''(\tfrac{4}{5}+a)-25Z''(5a)=0: \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ce sont les mêmes équations qui ont servi à démontrer les équations (D), (E), (F), etc.

Il résulte de ces équations, qu'on peut faire sur les fonctions Z'' les mêmes réductions qui ont lieu pour les fonctions Γ, c'est-à-dire que si l'on considère les fonctions successives $Z''\left(\frac{1}{n}\right)$, $Z''\left(\frac{2}{n}\right) \ldots Z''\left(\frac{n-1}{n}\right)$, ces fonctions se détermineront par le moyen d'un certain nombre d'entr'elles, et ce nombre sera en général le même que celui des nombres premiers à n et plus petits que $\frac{1}{2}n$. Ainsi dans le cas de $n=12$, deux des transcendantes $Z''(\frac{1}{12})$, $Z''(\frac{2}{12}) \ldots Z''(\frac{1}{12})$, suffiront pour déterminer toutes les autres : ces deux transcendantes se trouveront d'ailleurs par la même méthode qui a été employée à l'égard des fonctions Γ.

(61). En effet, si l'on désigne, pour abréger, la fonction $Z''\left(\frac{k}{12}\right)$ par (k), l'équation (22) donnera, en faisant $\frac{\pi}{12}=\omega$,

$$\begin{aligned}
(1)+(11) &= \frac{\pi^2}{\sin^2\omega} = 4\pi^2(2+\sqrt{3}),\\
(2)+(10) &= 4\pi^2,\\
(3)+(9) &= 2\pi^2,\\
(4)+(8) &= \tfrac{4}{3}\pi^2,\\
(5)+(7) &= \frac{\pi^2}{\sin^2 5\omega} = 4\pi^2(2-\sqrt{3}),\\
(6) &= \tfrac{1}{2}\pi^2;
\end{aligned}$$

on aura ensuite, par l'équation (23), les deux conditions

$$\begin{aligned}
(1)+(7)-4(2) &= 0,\\
(2)+(8)-4(4) &= 0,
\end{aligned}$$

et par l'équation (24), cette autre condition,

$$(1)+(5)+(9)-9(3)=0.$$

Ces neuf équations permettront de déterminer toutes les transcendantes dont il s'agit, par le moyen de deux d'entr'elles. Par exemple, si l'on prend pour données $Z''(\frac{1}{12})$ et $Z''(\frac{2}{12})$, que nous désignons par (1) et (2), les autres transcendantes se détermineront ainsi :

$$\begin{aligned}
(3) &= \tfrac{1}{5}(1) - \tfrac{2}{5}(2) + \pi^2(1 - \tfrac{2}{5}\sqrt{3}),\\
(4) &= \tfrac{1}{5}(2) + \tfrac{4}{15}\pi^2,\\
(5) &= (1) - 4(2) + 4\pi^2(2 - \sqrt{3}),\\
(6) &= \tfrac{1}{2}\pi^2,\\
(7) &= 4(2) - (1),\\
(8) &= -\tfrac{1}{5}(2) + \tfrac{16}{5}\pi^2,\\
(9) &= \tfrac{2}{5}(2) - \tfrac{1}{5}(1) + \pi^2(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{3}),\\
(10) &= -(2) + 4\pi^2,\\
(11) &= -(1) + 4\pi^2(2 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Il ne reste, pour la détermination absolue de ces quantités, qu'à connaître $Z''(\frac{1}{12})$ et $Z''(\frac{2}{12})$. Pour cela, il faudrait pouvoir sommer les suites que ces quantités représentent, savoir :

$$Z''(\tfrac{1}{12}) = 144\left(1 + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{37^2} + \text{etc.}\right),$$

$$Z''(\tfrac{2}{12}) = 36\left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.}\right).$$

On pourrait aussi déterminer ces quantités par les intégrales définies

$$Z''(\tfrac{1}{12}) = 144\int \frac{dx\, l\frac{1}{x}}{1-x^{12}},$$

$$Z''(\tfrac{2}{12}) = 36\int \frac{dx\, l\frac{1}{x}}{1-x^{6}}.$$

Mais la difficulté d'exprimer ces intégrales autrement que par les séries précédentes, rend ces expressions peu utiles.

Lorsqu'on voudra obtenir ces valeurs par approximation, on y parviendra aisément par la formule de l'art. 46, deuxième partie.

(62). Considérons maintenant le troisième coefficient.....

$Z'''(a) = \frac{d^3 l\Gamma a}{da^3}$; on aura d'abord, par l'équation (C);

$$Z'''(a) - Z'''(1-a) = -\frac{2\pi^3 \cos a\pi}{\sin^3 a\pi}, \tag{25}$$

ce qui détermine la fonction $Z'''(1-a)$ par son complément $Z'''(a)$.

On a ensuite, par les équations (D), (E), etc.,

$$Z'''(a) + Z'''(\tfrac{1}{2}+a) - 8Z'''(2a) = 0,$$
$$Z'''(a) + Z'''(\tfrac{1}{3}+a) + Z'''(\tfrac{2}{3}+a) - 27Z'''(3a) = 0,$$

et ainsi de suite; ce qui établit les mêmes réductions entre les fonctions $Z'''(a)$ qu'on a obtenues entre les fonctions $Z''(a)$.

Le cas de $a=1$ donne, par les formules de l'article 60, $Z'''(1) = -2S_3$; si dans la première des deux équations précédentes on fait $a=\frac{1}{2}$, on aura $Z'''(\frac{1}{2}) = 7Z'''(1) = -14S_3$; enfin dans le cas de $a=\frac{1}{3}$, on aura les deux équations

$$Z'''(\tfrac{1}{3}) - Z'''(\tfrac{2}{3}) = -\frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}},$$
$$Z'''(\tfrac{1}{3}) + Z'''(\tfrac{2}{3}) - 26Z'''(1) = 0,$$

ce qui détermine les deux transcendantes $Z'''(\frac{1}{3})$ et $Z'''(\frac{2}{3})$, par le moyen de $Z'''(1)$ ou de S_3.

Toutes ces solutions reviennent à celles que nous avons déjà données ou indiquées dans les art. 45 à 49 de la deuxième partie; mais on voit plus clairement dans cette nouvelle méthode la série des opérations, et on connaît le nombre de transcendantes nécessaires à chaque solution, nombre qui a été fixé par la règle de l'art. 47.

§ VI. *Divers exemples d'interpolation.*

(63). Euler, dans le chapitre XVII de son Calcul différentiel, a résolu divers problèmes d'interpolation par des suites infinies dont il ne donne la somme que pour le cas de $n=\frac{1}{2}$. Nous allons faire voir que ces interpolations peuvent être effectuées d'une manière plus simple et plus générale au moyen des fonctions Γ.

Exemple

Exemple I. Supposons qu'il s'agisse d'interpoler la suite dont le n^{ieme} terme est $N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}$; la question est de savoir ce que deviendra N lorsqu'on donnera à n une valeur fractionnaire quelconque.

Nous avons désigné (art. 52) ce terme général par $\varphi(n)$, et nous avons fait voir que $\varphi(n)$ est donné par la formule

$$\varphi(n) = \int \frac{(1 - x^n)\,dx}{1 - x},$$

cette intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. On pourra donc déterminer $\varphi(n)$ par les arcs de cercle et les logarithmes, toutes les fois que n sera un nombre rationnel. Dans les autres cas, on déterminera $\varphi(n)$ par la suite

$$\varphi(n) = C + ln + \frac{1}{2n} - \frac{A'}{2n^2} + \frac{B'}{4n^4} - \frac{C'}{6n^6} + \text{etc.},$$

où A', B', C', etc. désignent les nombres Bernoulliens. On pourra toujours faire ensorte que cette suite converge rapidement dans les premiers termes; car on a $\varphi(n) = \varphi(n+1) - \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\varphi(n)$ peut être déterminé par $\varphi(n+k)$, k étant un entier qui pourra être pris assez grand pour que la série qui détermine $\varphi(n+k)$, ait les conditions requises.

(64). *Exemple II.* Soit proposé d'interpoler la suite dont le terme général ou le n^{ieme} terme est

$$N = \frac{\alpha + \beta}{a + b} + \frac{\alpha + 2\beta}{a + 2b} + \frac{\alpha + 3\beta}{a + 3b} \ldots + \frac{\alpha + n\beta}{a + nb}.$$

Puisqu'on a $\frac{\alpha + n\beta}{a + nb} = \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{bb\left(\frac{a}{b} + n\right)}$, on voit que ce cas se ramène au précédent, et que l'expression de N pour toute valeur de n, sera

$$N = \frac{\beta}{b}\,n + \frac{\alpha b - \beta a}{bb}\,\varphi\left(\frac{a}{b} + n\right).$$

Ainsi on pourra déterminer N par les arcs de cercle et les logarithmes, toutes les fois que $\frac{a}{b} + n$ aura une valeur rationnelle.

(65). *Exemple III.* Pour interpoler la suite dont le terme général $N = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} \ldots + \frac{1}{n^r}$, on pourra se servir de la formule

$$N = S_r + \frac{(-1)^{r-1}}{1.2.3\ldots.r-1} \cdot \frac{d^r l \Gamma(1+x)}{dx^r},$$

et appliquer les réductions propres à la fonction $\frac{d^r l \Gamma(1+x)}{dx^r}$, dans laquelle on fera $x = n$.

Dans les cas où cette fonction ne pourrait s'exprimer exactement en vertu de ces propriétés, il faudra, pour trouver la valeur de N, avoir recours à la série qui vient des différentiations répétées de la formule

$$\frac{d l \Gamma(1+x)}{dx} = -C + S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - \text{etc.}$$

Mais comme cette formule suppose $x < 1$, il faudra préalablement ramener le cas proposé à celui où n est < 1; ce qui n'a aucune difficulté, puisque N étant une fonction de n qu'on peut désigner par $f(n)$, on aura

$$f(n) = f(n-1) + \frac{1}{n^r}.$$

(66). *Exemple IV.* Soit proposé d'interpoler la suite dont le terme général $N = \frac{\alpha + \beta}{a + b} \cdot \frac{\alpha + 2\beta}{a + 2b} \cdot \frac{\alpha + 3\beta}{a + 3b} \cdots\cdots \frac{\alpha + n\beta}{a + nb}$.

Lorsque n est un nombre entier, on a

$$(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+n) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)}.$$

Donc le terme général N a pour expression

$$N = \left(\frac{\beta}{b}\right)^n \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + n + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b} + n + 1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{b} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right)},$$

valeur qui pourra être employée quel que soit n.

Si l'on propose, par exemple, la suite $\frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.4}, \frac{1.3.5}{2.4.6}$, etc., son terme général sera

$$N = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma(n+1)}.$$

Ainsi pour l'indice $n=\frac{1}{2}$, on aura $N=\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{3}{2}}=\frac{2}{\pi}$; pour l'indice $n=\frac{1}{3}$, on aura $N=\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{4}{3}}=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}}$, valeur qui pourra se réduire ultérieurement par la relation connue entre $\Gamma\frac{1}{3}$ et $\Gamma\frac{5}{6}$.

Soit encore la suite $\frac{1}{3}, \frac{1.4}{3.6}, \frac{1.4.7}{3.6.9}$, etc., l'expression de son terme général sera

$$N = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{3})}{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma(n+1)}.$$

Ainsi pour l'indice $n=\frac{1}{2}$, on aura $N=\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{3}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}}$, pour l'indice $n=\frac{2}{3}$, on aura $N=\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{5}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}\Gamma\frac{1}{3}\,\Gamma\frac{2}{3}}=\frac{3\sin\frac{1}{3}\pi}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

(67). Il est bon d'observer que la question d'interpoler une suite donnée, est susceptible d'une infinité de solutions, quand on l'envisage analytiquement et sans application à un objet déterminé. En effet, soit N le terme général de la suite donnée, terme dont la valeur est connue lorsque n est un entier, et soit $\Phi(n)$ la fonction continue égale à N, dans laquelle on peut mettre pour n un nombre quelconque entier ou fractionnaire; si au lieu de N on prend $\frac{N\sin(2n\pi+\alpha)}{\sin\alpha}$, α étant un angle quelconque, pourvu qu'il ne soit pas zéro, il est visible que la suite résultant de ce terme général, ne différera pas de la suite donnée. On pourrait donc, au lieu de $\Phi(n)$, prendre $\Phi(n).\frac{\sin(2n\pi+\alpha)}{\sin\alpha}$, valeur qui différerait de $\Phi(n)$ lorsque n n'est pas entier. On pourrait même prendre plus généralement, au lieu de $\Phi(n)$, l'expression

$$\Phi(n).\frac{A+B\sin(2n\pi+\alpha)+C\sin(2n\pi+\beta)+\text{etc.}}{A+B\sin\alpha+C\sin\beta+\text{etc.}},$$

et une infinité d'autres qui se reduisent à $\Phi(n)$ lorsque n est entier; ce qui donnerait une infinité de solutions différentes de celle qui est donnée par la fonction continue $\Phi(n)$.

On pourrait appeler *fonctions ondulées*, les fonctions ainsi affectées d'un facteur qui se réduit à l'unité pour toute valeur entière de n. Ces fonctions serviraient à expliquer quelques paradoxes qui peuvent se rencontrer dans les applications de l'analyse.

§ VII. *Des valeurs que prend la fonction* Γa, *lorsque la racine* a *est négative.*

(68). Tant que a est positif, on peut regarder la fonction Γa comme représentant l'aire, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, de la courbe dont l'ordonnée $y = \left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}$. Mais cette construction, en quelque sorte géométrique, ne peut donner aucune idée de ce que devient la fonction Γa, lorsqu'on suppose a négatif. Il faut suppléer à cette construction par les formules mêmes qui contiennent les propriétés générales de la fonction Γ, et auxquelles on donnera l'extension nécessaire. On liera ainsi, suivant une même loi, les fonctions $\Gamma(x)$, considérées comme les ordonnées d'une même courbe qui répondent à des abscisses quelconques x positives ou négatives.

Si l'on prend d'abord l'équation (B) et qu'on y change le signe de x, on aura

$$\Gamma(-x) = -\frac{1}{x}\Gamma(1-x). \tag{26}$$

Pour voir plus clairement l'usage de cette équation, nous distinguerons différentes périodes dans le sens négatif, comme nous les avons distinguées dans le sens positif. La première sera comprise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -1$, la seconde depuis $x = -1$ jusqu'à $x = -2$, ainsi de suite.

D'après l'équation précédente, l'on voit que la fonction $\Gamma(-x)$

est négative dans toute l'étendue de la première période, et qu'elle est infinie aux extrémités de cette période.

Si dans la même équation l'on met $1+x$ à la place de x, on aura

$$\Gamma(-1-x)=-\frac{1}{1+x}\Gamma(-x)=\frac{1}{x(1+x)}\Gamma(1-x);$$

d'où il suit que la fonction $\Gamma(-a)$ est positive dans la seconde période, depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$, et que dans ces deux limites, elle est infinie.

Mettant dans cette dernière équation $1+x$ au lieu de x, on aura encore

$$\Gamma(-2-x)=\frac{1}{(1+x)(2+x)}\Gamma(-x)=-\frac{\Gamma(1-x)}{x(1+x)(2+x)};$$

d'où il suit que la fonction $\Gamma(-a)$ est négative dans la troisième période, depuis $a=2$ jusqu'à $a=3$, et qu'elle est infinie dans ces deux limites.

En continuant ainsi, on voit que la fonction $\Gamma(-a)$ sera infinie pour toutes les valeurs entières de a, et qu'elle sera alternativement positive et négative dans les périodes successives.

(69). La courbe dont les ordonnées représentent $\Gamma(x)$, est donc composée, dans le sens négatif, d'une infinité de branches séparées par des asymptotes perpendiculaires à l'axe des x, et menées successivement aux distances $x=0, -1, -2, -3$, etc. Ces branches qui touchent chacune des asymptotes, sont situées alternativement d'un côté et de l'autre de l'axe; de sorte qu'il y a dans chacune un point où la fonction Γ est un *minimum*.

La fonction Γa étant supposée connue pour toute valeur positive de a, on en déduit aisément par les formules précédentes, l'expression de toute fonction de cette sorte où a est négatif; car on a en général, k étant un entier quelconque, et x un nombre moindre que l'unité,

$$\Gamma(-k-x)=\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(1-x)}{x(1+x)(2+x)\ldots\ldots(k+x)}, \qquad (27)$$

ou encore

$$\Gamma(-k-x)=\frac{(-1)^{k+1}\Gamma x\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(k+1+x)}.$$

Cette dernière formule se déduirait directement de l'équation (C),

$$\Gamma x\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

dans laquelle mettant $k+1+x$ au lieu de x, on trouve

$$\Gamma(k+1+x)\,\Gamma(-k-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x\cos(k+1)\pi}=(-1)^{k+1}\Gamma x\,\Gamma(1-x).$$

Ces formules s'accordent parfaitement avec les résultats que donneraient les autres équations (D), (E), (F), etc., en y changeant le signe de x. Elles offrent conséquemment la théorie complète des fonctions Γa pour toute valeur négative de a.

(70). Pour confirmer cette théorie, nous allons démontrer, d'après la valeur générale du coefficient $\frac{d\log\Gamma x}{dx}$, que la fonction Γ n'est susceptible que d'un *minimum* dans le sens positif, mais qu'elle en admet une infinité dans le sens négatif.

En effet, si l'on fait $\log\Gamma x = Z$, on aura (art. 21)

$$\frac{dZ}{dx}=-C+\frac{x-1}{x}+\frac{x-1}{2(1+x)}+\frac{x-1}{3(2+x)}+\frac{x-1}{4(3+x)}+\text{etc.}$$

Lorsqu'on fait $x=1$ ou $x<1$, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ est négative; lorsqu'on fait $x=2$, on a

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\text{etc.}-C=1-C,$$

valeur positive. Donc entre $x=1$ et $x=2$, il y a une valeur de x qui rend nulle $\frac{dZ}{dx}$, et alors Z est un *minimum*.

Si l'on fait $x>2$, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ sera positive et augmentera jusqu'à l'infini. Ainsi il n'y a aucun autre *minimum* dans le sens positif.

Dans le sens négatif, au contraire, il y a un *minimum* dans chaque période, ou en général entre $x = -k$ et $x = -k - 1$, k étant un entier quelconque. Prouvons, par exemple, qu'il existe un *minimum* entre $x = -2$ et $x = -3$. Lorsqu'on fait $x = -2 - \omega$, ω étant infiniment petit, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ contient différens termes dont la somme est finie, et un terme $\frac{1}{\omega}$ qui est un infini positif. Lorsqu'ensuite l'on fait $x = -3 + \omega$, la valeur de $\frac{dZ}{dx}$ contiendra de même des termes dont la somme est finie, et un terme $-\frac{1}{\omega}$ qui est un infini négatif. Donc entre ces deux extrêmes, il y a une valeur de $\frac{dZ}{dx}$ nulle; donc il y a un *minimum* entre $x = -2$ et $x = -3$, conformément à la théorie précédente.

§ VIII. *Formules pour calculer par approximation les fonctions* Γ.

(71). Nous avons pour cet objet deux formules générales qui ont été présentées dans les articles 73 et 77 de la deuxième partie. La première est

$$\log \Gamma x = \tfrac{1}{2} l 2\pi + (x - \tfrac{1}{2})\, lx - x + \frac{A'}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B'}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{C'}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \text{etc.}$$

Elle donne pour $l\Gamma x$ une valeur d'autant plus approchée que x est plus grand, et nous avons fait voir dans les articles 70 et 71, quels sont les moyens d'obtenir par cette formule, tel degré d'approximation qu'on pourra desirer. Il faut qu'on ait $x > 5$ pour que cette formule donne $l\Gamma x$ avec douze décimales exactes, et alors on devra calculer les sept ou huit premiers termes de la suite $\frac{A}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B'}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \text{etc.}$

Si x n'est pas > 5; par exemple, si x est compris entre 1 et 2; on augmentera x de quatre unités, on calculera $\log \Gamma(4+x)$ par la formule précédente, et on en déduira

$$\log \Gamma x = \log \Gamma(4+x) - \log[x(1+x)(2+x)(3+x)].$$

(72). Quant aux coefficiens différentiels successifs de la fonction $Z = \log \Gamma x$, leurs valeurs déduites de la formule précédente, sont

$$\frac{dZ}{dx} = lx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{A'}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{B'}{4}\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{C'}{6}\cdot\frac{1}{x^6} + \text{etc.},$$
$$\frac{ddZ}{dx^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + A'\cdot\frac{1}{x^3} - B'\cdot\frac{1}{x^5} + C'\cdot\frac{1}{x^7} - \text{etc.},$$
$$\frac{d^3Z}{dx^3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - 3A'\cdot\frac{1}{x^4} + 5B'\cdot\frac{1}{x^6} - 7C'\cdot\frac{1}{x^8} + \text{etc.},$$
etc.

Ces suites sont de moins en moins convergentes, à mesure que les différences deviennent plus élevées; et la convergence qui a lieu dans les premiers termes, se change bientôt en divergence. Mais leur usage n'en est pas moins utile, en suivant les règles que nous avons posées dans les articles 70 et 71.

Les logarithmes donnés par ces formules, sont des logarithmes hyperboliques; pour les convertir en logarithmes vulgaires, il faudra multiplier tous les termes des séries par le module $m = 0.43429$ etc., excepté les termes exprimés en logarithmes, dans lesquels on substituera directement les valeurs données par les tables.

(73). L'autre formule pour calculer $\log \Gamma(1+x)$, a été donnée dans les articles 77 et 78 de la deuxième partie. Mais pour en faire usage, il faut connaître les valeurs fort approchées des transcendantes S2, S3, S4, etc. qui représentent les sommes des puissances réciproques, de même degré, des nombres naturels. Ces valeurs sont données jusqu'à la 16ème puissance et avec seize décimales, dans le Calcul différentiel d'Euler, page 456. Mais l'examen que nous avons fait de cette table, nous y a fait apercevoir quelques erreurs assez graves, et nous avons été obligés de la calculer de nouveau;

veau ; nous avons cru devoir en même temps la prolonger jusqu'à la 35ième puissance, terme passé lequel chaque fraction qui suit l'unité devient la moitié de la précédente. Voici cette nouvelle table corrigée.

n	S_n	n	S_n
2	1.64493 40668 482264	19	1.00000 19082 127166
3	1.20205 69031 595943	20	1.00000 09539 620339
4	1.08232 32337 111382	21	1.00000 04769 329868
5	1.03692 77551 433700	22	1.00000 02384 505027
6	1.01734 30619 844491	23	1.00000 01192 199260
7	1.00834 92773 819227	24	1.00000 00596 081891
8	1.00407 73561 979443	25	1.00000 00298 035035
9	1.00200 83928 260822	26	1.00000 00149 015548
10	1.00099 45751 278180	27	1.00000 00074 507118
11	1.00049 41886 041194	28	1.00000 00037 253340
12	1.00024 60865 533080	29	1.00000 00018 626597
13	1.00012 27133 475785	30	1.00000 00009 313274
14	1.00006 12481 350587	31	1.00000 00004 656629
15	1.00003 05882 363070	32	1.00000 00002 328312
16	1.00001 52822 594086	33	1.00000 00001 164155
17	1.00000 76371 976379	34	1.00000 00000 582077
18	1.00000 38172 932650	35	1.00000 00000 291038

(74). Au moyen de cette table on aura, pour calculer $\log \Gamma(1+x)$, l'une ou l'autre des formules :

$$\left.\begin{aligned} l\,\Gamma(1+x) &= -Cx + \tfrac{1}{2}S_2x^2 - \tfrac{1}{3}S_3x^3 + \tfrac{1}{4}S_4x^4 - \text{etc.} \\ l\,\Gamma(1+x) &= \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\pi x}{\sin \pi x}\right) - Cx - \tfrac{1}{3}S_3x^3 - \tfrac{1}{5}S_5x^5 - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Lorsqu'il s'agit de calculer $\log \Gamma a$ pour une valeur donnée de a, on peut toujours réduire la question au cas où l'on a $a = 1 + x$, x étant $< \frac{1}{2}$, ou même $< \frac{1}{4}$. Les suites précédentes seront donc convergentes et auront l'avantage de l'être dans toute leur étendue, de sorte que le degré d'approximation auquel on peut parvenir par ces suites, n'est limité que par celui qui a lieu dans les valeurs des transcendantes S_2, S_3, S_4, etc.

La seconde formule est préférable à la première, comme contenant une suite plus convergente. Cependant lorsque x sera très-petit, il vaudra mieux faire usage de la première, parce que la valeur de $\log \sin \pi x$, donnée par les tables, pourrait n'être pas suffisamment exacte. Or le moyen de suppléer aux tables serait de calculer $\log \sin \pi x$ par la formule

$$l \sin \pi x = l(\pi x) - S_2 x^2 - \tfrac{1}{2} S_4 x^4 - \tfrac{1}{3} S_6 x^6 - \text{etc.},$$

ce qui revient à faire usage de la première des formules ci-dessus; mais lorsque x est assez grand pour que les tables donnent sans difficulté la valeur de $\log \sin \pi x$, il y aura un avantage marqué à se servir de la seconde formule.

(75). On pourra simplifier encore assez notablement cette formule, en lui donnant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \log \Gamma(1+x) = {} & \tfrac{1}{2} \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \\ & + (1-C)x - (S_3 - 1)\frac{x^3}{3} - (S_5 - 1)\frac{x^5}{5} - \text{etc.} \end{aligned} \tag{29}$$

Enfin pour convertir ces logarithmes en logarithmes vulgaires, il faudra multiplier les termes algébriques par le module m; soit donc

$$m(1 - C) = B, \quad \frac{m}{3}(S_3 - 1) = B_3, \quad \frac{m}{5}(S_5 - 1) = B_5, \text{ etc.},$$

et la formule adaptée aux logarithmes vulgaires deviendra

$$\begin{aligned} l\Gamma(1+x) = {} & \tfrac{1}{2} l \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \tfrac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} \\ & + Bx - B_3 x^3 - B_5 x^5 - B_7 x^7 - \text{etc.} \end{aligned} \tag{30}$$

Cette formule pourra servir à calculer $\log \Gamma a$ jusqu'à 14 décimales, si l'on a des tables telles que la *Trigonometria Britannica*, qui donnent ce nombre de décimales pour $l \sin \pi x$; quant aux logarithmes de x et de $\frac{1+x}{1-x}$, il sera toujours facile de les avoir avec ce degré d'exactitude, ou un plus grand encore, par la table connue qui donne les logarithmes des 11 ou 1200 premiers nombres avec 20 décimales.

Pour obtenir le nombre de décimales dont il s'agit, il sera bon de calculer le terme Bx par la simple multiplication, afin d'éviter l'emploi des logarithmes à 14 décimales, pour lesquels on n'a point de tables complètes, ou auxquelles on ne supplée que par des calculs plus longs que la multiplication. D'ailleurs si l'on applique la formule à la construction d'une table, la multiplication dont il s'agit peut être entièrement évitée, puisque chaque produit $B(x+\omega)$ se forme du produit précédent Bx, auquel on ajoute la constante $B\omega$.

Quant aux autres termes B_3x^3, B_5x^5, etc., ils se calculeront par les tables ordinaires à 10 décimales, au moyen des logarithmes des coefficiens qu'on trouvera ci-après, art. 79.

Il ne faut pas perdre de vue qu'on peut toujours supposer $x < \frac{1}{2}$ ou même $x < \frac{1}{4}$. Dans le cas de $x = \frac{1}{2}$, le terme $B_{15}x^{15}$ ne vaut pas trois unités décimales du onzième ordre; dans le cas de $x = \frac{1}{4}$, il n'en vaut pas une du quinzième. Au surplus, quand on est parvenu aux derniers termes de la formule, ces termes forment avec les suivans une progression à très-peu près géométrique, de sorte qu'il est facile de tenir compte des termes qui restent à calculer.

(76). La valeur de la constante C a été calculée par Euler (Calcul différentiel, page 144), au moyen de la suite harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{x}$, dont la somme $\varphi(x)$ est donnée par la formule

$$\varphi(x) = C + lx + \frac{1}{2x} - \frac{A'}{2x^2} + \frac{B'}{4x^4} - \frac{C'}{6x^6} + \text{etc.},$$

A′, B′, C′, etc. étant la suite des nombres Bernoulliens. Appliquant cette formule au cas de $x=10$, on a, par la sommation effective,

$$\varphi = 2.92896\ 82539\ 68253\ 96825, \text{ etc.},$$

et par la sommation approchée,

$$\varphi = C + 2.35175\ 25890\ 66721\ 1076;$$

de là on tire

$$C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 8606,$$

valeur qui s'accorde, dans les 15 premières décimales, avec le résultat donné par Euler.

La valeur de C peut se calculer aussi par l'équation (29), en faisant soit $x=1$, soit $x=\frac{1}{2}$; il en résulte ces deux expressions:

$$1 - C = \tfrac{1}{2}\, l\, 2 + \tfrac{1}{3}(S_3 - 1) + \tfrac{1}{5}(S_5 - 1) + \tfrac{1}{7}(S_7 - 1) + \text{etc.},$$
$$1 - C = l\, \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3}(S_3 - 1)\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}(S_5 - 1)\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{7}(S_7 - 1)\tfrac{1}{64} + \text{etc.};$$

substituant les valeurs des quantités S_3, S_5, S_7, etc., données dans l'article 73, on trouve

par la première expression $C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 85$,
et par la deuxième $C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 861$,

ce qui s'accorde aussi bien qu'il est possible avec la valeur déjà trouvée, et on voit que celle-ci est exacte jusque dans la dix-huitième décimale. Il suit de là que les valeurs des transcendantes S_3, S_5, S_7, etc., contenues dans la table citée, sont exactes, et qu'on peut les employer avec confiance dans le calcul des quantités Γ.

(77). Pour faire voir, par un exemple, l'usage de la formule (30), proposons-nous de déterminer le *minimum* de la fonction Γa. Nous savons que ce *minimum* a lieu à peu près lorsque $a=1.4616$; nous allons donc chercher la valeur de $\log \Gamma(1+x)$, en faisant $x=0.4616$. Ce cas est l'un des moins favorables pour la convergence des suites, mais il pourra servir de type pour les calculs semblables où l'approximation s'obtiendra avec plus de facilité.

π...	0.49714 98726 9413
x...	9.66426 58001 4768
πx...	0.16141 56728 4181
$\sin \pi x$...	9.99683 20907 2586
Diff....	0.16458 35821 1595
a...	0.43372 34831 2856
Diff....	9.73086 00989 8739
$\frac{1}{2}$...	9.86543 00494 9369
Bx...	0.08475 57163 7949
A...	9.95018 57658 7318
(1)...	0.00287 69621 5818
(2).........	6 72196 4509
(3)...........	23131 0721
(4).............	922 1098
(5)..............	39 5556
(6)...............	1 7709
(7)...................	815
Pour les termes suivans	39
Somme...	0.00294 65912 6265
A...	9.95018 57658 7318
$l\,\Gamma(1+x) =$	9.94723 91746 1053

$1+x$...	0.16482 85343 4448
$1-x$...	9.73110 50512 1592
Diff....	0.43372 34831 2856 a
B_3...	8.46613 67490 38
x^3...	8.99279 74004 43
(1)...	7.45893 41494 81
B_5...	7.50616 72144
x^5...	8.32132 90007
(2)...	5.82749 62151
B_7...	6.71433 5161
x^7...	7.64986 0601
(3)...	4.36419 5762
B_9...	5.98639 046
x^9...	6.97839 220
(4)...	2.96478 266
B_{11}...	5.29028 44
x^{11}...	6.30692 38
(5)...	1.59720 82
B_{13}...	4.61273 3
x^{13}...	5.63545 5
(6)...	0.24818 8
B_{15}...	3.94724
x^{15}...	4.96399
(7)...	8.91123

(78). Pour avoir le point précis du *minimum* il faut, pour la valeur donnée $x = 0.4616$, calculer les coefficiens différentiels $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{ddZ}{dx^2}$, $\frac{ddZ}{dx^3}$, Z étant mis pour $l\Gamma(1+x)$.

Il conviendra, pour cet objet, de revenir à la première des équations (28). Cette équation légérement modifiée et adaptée aux logarithmes vulgaires, donnera, en faisant toujours $B_n = \frac{m}{n}(S_n - 1)$, les formules suivantes :

$$Z = -l(1+x) + Bx + B_2x^2 - B_3x^3 + B_4x^4 - B_5x^5 + \text{etc.},$$
$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{m}{1+x} + B + 2B_2x - 3B_3x^2 + 4B_4x^3 - 5B_5x^4 + \text{etc.},$$
$$\frac{ddZ}{dx^2} = \frac{m}{(1+x)^2} + 2B_2 - 6B_3x + 12B_4x^2 - 20B_5x^3 + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^3Z}{dx^3} = -\frac{m}{(1+x)^3} - 3B_3 + 12B_4x - 30B_5x^2 + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{2.3}\cdot\frac{dZ}{dx^4} = \frac{m}{(1+x)^4} + 4B_4 - 20B_5x + \text{etc.},$$
etc.

Au moyen de ces formules on trouve, pour le cas dont il s'agit,

$$\frac{dZ}{dx} = -0.00001\ 35093\ 33,$$
$$\frac{ddZ}{dx^2} = 0.42026\ 7079,$$
$$\frac{d^3Z}{dx^3} = -0.38460\ 1.$$

Désignant ces trois coefficiens différentiels par $-f$, g, $-h$, respectivement, on aura

$$l\Gamma(1+x+\omega) = Z - f\omega + \frac{1}{2}g\omega^2 - \frac{1}{2.3}h\omega^3.$$

Au point du *minimum*, la différentielle de cette quantité prise par rapport à ω doit être nulle, ce qui donne pour déterminer ω l'équation $f - g\omega + \frac{1}{2}h\omega^2 = 0$. Et comme f est très-petit par rapport à g et h, on en tire $\omega = \frac{f}{g}\left(1 + \frac{fh}{2g^2}\right)$, et le *minimum* cherché $= Z - \frac{1}{2} g\omega^2 + \frac{1}{3} h\omega^3$.

Substituant les valeurs trouvées de f, g, h, on aura...... $\omega = 0.00003\ 21451\ 105$, et la correction qu'il faut appliquer à Z, $= - 0.00000\ 00002\ 1713$. On peut donc fixer comme il suit le *minimum* de la fonction Γa,

$$a = 1.46163\ 21451\ 105$$
$$\log \Gamma a = 9.94723\ 91743\ 9340.$$

(79). Pour faciliter l'usage des formules précédentes, on joint ici une table des valeurs des coefficiens B_n et de leurs logarithmes, calculés jusqu'au quinzième terme, ce qui est plus que suffisant pour les applications où l'on n'a pas besoin de plus de 12 décimales exactes dans la valeur de $\log \Gamma(1+x)$.

n	B_n	$\log B_n$
1	0.18361 29037 6840	9.26390 31988 6135
2	0.14004 56532 118	9.14626 96335 7783
3	0.02925 07326 917	8.46613 67490 379
4	0.00893 81315 34	7.95124 67415
5	0.00320 75040 58	7.50616 72144
6	0.00125 53326 86	7.09875 88372
7	0.00051 80064 42	6.71433 51608
8	0.00022 13466 62	6.34507 29774
9	0.00009 69148 80	5.98639 04633
10	0.00004 31938 49	5.63542 19056
11	0.00001 95112 17	5.29028 43534
12	0.00000 89061 69	4.94969 09488
13	0.00000 40995 17	4.61273 27627
14	0.00000 18999 80	4.27874 91451
15	0.00000 08856 20	3.94724 74888

§ IX. *Construction et usage de la table des logarithmes des fonctions* Γ.

(80). La table que nous avons donnée à la fin de la seconde partie, n'ayant été calculée que jusqu'à sept décimales, nous avons pensé qu'à raison des applications multipliées que peut avoir la fonction Γ dans diverses recherches d'analyse, il serait utile de calculer de nouveau cette table en poussant l'approximation jusqu'à douze décimales. C'est ce que nous avons exécuté de la manière suivante.

Comme les séries qui servent à calculer les différences successives de la fonction $\log \Gamma a$, sont moins simples et moins convergentes que celle qui donne immédiatement la valeur de cette fonction, nous n'avons point fait usage des différences, et nous avons calculé directement chaque terme par la formule (30), et pour les cas où x est très-petit, par la formule

$$\log \Gamma(1+x) = -l(1+x) + Bx + B_2x^2 - B_3x^3 + B_4x^4 - \text{etc.}$$

On a calculé ainsi les valeurs de $\log \Gamma(1+x)$, depuis $x = 0.001$ jusqu'à $x = 0.250$; ces valeurs ont servi dans chaque cas à déterminer leurs complémens au moyen de la formule

$$\Gamma(2-x) = \frac{x(1-x)}{\Gamma(1+x)} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{31}$$

On a donc obtenu à la fois les valeurs de $\log \Gamma a$, depuis $a = 1.000$ jusqu'à $a = 1.250$, et depuis $a = 1.750$ jusqu'à $a = 2.000$.

Au moyen de ces valeurs qui composent déjà la moitié de la période, on a trouvé les valeurs de $\log \Gamma a$ depuis $a = 1.375$ jusqu'à $a = 1.625$, ce qui forme un troisième quart de la période, par les formules

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\left(\tfrac{3}{2}-x\right) &= \frac{4^x\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+2x)} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\cos \pi x}, \\ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}+x\right) &= \frac{\Gamma(1+2x)}{4^x\Gamma(1+x)} \cdot \pi\ \left(\tfrac{1}{2}+x\right), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

dans

dans lesquelles on a donné à x les valeurs successives depuis $x = 0.001$ jusqu'à $x = 0.125$.

La seconde des équations (32) jointe à l'équation (31), donne les formules

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(1+x) &= \frac{\Gamma(1+2x)}{\Gamma(\frac{3}{2}+x)} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}+x)}{4^x},\\ \Gamma(2-x) &= \frac{x(1-x)}{\Gamma(1+x)} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi x},\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

au moyen desquelles on a déterminé $\log \Gamma a$ depuis $a = 1.250$ jusqu'à $a = 1.312$, et depuis $a = 1.688$ jusqu'à $a = 1.750$.

Pour achever de calculer le reste de la période, on a passé des formules (33) aux formules (32), et ainsi alternativement, jusqu'à ce qu'on eût les valeurs de $\log \Gamma a$, qui s'approchent le plus des limites des deux suites qui sont $1\frac{1}{3}$ d'un côté, et $1\frac{2}{3}$ de l'autre.

(81). A chaque logarithme de la table, on a joint ses différences première, seconde et troisième. Ces différences marchent avec la régularité nécessaire pour garantir l'exactitude des calculs ; elles serviront à faire reconnaître et à corriger les fautes, s'il s'en était glissé dans l'impression ; de sorte qu'avec tous ces secours, on peut regarder les transcendantes Γ comme étant connues avec un degré de précision plus que suffisant pour toutes les applications qu'elles peuvent recevoir. Il faut maintenant entrer dans quelques détails sur les interpolations auxquelles donnera lieu l'usage de cette table.

Soit pour abréger, $A = \log \Gamma a$, et soient δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$ les différences successives de A, telles que la table les donne, en supposant que les valeurs de a croissent continuellement d'une quantité $\omega = 0.001$. Pour avoir le terme X qui représente $\log \Gamma(a + \omega x)$, on aura la formule

$$X = A + x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{x-2}{3}\left(\delta^3 A,\right.\right.\right. \tag{34}$$

dont le calcul se fera de la manière suivante.

Étant donnée la valeur de x qui sera toujours plus petite que l'unité, on calculera le terme $\frac{2-x}{3}\,\delta^3 A$ jusqu'à la douzième décimale seulement, et on formera, en observant les signes, la quantité $\delta^2 A - \left(\frac{2-x}{3}\right)\delta^3 A$, qu'on pourra appeler *la différence seconde corrigée*, et qu'on désignera par $\delta^2 Ax$. On calculera de même jusqu'à la douzième décimale seulement, le terme $\frac{1-x}{2}\,\delta^2 Ax$, et on formera la quantité $\delta A - \left(\frac{1-x}{2}\right)\delta^2 Ax$, qu'on appellera *la différence première corrigée*, et qu'on désignera par δAx. Cela posé, il ne restera plus qu'à former la quantité $A + x\delta Ax$ qui sera le logarithme cherché X.

(82). Soit proposé, par exemple, de trouver la valeur de $\log \Gamma\left(1\frac{1}{12}\right)$; on fera $a = 1.083$, $x = \frac{1}{3}$, et on prendra dans la table, les nombres qui répondent à la racine 1.083. Ces nombres sont, en donnant aux différences les signes convenables,

A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
9.981 559 875 655	— 194 416 822	635 664	— 838.

On tire de là successivement,

$$\begin{aligned}
\delta^2 Ax &= \delta^2 A - \tfrac{5}{9}\,\delta^3 A = 636\ 130,\\
\delta Ax &= \delta A - \tfrac{1}{3}\,\delta^2 Ax = -\ 194\ 628\ 865,\\
X &= A + \tfrac{1}{3}\,\delta Ax = 9.981\ 494\ 999\ 367,
\end{aligned}$$

valeur qui s'accorde avec celle que l'on trouve dans le tableau de l'article 43.

(83). Réciproquement, s'il s'agit de trouver la racine qui répond à un logarithme donné X, on prendra dans la table le logarithme prochainement moindre A, et la racine correspondante étant a, la différence $0.001 = \omega$, on supposera que $a + \omega x$ est la racine qui répond au logarithme donné $X = A + y$; et pour déterminer x, il faudra résoudre l'équation

$$y = x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{x-2}{3}\left(\delta^3 A,\right.\right.\right.$$

ce que l'on fera aisément par les deux opérations suivantes.

1°. On négligera dans y, δA, $\delta^2 A$, les quatre derniers chiffres, comme si la table n'était calculée qu'à huit décimales, l'équation à résoudre deviendra $y = x\left(\delta A + \frac{x-1}{2}\delta^2 A\right)$, et on en tire

$$x = \frac{y}{\delta A + \frac{x-1}{2}\delta^2 A}.$$

On pourra négliger d'abord le terme $\frac{x-1}{2}\delta^2 A$, ce qui donnera une première valeur approchée de x; tenant compte ensuite de ce terme, on aura une seconde valeur de x, calculée jusqu'à la septième décimale.

2°. Soit x' cette valeur, et α la correction qu'il faut lui appliquer, ensorte qu'on ait $x = x' + \alpha$, on calculera y' par la valeur

$$y' = x'\left(\delta A + \frac{x'-1}{2}\left(\delta^2 A + \frac{x'-2}{3}\delta^3 A,\right.\right.$$

et il restera à déterminer α d'après l'équation

$$\alpha = \frac{y - y'}{\delta A + (x' - \frac{1}{2})\delta^2 A},$$

valeur dans laquelle on devra ne pas conserver plus de chiffres significatifs qu'il n'y en a au numérateur.

Connaissant α, on aura la racine cherchée $= a + \omega\,(x' + \alpha)$.

(84). Soit, par exemple, le logarithme proposé.............. $X = 9.950\,241\,672\,373$; le logarithme prochainement moindre, pris dans la table, a pour racine $a = 1.583$, et les nombres correspondans sont

A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
9.950 225 531 586	48 548 340	377 764	— 315;

de là on tire $y = X - A = 16\ 140\ 787$; et la première valeur de x, désignée par x', sera donnée par l'équation

$$x' = \frac{1614}{4855 - \left(\frac{1 - x'}{2}\right) 38};$$

d'où l'on tire $x' = 0.333$. Au moyen de cette valeur, on aura successivement

$$\begin{aligned} y' &= 16\ 124\ 625, \\ y - y' &= 16\ 162, \\ \delta A + (x' - \tfrac{1}{2})\,\delta^2 A &= 48\ 485\ 264, \\ a &= \frac{16\ 162}{48\ 485\ 264} = 0.000\ 333\ 34. \end{aligned}$$

La racine cherchée est donc $1.583\ 333\ 333\ 34$, ce qui s'accorde avec la valeur de $\log \Gamma\,(1\,\frac{7}{12})$ portée dans le tableau de l'article 43.

(85). Puisque la fonction Γa augmente à l'infini de part et d'autre du point où elle est un *minimum*, il s'ensuit que pour toute valeur donnée de Γa, plus grande que le *minimum*, il y aura toujours deux valeurs réelles de la racine a. Dans l'exemple précédent, on voit par la table que la seconde valeur est comprise entre 1.344 et 1.345. Les nombres qui correspondent à la racine $a = 1.344$, sont

A	δA	$\delta^2 A$	$\delta^3 A$
9.950 256 821 818	— 52 058 495	470 189	— 475.

D'après ces données, on aura $y = X - A = -15\ 149\ 445$,

$$x' = \frac{1515}{5206 + \left(\frac{1 - x'}{2}\right).47} = 0.290.$$

Au moyen de cette valeur de x', le calcul s'achève ainsi :

$$y' = -\ 15\,145\,397,$$
$$y - y' = -\ 4048,$$
$$\delta A + (x' - \tfrac{1}{2})\,\delta^2 A = -\ 52\,157\,235,$$
$$\alpha = \frac{4048}{52\,157\,235} = 0.000\,077\,61 :$$

donc la racine cherchée $a + \omega(x' + \alpha) = 1.344\,290\,077\,61$.

(86). Étant donnée une valeur de a non comprise entre 1 et 2, il n'y a aucune difficulté à trouver $\log \Gamma a$; il faut pour cela réduire la valeur donnée à celles qui sont comprises dans la table, ce qui se fera au moyen de l'équation $\Gamma(1 + x) = x\,\Gamma x$. Ainsi si l'on demande la valeur de $\log \Gamma(3.318)$, on la déterminera par l'équation $\log \Gamma(3.3148) = \log(2.3148) + l\,\Gamma(2.3148) = l(2.3148) + l(1.3148) + l\,\Gamma(1.3148)$. De même on aurait $l\,\Gamma(0.3148) = l\,\Gamma(1.3148) - l(0.3148)$; ainsi tout se réduit à trouver $l\,\Gamma(1.3148)$; ce qui se fera aisément par la formule de l'art. 81.

(87). Mais s'il s'agit de trouver la racine a qui correspond à une valeur de $\log \Gamma a$ non comprise dans les limites de la table, voici la méthode qu'il faudra suivre.

Soit proposé, par exemple, de trouver la valeur de c qui donne $\Gamma c = \pi$, ou $\log \Gamma c = 0.497\,149\,872\,694$. Il y a deux de ces valeurs, l'une qui est comprise dans la première période, l'autre qui appartient à la troisième. Bornons-nous à déterminer cette dernière.

On trouve d'abord, par quelques essais, que la valeur cherchée est comprise entre 3.448 et 3.449. Pour trouver la valeur exacte, il est nécessaire d'avoir les valeurs de $\log \Gamma$ qui répondent aux racines successives 3.448, 3.449, 3.450, 3.451. Voici le calcul de ces valeurs :

2.448	0.388 811 413 473 52	2.449	0.388 988 785 124 71
1.448	0.160 768 561 861 13	1.449	0.161 068 385 471 17
$\Gamma(1.448)$	9.947 278 386 843	$\Gamma(1.449)$	9.947 272 834 564
$\Gamma(3.448)$	0.496 858 362 178	$\Gamma(3.449)$	0.497 330 005 160

2.450	0.389 166 084 364 53	2.451	0.389 343 311 252 08
1.450	0.161 368 002 234 97	1.451	0.161 667 412 437 74
$\Gamma(1.450)$	9.947 267 707 452	$\Gamma(1.451)$	9.947 263 005 114
$\Gamma(3.450)$	0.497 801 794 051	$\Gamma(3.451)$	0.498 273 728 804.

Désignant comme ci-dessus 3.448 par a, et log Γa par A, on aura la valeur de A et de ses différences successives comme il suit :

A	δA	δ^2A	δ^3A
0.496 858 362 178	471 642 982	145 909	— 47.

Soit encore $c = a + \omega x$, $\log \Gamma c = X$, $y = X - A$, on aura $y = 291\ 510\ 516$, et la première valeur approchée de x sera donnée par l'équation

$$x' = \frac{291\ 51}{47164 - \left(\frac{1 - x'}{2}\right).15} = 0.6181.$$

Soit enfin $x = x' + \alpha$, on aura

$$y' = 291\ 505\ 306,$$
$$y - y' = 5210,$$
$$\delta A + (x' - \tfrac{1}{2})\,\delta^2 A = 471\ 625\ 750,$$
$$\alpha = \frac{5210}{471\ 625\ 750} = 0.000\ 011\ 047.$$

Donc la racine cherchée $c = a + \omega(x' + \alpha) = 3.448\ 618\ 111\ 047$.

La seconde racine de l'équation $\Gamma c = \pi$ serait $c = 0.286\ 3641$, et il serait facile de la trouver avec un plus grand nombre de décimales.

(88). On peut encore, par notre table, trouver les valeurs approchées des coefficiens différentiels $\frac{d \log \Gamma a}{da}$, $\frac{dd \log \Gamma a}{da^2}$, $\frac{d^3 \log \Gamma a}{da^3}$, qui sont des transcendantes particulières dont nous avons fait voir différens usages. Ces coefficiens se calculeront par les formules suivantes, où l'on a fait $\log \Gamma a = A$.

$$\omega \frac{dA}{da} = \delta A - \tfrac{1}{2}\delta^2 A + \tfrac{1}{3}\delta^3 A - \tfrac{1}{4}\delta^4 A + \tfrac{1}{5}\delta^5 A - \text{etc.},$$

$$\omega^2 \frac{ddA}{da^2} = \delta^2 A - \delta^3 A + \tfrac{11}{12}\delta^4 A - \tfrac{5}{6}\delta^5 A + \text{etc.},$$

$$\omega^3 \frac{d^3 A}{da^3} = \delta^3 A - \tfrac{3}{2}\delta^4 A + \tfrac{7}{4}\delta^5 A - \text{etc.},$$

$$\omega^4 \frac{d^4 A}{da^4} = \delta^4 A - 2\delta^5 A + \text{etc.};$$

ω est la différence par laquelle on fait croître la racine a pour former les différences successives δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, etc. On a $\omega = 0.001$ quand on prend dans la table les termes qui se suivent immédiatement; mais on pourrait également faire $\omega = 0.002$, 0.003, ou plus, afin de rendre sensible la différence quatrième $\delta^4 A$ qui est presque toujours au-dessous d'une unité décimale du douzième ordre, lorsqu'on prend $\omega = 0.001$.

En se bornant à l'hypothèse $\omega = 0.001$ qui est la plus simple, puisque la table donne, sur une même ligne, les nombres A, δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, on voit que la valeur qui en résultera pour le coefficient $\frac{dA}{da}$, ne sera approchée que jusqu'à la neuvième décimale à peu près; celle de $\frac{d^2 A}{da^2}$ ne le sera que jusqu'à la sixième, et celle de $\frac{d^3 A}{da^3}$ jusqu'à la troisième. Mais c'est déjà un grand avantage d'avoir les deux premières transcendantes d'une manière si facile et avec un pareil degré d'approximation.

(89). Soit, par exemple, $a = 1.500$; les différences données immédiatement dans la table pour cette valeur de a, sont

$$\delta A = 16\,050\,324, \quad \delta^2 A = 405\,620, \quad \delta^3 A = -359;$$

on en tire les coefficiens différentiels

$$\frac{dA}{da}=0.015\,847\,394,\quad \frac{ddA}{da^2}=0.405\,979,\quad \frac{d^3A}{da^3}=-0.359.$$

Si au lieu de faire $\omega=0.001$, on fait $\omega=0.002$; c'est-à-dire, si on prend dans la table les fonctions A qui répondent aux racines successives 1.500, 1.502, 1.504, 1.506, 1.508, on aura les valeurs de δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$, $\delta^4 A$, comme il suit,

$$\delta A=32\,506\,268,\quad \delta^2 A=1\,621\,044,\quad \delta^3 A=-2865,\quad \delta^4 A=10.$$

De là résultent les coefficiens différentiels,

$$\frac{dA}{da}=0.015\,847\,394\,250,\quad \frac{ddA}{da^2}=0.405\,9795,\quad \frac{d^3A}{da^3}=-0.3600.$$

Ces valeurs diffèrent très-peu de celles qu'on a obtenues immédiatement par les différences des termes consécutifs.

Soit encore $\omega=0.005$; on aura à considérer les différences successives des termes de la table qui répondent aux racines 1.500, 1.505, 1.510, 1.515, 1.520; ces différences sont

$$\delta A=84\,304\,232,\quad \delta^2 A=10\,104\,715,\quad \delta^3 A=-44\,425,\quad \delta^4 A=374,$$

et on en déduit les coefficiens différentiels

$$\frac{dA}{da}=0.015\,847\,394\,53,\quad \frac{ddA}{da^2}=0.405\,979\,32,\quad \frac{d^3A}{da^3}=-0.359\,89.$$

Ces valeurs diffèrent peu des précédentes et semblent devoir être plus approchées de la vérité, parce qu'on a tenu compte des différences quatrièmes devenues sensibles par une plus grande valeur de ω; cependant la valeur de ω ne doit pas passer une certaine limite, et cette limite qu'il serait difficile de déterminer avec précision, dépend de la loi que suivent les différences successives de la fonction A.

(90). Dans l'exemple précédent, il est facile de vérifier la valeur obtenue

obtenue pour $\frac{dA}{da}$; car en faisant $a=\frac{1}{2}$ dans la formule (17), art. 51, et observant que les logarithmes de la formule doivent être multipliés par le module $m=\frac{1}{M}$ pour les changer en logarithmes vulgaires, on aura

$$M\frac{dA}{da}=-C+\int\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})\,dx}{1-x}.$$

L'intégrale du second membre, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, est égale à $2-2M\,l2$; donc

$$\frac{dA}{da}=(2-C)\,m-2\,l2.$$

Mais on a fait ci-dessus $B=m(1-C)$; ainsi on aura $\frac{dA}{da}=m+B-2l2$; ce qui donne, en substituant les valeurs connues,

$$\frac{dA}{da}=0.015\,847\,394\,343\,69,$$

valeur qui doit être exacte jusqu'à la quatorzième décimale : elle prouve que les résultats obtenus par la méthode précédente, sont moins exacts dans l'hypothèse $\omega=0.005$ que dans l'hypothèse $\omega=0.002$.

(91). Les formules précédentes donnent les coefficiens différentiels de la fonction $A=\log\Gamma a$, en supposant que a se trouve immédiatement dans la table; mais s'il faut trouver les coefficiens différentiels de la fonction $X=\log\Gamma(a+\omega x)$, qui est intermédiaire entre les deux fonctions consécutives données par la table $A=\log\Gamma a$, $A+\delta A=\log\Gamma(a+\omega)$, voici comment on résoudra ce problème d'interpolation.

On a généralement

$$X=A+x\delta A+\frac{x.x-1}{2}\delta^2A+\frac{x.x-1.x-2}{2.3}\delta^3A+\text{etc.},$$

et si l'on fait $a+\omega x=\text{a}$, on aura, en supposant que x seule varie,

$da = \omega dx$, d'où $\omega \frac{dX}{da} = \frac{dX}{dx}$. Différentiant donc la valeur de X par rapport à x, et réitérant les différentiations, on aura

$$\omega \frac{dX}{da} = \delta A + \frac{2x-1}{2} \delta^2 A + \frac{3x^2 - 6x + 2}{2.3} \delta^3 A$$
$$+ \frac{4x^3 - 18x^2 + 22x - 6}{2.3.4} \delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^2 \frac{ddX}{da^2} = \delta^2 A + (x-1) \delta^3 A + \frac{6x^2 - 18x + 11}{3.4} \delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^3 \frac{d^3X}{da^3} = \delta^3 A + (x - \tfrac{3}{2}) \delta^4 A + \text{etc.},$$
etc.

On connaîtra donc les coefficiens différentiels dont il s'agit, par les différences δA, $\delta^2 A$, $\delta^3 A$ que la table donne immédiatement.

(92). Dans le cas de $x = 1$, on a $\mathrm{a} = a + \omega$, et les formules deviennent

$$\omega \frac{dX}{da} = \delta A + \tfrac{1}{2} \delta^2 A - \tfrac{1}{6} \delta^3 A + \tfrac{1}{12} \delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^2 \frac{ddX}{da^2} = \delta^2 A - \tfrac{1}{12} \delta^4 A + \text{etc.},$$
$$\omega^3 \frac{d^3X}{da^3} = \delta^3 A - \tfrac{1}{2} \delta^4 A + \text{etc.}$$

Celles-ci offrent des formules un peu plus convergentes que celles de l'article 81, de sorte qu'il y a quelqu'avantage à déterminer les coefficiens différentiels de la fonction $\log \Gamma(a + \omega)$ par le moyen des différences qui répondent à la fonction précédente $\log \Gamma a$.

(93). Appliquons les formules précédentes à la fonction...... $X = \log \Gamma(1 + \frac{1}{3})$. Alors on fera $\mathrm{a} = 1.333$, $x = \frac{1}{3}$, et les différences données immédiatement dans la table seront

$$\delta A = -57\,262\,267, \quad \delta^2 A = 475\,486, \quad \delta^3 A = -483,$$

d'où résultent les valeurs suivantes des coefficiens différentiels,

$$\frac{dX}{da} = -\ 0.057\ 341\ 541\ 5,$$
$$\frac{ddX}{da^2} = \ 0.475\ 808,$$
$$\frac{d^3X}{da^3} = -\ 0.483.$$

Pour vérifier le premier de ces résultats, on peut avoir recours à la formule (17) qui donne

$$\frac{dX}{da} = -mC + m\int \frac{(1 - x^{\frac{1}{3}})\,dx}{1-x}.$$

Effectuant l'intégration indiquée entre les limites $x = 0$, $x = 1$, il vient

$$\frac{dX}{da} = B + 2m - \tfrac{1}{2}\log 27 - \frac{m\pi}{12},$$

et en substituant les valeurs numériques,

$$\frac{dX}{da} = -\ 0.057\ 341\ 542\ 088\ 65,$$

d'où l'on voit que nos déterminations sont aussi exactes qu'on peut le desirer.

(94). Lorsque a est un nombre rationnel $\frac{m}{n}$, on a vu dans l'article 51 que l'intégrale $Z = \int \frac{(1 - x^a)\,dx}{1-x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est exprimée par $\frac{1}{a} - nB_m$, B_m étant une quantité dont la valeur est donnée par arcs de cercle et par logarithmes (art. 35, deuxième partie). Mais si l'on suppose, par exemple, $a = \frac{563}{1000}$, la valeur de B_m dont il s'agit sera tellement compliquée, qu'il deviendra à peu près impossible d'en tirer la valeur numérique de l'intégrale Z, et la difficulté serait encore plus grande si a était une fraction plus composée.

Dans ce cas, l'intégrale dont il s'agit pourra se trouver d'une manière beaucoup plus facile par la formule de l'article 17, qui donne

$$Z = C + M \frac{d \log \Gamma a}{da}:$$

or pour la valeur $a = 1.563$, on trouve le coefficient différentiel

$$\frac{d \log \Gamma a}{da} = 0.040\,734\,344.$$

Ainsi on aura l'intégrale cherchée $Z = 0.671\,009\,958$, laquelle doit être exacte au moins jusqu'à la huitième décimale.

Nous sommes entrés dans d'assez grands détails sur ces diverses méthodes d'interpolation, parce qu'elles sont peu connues, et qu'elles peuvent s'appliquer à toutes les tables dans lesquelles il est nécessaire d'avoir égard aux différences du troisième ordre.

TABLE

TABLE

DES LOGARITHMES DE LA FONCTION Γa,

Calculés à douze décimales, pour toutes les valeurs de la racine a, de millième en millième, depuis 1.000 jusqu'à 2.000.

On y a joint leurs différences première, seconde et troisième.

a	Log. Γ*a*.	Diff. I.	II.	III.	*a*	Log. Γ*a*.	Diff. I.	II.	III.
1.000	0.000 000 000 000	250 324 559	713 343	1039	1.050	9.988 337 858 790	215 878 738	664 580	911
1.001	9.999 749 675 441	249 611 216	712 304	1038	1.051	9.988 121 980 052	215 214 158	663 669	911
1.002	9.999 500 064 225	248 898 912	711 266	1034	1.052	9.987 906 765 894	214 550 489	662 758	908
1.003	9.999 251 165 313	248 187 646	710 232	1031	1.053	9.987 692 215 405	213 887 731	661 850	904
1.004	9.999 002 977 667	247 477 414	709 201	1030	1.054	9.987 478 327 674	213 225 881	660 946	902
1.005	9.998 755 500 253	246 768 213	708 171	1024	1.055	9.987 265 101 793	212 564 935	660 044	902
1.006	9.998 508 732 040	246 060 042	707 147	1025	1.056	9.987 052 536 858	211 904 891	659 142	898
1.007	9.998 262 671 998	245 352 895	706 122	1020	1.057	9.986 840 631 967	211 245 749	658 244	896
1.008	9.998 017 319 103	244 646 773	705 102	1018	1.058	9.986 629 386 218	210 587 505	657 348	893
1.009	9.997 772 672 330	243 941 671	704 084	1014	1.059	9.986 418 798 713	209 930 157	656 455	893
1.010	9.997 528 730 659	243 237 587	703 070	1014	1.060	9.986 208 868 556	209 273 702	655 562	887
1.011	9.997 285 493 072	242 534 517	702 056	1008	1.061	9.985 999 594 854	208 618 140	654 675	888
1.012	9.997 042 958 555	241 832 461	701 048	1008	1.062	9.985 790 976 714	207 963 465	653 787	886
1.013	9.996 801 126 094	241 131 413	700 040	1004	1.063	9.985 583 013 249	207 309 678	652 901	880
1.014	9.996 559 994 681	240 431 373	699 036	1002	1.064	9.985 375 703 571	206 656 777	652 021	882
1.015	9.996 319 563 308	239 732 337	698 034	998	1.065	9.985 169 046 794	206 004 756	651 139	878
1.016	9.996 079 830 971	239 034 303	697 036	998	1.066	9.984 963 042 038	205 353 617	650 261	876
1.017	9.995 840 796 668	238 337 267	696 038	992	1.067	9.984 757 688 421	204 703 356	649 385	873
1.018	9.995 602 459 401	237 641 229	695 046	992	1.068	9.984 552 985 065	204 053 971	648 512	871
1.019	9.995 364 818 172	236 946 183	694 054	989	1.069	9.984 348 931 094	203 405 459	647 641	871
1.020	9.995 127 871 989	236 252 129	693 065	985	1.070	9.984 145 525 635	202 757 818	646 770	866
1.021	9.994 891 619 860	235 559 064	692 080	983	1.071	9.983 942 767 817	202 111 048	645 904	865
1.022	9.994 656 060 796	234 866 984	691 097	982	1.072	9.983 740 656 769	201 465 144	645 039	863
1.023	9.994 421 193 812	234 175 887	690 115	977	1.073	9.983 539 191 625	200 820 105	644 176	861
1.024	9.994 187 017 925	233 485 772	689 138	975	1.074	9.983 338 371 520	200 175 929	643 315	859
1.025	9.993 953 532 153	232 796 634	688 163	974	1.075	9.983 138 195 591	199 532 614	642 456	855
1.026	9.993 720 735 519	232 108 471	687 189	971	1.076	9.982 938 662 977	198 890 158	641 601	855
1.027	9.993 488 627 048	231 421 282	686 218	967	1.077	9.982 739 772 819	198 248 557	640 746	852
1.028	9.993 257 205 766	230 735 064	685 251	966	1.078	9.982 541 524 262	197 607 811	639 894	851
1.029	9.993 026 470 702	230 049 813	684 285	962	1.079	9.982 343 916 451	196 967 917	639 043	846
1.030	9.992 796 420 889	229 365 528	683 323	961	1.080	9.982 146 948 534	196 328 874	638 197	848
1.031	9.992 567 055 361	228 682 205	682 362	957	1.081	9.981 950 619 660	195 690 677	637 349	843
1.032	9.992 338 373 156	227 999 843	681 405	956	1.082	9.981 754 928 983	195 053 328	636 506	842
1.033	9.992 110 373 313	227 318 438	680 449	954	1.083	9.981 559 875 655	194 416 822	635 664	838
1.034	9.991 883 054 875	226 637 989	679 495	948	1.084	9.981 365 458 833	193 781 158	634 826	839
1.035	9.991 656 416 886	225 958 494	678 547	950	1.085	9.981 171 677 675	193 146 332	633 987	836
1.036	9.991 430 458 392	225 279 947	677 597	945	1.086	9.980 978 531 343	192 512 345	633 151	833
1.037	9.991 205 178 445	224 602 350	676 652	942	1.087	9.980 786 018 998	191 879 194	632 318	830
1.038	9.990 980 576 095	223 925 698	675 710	942	1.088	9.980 594 139 804	191 246 876	631 488	831
1.039	9.990 756 650 397	223 249 988	674 768	938	1.089	9.980 402 892 928	190 615 388	630 657	828
1.040	9.990 533 400 409	222 575 220	673 830	935	1.090	9.980 212 277 540	189 984 731	629 829	824
1.041	9.990 310 825 189	221 901 390	672 895	934	1.091	9.980 022 292 809	189 354 902	629 005	822
1.042	9.990 088 923 799	221 228 495	671 961	930	1.092	9.979 832 937 907	188 725 897	628 183	824
1.043	9.989 867 695 304	220 556 534	671 031	929	1.093	9.979 644 212 010	188 097 714	627 359	819
1.044	9.989 647 138 770	219 885 503	670 102	927	1.094	9.979 456 114 296	187 470 355	626 540	816
1.045	9.989 427 253 267	219 215 401	669 175	923	1.095	9.979 268 643 941	186 843 815	625 724	815
1.046	9.989 208 037 866	218 546 226	668 252	922	1.096	9.979 081 800 126	186 218 091	624 909	814
1.047	9.988 989 491 640	217 877 974	667 330	918	1.097	9.978 895 582 035	185 593 182	624 095	812
1.048	9.988 771 613 666	217 210 644	666 412	918	1.098	9.978 709 988 853	184 969 087	623 283	809
1.049	9.988 554 403 022	216 544 232	665 494	914	1.099	9.978 525 019 766	184 345 804	622 474	807
1.050	9.988 337 858 790	215 878 738	664 580	911	1.100	9.978 340 673 962	183 723 330	621 667	806

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a.	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.100	9.978 340 673 962	183 723 330	621 667	806	1.150	9.969 900 696 012	153 590 056	583 652	717
1.101	9.978 156 950 632	183 101 663	620 861	804	1.151	9.969 747 105 956	153 006 404	582 935	712
1.102	9.977 973 848 969	182 480 802	620 057	801	1.152	9.969 594 099 552	152 423 469	582 223	715
1.103	9.977 791 368 167	181 860 745	619 256	799	1.153	9.969 441 676 083	151 841 246	581 508	711
1.104	9.977 609 507 422	181 241 489	618 457	799	1.154	9.969 289 834 837	151 259 738	580 797	707
1.105	9.977 428 265 933	180 623 032	617 658	795	1.155	9.969 138 575 099	150 678 941	580 090	708
1.106	9.977 247 642 901	180 005 374	616 863	794	1.156	9.968 987 896 158	150 098 851	579 382	708
1.107	9.977 067 637 527	179 388 511	616 069	792	1.157	9.968 837 797 307	149 519 469	578 674	703
1.108	9.976 888 249 016	178 772 442	615 277	791	1.158	9.968 688 277 838	148 940 795	577 971	703
1.109	9.976 709 476 574	178 157 165	614 486	787	1.159	9.968 539 337 043	148 362 824	577 268	701
1.110	9.976 531 319 409	177 542 679	613 699	787	1.160	9.968 390 974 219	147 785 556	576 567	700
1.111	9.976 353 776 730	176 928 980	612 912	784	1.161	9.968 243 188 663	147 208 989	575 867	698
1.112	9.976 176 847 750	176 316 068	612 128	783	1.162	9.968 095 979 674	146 633 122	575 169	697
1.113	9.976 000 531 682	175 703 940	611 345	780	1.163	9.967 949 346 552	146 057 953	574 472	694
1.114	9.975 824 827 742	175 092 595	610 565	779	1.164	9.967 803 288 599	145 483 481	573 778	693
1.115	9.975 649 735 147	174 482 030	609 786	778	1.165	9.967 657 805 118	144 909 703	573 085	693
1.116	9.975 475 253 117	173 872 244	609 008	775	1.166	9.967 512 895 415	144 336 618	572 392	689
1.117	9.975 301 380 873	173 263 236	608 233	772	1.167	9.967 368 558 797	143 764 226	571 703	689
1.118	9.975 128 117 637	172 655 003	607 461	772	1.168	9.967 224 794 571	143 192 523	571 014	688
1.119	9.974 955 462 634	172 047 54[illegible]	606 689	770	1.169	9.967 081 602 048	142 621 509	570 326	684
1.120	9.974 783 415 092	171 440 853	605 919	768	1.170	9.966 938 980 539	142 051 183	569 642	684
1.121	9.974 611 974 239	170 834 934	605 151	766	1.171	9.966 796 929 356	141 481 541	568 958	684
1.122	9.974 441 139 305	170 229 783	604 385	763	1.172	9.966 655 447 815	140 912 583	568 274	679
1.123	9.974 270 909 522	169 625 398	603 622	764	1.173	9.966 514 535 232	140 344 309	567 595	680
1.124	9.974 101 284 124	169 021 776	602 858	759	1.174	9.966 374 190 923	139 776 714	566 915	678
1.125	9.973 932 262 348	168 418 918	602 099	759	1.175	9.966 234 414 209	139 209 799	566 237	677
1.126	9.973 763 843 430	167 816 819	601 340	758	1.176	9.966 095 204 410	138 643 562	565 560	673
1.127	9.973 596 026 611	167 215 479	600 582	755	1.177	9.965 956 560 848	138 078 002	564 887	675
1.128	9.973 428 811 132	166 614 897	599 827	753	1.178	9.965 818 482 846	137 513 115	564 212	671
1.129	9.973 262 196 235	166 015 070	599 074	752	1.179	9.965 680 969 731	136 948 903	563 541	671
1.130	9.973 096 181 165	165 415 996	598 322	749	1.180	9.965 544 020 828	136 385 362	562 870	666
1.131	9.972 930 765 169	164 817 674	597 573	749	1.181	9.965 407 635 466	135 822 492	562 204	670
1.132	9.972 765 947 495	164 220 101	596 824	747	1.182	9.965 271 812 974	135 260 288	561 534	665
1.133	9.972 601 727 394	163 623 277	596 077	743	1.183	9.965 136 552 686	134 698 754	560 869	665
1.134	9.972 438 104 117	163 027 200	595 334	744	1.184	9.965 001 853 932	134 137 885	560 204	662
1.135	9.972 275 076 917	162 431 866	594 590	741	1.185	9.964 867 716 047	133 577 681	559 542	661
1.136	9.972 112 645 051	161 837 276	593 849	739	1.186	9.964 734 138 366	133 018 139	558 881	660
1.137	9.971 950 807 775	161 243 427	593 110	738	1.187	9.964 601 120 227	132 459 258	558 221	659
1.138	9.971 789 564 348	160 650 317	592 372	736	1.188	9.964 468 660 969	131 901 037	557 562	657
1.139	9.971 628 914 031	160 057 945	591 636	735	1.189	9.964 336 759 932	131 343 475	556 905	656
1.140	9.971 468 856 086	159 466 309	590 901	732	1.190	9.964 205 416 457	130 786 570	556 249	652
1.141	9.971 309 389 777	158 875 408	590 169	730	1.191	9.964 074 629 887	130 230 321	555 597	654
1.142	9.971 150 514 369	158 285 239	589 439	731	1.192	9.963 944 399 566	129 674 724	554 943	652
1.143	9.970 992 229 130	157 695 800	588 708	726	1.193	9.963 814 724 842	129 119 781	554 291	648
1.144	9.970 834 533 330	157 107 092	587 982	726	1.194	9.963 685 605 061	128 565 490	553 643	649
1.145	9.970 677 426 238	156 519 110	587 256	724	1.195	9.963 557 039 571	128 011 847	552 904	647
1.146	9.970 520 907 128	155 931 854	586 532	724	1.196	9.963 429 027 724	127 458 853	552 347	645
1.147	9.970 364 975 274	155 345 322	585 808	720	1.197	9.963 301 568 871	126 906 506	551 702	645
1.148	9.970 209 629 952	154 759 514	585 088	718	1.198	9.963 174 662 365	126 354 804	551 057	642
1.149	9.970 054 870 438	154 174 426	584 370	718	1.199	9.963 048 307 561	125 803 747	550 415	640
1.150	9.969 900 696 012	153 590 056	583 652	717	1.200	9.962 922 503 814	125 253 332	549 775	642

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.200	9.962 922 503 814	125 253 332	549 775	642	1.250	9.957 321 083 716	98 521 914	519 417	575
1.201	9.962 797 250 482	124 703 557	549 133	637	1.251	9.957 222 561 802	98 002 497	518 842	575
1.202	9.962 672 546 925	124 154 424	548 496	637	1.252	9.957 124 559 305	97 483 655	518 270	572
1.203	9.962 548 342 501	123 605 928	547 859	637	1.253	9.957 027 075 650	96 965 385	517 698	572
1.204	9.962 424 786 573	123 058 069	547 222	632	1.254	9.956 930 110 265	96 447 687	517 126	571
1.205	9.962 301 728 504	122 510 847	546 590	635	1.255	9.956 833 662 578	95 930 561	516 555	570
1.206	9.962 179 217 657	121 964 257	545 955	630	1.256	9.956 737 732 017	95 414 006	515 985	565
1.207	9.962 057 253 400	121 418 302	545 325	630	1.257	9.956 642 318 011	94 898 021	515 420	568
1.208	9.961 935 835 098	120 872 977	544 695	630	1.258	9.956 547 419 990	94 382 601	514 852	566
1.209	9.961 814 962 121	120 328 282	544 065	626	1.259	9.956 453 037 389	93 867 749	514 286	563
1.210	9.961 694 633 839	119 784 217	543 439	627	1.260	9.956 359 169 640	93 353 463	513 723	563
1.211	9.961 574 849 622	119 240 778	542 812	625	1.261	9.956 265 816 177	92 839 740	513 160	561
1.212	9.961 455 608 844	118 697 966	542 187	621	1.262	9.956 172 976 437	92 326 580	512 599	561
1.213	9.961 336 910 878	118 155 779	541 566	624	1.263	9.956 080 649 857	91 813 981	512 038	561
1.214	9.961 218 755 099	117 614 213	540 942	620	1.264	9.955 988 835 876	91 301 943	511 477	557
1.215	9.961 101 140 886	117 073 271	540 322	620	1.265	9.955 897 533 933	90 790 466	510 920	557
1.216	9.960 984 067 615	116 532 949	539 702	616	1.266	9.955 806 743 467	90 279 546	510 363	558
1.217	9.960 867 534 666	115 993 247	539 086	618	1.267	9.955 716 463 921	89 769 183	509 805	553
1.218	9.960 751 541 419	115 454 161	538 468	616	1.268	9.955 626 694 738	89 259 378	509 252	553
1.219	9.960 636 087 258	114 915 693	537 852	612	1.269	9.955 537 435 360	88 750 126	508 699	553
1.220	9.960 521 171 565	114 377 841	537 240	613	1.270	9.955 448 685 234	88 241 427	508 146	554
1.221	9.960 406 793 724	113 840 601	536 6[illegible]7	612	1.271	9.955 360 443 807	87 733 281	507 592	549
1.222	9.960 292 953 123	113 303 974	536 015	610	1.272	9.955 272 710 526	87 225 689	507 043	548
1.223	9.960 179 649 149	112 767 959	535 405	609	1.273	9.955 185 484 837	86 718 646	506 495	548
1.224	9.960 066 881 190	112 232 554	534 796	606	1.274	9.955 098 766 191	86 212 151	505 947	549
1.225	9.959 954 648 636	111 697 758	534 190	607	1.275	9.955 012 554 040	85 706 204	505 398	545
1.226	9.959 842 950 878	111 163 568	533 583	605	1.276	9.954 926 847 836	85 200 806	504 853	545
1.227	9.959 731 787 310	110 629 985	532 978	602	1.277	9.954 841 647 030	84 695 953	504 308	542
1.228	9.959 621 157 325	110 097 007	532 376	604	1.278	9.954 756 951 077	84 191 645	503 766	543
1.229	9.959 511 060 318	109 564 631	531 772	600	1.279	9.954 672 759 432	83 687 879	503 223	543
1.230	9.959 401 495 687	109 032 859	531 172	600	1.280	9.954 589 071 553	83 184 656	502 680	539
1.231	9.959 292 462 828	108 501 687	530 572	598	1.281	9.954 505 886 897	82 681 976	502 141	539
1.232	9.959 183 961 141	107 971 115	529 974	597	1.282	9.954 423 204 921	82 179 835	501 602	538
1.233	9.959 075 990 026	107 441 141	529 377	596	1.283	9.954 341 025 086	81 678 233	501 064	538
1.234	9.958 968 548 885	106 911 764	528 781	595	1.284	9.954 259 346 853	81 177 169	500 526	536
1.235	9.958 861 637 121	106 382 983	528 186	592	1.285	9.954 178 169 684	80 676 643	499 990	535
1.236	9.958 755 254 138	105 854 797	527 594	593	1.286	9.954 097 493 041	80 176 653	499 455	532
1.237	9.958 649 399 341	105 327 203	527 001	591	1.287	9.954 017 316 388	79 677 198	498 923	534
1.238	9.958 544 072 138	104 800 202	526 410	589	1.288	9.953 937 639 190	79 178 275	498 389	532
1.239	9.958 439 271 936	104 273 792	525 821	589	1.289	9.953 858 460 915	78 679 886	497 857	529
1.240	9.958 334 998 144	103 747 971	525 232	586	1.290	9.953 779 781 029	78 182 029	497 328	531
1.241	9.958 231 250 173	103 222 739	524 646	586	1.291	9.953 701 599 000	77 684 701	496 797	528
1.242	9.958 128 027 434	102 698 093	524 060	585	1.292	9.953 623 914 299	77 187 904	496 269	526
1.243	9.958 025 329 341	102 174 033	523 475	583	1.293	9.953 546 726 395	76 691 635	495 743	528
1.244	9.957 923 155 308	101 650 558	522 892	582	1.294	9.953 470 034 760	76 195 892	495 215	525
1.245	9.957 821 504 750	101 127 666	522 310	582	1.295	9.953 393 858 868	75 700 677	494 690	523
1.246	9.957 720 377 084	100 605 356	521 728	577	1.296	9.953 318 138 191	75 205 987	494 167	525
1.247	9.957 619 771 728	100 083 628	521 151	581	1.297	9.953 242 932 204	74 711 820	493 642	520
1.248	9.957 519 688 100	99 562 477	520 570	577	1.298	9.953 168 220 384	74 218 178	493 122	523
1.249	9.957 420 125 623	99 041 907	519 993	576	1.299	9.953 094 002 206	73 725 056	492 599	518
1.250	9.957 321 083 716	98 521 914	519 417	575	1.300	9.953 020 277 150	73 232 457	492 081	519

. a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.300	9.953 020 277 150	73 232 457	492 081	519	1.350	9.949 951 514 191	49 244 477	467 349	472
1.301	9.952 947 044 693	72 740 376	491 562	519	1.351	9.949 902 269 714	48 777 128	466 877	470
1.302	9.952 874 304 317	72 248 814	491 043	518	1.352	9.949 853 492 586	48 310 251	466 407	466
1.303	9.952 802 055 503	71 757 771	490 525	513	1.353	9.949 805 182 335	47 843 844	465 941	470
1.304	9.952 730 297 732	71 267 246	490 012	517	1.354	9.949 757 338 491	47 377 903	465 471	468
1.305	9.952 659 030 486	70 777 234	489 495	512	1.355	9.949 709 960 588	46 912 432	465 003	464
1.306	9.952 588 253 252	70 287 739	488 983	514	1.356	9.949 663 048 156	46 447 429	464 539	466
1.307	9.952 517 965 513	69 798 756	488 469	511	1.357	9.949 616 600 727	45 982 890	464 073	465
1.308	9.952 448 166 757	69 310 287	487 958	512	1.358	9.949 570 617 837	45 518 817	463 608	464
1.309	9.952 378 856 470	68 822 329	487 446	509	1.359	9.949 525 099 020	45 055 209	463 144	460
1.310	9.952 310 034 141	68 334 883	486 937	508	1.360	9.949 480 043 811	44 592 065	462 684	462
1.311	9.952 241 699 258	67 847 946	486 429	509	1.361	9.949 435 451 746	44 129 381	462 222	462
1.312	9.952 173 851 312	67 361 517	485 920	506	1.362	9.949 391 322 365	43 667 159	461 760	459
1.313	9.952 106 489 795	66 875 597	485 414	504	1.363	9.949 347 655 206	43 205 399	461 301	459
1.314	9.952 039 614 198	66 390 183	484 910	505	1.364	9.949 304 449 807	42 744 098	460 842	458
1.315	9.951 973 224 015	65 905 273	484 405	506	1.365	9.949 261 705 709	42 283 256	460 384	459
1.316	9.951 907 318 742	65 420 868	483 899	502	1.366	9.949 219 422 453	41 822 872	459 925	456
1.317	9.951 841 897 874	64 936 969	483 397	503	1.367	9.949 177 599 581	41 362 947	459 469	455
1.318	9.951 776 960 905	64 453 572	482 894	499	1.368	9.949 136 236 634	40 903 478	459 014	454
1.319	9.951 712 507 333	63 970 678	482 395	498	1.369	9.949 095 333 156	40 444 464	458 560	454
1.320	9.951 648 536 655	63 488 283	481 897	501	1.370	9.949 054 888 692	39 985 904	458 106	454
1.321	9.951 585 048 372	63 006 386	481 396	497	1.371	9.949 014 902 788	39 527 798	457 652	452
1.322	9.951 522 041 986	62 524 990	480 899	497	1.372	9.948 975 374 990	39 070 146	457 200	450
1.323	9.951 459 516 996	62 044 091	480 402	495	1.373	9.948 936 304 844	38 612 946	456 750	451
1.324	9.951 397 472 905	61 563 689	479 907	497	1.374	9.948 897 691 898	38 156 196	456 299	450
1.325	9.951 335 909 216	61 083 782	479 410	493	1.375	9.948 859 535 702	37 699 897	455 849	449
1.326	9.951 274 825 434	60 604 372	478 917	492	1.376	9.948 821 835 805	37 244 048	455 400	447
1.327	9.951 214 221 062	60 125 455	478 425	491	1.377	9.948 784 591 757	36 788 648	454 953	449
1.328	9.951 154 095 607	59 647 030	477 934	494	1.378	9.948 747 803 109	36 333 695	454 504	444
1.329	9.951 094 448 577	59 169 096	477 440	489	1.379	9.948 711 469 414	35 879 191	454 060	445
1.330	9.951 035 279 481	58 691 656	476 951	487	1.380	9.948 675 590 223	35 425 131	453 615	447
1.331	9.950 976 587 825	58 214 705	476 464	490	1.381	9.948 640 165 092	34 971 516	453 168	443
1.332	9.950 918 373 120	57 738 241	475 974	488	1.382	9.948 605 193 576	34 518 348	452 725	442
1.333	9.950 860 634 879	57 262 267	475 486	483	1.383	9.948 570 675 228	34 065 623	452 283	442
1.334	9.950 803 372 612	56 786 781	475 003	488	1.384	9.948 536 609 605	33 613 340	451 841	442
1.335	9.950 746 585 831	56 311 778	474 515	484	1.385	9.948 502 996 265	33 161 499	451 399	440
1.336	9.950 690 274 053	55 837 263	474 031	484	1.386	9.948 469 834 766	32 710 100	450 959	439
1.337	9.950 634 436 790	55 363 232	473 547	483	1.387	9.948 437 124 666	32 259 141	450 520	440
1.338	9.950 579 073 558	54 889 685	473 066	480	1.388	9.948 404 865 525	31 808 621	450 080	438
1.339	9.950 524 183 873	54 416 619	472 586	484	1.389	9.948 373 056 904	31 358 541	449 642	437
1.340	9.950 469 767 254	53 944 033	472 102	480	1.390	9.948 341 698 363	30 908 899	449 205	436
1.341	9.950 415 823 221	53 471 931	471 622	476	1.391	9.948 310 789 464	30 459 694	448 769	436
1.342	9.950 362 351 290	53 000 309	471 146	478	1.392	9.948 280 329 770	30 010 925	448 333	435
1.343	9.950 309 350 981	52 529 163	470 668	479	1.393	9.948 250 318 845	29 562 592	447 898	432
1.344	9.950 256 821 818	52 058 495	470 189	475	1.394	9.948 220 756 253	29 114 694	447 466	435
1.345	9.950 204 763 323	51 588 306	469 714	474	1.395	9.948 191 641 559	28 667 228	447 031	432
1.346	9.950 153 175 017	51 118 592	469 240	475	1.396	9.948 162 974 331	28 220 197	446 599	432
1.347	9.950 102 056 425	50 649 352	468 765	473	1.397	9.948 134 754 134	27 773 598	446 167	430
1.348	9.950 051 407 073	50 180 587	468 292	474	1.398	9.948 106 980 536	27 327 431	445 737	431
1.349	9.950 001 226 486	49 712 295	467 818	469	1.399	9.948 079 653 105	26 881 694	445 306	428
1.350	9.949 951 514 191	49 244 477	467 349	472	1.400	9.948 052 771 411	26 436 388	444 878	429

a	Log. Γa	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa	Diff. I.	II.	III.
1.400	9.948 052 771 411	26 436 388	444 878	429	1.450	9.947 267 707 452	4 702 338	424 382	392
1.401	9.948 026 335 023	25 991 510	444 449	426	1.451	9.947 263 005 114	4 277 956	423 990	390
1.402	9.948 000 343 513	25 547 061	444 023	428	1.452	9.947 258 727 158	3 853 966	423 600	390
1.403	9.947 974 796 452	25 103 038	443 595	427	1.453	9.947 254 873 192	3 430 366	423 210	390
1.404	9.947 949 693 414	24 659 443	443 168	425	1.454	9.947 251 442 826	3 007 156	422 820	388
1.405	9.947 925 033 971	24 216 275	442 743	424	1.455	9.947 248 435 670	2 584 336	422 432	388
1.406	9.947 900 817 696	23 773 532	442 319	423	1.456	9.947 245 851 334	2 161 904	422 044	389
1.407	9.947 877 044 164	23 331 213	441 896	424	1.457	9.947 243 689 430	1 739 860	421 655	385
1.408	9.947 853 712 951	22 889 317	441 472	423	1.458	9.947 241 949 570	1 318 205	421 270	387
1.409	9.947 830 823 634	22 447 845	441 049	419	1.459	9.947 240 631 365	896 935	420 883	385
1.410	9.947 808 375 789	22 006 796	440 630	421	1.460	9.947 239 734 430	476 052	420 498	385
1.411	9.947 786 368 993	21 566 166	440 209	422	1.461	9.947 239 258 378	55 554	420 113	383
1.412	9.947 764 802 827	21 125 957	439 787	418	1.462	9.947 239 202 824	364 559	419 730	384
1.413	9.947 743 676 870	20 686 170	439 369	417	1.463	9.947 239 567 383	784 289	419 346	383
1.414	9.947 722 990 700	20 246 801	438 952	418	1.464	9.947 240 351 672	1 203 635	418 963	382
1.415	9.947 702 743 899	19 807 849	438 534	418	1.465	9.947 241 555 307	1 622 598	418 581	380
1.416	9.947 682 936 050	19 369 315	438 116	416	1.466	9.947 243 177 905	2 041 179	418 201	381
1.417	9.947 663 566 735	18 931 199	437 700	415	1.467	9.947 245 219 084	2 459 380	417 820	382
1.418	9.947 644 635 536	18 493 499	437 285	414	1.468	9.947 247 678 464	2 877 200	417 438	378
1.419	9.947 626 142 037	18 056 214	436 871	414	1.469	9.947 250 555 664	3 294 638	417 060	378
1.420	9.947 608 085 823	17 619 343	436 457	414	1.470	9.947 253 850 302	3 711 698	416 682	378
1.421	9.947 590 466 480	17 182 886	436 043	410	1.471	9.947 257 562 000	4 128 380	416 304	378
1.422	9.947 573 283 594	16 746 843	435 633	414	1.472	9.947 261 690 380	4 544 684	415 926	378
1.423	9.947 556 536 751	16 311 210	435 219	410	1.473	9.947 266 235 064	4 960 610	415 548	374
1.424	9.947 540 225 541	15 875 991	434 809	409	1.474	9.947 271 195 674	5 376 158	415 174	376
1.425	9.947 524 349 550	15 441 182	434 400	411	1.475	9.947 276 571 832	5 791 332	414 798	375
1.426	9.947 508 908 368	15 006 782	433 989	408	1.476	9.947 282 363 164	6 206 130	414 423	374
1.427	9.947 493 901 586	14 572 793	433 581	408	1.477	9.947 288 569 294	6 620 553	414 049	374
1.428	9.947 479 328 793	14 139 212	433 173	406	1.478	9.947 295 189 847	7 034 602	413 675	372
1.429	9.947 465 189 581	13 706 039	432 767	407	1.479	9.947 302 224 449	7 448 277	413 303	371
1.430	9.947 451 483 542	13 273 272	432 360	407	1.480	9.947 309 672 726	7 861 580	412 932	374
1.431	9.947 438 210 270	12 840 912	431 953	404	1.481	9.947 317 534 306	8 274 512	412 558	370
1.432	9.947 425 369 358	12 408 959	431 549	404	1.482	9.947 325 808 818	8 687 070	412 188	370
1.433	9.947 412 960 399	11 977 410	431 145	403	1.483	9.947 334 495 888	9 099 258	411 818	370
1.434	9.947 400 982 989	11 546 265	430 742	404	1.484	9.947 343 595 146	9 511 076	411 448	368
1.435	9.947 389 436 724	11 115 523	430 338	402	1.485	9.947 353 106 222	9 922 524	411 080	368
1.436	9.947 378 321 201	10 685 185	429 936	401	1.486	9.947 363 028 746	10 333 604	410 712	370
1.437	9.947 367 636 016	10 255 249	429 535	400	1.487	9.947 373 362 350	10 744 316	410 342	366
1.438	9.947 357 380 767	9 825 714	429 135	400	1.488	9.947 384 106 666	11 154 658	409 976	366
1.439	9.947 347 555 053	9 396 579	428 735	399	1.489	9.947 395 261 324	11 564 634	409 610	366
1.440	9.947 338 158 474	8 967 844	428 336	400	1.490	9.947 406 825 958	11 974 244	409 244	365
1.441	9.947 329 190 630	8 539 508	427 936	398	1.491	9.947 418 800 202	12 383 488	408 879	365
1.442	9.947 320 651 122	8 111 572	427 538	395	1.492	9.947 431 183 690	12 792 367	408 514	364
1.443	9.947 312 539 550	7 684 034	427 143	398	1.493	9.947 443 976 057	13 200 881	408 150	363
1.444	9.947 304 855 516	7 256 891	426 745	394	1.494	9.947 457 176 938	13 609 031	407 787	363
1.445	9.947 297 598 625	6 830 146	426 351	397	1.495	9.947 470 785 969	14 016 818	407 424	361
1.446	9.947 290 768 479	6 403 795	425 954	392	1.496	9.947 484 802 787	14 424 242	407 063	364
1.447	9.947 284 364 684	5 977 841	425 562	395	1.497	9.947 499 227 029	14 831 305	406 699	358
1.448	9.947 278 386 843	5 552 279	425 167	393	1.498	9.947 514 058 334	15 238 004	406 341	362
1.449	9.947 272 834 564	5 127 112	424 774	392	1.499	9.947 529 296 338	15 644 345	405 979	359
1.450	9.947 267 707 452	4 702 338	424 382	392	1.500	9.947 544 940 683	16 050 324	405 620	359

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.500	9.947 544 940 683	16 050 324	405 620	359	1.550	9.948 837 441 447	35 903 111	388 386	331
1.501	9.947 560 991 007	16 455 944	405 261	359	1.551	9.948 873 344 558	36 291 497	388 055	327
1.502	9.947 577 446 951	16 861 205	404 902	357	1.552	9.948 909 636 055	36 679 552	387 728	332
1.503	9.947 594 308 156	17 266 107	404 545	358	1.553	9.948 946 315 607	37 067 280	387 396	328
1.504	9.947 611 574 263	17 670 652	404 187	356	1.554	9.948 983 382 887	37 454 676	387 068	329
1.505	9.947 629 244 915	18 074 839	403 831	356	1.555	9.949 020 837 563	37 841 744	386 739	325
1.506	9.947 647 319 754	18 478 670	403 475	356	1.556	9.949 058 679 307	38 228 483	386 414	329
1.507	9.947 665 798 424	18 882 145	403 119	354	1.557	9.949 096 907 790	38 614 897	386 085	326
1.508	9.947 684 680 569	19 285 264	402 765	355	1.558	9.949 135 522 687	39 000 982	385 759	327
1.509	9.947 703 965 833	19 688 029	402 410	353	1.559	9.949 174 523 669	39 386 741	385 432	324
1.510	9.947 723 653 862	20 090 439	402 057	353	1.560	9.949 213 910 410	39 772 173	385 108	327
1.511	9.947 743 744 301	20 492 496	401 704	352	1.561	9.949 253 682 583	40 157 281	384 781	323
1.512	9.947 764 236 797	20 894 200	401 352	354	1.562	9.949 293 839 864	40 542 062	384 458	323
1.513	9.947 785 130 997	21 295 552	400 998	349	1.563	9.949 334 381 926	40 926 520	384 135	326
1.514	9.947 806 426 549	21 696 550	400 649	351	1.564	9.949 375 308 446	41 310 655	383 809	321
1.515	9.947 828 123 099	22 097 199	400 298	350	1.565	9.949 416 619 101	41 694 464	383 488	323
1.516	9.947 850 220 298	22 497 497	399 948	350	1.566	9.949 458 313 565	42 077 952	383 165	321
1.517	9.947 872 717 795	22 897 445	399 598	349	1.567	9.949 500 391 517	42 461 117	382 844	322
1.518	9.947 895 615 240	23 297 043	399 249	348	1.568	9.949 542 852 634	42 843 961	382 522	322
1.519	9.947 918 912 283	23 696 292	398 901	347	1.569	9.949 585 696 595	43 226 483	382 200	319
1.520	9.947 942 608 575	24 095 193	398 554	348	1.570	9.949 628 923 078	43 608 683	381 881	319
1.521	9.947 966 703 768	24 493 747	398 206	347	1.571	9.949 672 531 761	43 990 564	381 562	320
1.522	9.947 991 197 515	24 891 953	397 859	345	1.572	9.949 716 522 325	44 372 126	381 242	320
1.523	9.948 016 089 468	25 289 812	397 514	346	1.573	9.949 760 894 451	44 753 368	380 922	317
1.524	9.948 041 379 280	25 687 326	397 168	344	1.574	5.949 805 647 819	45 134 290	380 605	317
1.525	9.948 067 066 606	26 084 494	396 824	344	1.575	9.949 850 782 109	45 514 895	380 288	318
1.526	9.948 093 151 100	26 481 318	396 480	344	1.576	9.949 896 297 004	45 895 183	379 970	317
1.527	9.948 119 632 418	26 877 798	396 136	345	1.577	9.949 942 192 187	46 275 153	379 653	316
1.528	9.948 146 510 216	27 273 934	395 791	341	1.578	9.949 988 467 340	46 654 806	379 337	315
1.529	9.948 173 784 150	27 669 725	395 450	341	1.579	9.950 035 122 146	47 034 143	379 022	317
1.530	9.948 201 453 875	28 065 175	395 109	342	1.580	9.950 082 156 289	47 413 165	378 705	313
1.531	9.948 229 519 050	28 460 284	394 767	342	1.581	9.950 129 569 454	47 791 870	378 392	314
1.532	9.948 257 979 334	28 855 051	394 425	340	1.582	9.950 177 361 324	48 170 262	378 078	314
1.533	9.948 286 834 385	29 249 476	394 085	339	1.583	9.950 225 531 586	48 548 340	377 764	315
1.534	9.948 316 083 861	29 643 561	393 746	339	1.584	9.950 274 079 926	48 926 104	377 449	311
1.535	9.948 345 727 422	30 037 307	393 407	339	1.585	9.950 323 006 030	49 303 553	377 138	311
1.536	9.948 375 764 729	30 430 714	393 068	338	1.586	9.950 372 309 583	49 680 691	376 827	313
1.537	9.948 406 195 443	30 823 782	392 730	337	1.587	9.950 421 990 274	50 057 518	376 514	312
1.538	9.948 437 019 225	31 216 512	392 393	337	1.588	9.950 472 047 792	50 434 032	376 202	310
1.539	9.948 468 235 737	31 608 905	392 056	336	1.589	9.950 522 481 824	50 810 234	375 892	309
1.540	9.948 499 844 642	32 000 961	391 720	337	1.590	9.950 573 292 058	51 186 126	375 583	311
1.541	9.948 531 845 603	32 392 681	391 383	334	1.591	9.950 624 478 184	51 561 709	375 272	310
1.542	9.948 564 238 284	32 784 064	391 049	336	1.592	9.950 676 039 893	51 936 981	374 962	307
1.543	9.948 597 022 348	33 175 113	390 713	334	1.593	9.950 727 976 874	52 311 943	374 655	308
1.544	9.948 630 197 461	33 565 826	390 379	332	1.594	9.950 780 288 817	52 686 598	374 347	309
1.545	9.948 663 763 287	33 956 205	390 047	335	1.595	9.950 832 975 415	53 060 945	374 038	308
1.546	9.948 697 719 492	34 346 252	389 712	331	1.596	9.950 886 036 360	53 434 983	373 730	305
1.547	9.948 732 065 744	34 735 964	389 381	332	1.597	9.950 939 471 343	53 808 713	373 425	307
1.548	9.948 766 801 708	35 125 345	389 049	332	1.598	9.950 993 280 056	54 182 138	373 118	306
1.549	9.948 801 927 053	35 514 394	388 717	331	1.599	9.951 047 462 194	54 555 256	372 812	305
1.550	9.948 837 441 447	35 903 111	388 386	331	1.600	9.951 102 017 450	54 928 068	372 507	305

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.600	9.951 102 017 450	54 928 068	372 507	305	1.650	9.954 298 875 428	73 189 158	357 833	283
1.601	9.951 156 945 518	55 300 575	372 202	303	1.651	9.954 372 064 586	73 546 991	357 550	282
1.602	9.951 212 246 093	55 672 777	371 899	305	1.652	9.954 445 611 577	73 904 541	357 268	279
1.603	9.951 267 918 870	56 044 676	371 594	304	1.653	9.954 519 516 118	74 261 809	356 989	282
1.604	9.951 323 963 546	56 416 270	371 290	303	1.654	9.954 593 777 927	74 618 798	356 707	283
1.605	9.951 380 379 816	56 787 560	370 987	302	1.655	9.954 668 396 725	74 975 505	356 424	277
1.606	9.951 437 167 376	57 158 547	370 685	302	1.656	9.954 743 372 230	75 331 929	356 147	278
1.607	9.951 494 325 923	57 529 232	370 383	301	1.657	9.954 818 704 159	75 688 076	355 869	282
1.608	9.951 551 855 155	57 899 615	370 082	301	1.658	9.954 894 392 235	76 043 945	355 587	279
1.609	9.951 609 754 770	58 269 697	369 781	300	1.659	9.954 970 436 180	76 399 532	355 308	277
1.610	9.951 668 024 467	58 639 478	369 481	302	1.660	9.955 046 835 712	76 754 840	355 031	279
1.611	9.951 726 663 945	59 008 959	369 179	299	1.661	9.955 123 590 552	77 109 871	354 752	276
1.612	9.951 785 672 904	59 378 138	368 880	298	1.662	9.955 200 700 423	77 464 623	354 476	277
1.613	9.951 845 051 042	59 747 018	368 582	301	1.663	9.955 278 165 046	77 819 099	354 199	278
1.614	9.951 904 798 060	60 115 600	368 281	296	1.664	9.955 355 984 045	78 173 298	353 921	275
1.615	9.951 964 913 660	60 483 881	367 985	298	1.665	9.955 434 157 443	78 527 219	353 646	276
1.616	9.952 025 397 541	60 851 866	367 687	297	1.666	9.955 512 684 662	78 880 865	353 370	277
1.617	9.952 086 249 407	61 219 553	367 390	298	1.667	9.955 591 565 527	79 234 235	353 093	273
1.618	9.952 147 468 960	61 586 943	367 092	297	1.668	9.955 670 799 762	79 587 328	352 820	275
1.619	9.952 209 055 903	61 954 035	366 795	294	1.669	9.955 750 387 090	79 940 148	352 545	274
1.620	9.952 271 009 938	62 320 830	366 501	296	1.670	9.955 830 327 238	80 292 693	352 271	274
1.621	9.952 333 330 768	62 687 331	366 205	295	1.671	9.955 910 619 931	80 644 964	351 997	273
1.622	9.952 396 018 099	63 053 536	365 910	294	1.672	9.955 991 264 895	80 996 961	351 724	273
1.623	9.952 459 071 635	63 419 446	365 616	296	1.673	9.956 072 261 856	81 348 685	351 451	273
1.624	9.952 522 491 081	63 785 062	365 320	293	1.674	9.956 153 610 541	81 700 136	351 178	271
1.625	9.952 586 276 143	64 150 382	365 027	291	1.675	9.956 235 310 677	82 051 314	350 907	273
1.626	9.952 650 426 525	64 515 409	364 736	294	1.676	9.956 317 361 991	82 402 221	350 634	270
1.627	9.952 714 941 934	64 880 145	364 442	293	1.677	9.956 399 764 212	82 752 855	350 364	273
1.628	9.952 779 822 079	65 244 587	364 149	292	1.678	9.956 482 517 067	83 103 219	350 091	269
1.629	9.952 845 066 666	65 608 736	363 857	290	1.679	9.956 565 620 286	83 453 310	349 822	269
1.630	9.952 910 675 402	65 972 593	363 567	291	1.680	9.956 649 073 596	83 803 132	349 553	269
1,631	9.952 976 647 995	66 336 160	363 276	291	1.681	9.956 732 876 728	84 152 685	349 284	271
1.632	9.953 042 984 155	66 699 436	362 985	290	1.682	9.956 817 029 413	84 501 969	349 013	269
1.633	9.953 109 683 591	67 062 421	362 695	289	1.683	9.956 901 531 382	84 850 982	348 744	269
1.634	9.953 176 746 012	67 425 116	362 406	291	1.684	9.956 986 382 364	85 199 726	348 475	268
1.635	9.953 244 171 128	67 787 522	362 115	286	1.685	9.957 071 582 090	85 548 201	348 207	266
1.636	9.953 311 958 650	68 149 637	361 829	291	1.686	9.957 157 130 291	85 896 408	347 941	268
1.637	9.953 380 108 287	68 511 466	361 538	287	1.687	9.957 243 026 699	86 244 349	347 673	267
1.638	9.953 448 619 753	68 873 004	361 251	285	1.688	9.957 329 271 048	86 592 022	347 406	265
1.639	9.953 517 492 757	69 234 255	360 966	288	1.689	9.957 415 863 070	86 939 428	347 141	268
1.640	9.953 586 727 012	69 595 221	360 678	287	1.690	9.957 502 802 498	87 286 569	346 873	266
1.641	9.953 656 322 233	69 955 899	360 391	286	1.691	9.957 590 089 067	87 633 442	346 607	265
1.642	9.953 726 278 132	70 316 290	360 105	286	1.692	9.957 677 722 509	87 980 049	346 342	264
1.643	9.953 796 594 422	70 676 395	359 819	285	1.693	9.957 765 702 558	88 326 392	346 078	266
1.644	9.953 867 270 817	71 036 214	359 534	284	1.694	9.957 854 028 950	88 672 470	345 812	261
1.645	9.953 938 307 031	71 395 748	359 250	285	1.695	9.957 942 701 420	89 018 282	345 551	265
1.646	9.954 009 702 779	71 754 998	358 965	283	1.696	9.958 031 719 702	89 363 833	345 286	265
1.647	9.954 081 457 777	72 113 963	358 682	284	1.697	9.958 121 083 535	89 709 119	345 021	263
1.648	9.954 153 571 740	72 472 645	358 398	283	1.698	9.958 210 792 654	90 054 140	344 758	260
1.649	9.954 226 044 385	72 831 043	358 115	282	1.699	9.958 300 846 794	90 398 898	344 498	264
1.650	9.954 298 875 428	73 189 158	357 833	283	1.700	9.958 391 245 692	90 743 396	344 234	261

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.700	9.958 391 245 692	90 743 396	344 234	261	1.750	9.963 345 058 874	107 641 803	331 602	245
1.701	9.958 481 989 088	91 087 630	343 973	260	1.751	9.963 452 700 677	107 973 405	331 357	242
1.702	9.958 573 076 718	91 431 603	343 712	262	1.752	9.963 560 674 082	108 304 762	331 115	243
1.703	9.958 664 508 321	91 775 315	343 450	260	1.753	9.963 668 978 844	108 635 877	330 872	243
1.704	9.958 756 283 636	92 118 765	343 190	261	1.754	9.963 777 614 721	108 966 749	330 629	241
1.705	9.958 848 402 401	92 461 955	342 929	260	1.755	9.963 886 581 470	109 297 378	330 388	243
1.706	9.958 940 864 356	92 804 884	342 669	258	1.756	9.963 995 878 848	109 627 766	330 145	241
1.707	9.959 033 669 240	93 147 553	342 411	260	1.757	9.964 105 506 614	109 957 911	329 904	241
1.708	9.959 126 816 793	93 489 964	342 151	259	1.758	9.964 215 464 525	110 287 815	329 663	240
1.709	9.959 220 306 757	93 832 115	341 892	257	1.759	9.964 325 752 340	110 617 478	329 423	241
1.710	9.959 314 138 872	94 174 007	341 635	261	1.760	9.964 436 369 818	110 946 901	329 182	241
1.711	9.959 408 312 879	94 515 642	341 374	256	1.761	9.964 547 316 719	111 276 083	328 941	239
1.712	9.959 502 828 521	94 857 016	341 118	254	1.762	9.964 658 592 802	111 605 024	328 702	239
1.713	9.959 597 685 537	95 198 134	340 864	260	1.763	9.964 770 197 826	111 933 726	328 463	240
1.714	9.959 692 883 671	95 538 998	340 604	257	1.764	9.964 882 131 552	112 262 189	328 223	238
1.715	9.959 788 422 669	95 879 602	340 347	255	1.765	9.964 994 393 741	112 590 412	327 985	238
1.716	9.959 884 302 271	96 219 949	340 092	256	1.766	9.965 106 984 153	112 918 397	327 747	239
1.717	9.959 980 522 220	96 560 041	339 836	255	1.767	9.965 219 902 550	113 246 144	327 508	237
1.718	9.960 077 082 261	96 899 877	339 581	255	1.768	9.965 333 148 694	113 573 652	327 271	238
1.719	9.960 173 982 138	97 239 458	339 326	256	1.769	9.965 446 722 346	113 900 923	327 033	237
1.720	9.960 271 221 596	97 578 784	339 070	252	1.770	9.965 560 623 269	114 227 956	326 796	237
1.721	9.960 368 800 380	97 917 854	338 818	256	1.771	9.965 674 851 225	114 554 752	326 559	235
1.722	9.960 466 718 234	98 256 672	338 562	251	1.772	9.965 789 405 977	114 881 311	326 324	237
1.723	9.960 564 974 906	98 595 234	338 311	254	1.773	9.965 904 287 288	115 207 635	326 087	236
1.724	9.960 663 570 140	98 933 545	338 057	255	1.774	9.966 019 494 923	115 533 722	325 851	234
1.725	9.960 762 503 685	99 271 602	337 802	250	1.775	9.966 135 028 645	115 859 573	325 617	237
1.726	9.960 861 775 287	99 609 404	337 552	252	1.776	9.966 250 888 218	116 185 190	325 380	234
1.727	9.960 961 384 691	99 946 956	337 300	253	1.777	9.966 367 073 408	116 510 570	325 146	234
1.728	9.961 061 331 647	100 284 256	337 047	251	1.778	9.966 483 583 978	116 835 716	324 912	234
1.729	9.961 161 615 903	100 621 303	336 796	251	1.779	9.966 600 419 694	117 160 628	324 678	235
1.730	9.961 262 237 206	100 958 099	336 545	250	1.780	9.966 717 580 322	117 485 306	324 443	232
1.731	9.961 363 195 305	101 294 644	336 295	250	1.781	9.966 835 065 628	117 809 749	324 211	233
1.732	9.961 464 489 949	101 630 939	336 045	251	1.782	9.966 952 875 377	118 133 960	323 978	234
1.733	9.961 566 120 888	101 966 984	335 794	248	1.783	9.967 071 009 337	118 457 938	323 744	232
1.734	9.961 668 087 872	102 302 778	335 546	250	1.784	9.967 189 467 275	118 781 682	323 512	231
1.735	9.961 770 390 650	102 638 324	335 296	250	1.785	9.967 308 248 957	119 105 194	323 281	234
1.736	9.961 873 028 974	102 973 620	335 046	247	1.786	9.967 427 354 151	119 428 475	323 047	230
1.737	9.961 976 002 594	103 308 666	334 799	248	1.787	9.967 546 782 626	119 751 522	322 817	231
1.738	9.962 079 311 260	103 643 465	334 551	247	1.788	9.967 666 534 148	120 074 339	322 586	231
1.739	9.962 182 954 725	103 978 016	334 304	248	1.789	9.967 786 608 487	120 396 925	322 355	231
1.740	9.962 286 932 741	104 312 320	334 056	249	1.790	9.967 907 005 412	120 719 280	322 124	230
1.741	9.962 391 245 061	104 646 376	333 807	244	1.791	9.968 027 724 692	121 041 404	321 894	230
1.742	9.962 495 891 437	104 980 183	333 563	245	1.792	9.968 148 766 096	121 363 298	321 664	230
1.743	9.962 600 871 620	105 313 746	333 318	250	1.793	9.968 270 129 394	121 684 962	321 434	228
1.744	9.962 706 185 366	105 647 064	333 068	246	1.794	9.968 391 814 356	122 006 396	321 206	230
1.745	9.962 811 832 430	105 980 132	332 822	243	1.795	9.968 513 820 752	122 327 602	320 976	228
1.746	9.962 917 812 562	106 312 954	332 579	244	1.796	9.968 636 148 354	122 648 578	320 748	228
1.747	9.963 024 125 516	106 645 533	332 335	246	1.797	9.968 758 796 932	122 969 326	320 520	229
1.748	9.963 130 771 049	106 977 868	332 089	243	1.798	9.968 881 766 258	123 289 846	320 291	227
1.749	9.963 237 748 917	107 309 957	331 846	244	1.799	9.969 005 056 104	123 610 137	320 064	228
1.750	9.963 345 058 874	107 641 803	331 602	245	1.800	9.969 128 666 241	123 930 201	319 836	226

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.800	9.969 128 666 241	123 930 201	319 836	226	1.850	9.975 712 596 599	139 649 881	308 856	214
1.801	9.969 252 596 442	124 250 037	319 610	228	1.851	9.975 852 246 480	139 958 737	308 642	210
1.802	9.969 376 846 479	124 569 647	319 382	225	1.852	9.975 992 205 217	140 267 379	308 432	212
1.803	9.969 501 416 126	124 889 029	319 157	227	1.853	9.976 132 472 596	140 575 811	308 220	212
1.804	9.969 626 305 155	125 208 186	318 930	225	1.854	9.976 273 048 407	140 884 031	308 008	211
1.805	9.969 751 513 341	125 527 116	318 705	227	1.855	9.976 413 932 438	141 192 039	307 797	211
1.806	9.969 877 040 457	125 845 821	318 478	225	1.856	9.976 555 124 477	141 499 836	307 586	209
1.807	9.970 002 886 278	126 164 299	318 253	223	1.857	9.976 696 624 313	141 807 422	307 377	211
1.808	9.970 129 050 577	126 482 552	318 030	226	1.858	9.976 838 431 735	142 114 799	307 166	211
1.809	9.970 255 533 129	126 800 582	317 804	224	1.859	9.976 980 546 534	142 421 965	306 955	208
1.810	9.970 382 333 711	127 118 386	317 580	224	1.860	9.977 122 968 499	142 728 920	306 747	210
1.811	9.970 509 452 097	127 435 966	317 356	223	1.861	9.977 265 697 419	143 035 667	306 537	209
1.812	9.970 636 888 063	127 753 322	317 133	224	1.862	9.977 408 733 086	143 342 204	306 328	209
1.813	9.970 764 641 385	128 070 455	316 909	223	1.863	9.977 552 075 290	143 648 532	306 119	209
1.814	9.970 892 711 840	128 387 364	316 686	223	1.864	9.977 695 723 822	143 954 651	305 910	207
1.815	9.971 021 099 204	128 704 050	316 463	222	1.865	9.977 839 678 473	144 260 561	305 703	208
1.816	9.971 149 803 254	129 020 513	316 241	222	1.866	9.977 983 939 034	144 566 264	305 495	209
1.817	9.971 278 823 767	129 336 754	316 019	222	1.867	9.978 128 505 298	144 871 759	305 286	208
1.818	9.971 408 160 521	129 652 773	315 797	221	1.868	9.978 273 377 057	145 177 045	305 078	206
1.819	9.971 537 813 294	129 968 570	315 576	222	1.869	9.978 418 554 102	145 482 123	304 872	205
1.820	9.971 667 781 864	130 284 146	315 354	221	1.870	9.978 564 036 225	145 786 995	304 667	209
1.821	9.971 798 066 010	130 599 500	315 133	220	1.871	9.978 709 823 220	146 091 662	304 458	205
1.822	9.971 928 665 510	130 914 633	314 913	221	1.872	9.978 855 914 882	146 396 120	304 253	207
1.823	9.972 059 580 143	131 229 546	314 692	219	1.873	9.979 002 311 002	146 700 373	304 046	206
1.824	9.972 190 809 689	131 544 238	314 473	220	1.874	9.979 149 011 375	147 004 419	303 840	205
1.825	9.972 322 353 927	131 858 711	314 253	220	1.875	9.979 296 015 794	147 308 259	303 635	205
1.826	9.972 454 212 638	132 172 964	314 033	219	1.876	9.979 443 324 053	147 611 894	303 430	206
1.827	9.972 586 385 602	132 486 997	313 814	219	1.877	9.979 590 935 947	147 915 324	303 224	203
1.828	9.972 718 872 599	132 800 811	313 595	217	1.878	9.979 738 851 271	148 218 548	303 021	206
1.829	9.972 851 673 410	133 114 406	313 378	220	1.879	9.979 887 069 819	148 521 569	302 815	203
1.830	9.972 984 787 816	133 427 784	313 158	217	1.880	9.980 035 591 388	148 824 384	302 612	205
1.831	9.973 118 215 600	133 740 942	312 941	218	1.881	9.980 184 415 772	149 126 996	302 407	203
1.832	9.973 251 956 542	134 053 883	312 723	218	1.882	9.980 333 542 768	149 429 403	302 204	203
1.833	9.973 386 010 425	134 366 606	312 505	216	1.883	9.980 482 972 171	149 731 607	302 001	204
1.834	9.973 520 377 031	134 679 111	312 289	216	1.884	9.980 632 703 778	150 033 608	301 797	202
1.835	9.973 655 056 142	134 991 400	312 073	219	1.885	9.980 782 737 386	150 335 405	301 595	203
1.836	9.973 790 047 542	135 303 473	311 854	214	1.886	9.980 933 072 791	150 637 000	301 392	203
1.837	9.973 925 351 015	135 615 327	311 640	217	1.887	9.981 083 709 791	150 938 392	301 189	201
1.838	9.974 060 966 342	135 926 967	311 423	215	1.888	9.981 234 648 183	151 239 581	300 988	202
1.839	9.974 196 893 309	136 238 390	311 208	216	1.889	9.981 385 887 764	151 540 569	300 786	201
1.840	9.974 333 131 699	136 549 598	310 992	214	1.890	9.981 537 428 333	151 841 355	300 585	203
1.841	9.974 469 681 297	136 860 590	310 778	215	1.891	9.981 689 269 688	152 141 940	300 382	199
1.842	9.974 606 541 887	137 171 368	310 563	215	1.892	9.981 841 411 628	152 442 322	300 183	202
1.843	9.974 743 713 255	137 481 931	310 348	214	1.893	9.981 993 853 950	152 742 505	299 981	200
1.844	9.974 881 195 186	137 792 279	310 134	214	1.894	9.982 146 596 455	153 042 486	299 781	200
1.845	9.975 018 987 465	138 102 413	309 920	213	1.895	9.982 299 638 941	153 342 267	299 581	200
1.846	9.975 157 089 878	138 412 333	309 707	213	1.896	9.982 452 981 208	153 641 848	299 381	201
1.847	9.975 295 502 211	138 722 040	309 494	214	1.897	9.982 606 623 056	153 941 229	299 180	197
1.848	9.975 434 224 251	139 031 534	309 280	213	1.898	9.982 760 564 285	154 240 409	298 983	202
1.849	9.975 573 255 785	139 340 814	309 067	211	1.899	9.982 914 804 694	154 539 392	298 781	196
1.850	9.975 712 596 599	139 649 881	308 856	214	1.900	9.983 069 344 086	154 838 173	298 585	201

a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.	a	Log. Γa.	Diff. I.	II.	III.
1.900	9.983 069 344 086	154 838 173	298 585	201	1.950	9.991 173 182 172	169 528 926	288 957	187
1.901	9.983 224 182 259	155 136 758	298 384	197	1.951	9.991 342 711 098	169 817 883	288 770	185
1.902	9.983 379 319 017	155 435 142	298 187	199	1.952	9.991 512 528 981	170 106 653	288 585	187
1.903	9.983 534 754 159	155 733 329	297 988	197	1.953	9.991 682 635 634	170 395 238	288 398	187
1.904	9.983 690 487 488	156 031 317	297 791	199	1.954	9.991 853 030 872	170 683 636	288 211	185
1.905	9.983 846 518 805	156 329 108	297 592	196	1.955	9.992 023 714 508	170 971 847	288 026	185
1.906	9.984 002 847 913	156 626 700	297 396	198	1.956	9.992 194 686 355	171 259 873	287 841	184
1.907	9.984 159 474 613	156 924 096	297 198	195	1.957	9.992 365 946 228	171 547 714	287 657	185
1.908	9.984 316 398 709	157 221 294	297 003	199	1.958	9.992 537 493 942	171 835 371	287 472	184
1.909	9.984 473 620 003	157 518 297	296 804	196	1.959	9.992 709 329 313	172 122 843	287 288	185
1.910	9.984 631 138 300	157 815 101	296 608	195	1.960	9.992 881 452 156	172 410 131	287 103	184
1.911	9.984 788 953 401	158 111 709	296 413	197	1.961	9.993 053 862 287	172 697 234	286 919	184
1.912	9.984 947 065 110	158 408 122	296 216	195	1.962	9.993 226 559 521	172 984 153	286 735	183
1.913	9.985 105 473 232	158 704 338	296 021	195	1.963	9.993 399 543 674	173 270 888	286 552	184
1.914	9.985 264 177 570	159 000 359	295 826	196	1.964	9.993 572 814 562	173 557 440	286 368	183
1.915	9.985 423 177 929	159 296 185	295 630	194	1.965	9.993 746 372 002	173 843 808	286 185	183
1.916	9.985 582 474 114	159 591 815	295 436	195	1.966	9.993 920 215 810	174 129 993	286 002	183
1.917	9.985 742 065 929	159 887 251	295 241	194	1.967	9.994 094 345 803	174 415 995	285 819	182
1.918	9.985 901 953 180	160 182 492	295 047	195	1.968	9.994 268 761 798	174 701 814	285 637	182
1.919	9.986 062 135 672	160 477 539	294 852	193	1.969	9.994 443 463 612	174 987 451	285 455	182
1.920	9.986 222 613 211	160 772 391	294 659	194	1.970	9.994 618 451 063	175 272 906	285 273	182
1.921	9.986 383 385 602	161 067 050	294 465	193	1.971	9.994 793 723 969	175 558 179	285 091	182
1.922	9.986 544 452 652	161 361 515	294 272	193	1.972	9.994 969 282 148	175 843 270	284 909	180
1.923	9.986 705 814 167	161 655 787	294 079	194	1.973	9.995 145 125 418	176 128 179	284 729	183
1.924	9.986 867 469 954	161 949 866	293 885	191	1.974	9.995 321 253 597	176 412 908	284 546	179
1.925	9.987 029 419 820	162 243 751	293 694	194	1.975	9.995 497 666 505	176 697 454	284 367	182
1.926	9.987 191 663 571	162 537 445	293 500	191	1.976	9.995 674 363 959	176 981 821	284 185	181
1.927	9.987 354 201 016	162 830 945	293 309	192	1.977	9.995 851 345 780	177 266 006	284 004	178
1.928	9.987 517 031 961	163 124 254	293 117	192	1.978	9.996 028 611 786	177 550 010	283 826	181
1.929	9.987 680 156 215	163 417 371	292 925	192	1.979	9.996 206 161 796	177 833 836	283 645	181
1.930	9.987 843 573 586	163 710 296	292 733	189	1.980	9.996 383 995 632	178 117 481	283 464	177
1.931	9.988 007 283 882	164 003 029	292 544	194	1.981	9.996 562 113 113	178 400 945	283 287	182
1.932	9.988 171 286 911	164 295 573	292 350	188	1.982	9.996 740 514 058	178 684 232	283 105	177
1.933	9.988 335 582 484	164 587 923	292 162	191	1.983	9.996 919 198 290	178 967 337	282 928	181
1.934	9.988 500 170 407	164 880 085	291 971	191	1.984	9.997 098 165 627	179 250 265	282 747	176
1.935	9.988 665 050 492	165 172 056	291 780	190	1.985	9.997 277 415 892	179 533 012	282 571	181
1.936	9.988 830 222 548	165 463 836	291 590	188	1.986	9.997 456 948 904	179 815 583	282 390	176
1.937	9.988 995 686 384	165 755 426	291 402	192	1.987	9.997 636 764 487	180 097 973	282 214	180
1.938	9.989 161 441 810	166 046 828	291 210	187	1.988	9.997 816 862 460	180 380 187	282 034	176
1.939	9.989 327 488 638	166 338 038	291 023	191	1.989	9.997 997 242 647	180 662 221	281 858	179
1.940	9.989 493 826 676	166 629 061	290 832	187	1.990	9.998 177 904 868	180 944 079	281 679	177
1.941	9.989 660 455 737	166 919 893	290 645	189	1.991	9.998 358 848 947	181 225 758	281 502	176
1.942	9.989 827 375 630	167 210 538	290 456	188	1.992	9.998 540 074 705	181 507 260	281 326	179
1.943	9.989 994 586 168	167 500 994	290 268	189	1.993	9.998 721 581 965	181 788 586	281 147	174
1.944	9.990 162 087 162	167 791 262	290 079	188	1.994	9.998 903 370 551	182 069 733	280 973	179
1.945	9.990 329 878 424	168 081 341	289 891	186	1.995	9.999 085 440 284	182 350 706	280 794	175
1.946	9.990 497 959 765	168 371 232	289 705	188	1.996	9.999 267 790 990	182 631 500	280 619	176
1.947	9.990 666 330 997	168 660 937	289 517	187	1.997	9.999 450 422 490	182 912 119	280 443	176
1.948	9.990 834 991 934	168 950 454	289 330	188	1.998	9.999 633 334 609	183 192 562	280 267	176
1.949	9.991 003 942 388	169 239 784	289 142	185	1.999	9.999 816 527 171	183 472 829	280 091	175
1.950	9.991 173 182 172	169 528 926	288 957	187	2.000	0.000 000 000 000	183 752 920	279 916	175

DEUXIÈME SECTION.

§ I. *De l'intégrale* $\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r}$ *et autres semblables, prises depuis* $z=0$ *jusqu'à* $z=\infty$.

(95). EULER a démontré (*Calc. int.*, *tome I*, *page* 252), qu'en supposant les nombres a et n entiers et $a<n$, l'intégrale $\int \frac{z^{a-1}dz}{1+z^n}$, prise entre les limites $z=0$, $z=\infty$, est égale à $\frac{\pi}{n\sin\frac{a\pi}{n}}$. Si on met z à la place de z^n et $\frac{a}{n}$ à la place de a, les limites de l'intégrale resteront les mêmes, et on aura la formule

$$(a) \qquad \int \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad \text{lim.} \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

laquelle est démontrée pour toute valeur rationnelle de a plus petite que l'unité. Mais comme deux quantités rationnelles peuvent différer entr'elles aussi peu qu'on voudra, il est évident que la formule a lieu pour une valeur quelconque de a, rationnelle ou irrationnelle, mais plus petite que l'unité.

(96). Cette formule, l'une des plus remarquables de la théorie des intégrales définies, se lie avec plusieurs autres qui ne méritent pas moins d'attention. J'observe d'abord que l'intégrale dont il s'agit est composée de deux parties, l'une prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, l'autre prise depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$. Pour avoir cette seconde partie, il faut mettre $\frac{1}{z}$ à la place de z, et on aura l'intégrale $\int \frac{z^{-a}dz}{1+z}$, qui devra être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.

On aura donc, en réunissant ces deux parties et mettant x à la place de z,

$$(b) \qquad \int \frac{(x^{a-1}+x^{-a})dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right.$$

(97). Cette dernière formule peut être démontrée directement, quel que soit a; en effet, l'intégration par séries donne, entre les limites $x=0$, $x=1$,

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} - \frac{1}{3+a} + \text{etc.},$$

$$\int \frac{x^{-a}dx}{1+x} = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{3-a} - \frac{1}{4-a} + \text{etc.}$$

Ajoutant ces deux suites, on aura l'intégrale cherchée

$$Z = \frac{1}{a} + \frac{2a}{1-a^2} - \frac{2a}{4-a^2} + \frac{2a}{9-a^2} - \frac{2a}{16-a^2} + \text{etc.}$$

Or suivant une formule de l'*Introd. in anal.*, art. 181, le second membre se réduit à $\frac{\pi}{\sin a\pi}$; ainsi on a généralement $Z = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

(98). Une troisième formule, qui se rapproche beaucoup des deux précédentes, est celle de l'art. 54, savoir :

$$(c) \qquad \int \frac{(x^{a-1}-x^{-a})dx}{1-x} = \pi \cot a\pi. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right.$$

Pour faire voir comment l'équation (b) se déduirait de celle-ci, mettons dans cette dernière x^2 à la place de x, et $\frac{a}{2}$ au lieu de a, nous aurons

$$\int \frac{(x^{a-1}-x^{1-a})dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \cot \tfrac{1}{2} a\pi.$$

Dans celle-ci mettons $1-a$ au lieu de a, il viendra

$$\int \frac{(x^{-a}-x^{a})dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a\pi.$$

Ajoutant ces deux formules, la somme donne exactement l'équation (b); ainsi cette équation n'est qu'un corollaire de l'équation (c).

(99). Soit $V = z^a(1+z)^{-r}$, on aura, en différentiant cette fonction

$$dV = (a-r)\,\frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r} + \frac{rz^{a-1}dz}{(1+z)^{r+1}}.$$

Intégrant de part et d'autre, et observant que V s'évanouit dans les deux limites $z=0$, $z=\infty$, pourvu qu'on suppose a positif et $<r$, on aura cette formule de réduction :

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^{r+1}} = \frac{r-a}{r}\int\frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r};$$

d'où l'on tire successivement

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^2} = \frac{1-a}{1}.\int\frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{1-a}{1}.\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^3} = \frac{2-a}{2}.\int\frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^2} = \frac{1-a.2-a}{1.2}.\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

et en général, r étant un entier quelconque,

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r} = \frac{1-a.2-a\ldots r-1-a}{1.2\ldots\ldots r-1}.\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Mais par la propriété des fonctions Γ, on a

$$\frac{1-a.2-a.3-a..\ r-1-a}{1.2.3\ldots\ldots\ \ldots r-1} = \frac{\Gamma(r-a)}{\Gamma r\Gamma(1-a)},$$

et d'un autre côté, $\frac{\pi}{\sin a\pi} = \Gamma a\Gamma(1-a)$; la formule précédente se réduit donc à cette forme très-simple :

$$(d)\qquad \int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r} = \frac{\Gamma a\Gamma(r-a)}{\Gamma r}.\qquad \left\{\begin{matrix} z=0 \\ z=\infty\end{matrix}\right.$$

Par cette transformation, la formule a acquis un plus grand degré de généralité et doit avoir lieu quel que soit le nombre r; elle ne suppose même plus qu'on ait $a<1$, mais seulement qu'on a $a<r$.

(100). Il est facile de parvenir, par une autre voie, à cette formule générale. Pour cela, soit $z = \frac{1}{x} - 1$, on aura la transformée $\int x^{r-1-a}dx(1-x)^{a-1}$, laquelle devra être intégrée entre les limites $x=0$, $x=1$. Or cette nouvelle intégrale est une fonction Eulérienne de première espèce, qu'on peut représenter par $(r-a, a)$, et sa valeur, d'après la formule (3), est

$$(r-a,\ a) = \frac{\Gamma a \Gamma(r-a)}{\Gamma r},$$

ce qui s'accorde avec l'équation (d). Dans cette nouvelle démonstration, les nombres a et r sont des nombres positifs quelconques, et on suppose seulement $a<r$, ce qui donne une grande généralité à l equation (d).

(101). Dans l'intégrale $\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r}$, on peut distinguer deux parties, l'une prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, l'autre depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$. Pour avoir cette dernière on fera $z=\frac{1}{x}$, et on aura la nouvelle intégrale $\int \frac{x^{r-a-1}dx}{(1+x)^r}$, qui devra être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. De là on voit que la formule (d) équivaut à la suivante, où l'intégrale est prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$,

$$(e) \qquad \int \frac{(x^{a-1}+x^{r-a-1})dx}{(1+x)^r} = \frac{\Gamma a \Gamma(r-a)}{\Gamma r} \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

(102). Si dans la formule (d) on met kz à la place de z, ce qui ne change pas les limites de l'intégrale, on aura

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{(1+kz)^r} = k^{-a}.\frac{\Gamma a \Gamma(r-a)}{\Gamma r}.$$

Soit $k=c(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ et $k'=c(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)$, on aura les deux équations

$$\int\left(\frac{z^{a-1}dz}{(1+kz)^r}+\frac{z^{a-1}dz}{(1+k'z)^r}\right) = 2c^{-a}\cos a\theta.\frac{\Gamma a\Gamma(r-a)}{\Gamma r},$$

$$\int\left(\frac{z^{a-1}dz}{(1+kz)^r}-\frac{z^{a-1}dz}{(1+k'z)^r}\right) = -2c^{-a}\sin a\theta.\frac{\Gamma a\Gamma(r-a)}{\Gamma r}.\sqrt{-1};$$

si l'on fait $r=1$, ces équations donnent les deux suivantes :

$$\int\frac{z^{a-1}dz(1+cz\cos\theta)}{1+2cz\cos\theta+c^2z^2}=\frac{\pi c^{-a}}{\sin a\pi}.\cos a\theta,$$

$$\int\frac{z^a dz}{1+2cz\cos\theta+c^2z^2}=\frac{\pi c^{-a}}{\sin a\pi}.\frac{\sin a\theta}{\sin\theta};$$

mais j'observe que la première n'est qu'une conséquence de la seconde ; ainsi on peut s'en tenir à celle-ci, et faisant $c=1$, ce qui ne diminue pas sa généralité, on aura la formule

$$(f)\qquad \int\frac{z^a dz}{1+2z\cos\theta+z^2}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.\frac{\sin a\theta}{\sin\theta}.\qquad \left\{\begin{matrix}z=0\\ z=\infty\end{matrix}\right.$$

Cette formule suppose $a<1$; si on change le signe de a elle donne

$$\int\frac{z^{-a}dz}{1+2z\cos\theta+z^2}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.\frac{\sin a\theta}{\sin\theta};\qquad \left\{\begin{matrix}z=0\\ z=\infty\end{matrix}\right.$$

ainsi l'intégrale conserve la même valeur, et c'est ce qu'on trouverait immédiatement en mettant $\frac{1}{z}$ à la place de z dans la formule (f).

(103). Considérons maintenant l'intégrale $\int\frac{(z^a+z^{-a})dz}{1+2z\cos\theta+z^2}$ comme composée de deux parties, l'une depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, l'autre depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$: il est aisé de voir que cette seconde partie est égale à la première; car en mettant $\frac{1}{z}$ à la place de z, l'intégrale reste la même, au signe près. On a donc cette autre formule, qui suppose $a<1$:

$$(g)\qquad \int\frac{(x^a+x^{-a})dx}{1+2x\cos\theta+x^2}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.\frac{\sin a\theta}{\sin\theta}.\qquad \left\{\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}\right.$$

(104). Si l'on multiplie par $d\theta\sin\theta$ les deux membres de l'équation (f), et qu'on intègre par rapport à θ depuis $\theta=0$, on aura la formule

$$(h)\quad \int z^{a-1}dz\log\left(\frac{1+2z+z^2}{1+2z\cos\theta+z^2}\right)=\frac{2\pi}{a\sin a\pi}(1-\cos a\theta).\quad \left\{\begin{matrix}z=0\\ z=\infty\end{matrix}\right.$$

L'équation (g) donnerait semblablement

$$(i)\quad \int (x^a + x^{-a}) \frac{dx}{x} \log\left(\frac{1+2x+x^2}{1+2x\cos\theta+x^2}\right) = \frac{2\pi}{a\sin a\pi}(1-\cos a\theta);\quad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

elles supposent toutes deux $a<1$.

(105). Dans la formule (g), substituant les valeurs....... $x^a = 1 + alx + \frac{a^2}{2}l^2x + \text{etc.}$, $x^{-a} = 1 - alx + \frac{a^2}{2}l^2x - \text{etc.}$, et supposant que le développement de la quantité $\frac{\sin a\theta}{\sin a\pi}$, suivant les puissances de a, donne la suite

$$\frac{\sin a\theta}{\sin a\pi} = \frac{\theta}{\pi}(1 + A'a^2 + A''a^4 + A'''a^6 + \text{etc.}),$$

on aura la formule

$$\int \frac{dx\left(1 + \frac{a^2}{2}l^2x + \frac{a^4}{2.3.4}l^4x + \text{etc.}\right)}{1+2x\cos\theta+x^2} = \frac{\theta}{2\sin\theta}(1 + A'a^2 + A''a^4 + \text{etc.});$$

d'où résulte cette suite d'intégrales :

$$\int \frac{dx}{1+2x\cos\theta+x^2} = \frac{\theta}{2\sin\theta},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx\, l^2x}{1+2x\cos\theta+x^2} = \frac{\theta}{2\sin\theta}.A',$$

$$\frac{1}{2.3.4}\int \frac{dx\, l^4x}{1+2x\cos\theta+x^2} = \frac{\theta}{2\sin\theta}.A'',$$

etc. ;

ensorte qu'on peut trouver en général la valeur de l'intégrale $Z(2k) = \int \frac{dx\,(lx)^{2k}}{1+2x\cos\theta+x^2}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Il suffirait d'en doubler la valeur, si elle était prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$.

Si l'on substitue les valeurs des coefficiens A', A'', etc., on aura pour les premières valeurs de la fonction $Z(2k)$:

$$Z(0) = \frac{\theta}{2\sin\theta},$$

$$Z(2) = \frac{\theta}{2\sin\theta}\cdot\frac{\pi^2-\theta^2}{3},$$

$$Z(4) = \frac{\theta}{2\sin\theta}\cdot\frac{\pi^2-\theta^2}{3}\cdot\frac{7\pi^2-3\theta^2}{5},$$

etc.

La loi de ces expressions dépend, comme on l'a vu, du développement de la fonction

$$\frac{1-\frac{a^2\theta^2}{2.3}+\frac{a^4\theta^4}{2.3.4.5}-\text{etc.}}{1-\frac{a^2\pi^2}{2.3}+\frac{a^4\pi^4}{2.3.4.5}-\text{etc.}} = 1 + A'a^2 + A''a^4 + \text{etc.}$$

(106). Par les propriétés connues des suites récurrentes, on a

$$\frac{\sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2} = \sin\theta - x\sin 2\theta + x^2\sin 3\theta - x^3\sin 4\theta + \text{etc.}$$

Multipliant par dx et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on aura

$$\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \text{etc.} = \frac{\theta}{2}.$$

Multipliant la même équation par $dx\, l^2x$, intégrant le second membre par la formule $\int x^m dx\, l^2x = \frac{1.2}{(m+1)^3}$, et substituant la valeur de $Z(2)$, on aura

$$\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2^3} + \frac{\sin 3\theta}{3^3} - \text{etc.} = \frac{\theta}{2}A' = \frac{\theta}{2}\cdot\frac{\pi^2-\theta^2}{6}.$$

De même en multipliant par $dx\, l^4x$, intégrant le second membre par la formule $\int x^m dx\, l^4x = \frac{1.2.3.4}{(m+1)^5}$, et substituant la valeur de $Z(4)$, on aura

$$\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2^5} + \frac{\sin 3\theta}{3^5} - \text{etc.} = \frac{\theta}{2}A'' = \frac{\theta}{2}\cdot\frac{\pi^2-\theta^2}{6}\cdot\frac{7\pi^2-3\theta^2}{10}.$$

Ainsi en général on peut sommer la suite

$$\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2^{2m+1}} + \frac{\sin 3\theta}{3^{2m+1}} - \frac{\sin 4\theta}{4^{2m+1}} + \text{etc.}$$

(107). Ces équations, au reste, se déduisent assez simplement de la première que fournit l'intégration directe, savoir,

$$\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\theta.$$

En effet, multipliant celle-ci par $d\theta$, et intégrant depuis $\theta = 0$, on aura

$$1 - \cos\theta - \frac{1}{2^2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{3^2}(1 \cos 3\theta) - \text{etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2}.$$

Appelons M_2 la somme de la suite $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.}$, laquelle est égale à $\left(1 - \frac{2}{2^2}\right)S_2 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{\pi^2}{12}$, on aura

$$\cos\theta - \frac{1}{2^2}\cos 2\theta + \frac{1}{3^2}\cos 3\theta - \text{etc.} = M_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2}.$$

Multipliant celle-ci par $d\theta$ et intégrant depuis $\theta = 0$, il viendra

$$\sin\theta - \frac{1}{2^3}\sin 2\theta + \frac{1}{3^3}\sin 3\theta - \text{etc.} = \theta M_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^3}{2.3},$$

ce qui revient à la valeur trouvée dans l'article précédent.

Continuant ces opérations de la même manière, et désignant par M_n la somme de la suite $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \text{etc.}$, laquelle est égale à $\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)S_n$, on aura cette suite de formules,

$$\cos\theta - \frac{1}{2^4}\cos 2\theta + \frac{1}{3^4}\cos 3\theta - \text{etc.} = M_4 - \frac{\theta^2}{2}M_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^4}{2.3.4},$$

$$\sin\theta - \frac{1}{2^5}\sin 2\theta + \frac{1}{3^5}\sin 3\theta - \text{etc.} = \theta M_4 - \frac{\theta^3}{2.3}M_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^5}{2.3.4.5},$$

$$\cos\theta - \frac{1}{2^6}\cos 2\theta + \frac{1}{3^6}\cos 3\theta - \text{etc.} = M_6 - \frac{\theta^2}{2}M_4 + \frac{\theta^4}{2.3.4}M_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^6}{2.3.4.5.6};$$

etc.

La

La loi de ces expressions est manifeste ; elle dépend de celle des quantités M_n, et par conséquent de celle des quantités S_n qui est bien connue.

(108). Si on différentie l'équation (f) par rapport à θ, on aura

$$(k) \qquad \int \frac{z^{a+1}dz}{(1+2z\cos\theta+z^2)^2} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \cdot \frac{a\sin\theta\cos a\theta - \cos\theta\sin a\theta}{2\sin^3\theta}. \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

Par des différentiations ultérieures, on trouverait en général la valeur de l'intégrale $\int \frac{z^{a+k}\,dz}{(1+2z\cos\theta+z^2)^{k+1}}$, k étant un entier quelconque.

De même par la différentiation de l'équation (g), on trouve l'intégrale

$$(l) \qquad \int \frac{(x^{1+a}+x^{1-a})\,dx}{(1+2x\cos\theta+x^2)^2} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \cdot \frac{a\sin\theta\cos a\theta - \cos\theta\sin a\theta}{2\sin^3\theta}. \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

On connaîtra donc ainsi, par des différentiations réitérées, l'intégrale $\int \frac{(x^{k+a}+x^{k-a})\,dx}{(1+2x\cos\theta+x^2)^{k+1}}$, k étant un nombre entier.

Mais ces formules ne sont point applicables au cas où l'exposant du polynome ne serait pas un nombre entier.

Ainsi lorsque r ne sera pas entier, l'intégrale $Z = \int \frac{z^{a+r-1}dz}{(1+2z\cos\theta+z^2)^r}$ paraît dépendre d'un ordre de transcendantes plus élevé que les fonctions Γ. Cependant si l'on a $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on pourra mettre $z^{\frac{1}{2}}$ à la place de z, et l'intégrale précédente deviendra $Z = \int \frac{\frac{1}{2} z^{\frac{a+r}{2}-1}dz}{(1+z)^r}$; sa valeur déduite de la formule (d) sera donc $Z = \frac{\Gamma\frac{r+a}{2}\,\Gamma\frac{r-a}{2}}{2\Gamma r}$, de sorte qu'elle ne dépend alors que des fonctions Γ.

Si l'on observe maintenant que la quantité $(1+2z\cos\theta+z^2)^{-r}$ peut se développer en cette suite convergente,

$$(1+z^2)^{-r} - \frac{r}{1}\cdot 2z\cos\theta(1+z^2)^{-r-1} + \frac{r.r+1}{1.2}\cdot 4z^2\cos^2\theta(1+z^2)^{-r-2} - \text{etc.}$$

et qu'ainsi on a

$$\int \frac{z^{a+r-1}dz}{(1+2z\cos\theta+z^2)^r} = \int \frac{z^{a+r-1}dz}{(1+z^2)^r} - \frac{r}{1}.2\cos\theta \int \frac{z^{a+r}dz}{(1+z^2)^{r+1}}$$
$$+ \frac{r.\overline{r+1}}{2}.4\cos^2\theta \int \frac{z^{a+r+1}dz}{(1+z^2)^{r+2}} - \text{etc.};$$

les intégrales du second membre pourront être évaluées par la formule qu'on vient de trouver pour le cas de $\theta = \frac{1}{2}\pi$; de sorte qu'en faisant pour abréger, $\Gamma(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}a)\,\Gamma(\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}a) = \varphi(r)$, a étant constant, on aura généralement

$$\int \frac{z^{a+r-1}dz}{(1+2z\cos\theta+z^2)^r} = \frac{1}{2\Gamma r}\left[\varphi(r) - \frac{2\cos\theta}{1}\varphi(r+1) + \frac{4\cos^2\theta}{1.2}\varphi(r+2) - \text{etc.}\right],$$

formule qui pourra se réduire ultérieurement au moyen de l'équation $\varphi(x+2) = \frac{x^2-a^2}{4}.\varphi(x)$. Soit pour abréger,

$$M = 1 + \frac{\cos^2\theta}{1.2}(r^2-a^2) + \frac{\cos^4\theta}{1.2.3.4}(r^2-a^2)(\overline{r+2}^2-a^2)$$
$$+ \frac{\cos^6\theta}{1.2.3.4.5.6}(r^2-a^2)(\overline{r+2}^2-a^2)(\overline{r+4}^2-a^2) + \text{etc.},$$

$$N = \cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{1.2.3}(\overline{r+1}^2-a^2) + \frac{\cos^5\theta}{1.2.3.4.5}(\overline{r+1}^2-a^2)(\overline{r+3}^2-a^2) + \text{etc.},$$

on aura la formule générale

$$\int \frac{z^{a+r-1}dz}{(1+2z\cos\theta+z^2)^r} = \frac{M\Gamma(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}a)\Gamma(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}a)}{2\Gamma r} - \frac{N\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}a)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}a)}{\Gamma r}.$$

Quant aux suites désignées par M et N, leurs sommes sont connues lorsque $r=1$, et même lorsque r est un entier, puisqu'alors l'intégrale est donnée par la formule (f) et par ses différentielles successives prises par rapport à θ; mais il reste à trouver ces sommes pour une valeur quelconque de r.

(109). Considérons enfin la quantité $P = z^a(1+z)^{1-r} - z^{a+1-r}$, dans laquelle nous supposerons à la fois $a < r$ et $a+1 > r$; on aura par la différentiation,

$$dP = \frac{az^{a-1}dz}{(1+z)^r} + (a+1-r)\left(\frac{z^a dz}{(1+z)^r} - z^{a-r}dz\right).$$

Intégrant de part et d'autre depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, et observant que dans ces deux limites P s'évanouit, on aura

$$\int\left(z^{a-r}dz - \frac{z^a dz}{(1+z)^r}\right) = \frac{a}{a+1-r}\int\frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^r}.$$

Substituant la valeur du second membre donnée par l'équation (d), on a la formule

$$(m) \qquad \int\left(z^{a-r}dz - \frac{z^a dz}{(1+z)^r}\right) = \frac{a}{a+1-r}\cdot\frac{\Gamma a\,\Gamma(r-a)}{\Gamma r}. \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

(110). Cette formule s'accorde avec celles de l'article 15, deuxième partie, qui n'en sont que des cas particuliers; elle est remarquable en ce que les deux parties $\int z^{a-r}dz$, $\int\frac{z^a dz}{(1+z)^r}$ sont infinies, et que leur différence peut être déterminée par les fonctions Γ.

Soit $r = a+1-\omega$, ω étant infiniment petit, la formule précédente donne

$$\int\left(\frac{dz}{z^{1-\omega}} - \frac{z^a dz}{(1+z)^{1+a-\omega}}\right) = \frac{a}{\omega}\cdot\frac{\Gamma a\,\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1+a-\omega)}.$$

Mais on a $\Gamma(1+a-\omega) = \Gamma(1+a)\left(1-\omega\cdot\frac{dl\Gamma(1+a)}{da}\right)$ et $\Gamma(1-\omega) = 1+C\omega$; donc

$$\int\left(\frac{dz}{z^{1-\omega}} - \frac{z^a dz}{(1+z)^{1+a-\omega}}\right) = \frac{1}{\omega} + C + \frac{dl\Gamma(1+a)}{da}.$$

Mettant m au lieu de a, prenant la différence des deux équations et supprimant ω, on aura l'expression suivante de la différence de deux intégrales qui sont l'une et l'autre infinies,

$$(n) \qquad \int\left(\frac{z^m dz}{(1+z)^{1+m}} - \frac{z^a dz}{(1+z)^{1+a}}\right) = \frac{dl\Gamma(1+a)}{da} - \frac{dl\Gamma(1+m)}{dm}, \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

et on sait par l'article 50 que le second membre est aussi l'expression de l'intégrale $\int \frac{(x^m - x^a)\,dx}{1-x}$ prise entre les limites $x = 0$, $x = 1$; intégrale qui pourra toujours être exprimée par arcs de cercle et par logarithmes, lorsque m et a seront des nombres rationnels.

§ II. *De l'intégrale* $Z = \int \frac{(1-x^{a-1})(1-x^m)}{1-x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}}$, *prise depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = 1$.

(111). Cette intégrale est une fonction de a et de m ; si on la différentie par rapport à a, m étant constant, on aura

$$\frac{dZ}{da} = \int \frac{x^{a-1}(1-x^m)\,dx}{1-x}.$$

Mettant au lieu du second membre sa valeur donnée par l'équation (17), il viendra

$$dZ = d\,l\Gamma\,(a+m) - d\,l\Gamma a\,;$$

d'où résulte, en intégrant et observant que Z doit s'évanouir lorsque $a = 1$,

$$Z = \int \frac{(1-x^{a-1})(1-x^m)}{1-x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}} = \log.\left(\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma a\,\Gamma(1+m)}\right). \qquad \begin{Bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{Bmatrix}$$

Si l'on met $a+n$ au lieu de a, on aura semblablement

$$\int \frac{(1-x^{a+n-1})(1-x^m)}{1-x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}} = \log\left(\frac{\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a+n)\,\Gamma(1+m)}\right).$$

Donc en retranchant la première de la seconde, il viendra

$$(a) \qquad \int \frac{x^{a-1}dx}{l\frac{1}{x}} \cdot \frac{(1-x^m)(1-x^n)}{1-x} = \log\left(\frac{\Gamma a\,\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(a+m)\Gamma(a+n)}\right). \qquad \begin{Bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{Bmatrix}$$

Cette formule revient à celle qu'a donnée Euler dans le tom. I, part. II, des *Nova Acta Petrop.* 1777.

(112). En appliquant à cette formule les propriétés connues des fonctions Γ, on en déduira aisément tous les théorèmes particuliers auxquels Euler est parvenu dans le mémoire cité. Voici, par exemple, deux de ces théorèmes :

$$(b)\qquad \begin{aligned} &\int \frac{dx}{xlx} \cdot \frac{x^{r-p} - 2x^r + x^{r+p}}{1 - x^{2r}} = \log \cos \frac{p\pi}{2r}, \\ &\int \frac{dx}{xlx} \cdot \frac{x^p - 2x^r + x^{2r-p}}{1 - x^{2r}} = \log \sin \frac{p\pi}{2r}, \end{aligned}$$

où l'on peut observer que le second se déduit du premier, en mettant $r - p$ au lieu de p, et qu'ainsi il suffira de démontrer le premier.

D'abord on peut mettre x à la place de x^{2r}, ce qui ne change pas les limites de l'intégrale; et cette substitution revient à faire $2r = 1$. On aura donc à démontrer la formule

$$\int \frac{dx}{xlx} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2} - p} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2} + p}}{1 - x} = \log \cos p\pi.$$

Or j'observe que cette intégrale peut se mettre sous la forme $\int \frac{x^{-\frac{1}{2} - p}\, dx}{\log x} \cdot \frac{(1 - x^p)^2}{1 - x}$, et que sa valeur, d'après la formule (a), est

$$Z = -\log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - p)\, \Gamma(\frac{1}{2} + p)}{\Gamma\frac{1}{2} \cdot \Gamma\frac{1}{2}}.$$

Mais on a $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$, et $\Gamma(\frac{1}{2} - p)\, \Gamma(\frac{1}{2} + p) = \frac{\pi}{\cos p\pi}$; donc

$$Z = \log \cos p\pi.$$

Les autres théorèmes donnés par Euler se démontrent avec la même facilité; mais le théorème suivant ne se trouve pas dans le mémoire d'Euler, parce qu'il dépend d'une formule qui a été découverte postérieurement.

(113). Puisqu'on a, en vertu de l'équation (D),

$$\frac{\Gamma r\,\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma(2r-1)}=2^{2-2r},$$

on voit qu'il y a un cas où l'on connaît exactement le second membre de l'équation (a); c'est celui où l'on a $a=\frac{1}{2}$, $m=r-1$, $n=r-\frac{1}{2}$. On aura donc

$$\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{l\frac{1}{x}}\cdot\frac{(1-x^{r-1})(1-x^{r-\frac{1}{2}})}{1-x}=(2r-2)\,l2:$$

mettant, pour plus de simplicité, x^2 au lieu de x, et faisant $r=1+\frac{1}{2}a$, on aura la formule

$$(c)\qquad \int\frac{dx}{l\frac{1}{x}}\cdot\frac{(1-x^{a})(1-x^{a+1})}{1-x^2}=a\log 2.\qquad \left\{\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}\right.$$

Cette formule a lieu quel que soit a, pourvu qu'il ne soit pas négatif et plus grand que l'unité. Elle se vérifiera aisément lorsque a est entier, au moyen de la formule $\int\frac{x^m dx}{l\frac{1}{x}}(1-x^n)=l\left(\frac{m+n+1}{m+1}\right)$

Nous remarquerons que si on différentie par rapport à a l'équation (c), il en résulte

$$\int x^a dx\left(\frac{1+x-2x^{a+1}}{1-x^2}\right)=\log 2,$$

ce qui s'accorde avec la première des équations 21, art. 55.

§ III. *De l'intégrale* $Z=\int\frac{x^{p-1}dx}{(1-x)^r(1+ax)^n}$, *prise depuis* $x=0$ *jusqu'à* $x=1$.

(114). Pour que l'intégrale ne devienne pas infinie dans l'une de ses limites, on suppose à la fois $p>0$ et $r<1$; de plus il est nécessaire de supposer $1+a>0$ pour que $1+ax$ ne devienne pas zéro entre les deux limites de l'intégrale. Cela posé, soit $1-x=z$, on aura $1+ax=1+a-az$, et si aux suppositions précédentes on ajoute celle que $\frac{a}{1+a}$ soit <1, ce qui arrivera toujours si a est positif ou si a est négatif et $<\frac{1}{2}$, on pourra développer $(1+ax)^{-n}$ en cette suite convergente,

$$(1+a)^{-n}\left(1+n.\frac{az}{1+a}+\frac{n.n+1}{1.2}.\frac{a^2z^2}{(1+a)^2}+\text{etc.}\right):$$

on aura donc

$$\mathrm{Z}=(1+a)^{-n}\int\frac{x^{p-1}dx}{z^r}\left(1+n.\frac{az}{1+a}+\frac{n.n+1}{1.2}.\frac{a^2z^2}{(1+a)^2}+\text{etc.}\right).$$

Soit $\mathrm{V}=x^pz^{k-r}$, on aura par la différentiation,

$$d\mathrm{V}=(p+k-r)\,x^{p-1}z^{k-r}dx-(k-r)\,x^{p-1}z^{k-r-1}dx:$$

intégrant de part et d'autre entre les limites données, et observant que V est nul dans ces deux limites, pourvu qu'on prenne $k>r$, on aura

$$\int x^{p-1}z^{k-r}dx=\frac{k-r}{p-r+k}\int x^{p-1}z^{k-r-1}dx.$$

De là résulte successivement,

$$\int x^{p-1}z^{1-r}dx=\frac{1-r}{p-r+1}\int x^{p-1}z^{-r}dx,$$

$$\int x^{p-1}z^{2-r}dx=\frac{2-r}{p-r+2}\int x^{p-1}z^{1-r}dx,$$

etc.

Soit donc, pour abréger, $\mathrm{A}=\int\frac{x^{p-1}dx}{z^r}=\int x^{p-1}dx\,(1-x)^{-r}$, et on aura l'intégrale cherchée

$$(a)\quad \mathrm{Z}=\mathrm{A}(1+a)^{-n}\left(1+\frac{n}{1}.\frac{1-r}{p-r+1}.\frac{a}{1+a}+\frac{n.n+1}{1.2}.\frac{1-r.2-r}{p-r+1.p-r+2}.\frac{a^2}{(1+a)^2}+\text{etc}\right)$$

Quant à la valeur de A, on voit que cette intégrale est une fonction Eulérienne de première espèce, qui peut être représentée par $(p, 1-r)$, et qu'ainsi on a

$$A = \frac{\Gamma p \, \Gamma(1-r)}{\Gamma(p+1-r)}.$$

L'intégrale Z sera donc entièrement connue, si on peut trouver la somme de la suite contenue dans son expression, savoir,

$$Q = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1-r}{p-r+1} \cdot \frac{a}{1+a} + \frac{n.n+1}{1.2} \cdot \frac{1-r.2-r}{p-r+1.p-r+2} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^2} + \text{etc.}:$$

il faut pour cela examiner différens cas.

Premier cas : n + r = p + 1.

(115). Alors en substituant la valeur de n, on aura

$$Q = 1 + (1-r) \cdot \frac{a}{1+a} + \frac{1-r.2-r}{1.2} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^2} + \frac{1-r.2-r.3-r}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{(1+a)^3} + \text{etc.}$$

Cette suite est évidemment sommable, et la somme est

$$Q = \left(1 - \frac{a}{1+a}\right)^{r-1} = (1+a)^{1-r};$$

donc on a généralement

$$(b) \qquad \int \frac{x^{n+r-2}dx}{(1-x)^r(1+ax)^n} = (1+a)^{1-n-r} \cdot \frac{\Gamma(n+r-1)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n}.$$

Cette formule suppose $n+r > 1$ et $r < 1$; et comme la série a été sommée exactement, le résultat ne suppose plus que a, s'il est négatif, soit $< \frac{1}{2}$; il suppose seulement que $1+a$ est positif.

(116). La formule précédente peut se trouver immédiatement par le développement de $(1+ax)^{-n}$ qui donne

$$Z = \int \frac{x^{n+r-2}\,dx}{(1-x)^r}\left(1 - nax + \frac{n.n+1}{2}\,a^2x^2 - \text{etc.}\right):$$

or

or on a en général,

$$\int \frac{x^{n+r+k-2}\,dx}{(1-x)^r} = (n+r+k-1\,,\ 1-r) = \frac{\Gamma(n+r+k-1)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(n+k)},$$

ce qui donne successivement

$$\int \frac{x^{n+r-2}\,dx}{(1+x)^r} = \frac{\Gamma(n+r-1)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n} = \mathrm{A},$$

$$\int \frac{x^{n+r-1}\,dx}{(1+x)^r} = \frac{\Gamma(n+r)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(n+1)} = \frac{n+r-1}{n}\,\mathrm{A},$$

$$\int \frac{x^{n+r}\,dx}{(1+x)^r} = \frac{\Gamma(n+r+1)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(n+2)} = \frac{n+r-1\,.\,n+r}{n\,.\,n+1}\,\mathrm{A},$$

etc.

donc

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}\left(1-(n+r-1)a + \frac{n+r-1\,.\,n+r-2}{1\,.\,2}\,a^2 - \text{etc.}\right),$$

ou

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}\,(1+a)^{1-n-r}.$$

(117). Si dans la formule (b) on fait $n=r$ et $a=1$, on aura

$$\mathrm{Z} = \int \frac{x^{2r-2}\,dx}{(1-x^2)^r} = 2^{1-2r}.\frac{\Gamma(2r-1)\Gamma(1-r)}{\Gamma r};$$

mais dans ce cas l'intégrale Z est elle-même une intégrale Eulérienne de première espèce, qui, en mettant x à la place de x^2, devient $\frac{1}{2}\int x^{r-\frac{3}{2}}dx(1-x)^{-r}$, et peut être représentée par..... $\frac{1}{2}(r-\frac{1}{2},\ 1-r)$; sa valeur est donc $\mathrm{Z} = \frac{1}{2}.\frac{\Gamma(r-\frac{1}{2})\,\Gamma(1-r)}{\Gamma\frac{1}{2}}$, et en vertu de l'équation précédente, on doit avoir

$$\frac{\Gamma(r-\frac{1}{2})\,\Gamma(1-r)}{2\Gamma\frac{1}{2}} = 2^{1-2r}.\frac{\Gamma(2r-1)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma r},$$

ou $\Gamma(r-\frac{1}{2})\Gamma r = \Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma(2r-1).2^{2-2r}$. Faisant $r=\frac{1}{2}+a$, on a l'équation connue :

$$\Gamma a\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2a).\Gamma\tfrac{1}{2}.2^{1-2a},$$

ce qui vérifie nos calculs sans offrir une nouvelle propriété des fonctions Γ.

(118). Reprenons maintenant l'équation (b), pour en déduire quelques autres corollaires. Si l'on fait d'abord $r=0$, on aura

$$\int\frac{x^{n-2}dx}{(1+ax)^n}=(1+a)^{-n}.\frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma n}=\frac{(1+a)^{-n}}{n-1};$$

c'est ce qu'on trouverait immédiatement en faisant $1+ax=\frac{x}{z}$.

Si dans la même équation on fait $n=1$, et qu'on substitue la valeur $\Gamma r\Gamma(1-r)=\frac{\pi}{\sin\pi r}$, on aura la formule

$$(c)\qquad \int\frac{x^{r-1}dx}{(1+ax)(1-x)^r}=\frac{\pi}{\sin\pi r}(1+a)^{-r}.$$

Celle-ci peut encore se démontrer directement d'une manière fort simple. Soit $\frac{x}{1-x}=\frac{z}{a+1}$, ou $x=\frac{z}{a+1+z}$, on aura la transformée $(1+a)^{-r}\int\frac{z^{r-1}dz}{1+z}$, laquelle devra être intégrée depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$; sa valeur devient donc $(1+a)^{-r}\frac{\pi}{\sin\pi r}$.

(119). Soit, pour abréger, $x^{r-1}dx(1-x)^{-r}=dv$; si on prend les différentielles successives de l'équation (c) par rapport à a, et qu'on fasse $\frac{\pi}{\sin\pi r}=\mathrm{A}$, on aura cette nouvelle suite d'intégrales:

$$(d)\qquad \begin{aligned}
&\int\frac{dv}{1+ax}=\mathrm{A}(1+a)^{-r},\\
&\int\frac{xdv}{(1+ax)^2}=\frac{r}{1}.\mathrm{A}(1+a)^{-r-1},\\
&\int\frac{x^2dv}{(1+ax)^3}=\frac{r.r+1}{1.2}\mathrm{A}(1+a)^{-r-2},\\
&\int\frac{x^3dv}{(1+ax)^4}=\frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}\mathrm{A}(1+a)^{-r-3},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Mais en faisant $p=1+ax$, on a $1=p-ax=(p-ax)^2=(p-ax)^3$, etc.; d'où

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{ax}{p^2},\quad \frac{1}{p^3}=\frac{1}{p}-\frac{2ax}{p^2}+\frac{a^2x^2}{p^3},\quad \frac{1}{p^4}=\frac{1}{p}-\frac{3ax}{p^2}+\frac{3a^2x^2}{p^3}-\frac{a^3x^3}{p^4},\ \text{etc.}$$

On connaît, par les formules précédentes, les intégrales $\int\frac{dv}{p}$, $\int\frac{xdv}{p^2}$, $\int\frac{x^2dv}{p^3}$, etc.; donc, par la substitution de ces valeurs, on aura les formules suivantes :

$$(e)\quad \begin{cases} \int\frac{dv}{1+ax}=A(1+a)^{-r}, \\ \int\frac{dv}{(1+ax)^2}=A(1+a)^{-r}\left(1-r.\frac{a}{1+a}\right), \\ \int\frac{dv}{(1+ax)^3}=A(1+a)^{-r}\left(1-2r.\frac{a}{1+a}+\frac{r.r+1}{1.2}.\frac{a^2}{(1+a)^2}\right), \\ \int\frac{dv}{(1+ax)^4}=A(1+a)^{-r}\left(1-3r.\frac{a}{1+a}+3\frac{r.r+1}{1.2}.\frac{a^2}{(1+a)^2}-\frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}.\frac{a^3}{(1+a)^3}\right), \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

formules dont la loi est facile à saisir; elles supposent toujours $1+a$ positif et $r<1$.

(120). Soit proposé de trouver l'intégrale $\int\frac{dv}{(1+ax)(1+bx)}$, dans laquelle les nombres $1+a$, $1+b$, sont supposés positifs. Comme on a

$$\frac{1}{(1+ax)(1+bx)}=\frac{a}{a-b}.\frac{1}{1+ax}-\frac{b}{a-b}.\frac{1}{1+bx},$$

l'intégrale proposée est la même que $\frac{a}{a-b}\int\frac{dv}{1+ax}-\frac{b}{a-b}\int\frac{dv}{1+bx}$; ainsi on aura généralement

$$(f)\qquad \int\frac{dv}{(1+ax)(1+bx)}=\frac{A}{a-b}\left[a(1+a)^{-r}-b(1+b)^{-r}\right].$$

Dans cette formule faisons $a=c(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, $b=c(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)$, ensuite $p^2=1+2c\cos\theta+c^2$ et $\operatorname{tang}\lambda=\frac{c\sin\theta}{1+c\cos\theta}$, nous aurons, par ces substitutions,

$$(g) \qquad \int \frac{dv}{1 + 2cx\cos\theta + c^2x^2} = \mathrm{A}p^{-r} \cdot \frac{\sin(\theta - r\lambda)}{\sin\theta}.$$

(121). D'après ces diverses formules, il est visible que, si $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est une fonction rationnelle de x, dans laquelle le dénominateur Q ne se réduit à zéro pour aucune valeur de x comprise entre o et 1, on pourra toujours exprimer l'intégrale $\int \frac{\mathrm{P}dv}{\mathrm{Q}}$, ou $\int \frac{\mathrm{P}x^{r-1}dx}{\mathrm{Q}(1-x)^r}$, par une quantité de la forme $\frac{\pi}{\sin \pi r} . \mathrm{B}$, B étant une fonction algébrique de quantités connues.

Second cas. $n = r$, $p = r + \frac{1}{2}$.

(122). Alors l'intégrale proposée est $\mathrm{Z} = \int \frac{x^{r-\frac{1}{2}}dx}{(1-x)^r(1+ax)^r}$, et en faisant $\mathrm{A} = \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(1-r)}{\Gamma\frac{3}{2}}$, on aura

$$\mathrm{Z} = \mathrm{A}\left(1 + \frac{r}{1} \cdot \frac{1-r}{3} \cdot \frac{2a}{1+a} + \frac{r.r+1}{1.2} \cdot \frac{1-r.2-r}{3.5} \cdot \frac{4a^2}{(1+a)^2} + \text{etc.}\right).$$

Pour voir plus clairement la loi de cette suite que nous désignerons par Q, soit $r = \frac{1+m}{2}$, nous aurons

$$\mathrm{Q} = 1 + \frac{1-m^2}{1.2.3} \cdot \frac{a}{1+a} + \frac{1-m^2.9-m^2}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^2} + \frac{1-m^2.9-m^2.25-m^2}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{a^3}{(1+a)^3} + \text{etc.}$$

Cette suite est connue, au moins lorsque m est un entier impair, et suivant la formule donnée art. 236 de l'*Introd. in An.*, on a

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = 1 + \frac{1-m^2}{1.2.3}\sin^2\theta + \frac{1-m^2.9-m^2}{1.2.3.4.5}\sin^4\theta + \text{etc.}$$

Donc si on fait $\frac{a}{1+a} = \sin^2\theta$, ou $a = \tang^2\theta$, on aura

$$\mathrm{Q} = \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}.$$

Mais il faut démontrer que la formule précédente, trouvée pour le cas où m est un entier impair, a lieu pour une valeur quelconque de m.

(123). Quel que soit m, le sinus de l'arc $m\theta$ a pour expression

$$\sin m\theta = m\theta - \frac{m^3\theta^3}{1.2.3} + \frac{m^5\theta^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Mais l'arc θ que nous pouvons supposer $< \frac{1}{2}\pi$, se développe de même en cette suite convergente

$$\theta = \sin\theta + \frac{1.1}{2.3}\sin^3\theta + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\sin^5\theta + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\sin^7\theta + \text{etc.}$$

Donc quel que soit m, la valeur de $\frac{\sin m\theta}{m}$ peut se développer en une suite de la forme $\sin\theta + \text{A}\sin^3\theta + \text{B}\sin^5\theta + \text{etc.}$, les coefficiens A, B, C, etc. étant des fonctions de m qu'il s'agit de déterminer.

Pour cet effet, soit $\sin\theta = x$, et

$$\frac{\sin m\theta}{m} = x + \text{A}x^3 + \text{B}x^5 + \text{C}x^7 + \text{etc.}:$$

on aura en différentiant de part et d'autre par rapport à θ, et mettant au lieu de $\frac{dx}{d\theta}$ sa valeur $\cos\theta$,

$$\cos m\theta = \cos\theta\,(1 + 3\text{A}x^2 + 5\text{B}x^4 + 7\text{C}x^6 + \text{etc.}):$$

différentiant de nouveau par rapport à θ, il vient

$$m\sin m\theta = (1 - 2.3\text{A})\,x + (3^2\text{A} - 4.5\text{B})\,x^3 + (5^2\text{B} - 6.7\text{C})\,x^5 + \text{etc.}$$

Égalant le second membre terme à terme à la valeur du premier qui est

$$m^2x + m^2\text{A}x^3 + m^2\text{B}x^5 + \text{etc.},$$

on en tire

$$\text{A} = \frac{1 - m^2}{2.3}, \quad \text{B} = \frac{\text{A}\,(9 - m^2)}{4.5}, \quad \text{C} = \frac{\text{B}\,(25 - m^2)}{6.7}, \quad \text{etc.}$$

Donc on a généralement, quel que soit m,

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=1+\frac{1-m^2}{2.3}\sin^2\theta+\frac{1-m^2.9-m^2}{2.3.4.5}\sin\theta+\frac{1-m^2.9-m^2.25-m^2}{2.3.4.5.6.7}\sin^6\theta+\text{etc.},$$

et il résulte de la même analyse qu'on a en même temps

$$\frac{\cos m\theta}{\cos\theta}=1+\frac{1-m^2}{2}\sin^2\theta+\frac{1-m\ .9-m^2}{2.3.4}\sin\theta+\frac{1-m^2.9-m\ .25-m^2}{2.3.4.5.6}\sin^6\theta+\text{etc.}$$

(124). Cela posé, l'intégrale cherchée sera donnée par la formule

$$(h)\qquad \int\frac{x^{r-\frac{1}{2}}dx}{(1-x)^r(1+ax)^r}=\text{A}\cos^{2r}\theta.\frac{\sin(2r-1)\theta}{(2r-1)\sin\theta},$$

dans laquelle $\text{A}=\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(1-r)}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$, et où l'on suppose $r<1$ et $\tang\theta=\sqrt{a}$.

Si l'on fait $a=1$, ce qui donne $\theta=\frac{1}{4}\pi$, la formule devient

$$(i)\qquad \int\frac{x^{r-\frac{1}{2}}dx}{(1-x^2)^r}=\frac{2^{\frac{1}{2}-r}}{2r-1}.\text{A}\sin(2r-1)\frac{\pi}{4}.$$

Le premier membre est une intégrale Eulérienne de première espèce qui peut se représenter par $\frac{1}{2}\left(\frac{2r+1}{4},1-r\right)$, et dont la valeur est $\frac{1}{2}.\frac{\Gamma(\frac{1}{2}r+\frac{1}{4})\Gamma(1-r)}{\Gamma(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}r)}$. Ainsi en remettant la valeur de A, on devra avoir entre les fonctions Γ l'équation

$$\frac{1}{2}.\frac{\Gamma(\frac{1}{2}r+\frac{1}{4})\Gamma(1-r)}{\Gamma(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}r)}=\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(1-r)}{(r-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}.2^{\frac{1}{2}-r}\sin(2r-1)\frac{\pi}{4}.$$

Si l'on a $r>\frac{1}{2}$, soit $r=\frac{1}{2}+2a$, cette équation devient

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+a)}{\Gamma(1-a)}=\frac{\Gamma(1+2a)}{2a\sqrt{\pi}}.2^{1-2a}\sin a\pi.$$

Mais on a $\Gamma(1+2a)=2a\,\Gamma(2a)$, et $\Gamma a\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$; de là résulte l'équation connue (*)

$$\Gamma a\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+a\right)=\Gamma(2a).\pi^{\frac{1}{2}}.2^{1-2a},$$

équation à laquelle on serait également conduit en supposant $r=\frac{1}{2}-2a$.

(125). La formule (h) ne pourrait plus avoir lieu si a était négatif; mais en éliminant l'arc θ, qui alors deviendrait imaginaire, on peut parvenir à la vraie intégrale.

En effet, si on change le signe de a, on aura $\tang \theta=\sqrt{(-a)}$, $\sin\theta=\sqrt{\left(\frac{-a}{1-a}\right)}$, $\cos\theta=\sqrt{\left(\frac{1}{1-a}\right)}$; substituant ces valeurs dans la formule

$$\sin m\theta=\frac{(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^m-(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)^m}{2\sqrt{-1}},$$

et faisant $m=2r-1$, on aura

$$\frac{\sin(2r-1)\theta}{\sin\theta}=\frac{(1+\sqrt{a})^{2r-1}-(1-\sqrt{a})^{2r-1}}{2\sqrt{a}.(1-a)^{r-1}}:$$

on a en même temps $\cos^{2r}\theta=(1-a)^{-r}$; donc

$$\frac{\sin(2r-1)\theta}{\sin\theta}.\cos^{2r}\theta=\frac{(1-\sqrt{a})^{1-2r}-(1+\sqrt{a})^{1-2r}}{2\sqrt{a}}:$$

(*) M. Poisson, dans le tome IX du *Journal de l'École Polytechnique*, a trouvé des résultats analogues à ceux que nous venons d'exposer. Il parvient, page 146, à une équation entre deux intégrales Eulériennes, qui au fond est la même que l'équation (i); et il ajoute que *cette équation contient une nouvelle relation qui peut servir à la réduction de ces transcendantes.* On voit ici que cette équation ne conduit qu'à une formule connue, dont l'équivalente a été donnée page 284 des *Exercices de Calcul intégral*, et plus anciennement, page 96 du *Mémoire sur les Transcendantes elliptiques.*

donc l'intégrale cherchée

$$(k) \qquad \int \frac{x^{r-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x)^r(1-ax)^r} = \mathrm{A}.\frac{(1-\sqrt{a})^{1-2r}-(1+\sqrt{a})^{1-2r}}{(2r-1)\,2\sqrt{a}},$$

et on aura toujours $\mathrm{A} = \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-r)}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$:

(126). Dans cette formule il faut qu'on ait $a < 1$; on peut cependant faire $a = 1$, pourvu qu'on ait $2r < 1$. Alors la formule devient

$$\int \frac{x^{r-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x)^r} = \frac{2^{1-2r}}{1-2r}.\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-r)}{\sqrt{\pi}}.$$

Mais le premier membre est une intégrale Eulérienne de la première espèce dont la valeur est $\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-2r)}{\Gamma(\frac{3}{2}-r)}$; donc on doit avoir entre les fonctions Γ, l'équation

$$\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-2r)}{\Gamma(\frac{3}{2}-r)} = \frac{2^{1-2r}}{1-2r}.\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\,\Gamma(1-r)}{\sqrt{\pi}}.$$

Mettant au lieu de $\Gamma(\frac{3}{2}-r)$ sa valeur $(\frac{1}{2}-r)\,\Gamma(\frac{1}{2}-r)$, et faisant $\frac{1}{2}-r = a$, on retombe encore sur l'équation

$$\Gamma a\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+a) = \Gamma(2a).\pi^{\frac{1}{2}}.2^{1-2a},$$

qui prouve l'exactitude de nos calculs.

(127). Il ne sera pas inutile de faire voir que la formule (k), qui est le résultat d'un calcul assez compliqué, peut s'obtenir plus facilement par une autre voie. Si dans l'expression différentielle on développe le facteur $(1-ax)^{-r}$, on aura

$$\mathrm{Z} = \int \frac{x^{r-\frac{1}{2}}\,dx}{(1-x)^r}\left(1 + rax + \frac{r.r+1}{1.2}a^2x^2 + \frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}a^3x^3 + \text{etc.}\right).$$

Or en intégrant les termes successifs, on a

∫

$$\int \frac{x^{r-\frac{1}{2}}dx}{(1-x)^r} = \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(1-r)}{\Gamma\frac{3}{2}} = \text{A},$$

$$\int \frac{x^{r+\frac{1}{2}}dx}{(1-x)^r} = \frac{\Gamma(r+\frac{3}{2})\Gamma(1-r)}{\Gamma\frac{5}{2}} = \text{A}.\frac{r+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}},$$

$$\int \frac{x^{r+\frac{3}{2}}dx}{(1-x)^r} = \frac{\Gamma(r+\frac{5}{2})\Gamma(1-r)}{\Gamma\frac{7}{2}} = \text{A}.\frac{r+\frac{1}{2}.r+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}},$$

etc.

Donc l'intégrale cherchée

$$\text{Z} = \text{A}\left(1 + \frac{2r.2r+1}{2.3}\,a + \frac{2r.2r+1.2r+2.2r+3}{2.3.4.5}\,a^2 + \text{etc.}\right).$$

Il est facile ensuite de voir que la série qui multiplie A, n'est autre chose que le développement de la quantité

$$\frac{(1-\sqrt{a})^{1-2r} - (1+\sqrt{a})^{1-2r}}{(2r-1).2\sqrt{a}}.$$

Ainsi on obtient immédiatement la formule (k), et de celle-ci on pourrait déduire facilement la formule (h), au moyen des réductions que donne la formule

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m = \cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta.$$

Troisième cas : p = r + n.

(128). Alors l'intégrale proposée $\text{Z} = \int \frac{x^{r+n-1}dx}{(1-x)^r(1+ax)^n}$, et la suite à sommer est, en faisant $\alpha = \frac{a}{1+a}$,

$$\text{Q} = 1 + \frac{1-r}{1}.\frac{\alpha n}{1+n} + \frac{1-r.2-r}{1.2}.\frac{n\alpha^2}{2+n} + \frac{1-r.2-r.3-r}{1.2.3}.\frac{n\alpha^3}{3+n} + \text{etc.}$$

Pour avoir la somme de cette suite, supposons pour un moment qu'on ait

$$\text{Q} = n\left(\frac{x^n}{n} + \frac{1-r}{1}.\frac{\alpha x^{n+1}}{n+1} + \frac{1-r.2-r}{1.2}.\frac{\alpha^2 x^{n+2}}{n+2} + \text{etc.}\right):$$

16

en différentiant par rapport à x, on aura

$$dQ = nx^{n-1}\,dx\left(1+\frac{1-r}{1}\alpha x+\frac{1-r.2-r}{1.2}\alpha^2x^2+\text{etc.}\right),$$

ou $dQ = \frac{nx^{n-1}dx}{(1-\alpha x)^{1-r}}$; donc $Q = \int\frac{nx^{n-1}dx}{(1-\alpha x)^{1-r}}$, cette intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

Cela posé, comme on a en même temps

$$A = \frac{\Gamma(n+r)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n+r)\,\Gamma(1-r)}{n\,\Gamma n},$$

l'intégrale cherchée sera exprimée ainsi,

$$(l) \qquad \int\frac{x^{r+n-1}dx}{(1-x)^r\,(1+ax)^n} = \frac{\Gamma(n+r)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n}(1+a)^{-n}\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-\alpha x)^{1-r}};$$

d'où il suit qu'en regardant les fonctions Γ comme connues, cette intégrale est ramenée à une intégrale plus simple $\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-\alpha x)^{1-r}}$, prise entre les mêmes limites et dans laquelle $\alpha = \frac{a}{1+a}$.

(129). Lorsqu'on change le signe de a, il convient de mettre sous une autre forme le facteur $P = (1-a)^{-n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\left(1+\frac{ax}{1-a}\right)^{1-r}}$. Soit alors $x = \frac{(1-a)z}{1-az}$, on aura $P = \int\frac{z^{n-1}dz}{(1-az)^{r+n}}$, et les limites de cette intégrale seront encore $z=0$, $z=1$; de sorte qu'on peut changer z en x, et on aura pour ce second cas la formule

$$(m) \qquad \int\frac{x^{r+n-1}dx}{(1-x)^r\,(1-ax)^n} = \frac{\Gamma(n+r)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n}\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-ax)^{r+n}}.$$

(130). On peut parvenir directement à ce résultat en développant dans la formule proposée le facteur $(1-ax)^{-n}$, ce qui donne

$$Z = \int\frac{x^{r+n-1}\,dx}{(1-x)^r}\left(1+nax+\frac{n.n+1}{2}a^2x^2+\text{etc.}\right).$$

Or en intégrant les différens termes, on a

$$\int\frac{x^{r+n-1}\,dx}{(1-x)^r}=\frac{\Gamma(r+n)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(1+n)}=\frac{\Gamma(r+n)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\int\frac{x^{r+n}\,dx}{(1-x)^r}=\frac{\Gamma(r+n+1)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(2+n)}=\frac{\Gamma(r+n)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n}\cdot\frac{r+n}{n.n+1},$$

$$\int\frac{x^{r+n+1}\,dx}{(1-x)^r}=\frac{\Gamma(r+n+2)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma(3+n)}=\frac{\Gamma(r+n)\,\Gamma(1-r)}{\Gamma n}\cdot\frac{r+n.r+n+1}{n.n+1.n+2},$$

etc.

Donc l'intégrale cherchée

$$Z=\frac{\Gamma(r+n)\,\Gamma(r-n)}{\Gamma n}\left(\frac{1}{n}+\frac{r+n}{1}\cdot\frac{a}{n+1}+\frac{r+n.r+n+1}{1.2}\cdot\frac{a^2}{n+2}+\text{etc.}\right):$$

la série comprise dans cette formule n'est autre chose que la valeur de l'intégrale $\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-ax)^{r+n}}$; ainsi on obtient la même formule que ci-dessus.

Dans les deux cas, si n est entier, on pourra trouver exactement l'une et l'autre des intégrales $\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-\alpha x)^{1-r}}$, $\int\frac{x^{n-1}dx}{(1-ax)^{n+r}}$; il suffit pour cela de faire $1-\alpha x$ ou $1-ax=z$; mais ces cas particuliers sont compris dans le résultat général de l'article 121, et il est inutile de s'y arrêter.

§ IV. *De l'intégrale* $Z=\int\frac{\mathrm{zdz}}{\mathrm{m}^2+\mathrm{z}^2}\cdot\frac{\sin 2\mathrm{az}}{1-2\mathrm{r}\cos 2\mathrm{az}+\mathrm{r}^2}$ *et autres semblables, prises depuis* $\mathrm{z}=0$ *jusqu'à* $\mathrm{z}=\infty$.

(131). On pourra toujours supposer que r est plus petit que l'unité; car s'il était plus grand, on mettrait $\frac{1}{r'}$ à la place de r, et on aurait une intégrale de même forme dans laquelle r' serait plus petit que l'unité.

Cela posé, si l'on développe suivant les puissances de r la quantité $P = \frac{\sin 2az}{1 - 2r\cos 2az + r^2}$, on aura par les propriétés des séries récurrentes,

$$P = \sin 2az + r\sin 4az + r^2 \sin 6az + r^3 \sin 8az + \text{etc.},$$

ce qui donne

$$Z = \int \frac{zdz}{m^2 + z^2} (\sin 2az + r\sin 4az + r^2 \sin 6az + \text{etc.}).$$

Mais par la formule (2) de la troisième partie, page 358, on a l'intégrale

$$\int \frac{zdz \sin kz}{m^2 + z^2} = \frac{\pi}{2} e^{-km};$$

donc

$$Z = \frac{\pi}{2} (e^{-2am} + re^{-4am} + r^2 e^{-6am} + \text{etc.}),$$

ou simplement,

$$Z = \frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2am} - r}:$$

c'est la valeur de l'intégrale cherchée.

On peut d'ailleurs changer le signe de r : ainsi on aura tout à la fois les deux formules

$$(a) \qquad \int \frac{zdz}{m^2 + z^2} \cdot \frac{\sin 2az}{1 + r^2 - 2r\cos 2az} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2am} - r},$$

$$(b) \qquad \int \frac{zdz}{m^2 + z^2} \cdot \frac{\sin 2az}{1 + r^2 + 2r\cos 2az} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{e^{2am} + r}. \qquad \begin{cases} z = 0 \\ z = \infty \end{cases}$$

Ces deux formules supposent $r < 1$; mais elles seront encore vraies lorsque $r = 1$, et alors on aura

$$(c) \qquad \int \frac{zdz \cot az}{m^2 + z^2} = \frac{\pi}{e^{2am} - 1},$$

$$(d) \qquad \int \frac{zdz \tang az}{m^2 + z^2} = \frac{\pi}{e^{2am} + 1}.$$

(132). Si après avoir ajouté les deux équations (a) et (b), on met a à la place de $2a$, et r à la place de r^2, on aura cette nouvelle formule

$$(e) \qquad \int \frac{zdz}{m^2+z^2} \cdot \frac{\sin az}{1+r^2-2r\cos 2az} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1+r} \cdot \frac{e^{am}}{e^{2am}-r}.$$

Faisant dans celle-ci $r=1$, on a

$$(f) \qquad \int \frac{zdz}{m^2+z^2} \cdot \frac{1}{\sin az} = \frac{\pi e^{am}}{e^{2am}-1}.$$

(133). Si on multiplie par $4rda$ les deux membres des équations (a) et (b), et qu'ensuite on les intègre par rapport à a depuis $a=0$, on aura les deux formules

$$(g) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \log(1+r^2-2r\cos 2az) = \frac{\pi}{m} \log(1-re^{-2am}),$$

$$(h) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \log(1+r^2-2r\cos 2az) = \frac{\pi}{m} \log(1+re^{-2am}),$$

Si dans ces équations on fait $r=1$, on aura ces deux autres formules,

$$(i) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \log \sin az = \frac{\pi}{2m} \log\left(\frac{1-e^{-2am}}{2}\right),$$

$$(k) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \log \cos az = \frac{\pi}{2m} \log\left(\frac{1+e^{-2am}}{2}\right),$$

d'où résulte cette troisième,

$$(l) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \log \operatorname{tang} az = \frac{\pi}{2m} \log\left(\frac{e^{2am}-1}{e^{2am}+1}\right).$$

(134). Si on différencie par rapport à r les équations (g) et (h), on aura encore les deux formules

$$(m) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \cdot \frac{r-\cos 2az}{1+r^2-2r\cos 2az} = -\frac{\pi}{2m} \cdot \frac{1}{e^{2am}-r},$$

$$(n) \qquad \int \frac{dz}{m^2+z^2} \cdot \frac{r+\cos 2az}{1+r^2+2r\cos 2az} = \frac{\pi}{2m} \cdot \frac{1}{e^{2am}+r}.$$

Ces équations pourraient se démontrer directement au moyen des deux formules

$$\frac{\cos\varphi - r}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \cos\varphi + r\cos 2\varphi + r^2\cos 3\varphi + r^3\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

$$\int \frac{dz}{m^2+z^2}\cos kz = \frac{\pi}{2m}\, e^{-km}.$$

Si l'on différenciait les formules que nous venons de trouver par rapport aux constantes qu'elles renferment, on en déduirait une multitude d'autres formules plus ou moins remarquables; mais nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à ce sujet. Nous devons seulement ajouter que les formules (c), (d), (f), (i), (k), (l), très-remarquables dans la théorie des intégrales définies, sont dues à M. *Bidone*, qui les a publiées dans les Mémoires de l'Académie de Turin, année 1812.

§ V. *Formules propres à rendre plus étendue la théorie des intégrales définies.*

(135). Dans les recherches précédentes, on a pu remarquer que des intégrales connues, prises depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, en ont fait connaître d'autres, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. La transformation employée pour cet objet, peut être généralisée, de manière qu'en passant alternativement d'un genre d'intégrales à un autre, on pourra assez souvent trouver une infinité de formules qui auront la même valeur; et par ce principe, la théorie des intégrales définies acquerra une nouvelle extension.

Dans les transformations dont nous allons parler, nous désignerons constamment par z la variable qui s'étend dans les intégrales depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, et par x celle qui ne s'étend que depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

(136). Cela posé, soit la formule $\int dz\,\varphi(z) = A$, dans laquelle l'intégrale est prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, et a pour valeur la quantité connue A. J'observe que l'intégrale dont il s'agit, peut être considérée comme composée de deux parties, l'une prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=m$ (m étant positif); l'autre prise depuis $z=m$ jusqu'à $z=\infty$. Pour avoir la première partie, je fais $z=mx$, et j'ai l'intégrale $\int mdx\,\varphi(mx)$, laquelle devra être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Pour avoir la seconde, je fais $z=\frac{m}{x}$, et en changeant le signe, j'ai l'intégrale $\int\frac{mdx}{xx}\varphi\left(\frac{m}{x}\right)$ qui devra être prise également depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Donc en réunissant ces deux parties, on aura une nouvelle formule

$$(a)\qquad \int mdx\left[\varphi(mx)+\frac{1}{xx}\varphi\left(\frac{m}{x}\right)\right]=\mathrm{A},\qquad \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

laquelle devra avoir lieu, quel que soit m, pourvu qu'il soit positif, et pourra même en fournir une infinité d'autres en la faisant varier par rapport à m.

Ainsi en désignant $\frac{d\varphi x}{dx}$ par $\varphi'(x)$, et semblablement $\frac{d\varphi' x}{dx}$ par $\varphi''(x)$, on aura

$$(b)\qquad \begin{aligned}&\int dx\left[x\varphi'(mx)+\frac{1}{x^3}\varphi'\left(\frac{m}{x}\right)\right]=-\frac{\mathrm{A}}{m^2},\\&\int dx\left[x\varphi''(mx)+\frac{1}{x^4}\varphi''\left(\frac{m}{x}\right)\right]=\frac{2\mathrm{A}}{m^3},\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

(137). Soit, par exemple, $\varphi(z)=\frac{z^{a-1}}{1+z}$, auquel cas $\mathrm{A}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$, on aura $\varphi(mx)=\frac{m^{a-1}x^{a-1}}{1+mx}$, $\varphi\left(\frac{m}{x}\right)=\frac{m^{a-1}x^{2-a}}{m+x}$, ce qui donnera la formule

$$(c)\qquad \int\left(\frac{x^{a-1}dx}{1+mx}+\frac{x^{-a}\,dx}{m+x}\right)=\mathrm{A}m^{-a}=\frac{\pi m^{-a}}{\sin a\pi}.\qquad \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

Cette formule, dans le cas de $m=1$, revient à la formule de l'article 96; mais elle est plus générale, puisqu'on peut donner à m une valeur quelconque positive.

(138). La généralité de cette formule est telle qu'on pourrait donner à m une valeur imaginaire. Soit donc $m=c(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, et on obtiendra par la substitution, ces deux formules,

$$(d)\quad \begin{cases} \int\left(\frac{x^{a-1}dx\,(1+cx\cos\theta)}{1+2cx\cos\theta+c^2x^2}+\frac{x^{-a}dx\,(x+c\cos\theta)}{x^2+2cx\cos\theta+c^2}\right)=\frac{\pi c^{-a-1}}{\sin a\pi}\cos a\theta, \\ \int\left(\frac{x^a dx}{1+2cx\cos\theta+c^2x^2}+\frac{x^{-a}dx}{x^2+2cx\cos\theta+c^2}\right)=\frac{\pi c^{-a-1}}{\sin a\pi}\cdot\frac{\sin a\theta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

On peut remarquer sur celles-ci que la première est contenue dans la seconde, et que cette dernière, dans le cas de $c=1$, s'accorde avec la formule du n° 103.

La formule (c) contient une constante arbitraire m, la formule (d) en contient deux, c et θ : il est visible que par la différentiation répétée de ces formules relativement à l'une des constantes arbitraires m, c, θ, on en déduira une infinité d'autres intégrales qui toutes auront une valeur connue ; d'où l'on voit combien est féconde la transformation dont nous avons fait usage.

(139). Nous avons considéré l'intégrale $\int dz\,\varphi(z)$ comme composée de deux parties ; on pourrait de même la considérer comme composée de trois ou d'un nombre quelconque de parties, et de là naîtraient de nouvelles formules dont le nombre pourrait être multiplié à l'infini.

Concevons, par exemple, que l'intégrale $\int dz\,\varphi(z)$ soit composée de trois parties ; la première de $z=0$ à $z=m$, la seconde de $z=m$ à $z=m+n$, et la troisième de $z=m+n$ à $z=\infty$. La première partie sera donnée par l'intégrale $\int m dx\,\varphi(mx)$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; la seconde par l'intégrale $\int n dx\,\varphi(m+nx)$, prise entre les mêmes limites ; et enfin la troisième par l'intégrale $\int\frac{ndx}{x^2}\varphi\left(m+\frac{n}{x}\right)$. On aura donc la formule

$$(e)\qquad \int dx\left[m\varphi(mx)+n\varphi(m+nx)+\frac{n}{x^2}\varphi\left(m+\frac{n}{x}\right)\right]=\mathrm{A},\qquad \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

dans laquelle m et n sont deux constantes arbitraires qu'on doit sup-

poser

poser positives, mais qui à la rigueur pourraient ne pas l'être, puisque si on conçoit l'intégration effectuée dans le premier membre de l'équation (e), le résultat ne doit plus contenir les constantes m et n.

(140). Le même principe de décomposition peut s'appliquer à l'intégrale $\int dx \varphi(x) = A$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. En effet, cette intégrale peut être considérée comme composée de deux parties; la première depuis $x = 0$ jusqu'à $x = m$, la seconde depuis $x = m$ jusqu'à $x = 1$. La première partie est donnée par l'intégrale $\int m dx \varphi(mx)$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; la seconde se trouve par l'intégrale $\int (1-m) dx \varphi[m + (1-m)x]$, prise entre les mêmes limites. On a donc la formule

$$(f) \qquad \int dx \left[m\varphi(mx) + (1-m)\varphi(m+x-mx)\right] = A.$$

(141). Soit, par exemple, l'intégrale $\int x^{a-1} dx (1-x)^{r-1} = A$, on en déduira la formule

$$\int dx \left[m^a x^{a-1}(1-mx)^{r-1} + (1-m)^{a+r-1}\left(\frac{m}{1-m}+x\right)^{a-1}(1-x)^{r-1}\right] = A.$$

La seconde partie se simplifie en mettant $1-x$ à la place de x et changeant son signe, ce qui donne toujours les mêmes limites; par cette substitution, la formule devient

$$(g) \int \left[m^{a+r-1} x^{a-1} dx \left(\frac{1}{m} - x\right)^{r-1} + (1-m)^{a+r-1} x^{r-1} dx \left(\frac{1}{1-m} - x\right)^{a-1}\right] = A:$$

on a d'ailleurs $A = \dfrac{\Gamma a \, \Gamma r}{\Gamma(a+r)}$.

Si l'on prend $m = \frac{1}{2}$, on a

$$(h) \qquad \int \left[x^{a-1} dx (2-x)^{r-1} + x^{r-1} dx (2-x)^{a-1}\right] = 2^{a+r-1} A.$$

Cette formule peut servir à trouver, par approximation, la valeur de A; elle ne diffère pas de celle qui a été donnée article 21, deuxième partie.

(142). On conçoit que les transformations peuvent être variées d'une infinité de manières, de sorte qu'une formule assez particulière peut conduire à une infinité d'autres contenant des paramètres arbitraires; mais il est surtout une de ces transformations que nous devons rapporter, et par laquelle une intégrale prise entre les limites $x=0$, $x=1$, peut être changée en une autre dont les limites seront $z=0$, $z=\infty$.

Soit $\int dx\,\varphi(x)=A$ l'intégrale donnée qui doit être prise entre les limites $x=0$, $x=1$; je fais $x=\frac{mz}{1+mz}$, m étant un nombre quelconque positif, et alors il est visible que les limites de la transformée seront $z=0$, $z=\infty$: on aura donc la formule

$$(i)\qquad \int \frac{mdz}{(1+mz)^2}\,\varphi\left(\frac{mz}{1+mz}\right)=A. \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

(143). Soit, par exemple, la formule $\int x^{a-1}dx(1-x)^{r-1}=A$, on aura la transformée

$$(k)\qquad \int \frac{z^{a-1}dz}{(1+mz)^{a+r}}=Am^{-a},$$

formule où l'on peut faire $m=1$, sans diminuer sa généralité.

Soit encore proposée la formule

$$\int \frac{dx\,(x^{a-1}-x^a)}{1-x}=\pi\cot a\pi;$$

la substitution $x=\frac{mz}{1+mz}$ donnera

$$\int[m^a z^{a-1}dz\,(1+mz)^{-a}-m^{1-a}z^{-a}dz\,(1+mz)^{a-1}]=\pi\cot a\pi,$$

formule dont les deux parties sont infinies comme celles de l'intégrale en x d'où elles sont déduites.

Si on fait $m=1$ dans cette formule, on trouvera par l'équation (n), n° 110, que le premier membre se réduit à $\frac{d\,l\,\Gamma(1-a)}{d(1-a)}-\frac{d\,l\,\Gamma a}{da}$, quantité égale à $\pi\cot a\pi$, suivant la formule (19), n° 54.

Ces exemples suffisent pour faire voir combien est féconde la théorie des intégrales définies ; mais la richesse de cette branche d'analyse, comme celle de toutes les autres, consiste bien moins dans le nombre des formules que dans le choix de celles qui réunissent l'élégance à la simplicité, seules qualités qui peuvent les rendre propres à de nombreuses applications.

§ VI. *Formules pour trouver, par approximation, les différences finies* $\delta^n s^a$ *et* $\delta^n s^{-a}$, *lorsque* n *est un grand nombre.*

(144). Lorsque le nombre n n'est que de quelques unités, la différence finie de l'ordre n, $\delta^n s^a$, prise en supposant que la variable s croît continuellement de l'unité, se détermine par la formule connue

$$\delta^n s^a = (s+n)^a - n(s+n-1)^a + \frac{n.n-1}{1.2}(s+n-2)^a - \text{etc.} :$$

il en est de même de $\delta^n s^{-a}$.

On peut aussi déterminer $\delta^n s^a$, ou en général $\delta^n y$, par les coefficiens différentiels de la fonction y, au moyen de la formule

$$(a) \qquad \delta^n y = \frac{d^n y}{ds^n} + \mathrm{N}' \frac{d^{n+1} y}{ds^{n+1}} + \mathrm{N}'' \frac{d^{n+2} y}{ds^{n+2}} + \text{etc.},$$

dans laquelle les coefficiens N', N'', etc. sont des fonctions de n, données par le développement de la fonction

$$(e^x - 1)^n = x^n (1 + \mathrm{N}'x + \mathrm{N}''x^2 + \mathrm{N}'''x^3 + \text{etc.}).$$

En effet, comme on a par le théorème de Taylor,

$$\delta y = \frac{dy}{ds} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ddy}{ds^2} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{d^3 y}{ds^3} + \text{etc.},$$

cette formule peut se représenter plus simplement par $\delta y = y(e^d - 1)$, en convenant qu'après avoir développé $e^d - 1$ suivant les puissances de d, chaque terme yd^m se changera en $\frac{d^m y}{ds^m}$. Cela posé, on aura, d'après la même hypothèse, $\delta^n y = y(e^d - 1)^n$, ce qui donne, après le développement de $(e^d - 1)^n$, la formule précédente.

Comme on a en général $\frac{d^n s^a}{ds^n} = a.a-1.a-2\ldots(a-n+1)s^{a-n}$, la différence finie $\delta^n s^a$ pourra s'exprimer ainsi,

$$(b) \quad \delta^n s^a = a.a-1.a-2\ldots.(a-n+1)s^{a-n}\left(1 + \mathrm{N}'\frac{a-n}{s} + \mathrm{N}''\frac{a-n.a-n-1}{s^2} + \text{etc.}\right),$$

formule qui pourra servir à déterminer $\delta^n s^a$, lorsque $a-n$ sera beaucoup plus petit que s.

(145). On peut mettre cette même différence sous une autre forme plus convergente. Pour cela, je reprends l'équation symbolique $\delta^n y = y(e^d - 1)^n$, à laquelle je donne la forme....... $\delta^n y = ye^{\frac{1}{2}dn}(e^{\frac{1}{2}d} - e^{-\frac{1}{2}d})^n$; et comme, en supposant $y = \varphi(s)$, la quantité désignée par $ye^{\frac{1}{2}dn}$ est $y + \frac{1}{2}n.\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}n)^2\frac{ddy}{ds^2} + \frac{1}{2.3}.(\frac{1}{2}n)^3\frac{d^3y}{ds^3} + \text{etc.}$, ou $\varphi(s + \frac{1}{2}n)$; si en considérant d comme une quantité algébrique, on fait le développement de la fonction $(e^{\frac{1}{2}d} - e^{-\frac{1}{2}d})^n$, duquel résulte

$$(e^{\frac{1}{2}d} - e^{-\frac{1}{2}d})^n = d^n(1 + \mathrm{A}'d^2 + \mathrm{A}''d^4 + \mathrm{A}'''d^6 + \text{etc.}),$$

on obtiendra cette nouvelle valeur de $\delta^n y$ ou $\delta^n\varphi(s)$,

$$(c) \quad \delta^n\varphi(s) = \frac{d^n}{ds^n}\varphi(s+\tfrac{1}{2}n) + \mathrm{A}'\frac{d^{n+2}}{ds^{n+2}}\varphi(s+\tfrac{1}{2}n) + \mathrm{A}''\frac{d^{n+4}}{ds^{n+4}}\varphi(s+\tfrac{1}{2}n) + \text{etc.}$$

(146). L'application de cette formule à la fonction s^a donne

$$(d) \quad \delta^n s^a = \mathrm{K}(s+\tfrac{1}{2}n)^{a-n}\left[1 + \mathrm{A}'.\frac{a-n.a-n-1}{(s+\frac{1}{2}n)^2} + \mathrm{A}''.\frac{a-n.a-n-1.a-n-2.a-n-3}{(s+\frac{1}{2}n)^4} + \text{etc.}\right],$$

où l'on a fait $\mathrm{K} = a.a-1.a-2\ldots.(a-n+1)$.

Cette formule pourra donc servir à déterminer $\delta^n s^a$ dans le cas où $a - n$ serait très-petit par rapport à $s + \frac{1}{2} n$. Il faudra y substituer les valeurs des coefficiens A', A'', etc. données par le développement indiqué. Ces valeurs sont $A' = \frac{n}{24}$, $A'' = \frac{5n^2 - 2n}{5760}$, etc. On en déduirait, par exemple,

$$\begin{aligned}
\delta^n s^n &= 1.2.3 \ldots\ldots\ldots n = \Gamma(n+1), \\
\delta^n s^{n+1} &= \Gamma(n+2).(s + \tfrac{1}{2} n), \\
\delta^n s^{n+2} &= \frac{\Gamma(n+3)}{1.2}\left[(s + \tfrac{1}{2} n)^2 + \frac{n}{12}\right],
\end{aligned}$$

etc.

Mais ces cas ne sont que particuliers, et il convient de considérer le problème sous un point de vue plus général.

(147). Soit $Z = \int x^{s-1} dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{a-1}$, cette intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; si on fait $x^s = z$, on aura la transformée $Z = s^{-a} \int dz \left(l \frac{1}{z}\right)^{a-1}$, laquelle devra être intégrée encore depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. On aura donc $Z = s^{-a} \Gamma a$, et de là,

$$(e) \qquad s^{-a} = \frac{\int x^{s-1} dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{a-1}}{\Gamma a},$$

La puissance s^{-a} étant mise sous cette forme, il devient facile d'exprimer aussi par une intégrale définie la différence $n^{ième}$ de s^{-a}; car en faisant varier s d'une unité, on a successivement $\delta x^{s-1} = x^{s-1}(x - 1)$, $\delta^2 x^{s-1} = x^{s-1}(x-1)^2$, et en général $\delta^n x^{s-1} = x^{s-1}(x-1)^n$; donc la différence cherchée

$$(f) \qquad \delta^n s^{-a} = \frac{(-1)^n}{\Gamma a} \int x^{s-1} dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{a-1} (1 - x)^n. \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi tout se réduit à évaluer dans les limites $x = 0$, $x = 1$, l'intégrale

$$Z' = \int x^{s-1} dx \left(l \frac{1}{x}\right)^{a-1} (1 - x)^n,$$

et on aura

$$\delta^n s^{-a} = \frac{(-1)^n}{\Gamma a} Z'.$$

(148). L'intégrale Z' peut se trouver assez facilement par la méthode des quadratures. Il suffit pour cela de calculer dans l'intervalle de $x=0$ à $x=1$, quelques-unes des ordonnées de la courbe qui a pour équation

$$y = x^{s-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}(1-x)^n.$$

Cette courbe touche l'axe aux deux extrémités $x=0$, $x=1$; elle a toutes ses ordonnées positives dans cet intervalle, et la plus grande que nous désignerons par M, répond à une abscisse $x=m$ déterminée par l'équation

$$(g) \qquad s-1 = \frac{nm}{1-m} + \frac{a-1}{l\frac{1}{m}},$$

d'où résultera $M = m^{s-1}\left(l\frac{1}{m}\right)^{a-1}(1-m)^n$.

Plus on supposera grands les nombres s et n, plus les ordonnées décroîtront rapidement en s'éloignant du *maximum*. Ainsi l'aire Z' ne pourra être qu'une petite portion du rectangle $M \times 1$, de sorte qu'on aura $Z' = kM$, k étant une fraction assez petite.

Au reste, la méthode des quadratures pourra, dans tous les cas, donner la valeur de Z' avec un degré d'approximation aussi grand qu'on voudra, et auquel les formules analytiques connues ne sauraient atteindre.

(149). Si l'on veut cependant avoir une expression analytique de Z', on pourra appliquer à cette intégrale la méthode du n° 29, troisième partie; on trouvera par cette méthode et en se bornant au premier terme de la série,

$$Z' = \frac{m^s(1-m)^{n+1}\left(l\frac{1}{m}\right)^a \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left[nm\left(l\frac{1}{m}\right)^2 + (a-1)(1-m)^2\right]}},$$

m étant la valeur de x qui répond au *maximum* de y, et qui est déterminée par l'équation (g). Z' étant trouvé, on aura la différence cherchée $\delta^n s^{-a} = \frac{(-1)^n}{\Gamma a} Z'$.

Connaissant la valeur générale de $\delta^n s^{-a}$, on pourra en déduire celle de $\delta^n s^a$; mais pour cela, il est nécessaire de distinguer deux cas.

(150). Soit, 1°. $n > a + 1$; en changeant le signe de a, l'intégrale Z' devient

$$Z' = \int \frac{x^{s-1} dx (1-x)^n}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{a+1}}.$$

Cette intégrale peut toujours être regardée comme l'aire, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, de la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{x^{s-1}(1-x)^n}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{a+1}}.$$

Cette ordonnée s'évanouit encore aux deux limites de l'intégrale, et si l'on détermine l'abscisse $x = m$ d'après l'équation

$$s - 1 = \frac{nm}{1-m} - \frac{(a+1)}{l\frac{1}{m}},$$

le *maximum* de l'ordonnée sera $M = m^{s-1}\left(l\frac{1}{m}\right)^{-a-1}(1-m)^n$. Ainsi on peut déterminer l'intégrale Z', soit par la méthode des quadratures qui donne une approximation aussi grande qu'on voudra, soit par la formule de l'article précédent, où il suffit de changer le signe de a, et qui donnera

$$Z' = \frac{m^s(1-m)^{n+1}\left(l\frac{1}{m}\right)^{-a}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left[nm\left(l\frac{1}{m}\right)^2 - (a+1)(1-m)^2\right]}}.$$

Quant à Γa qui devient $\Gamma(-a)$, il faut substituer sa valeur donnée par la formule de l'article 68, et on aura

$$\delta^n s^a = \frac{(-1)^{n+1} \sin a\pi}{\sqrt{(\frac{1}{2}\pi)}} Z' \Gamma(1+a).$$

(151). Soit, 2°. $n < a + 1$, alors l'ordonnée y est infinie à la limite $x=1$; car en faisant $x = 1 - \omega$, on a $(1-x)^n \left(l\frac{1}{x}\right)^{-a-1} = \omega^{n-a-1}$; l'aire Z' devient donc infinie tant qu'on a $n < a$ et la méthode des quadratures n'est plus applicable. On ne peut donc, dans ce cas, déterminer l'intégrale $\int y dx$ qu'en supposant les limites imaginaires, et il faudrait supposer de même qu'elles le sont dans l'intégrale $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^{-a-1}$, représentée par $\Gamma(-a)$. Mais on peut éviter ces calculs en observant que les formules générales doivent être indépendantes des moyens employés pour y parvenir, et qu'ainsi la formule qui a été trouvée pour la valeur de $\delta^n s^{-a}$, doit donner celle de $\delta^n s^a$ par le seul changement du signe de a.

Dans le cas présent où l'on suppose n très-grand et $a > n$, a sera un très-grand nombre, et par conséquent la valeur de Γa qu'il faut substituer dans la formule de l'article 149, se trouve par la formule du n° 73, troisième partie, qui donne

$$\Gamma a = e^{-a} a^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{(2\pi a)};$$

substituant donc dans l'expression de $\delta^n s^{-a}$ de l'article 149, tant la valeur de Z' que celle de Γa, et changeant ensuite le signe de a, on aura la formule

$$\delta^n s^a = \frac{m^s (m-1)^{n+1} (lm)^{-a} a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a}}{\sqrt{[(a+1)(m-1)^2 - nm(lm)^2]}},$$

m étant un nombre plus grand que l'unité, déterminé par l'équation

$$s - 1 = \frac{a+1}{\log m} - \frac{nm}{m-1}.$$

Ces diverses formules dont nous devions faire mention, parce qu'elles se rattachent à la theorie des fonctions Γ, sont conformes à à celles que Laplace a données le premier dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1782. Mais cette matière semble exiger de nouvelles recherches, soit pour obtenir des approximations plus certaines, surtout dans le cas où la méthode des quadratures n'est pas applicable, soit pour fortifier par des méthodes rigoureuses, les inductions analytiques sur lesquelles les formules sont établies.

§ VII. *De quelques suites dont la somme peut être exprimée par les puissances du nombre π.*

(152). On a vu dans l'article 22, qu'en désignant par $\psi_n(x)$ la somme de la suite

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{(2+x)^n}+\text{etc.},$$

cette somme est donnée pour les diverses valeurs de n, à compter de $n=2$, par la formule

$$\psi_n(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma n}\cdot\frac{d^n\, l\,\Gamma x}{dx^n}:$$

Mais de l'équation $\Gamma x\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$, on tire

$$\frac{d\,l\,\Gamma x}{dx}-\frac{d\,l\,\Gamma(1-x)}{dx}=-\pi\cot\pi x;$$

donc en supposant que n soit un nombre impair, on aura

$$\psi_n(x)-\psi_n(1-x)=\frac{\pi}{\Gamma n}\cdot\frac{d^{n-1}\cot\pi x}{dx^{n-1}}.$$

la quantité $\frac{d^{n-1}\cot\pi x}{dx^{n-1}}$ est la même chose que $\pi^{n-1}.\frac{d^{n-1}\cot(\pi x+\omega)}{d\omega^{n-1}}$, pourvu qu'après les différentiations on fasse $\omega=0$: on aura donc dans cette hypothèse,

$$\psi_n(x)-\psi_n(1-x)=\frac{\pi^n}{\Gamma n}\cdot\frac{d^{n-1}\cot(\pi x+\omega)}{d\omega^{n-1}}.$$

Si l'on observe de plus que les puissances paires de ω sont les seules dont on doive tenir compte dans le développement de $\cot(\pi x + \omega)$, puisque les puissances impaires disparaissent après les différentiations, on verra qu'au lieu de $\cot(\pi x + \omega)$, on peut mettre $\frac{1}{2}\cot(\pi x + \omega) + \frac{1}{2}\cot(\pi x - \omega)$ ou $\frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\omega - \cos 2\pi x}$. On aura donc

$$\psi_n(x) - \psi_n(1-x) = \frac{\pi^n}{\Gamma n} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(\frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\omega - \cos 2\pi x}\right),$$

ou, en mettant ω à la place de 2ω,

$$\psi_n(x) - \psi_n(1-x) = \frac{2^{n-1}\pi^n}{\Gamma n} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(\frac{\sin 2\pi x}{\cos \omega - \cos 2\pi x}\right).$$

Supposons qu'en faisant le développement suivant les puissances de ω, on ait

$$\frac{\sin 2\pi x}{\cos \omega - \cos 2\pi x} = A + B\omega^2 + C\omega^4 \ldots\ldots + N\omega^{n-1} + \text{etc.},$$

N étant le terme général de cette suite récurrente; on aura, en prenant la différentielle du degré $n-1$, et faisant ensuite $\omega = 0$,

$$\frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(\frac{\sin 2\pi x}{\cos \omega - \cos 2\pi x}\right) = N.(n-1)(n-2)\ldots.1 = N\,\Gamma n;$$

donc on a en général,

$$(a) \qquad \psi_n(x) - \psi_n(1-x) = 2^{n-1}\pi^n N.$$

(153). Cette équation peut servir à déterminer la fonction $\psi_n(x)$ par son complément $\psi_n(1-x)$, ou réciproquement; mais notre objet est maintenant de considérer la seule suite représentée par $\psi_n(x) - \psi_n(1-x)$, et on voit que la somme de cette suite sera donnée, pour toute valeur impaire de n, par la quantité $2^{n-1}\pi^n N$, où N est une fonction rationnelle de $\sin 2\pi x$ et de $\cos 2\pi x$.

Considérons particulièrement les valeurs rationnelles de x, et soit $x = \frac{p}{q}$, p étant $< \frac{1}{2} q$; si l'on fait

$$Z_n = \frac{1}{p^n} - \frac{1}{(q-p)^n} + \frac{1}{(q+p)^n} - \frac{1}{(2q-p)^n} + \frac{1}{(2q+p)^n} - \text{etc.},$$

on aura

$$\psi_n(x) - \psi_n(1-x) = q^n Z_n,$$

et par conséquent la somme Z_n sera donnée par la formule

$$Z_n = \frac{2^{n-1} \pi^n}{q^n} N.$$

Réciproquement on aura $N = \left(\frac{q}{2\pi}\right)^n 2Z_n$, ce qui donnera la formule générale

$$(b) \qquad \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2p\pi}{q}}{\cos \omega - \cos \frac{2p\pi}{q}} = \left(\frac{q}{2\pi}\right) Z_1 + \left(\frac{q}{2\pi}\right)^3 \omega^2 Z_3 + \left(\frac{q}{2\pi}\right)^5 \omega^4 Z_5 + \text{etc.},$$

d'où nous allons déduire quelques corollaires.

(154) Soit, 1°. $p = 1$, $q = 4$, $n = 2m+1$, la suite représentée par Z_n sera la somme des puissances réciproques de degré impair des nombres impairs, avec des signes alternatifs, savoir,

$$Z_{2m+1} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}} + \text{etc.},$$

et les différentes sommes Z_1, Z_3, Z_5, etc. se détermineront par le développement de $\frac{\frac{1}{2}}{\cos \omega}$, au moyen de la formule

$$\frac{\frac{1}{2}}{\cos \omega} = \left(\frac{2}{\pi}\right) Z_1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \omega^2 Z_3 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 \omega^4 Z_5 + \text{etc.}$$

Cette formule, la plus simple de toutes celles qu'on tire de la formule générale, se trouve dans le Calcul différentiel d'Euler, page 544.

(155). Soit, 2°. $p = 1$, $q = 3$, on aura la suite

$$Z_{2m+1} = 1 - \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{m+1}} + \frac{1}{7^{2m+1}} - \text{etc.},$$

où se trouvent les nombres $3k+1$ avec le signe $+$, et les nombres $3k-1$ avec le signe $-$. La somme de cette suite pour les diverses valeurs de n, sera donnée par la formule

$$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\omega + \frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2\pi}\right) Z_1 + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^3 \omega^2 Z_3 + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^5 \omega^4 Z_5 + \text{etc.}$$

(156). Soit, 3°. $p = 1$, $q = 6$, on aura la suite

$$P_{2m+1} = 1 - \frac{1}{5^{m+1}} + \frac{1}{7^{m+1}} - \frac{1}{11^{2m+1}} + \frac{1}{13^{2m+1}} - \text{etc.},$$

où les nombres $6k+1$ ont le signe $+$, et les nombres $6k-1$ le signe $-$. La somme de cette suite pour les diverses valeurs de n est donnée par la formule

$$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\omega - \frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{\pi}\right) P_1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^3 \omega^2 P_3 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^5 \omega^4 P_5 + \text{etc.}$$

Au reste ce cas peut se déduire du précédent; car on a immédiatement $P_n - Z_n = \frac{1}{2^n} Z_{2n}$, et c'est aussi ce qui résulte des fonctions d'où naissent ces suites, puisqu'on a

$$\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\omega - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\cos\omega + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos 2\omega + \frac{1}{2}}.$$

(157). Soit, 4°. $p = 1$, $q = 5$, on aura la suite

$$Z_{2m+1} = 1 - \frac{1}{4^{2m+1}} + \frac{1}{6^{2m+1}} - \frac{1}{9^{2m+1}} + \frac{1}{11^{2m+1}} - \text{etc.},$$

où les nombres $5k+1$ sont affectés du signe $+$, et les nombres $5k-1$ du signe $-$. La somme de cette suite pour les diverses valeurs de n, sera donnée par la formule

$$\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2}{5}\pi}{\cos\omega-\cos\frac{2}{5}\pi}=\left(\frac{5}{2\pi}\right)Z_1+\left(\frac{5}{2\pi}\right)^3\omega^2 Z_3+\left(\frac{5}{2\pi}\right)^5\omega^4 Z_5+\text{etc.}$$

(158). Considérons maintenant le cas où n est pair ; on trouvera, par une analyse semblable à celle du n° 152,

$$\psi_n(x)+\psi_n(1-x)=\frac{2^n\pi^n}{\Gamma n}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{\cos\omega-\cos 2\pi x}\right).$$

Supposons donc que le développement suivant les puissances de ω donne

$$\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{\cos\omega-\cos 2\pi x}=A\omega+B\omega^3+C\omega^5\ldots\ldots+N\omega^{n-1}+\text{etc.},$$

$N\omega^{n-1}$ représentant le terme général de cette suite, on aura la formule

$$\psi_n(x)+\psi_n(1-x)=2^n\pi^n N.$$

Soit, comme ci-dessus, $x=\frac{p}{q}$, $p<\frac{1}{2}q$ et $n=2m$; si on fait

$$Z_{2m}=\frac{1}{p^{2m}}+\frac{1}{(q-p)^{2m}}+\frac{1}{(q+p)^{2m}}+\frac{1}{(2q-p)^{2m}}+\text{etc.},$$

on aura $Z_n=\left(\frac{2\pi}{q}\right)^n N$, et réciproquement $N=\left(\frac{q}{2\pi}\right)^n Z_n$, ce qui donne la formule générale

$$(c)\qquad \frac{\frac{1}{2}\omega\sin\omega}{\cos\omega-\cos\frac{2p\pi}{q}}=\left(\frac{q}{2\pi}\right)^2\omega^2 Z_2+\left(\frac{q}{2\pi}\right)^4\omega^4 Z_4+\left(\frac{q}{2\pi}\right)^6\omega^6 Z_6+\text{etc.},$$

d'où l'on peut déduire différentes formules particulières, comme dans le premier cas.

(159). Soit, par exemple, $p=1$, $q=4$, on aura la suite

$$Z_{2m}=1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\frac{1}{7^{2m}}+\frac{1}{9^{2m}}+\text{etc.},$$

dont la somme $Z_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right) S_{2m}$, S_{2m} désignant, comme ci-dessus, la somme de la suite complète $1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \text{etc.}$ On aura donc, d'après la formule (c),

$$\tfrac{1}{2}\omega \tang \omega = (2^2-1)\frac{\omega^2}{\pi^2}S_2 + (2^4-1)\frac{\omega^4}{\pi^4}S_4 + (2^6-1)\frac{\omega^6}{\pi^6}S_6 + \text{etc.}$$

Ainsi le développement de tang ω fera connaître les valeurs des sommes successives S_2, S_4, S_6, etc.

(160). Si l'on fait en général $S_{2m} = H_m \pi^{2m}$, il est remarquable que les coefficiens H_1, H_2, H_3, etc. pourront être déterminés indifféremment par celle qu'on voudra des quatre formules suivantes:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\omega \cot \omega = H_1\omega^2 + H_2\omega^4 + H_3\omega^6 + \text{etc.},\\
&\tfrac{1}{2}\omega \tang \omega = (2^2-1)H_1\omega^2 + (2^4-1)H_2\omega^4 + (2^6-1)H_3\omega^6 + \text{etc.}\\
(d)\qquad &\frac{\omega}{\sin\omega} = 1 + (2^1-1)H_1\omega^2 + \frac{2^3-1}{2^2}H_2\omega^4 + \frac{2^5-1}{2^4}H_3\omega^6 + \text{etc.},\\
&\log\frac{\omega}{\sin\omega} = H_1\omega^2 + \tfrac{1}{2}H_2\omega^4 + \tfrac{1}{3}H_3\omega^6 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Réciproquement, connaissant les coefficiens H_1, H_2, H_3, etc., on aura immédiatement le développement des fonctions qui forment les premiers membres de ces équations.

Ces formules sont liées entr'elles de manière que la seconde et la troisième se déduisent de la première, au moyen des équations $\tang \omega = \cot \omega - 2 \cot 2\omega$, $\frac{\omega}{\sin \omega} = \cot \tfrac{1}{2}\omega - \cot \omega$. Quant à la quatrième, elle se déduit encore de la première, en multipliant celle-ci par $\frac{2d\omega}{\omega}$ et intégrant.

(161). Si on compare la première de ces quatre formules avec celle du Calcul différentiel, art. 221, on verra que les nombres H_1, H_2, H_3, etc. se déduisent des nombres Bernoulliens A', B', C′, etc., suivant cette loi très-simple :

$$H_1 = A' = \frac{1}{6}, \qquad H_2 = \frac{2^3 B'}{2.3.4} = \frac{1}{90},$$
$$H_3 = \frac{2^5 C'}{2.3.4.5.6} = \frac{1}{945}, \qquad H_4 = \frac{2^7 D'}{2.3\ldots\ldots 8} = \frac{1}{9450},$$
$$H_5 = \frac{2^9 E'}{2.3\ldots\ldots 10} = \frac{1}{93555}, \qquad H_6 = \frac{2^{11} F'}{2.3\ldots\ldots 12} = \frac{691}{638512875}, \text{ etc.}$$

Ces valeurs peuvent se prolonger jusqu'au quinzième terme, au moyen de la table des nombres Bernoulliens qu'on trouve dans le Calcul différentiel d'Euler, page 420; mais on voit que ces valeurs deviennent fort compliquées dans les termes ultérieurs, et il est préférable de calculer les coefficiens H_m, à compter de $m=6$, par la formule $H_m = \frac{S_{2m}}{\pi^{2m}}$; car π^{2m} est toujours connu avec tel degré d'exactitude qu'on peut desirer, et la valeur de S_{2m} est donnée avec seize décimales exactes dans le tableau de l'article 73 ci-dessus. D'ailleurs comme π^2 diffère peu de 10, on voit que la valeur de H_m, qui peut être mise sous la forme $\frac{1}{\pi^{2m}} + \frac{S_{2m}-1}{\pi^{2m}}$, pourra toujours être calculée avec $16+m$ décimales exactes. Lorsque m sera >17, l'exactitude sera encore plus grande en prenant $H_m = \frac{1}{\pi^{2m}} + \frac{1}{(2\pi)^{2m}}$. Ainsi la suite H_1, H_2, H_3, etc., finit par se confondre avec une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{\pi^2}$. Ce décroissement est plus rapide encore dans les premiers termes, puisqu'on a $H_2 = \frac{1}{15} H_1$, $H_3 = \frac{2}{21} H_2$, $H_4 = \frac{1}{10} H_3$.

(162). Nous avons remarqué que les séries qui résultent du développement des quantités cot ω, tang ω, $\frac{\omega}{\sin \omega}$, log $\frac{\omega}{\sin \omega}$, se déduisent facilement de l'une d'entr'elles. Il n'en est pas de même de la suite qui résulte du développement de la quantité $\frac{1}{\cos \omega}$ ou séc ω; elle ne peut en aucune façon se déduire de celles dont on vient de parler, et ses coefficiens doivent être déterminés par un calcul particulier, afin de trouver par leur moyen la somme de la suite

$$Z_{2m+1} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}} + \text{etc.}$$

Soit $\frac{1}{\cos\omega} = 1 + K_1\omega^2 + K_2\omega^4 + K_3\omega^6 + \text{etc.}$, puisque $\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2$ $+ \frac{1}{2.3.4}\omega^4 - \text{etc.}$, on aura par la loi des suites récurrentes,

$$K_1 = \tfrac{1}{2},$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}K_1 - \frac{1}{2.3.4} = \frac{5}{24},$$

$$K_3 = \tfrac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2.3.4}K_1 + \frac{1}{2.3.4.5.6} = \frac{61}{720},$$

etc.

et les valeurs successives de Z_{2m+1} seront

$$Z_1 = \frac{\pi}{2^2}, \quad Z_3 = \frac{\pi}{2^4}K_1, \quad Z_5 = \frac{\pi}{2^6}K_2, \quad Z_7 = \frac{\pi}{2^8}K_3, \quad \text{etc.}$$

(163). Soit $y = \int \frac{d\omega}{\cos\omega} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\omega\right)$; si on substitue la valeur développée de $\frac{1}{\cos\omega}$, on aura en intégrant,

$$y = \omega + \tfrac{1}{3}K_1\omega^3 + \tfrac{1}{5}K_2\omega^5 + \tfrac{1}{7}K_3\omega^7 + \text{etc.}$$

Cela posé, je dis qu'on aura réciproquement

$$\omega = y - \tfrac{1}{3}K_1y^3 + \tfrac{1}{5}K_2y^5 - \tfrac{1}{7}K_3y^7 + \text{etc.},$$

c'est-à-dire que les coefficiens seront les mêmes dans les deux séries, à la réserve des signes qui sont tous positifs dans l'une, et qui sont alternativement positifs et négatifs dans l'autre.

Pour démontrer cette proposition singulière, je fais $\omega = \varphi\sqrt{-1}$ et $y = z\sqrt{-1}$; alors l'équation $dy = \frac{d\omega}{\cos\omega}$ devient

$$dz = \frac{d\varphi}{1 + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4} + \text{etc.}} = \frac{2d\varphi}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \frac{2e^\varphi d\varphi}{1 + e^{2\varphi}}.$$

Intégrant

Intégrant et supposant que z et φ s'évanouissent en même temps, on aura

$$\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}z = \text{arc tang } e^{\varphi},$$

ou $\varphi = \log \text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}z\right)$. Donc par le développement de y en ω, on a

$$\varphi = z + \tfrac{1}{3}K_1 z^3 + \tfrac{1}{5}K_2 z^5 + \tfrac{1}{7}K_3 z^7 + \text{etc.}$$

Remettant les valeurs $\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{-1}}$, $z = \frac{y}{\sqrt{-1}}$, il vient

$$\omega = y - \tfrac{1}{3}K_1 y^3 + \tfrac{1}{5}K_2 y^5 - \tfrac{1}{7}K_3 y^7 + \text{etc.},$$

ce qui est le théorème énoncé.

§ VIII. *Formules pour la sommation des suites dont le terme général est donné.*

(164). Soit φ ou $\varphi(x)$ la somme de la suite dont le terme général est une fonction donnée z ou $z(x)$, x désignant le nombre des termes, ou plus généralement ce nombre augmenté d'une constante α, ensorte qu'on ait

$$\varphi(x) = z(\alpha+1) + z(\alpha+2) + z(\alpha+3) \ldots + z(x);$$

on déduirait aisément z de φ au moyen de l'équation $z = \varphi(x) - \varphi(x-1)$, laquelle donne, par l'application du théorème de Taylor,

$$z = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{2}\cdot\frac{dd\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^3\varphi}{dx^3} - \text{etc.}$$

Mais s'il s'agit de trouver la somme de la suite dont le terme général est z, il faudra de cette équation tirer la valeur de φ en fonction de z.

Pour cela nous supposerons

$$\varphi = \int z dx + \tfrac{1}{2} z + A \frac{dz}{dx} + B \frac{ddz}{dx^2} + C \frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.};$$

et puisque cette équation doit être linéaire par rapport à z et φ, les coefficiens A, B, C, etc. seront les mêmes pour toute valeur de φ. Soit donc $\varphi = e^{mx}$, on aura $z = e^{mx}(1 - e^{-m})$ ou $z = ke^{mx}$, en faisant $k = 1 - e^{-m}$; de là résulte $\frac{dz}{dx} = kme^{mx}$, $\frac{ddz}{dx^2} = km^2e^{mx}$, etc. Ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, ou plutôt dans sa différentielle

$$\frac{d\varphi}{dx} = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{dx} + A \frac{ddz}{dx^2} + B \frac{d^3z}{dx^3} + C \frac{d^4z}{dx^4} + \text{etc.},$$

on en tire, après avoir divisé par ke^{mx},

$$1 + Am^2 + Bm^3 + Cm^4 + Dm^5 + \text{etc.} = \frac{m}{2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}m} + e^{-\frac{1}{2}m}}{e^{\frac{1}{2}m} - e^{-\frac{1}{2}m}}.$$

Le second membre reste le même en changeant le signe de m; ainsi tous les coefficiens B, D, F, etc. des puissances impaires de m sont nuls.

(165). Pour avoir égard à cette propriété, nous prendrons de nouveaux coefficiens A, B, C, etc., au moyen desquels on ait

$$\varphi = \int z dx + \tfrac{1}{2} z + A \frac{dz}{dx} - B \frac{d^3z}{dx^3} + C \frac{d^5z}{dx^5} - \text{etc.},$$

et en vertu du résultat précédent, ces coefficiens seront déterminés par l'équation

$$1 + Am^2 - Bm^4 + Cm^6 - Dm^8 + \text{etc.} = \frac{m}{2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}m} + e^{-\frac{1}{2}m}}{e^{\frac{1}{2}m} - e^{-\frac{1}{2}m}}.$$

Mettant $\omega\sqrt{-1}$ à la place de $\frac{1}{2}m$, il vient

$$1 - \omega \cot \omega = 2^2 A\omega^2 + 2^4 B\omega^4 + 2^6 C\omega^6 + \text{etc.}$$

Comparant cette formule avec la première des formules (d), art. 160, on voit que les coefficiens A, B, C, etc. se déduisent des coefficiens H_1, H_2, H_3, de cette manière :

$$A = \frac{1}{2} H_1, \quad B = \frac{1}{2^3} H_2, \quad C = \frac{1}{2^5} H_3, \quad \text{etc.};$$

on aura donc la formule générale

$$(a) \qquad \varphi = \int z dx + \tfrac{1}{2} z + \frac{1}{2} H_1 \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2^3} H_2 \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{2^5} H_3 \frac{d^5 z}{dx^5} - \text{etc.}$$

Cette formule coïncide avec celle qu'Euler a donnée pour le même objet dans son Calcul diff., pag. 418; mais la forme précédente paraît préférable, en ce que les coefficiens $\frac{1}{2} H_1$, $\frac{1}{2^3} H_2$, $\frac{1}{2^5} H_3$, etc. offrent évidemment une suite très-convergente, dans laquelle le rapport de chaque terme au précédent, tend de plus en plus vers la limite $\frac{1}{4\pi^2}$, ou $\frac{1}{40}$ à peu près.

Pour que les termes qui composent la valeur de φ forment aussi une suite convergente dans toute son étendue, il faut que les coefficiens différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^5z}{dx^5}$, etc. ne soient pas plus divergens qu'une progression géométrique dont la raison est $4\pi^2$. Dans le cas contraire, la suite dont il s'agit sera du nombre de celles que nous avons appelées *demi-convergentes*, et dont nous avons fait connaître l'usage pour parvenir au degré d'approximation que leur nature comporte. (Voyez part. II, art. 70.)

(166). La formule (a) donne la somme de la suite finie $z(\alpha + 1) + z(\alpha + 2) + z(\alpha + 3) \ldots + z(x)$, en déterminant convenablement la constante qui doit accompagner l'intégrale $\int z dx$. S'il s'agissait de trouver la somme de la suite infinie

$$z(x) + z(x+1) + z(x+2) + \text{etc.},$$

en supposant toutefois que les termes éloignés diminuent continuellement et finissent par être entièrement négligeables ; cette somme que nous désignerons par $\psi(x)$, devra être telle qu'on ait $\varphi(x) + \psi(x) - z(x) = A$, la constante A étant ce que devient $\varphi(x)$ lorsque x est infini. De là on tire la somme cherchée

$$(b) \qquad \psi(x) = C - \int z dx + \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2} H_1 \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2^3} H_2 \frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{1}{2^5} H_3 \frac{d^5 z}{dx^5} + \text{etc.},$$

C étant une constante qu'il faudra déterminer par la condition que $\psi(x)$ soit nulle lorsque $x = \infty$.

(167). Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver la somme de la suite infinie

$$\psi(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \text{etc.},$$

on fera $z = x^{-n}$, et on aura la somme demandée

$$(c) \qquad \begin{aligned} \psi(x) = \frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{H_1}{2} \cdot \frac{n}{x^{n+1}} - \frac{H_2}{2^3} \cdot \frac{n.n+1.n+2}{x^{n+3}} \\ + \frac{H_3}{2^5} \cdot \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4}{x^{n+5}} - \text{etc.} \end{aligned}$$

On voit par la forme de cette suite qu'elle ne pourra pas être convergente dans toute son étendue ; mais elle le sera au moins jusqu'à un certain terme ; et en prenant x suffisamment grand, elle pourra servir à déterminer $\psi(x)$ avec tel degré d'approximation qu'on voudra, excepté seulement le cas de $n = 1$, où la somme ψ devient infinie.

(168). On peut rendre plus convergente la valeur de $\psi(x)$, au moins dans un certain nombre des premiers termes, en substituant au lieu de chaque coefficient H_n, sa valeur $\frac{1}{\pi^{2n}} + \frac{S_{2n} - 1}{\pi^{2n}}$, et faisant

$S_{2n} - 1 = K_{2n}$; on aura de cette manière la formule

$$\psi(x) = \text{const.} - \int z dx + \tfrac{1}{2} z - \frac{V}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{K_2}{\pi^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{K_4}{\pi^4} \cdot \frac{d^3z}{dx^3}$$
$$- \frac{1}{2^5} \cdot \frac{K_6}{\pi^6} \cdot \frac{d^5z}{dx^5} + \text{etc.}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$V = \frac{dz}{2\pi\, dx} - \frac{d^3z}{2^3\pi^3 dx^3} + \frac{d^5z}{2^5\pi^5 dx^5} - \text{etc.}$$

Soit $2\pi x = t$, on aura plus simplement

$$V = \frac{dz}{dt} - \frac{d^3z}{dt^3} + \frac{d^5z}{dt^5} - \text{etc.},$$

de sorte que V devra satisfaire à l'équation différentielle

$$V + \frac{ddV}{dt^2} = \frac{dz}{dt}.$$

L'intégrale complète de cette équation est

$$V = \sin t \int z dt \sin t + \cos t \int z dt \cos t;$$

elle peut être mise sous la forme

$$V = \int z dt \cos(c - t) = 2\pi \int z dx \cos 2\pi(\alpha - x),$$

pourvu qu'après l'intégration, effectuée en regardant α comme constante, on fasse $\alpha = x$. Dans cette hypothèse, on aura la formule

$$(d) \quad \psi(x) = \text{const.} - \int z dx + \tfrac{1}{2} z - \int 2 z dx \cos 2\pi(\alpha - x)$$
$$- \frac{K_2}{2\pi^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{K_4}{2^3\pi^4} \cdot \frac{d^3z}{dx^3} - \frac{K_6}{2^5\pi^6} \cdot \frac{d^5z}{dx^5} + \text{etc.}$$

On aurait semblablement et avec la même condition,

$$(e) \quad \begin{aligned} \varphi(x) = \text{const} + \int z dx + \tfrac{1}{2} z + \int 2z dx \cos 2\pi(\alpha - x) \\ + \frac{K_2}{2\pi^2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{K_4}{2^3\pi^4} \cdot \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{K_6}{2^5\pi^6} \cdot \frac{d^5z}{dx^5} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Il faut, pour l'usage de ces formules, qu'on puisse trouver l'intégrale $\int 2z dx \cos 2\pi(\alpha - x)$; c'est ce qui n'aura aucune difficulté, si la fonction z est de la forme $Aa^x + Bb^x +$ etc., ou en général si la suite qui a pour terme général z, est une suite récurrente; mais alors la sommation de cette suite n'est qu'un problème fort simple d'analyse algébrique.

Dans d'autres cas on pourra au moins trouver, par la méthode des quadratures, l'intégrale $\int 2z dx \cos 2\pi(\alpha - x)$. En effet, pour une valeur donnée $x = \alpha$, tout se réduit à prendre l'aire.... $\int 2z dx \cos 2\pi(x - \alpha)$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$.

(169). Pour obtenir des suites encore plus convergentes, on pourrait faire $K_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} + L_{2n}$, L_{2n} désignant la somme de la suite $\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} +$ etc.; et par des calculs semblables, on parviendrait à la formule

$$(f) \quad \begin{aligned} \psi(x) = \text{const} + \tfrac{1}{2} z - \int z dx - \int 2z dx \cos 2\pi(\alpha - x) - \int 2z dx \cos 4\pi(\alpha - x) \\ - \frac{L_2}{2\pi^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{L_4}{2^3\pi^4} \cdot \frac{d^3z}{dx^3} - \frac{L_6}{2^5\pi^6} \cdot \frac{d^5z}{dx^5} + \text{etc.} \end{aligned}$$

On pourrait continuer ainsi la suite des intégrales, sans y joindre aucun terme différentiel, ce qui donnerait la formule

$$(g) \quad \begin{aligned} \psi(x) = \text{const.} + \tfrac{1}{2} z - \int z dx - \int 2z dx \cos 2\pi(\alpha - x) \\ - \int 2z dx \cos 4\pi(\alpha - x) - \int 2z dx \cos 6\pi(\alpha - x) - \text{etc.} \end{aligned}$$

Dans cette formule, toutes les intégrales de la forme........ $\int 2z dx \cos 2k\pi(\alpha - x)$ devront être prises en supposant α constante, et faisant $\alpha = x$ après l'intégration; on déterminera d'ailleurs la constante, de manière que la somme $\psi(x)$ s'évanouisse lorsqu'on fait $x=\infty$ ou $z=0$.

(170). Cette formule est remarquable dans son espèce; mais elle ne peut guère être utile dans les cas particuliers, soit à cause de la difficulté des intégrations, soit à cause du peu de convergence des termes successifs. Cependant si on donnait à z la forme qui convient au terme général des suites récurrentes, les intégrations ne présenteraient aucune difficulté. En effet, lorsqu'on a $z=\mathrm{A}e^{-mx}$, on trouve

$$\int -2zdx\cos 2k\pi(\alpha-x)=\frac{\mathrm{A}e^{-mx}\left[2m\cos 2k\pi(\alpha-x)+4k\pi\sin 2k\pi(\alpha-x)\right]}{m^2+4k^2\pi^2}.$$

Faisant ensuite $\alpha=x$, cette intégrale se réduit à

$$\frac{2\mathrm{A}me^{-mx}}{m^2+4k^2\pi^2};$$

et une somme de pareilles quantités, pour les valeurs successives $k=1, 2, 3$, etc., forme une suite convergente.

(171). Il y a un moyen d'exprimer beaucoup plus simplement le second membre de l'équation (g); supposons pour un moment que la série d'intégrales qui y sont comprises, soit

$$\int zdx+r\int 2zdx\cos 2\pi(\alpha-x)+r^2\int 2zdx\cos 4\pi(\alpha-x)$$
$$+r^3\int 2zdx\cos 6\pi(\alpha-x)+\text{etc.},$$

r étant un nombre constant <1, on pourra faire l'application de la formule

$$1+2r\cos\omega+2r^2\cos 2\omega+2r^3\cos 3\omega+\text{etc.}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2},$$

et on aura

$$(h)\qquad \psi(x)=\text{const.}+\tfrac{1}{2}z-\int\frac{(1-r^2)\,zdx}{1+r^2-2r\cos 2\pi(\alpha-x)}.$$

Concevons maintenant qu'on fasse l'intégration indiquée, en regardant r et α comme des constantes indéterminées ; qu'après l'intégration on fasse $\alpha = x$ et $r = 1 - \omega$, ω étant une quantité infiniment petite ; qu'eufin la constante soit déterminée de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque x est infini ; on obtiendra ainsi la vraie valeur de la somme $\psi(x)$.

Un pareil résultat qui offre la possibilité d'exprimer une intégrale aux différences finies, par une intégrale aux différences infiniment petites, n'est sans doute qu'un jeu d'analyse qui ne présente aucune utilité réelle ; mais il nous a paru assez curieux pour mériter d'être soumis aux regards des Géomètres.

FIN DE LA QUATRIÈME PARTIE.

EXERCICES
DE CALCUL INTÉGRAL.

CINQUIÈME PARTIE.

Les recherches de nature diverse contenues dans cette cinquième Partie, sont pour la plupart une continuation de celles qui font l'objet de la troisième et de la quatrième Partie; les unes sont relatives au développement des fonctions en séries; les autres roulent en général sur les moyens de faciliter et d'étendre les applications du calcul intégral, par l'évaluation exacte ou approchée de diverses sortes d'intégrales définies.

Dans les § III, IV et V, on trouvera un assez grand nombre de formules nouvelles, dont plusieurs sont dues à MM. Poisson et Cauchy, qui les ont données, le premier dans les Mémoires de l'Institut, an 1811, 2e Partie; le second dans un Mémoire présenté à l'Institut en août 1814.

Dans le § XII, nous avons traité fort au long des moyens de faciliter, autant qu'il est possible, le calcul des coefficiens de la série $P_0 + 2P_1 \cos \varphi + 2P_2 \cos 2\varphi +$ etc., qui naît du développement de la fonction $(1 - 2a \cos \varphi + a^2)^{-n}$. Ces coefficiens, et ceux qui résultent de leurs différentielles successives, prises par rapport à a, forment pour chaque valeur fractionnaire de l'exposant n, une espèce particulière de transcendantes qui jouissent de plusieurs belles propriétés, et qui méritent d'autant plus d'être examinées avec soin, qu'elles ont de nombreuses et d'utiles applications dans la théorie des perturbations des planètes.

§ I. *Usage de la fonction* Z'a *ou* $\frac{d\ \log \Gamma a}{da}$, *pour trouver l'intégrale* $\int \frac{x^{a-1}dx}{1+x^n}$ *et autres semblables, prises depuis* $x=0$ *jusqu'à* $x=1$.

1. Nous avons déjà observé (pag. 45) que la fonction $Z'a$ ou $\frac{d \log \Gamma a}{da}$ peut se déterminer exactement, toutes les fois que a est rationnelle, par la constante C dont la valeur a été donnée, page 68, et par une intégrale définie qui ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes. On a en effet

$$Z'a = -C + \int \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx. \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \tag{1}$$

Les valeurs les plus simples de $Z'a$, tirées de cette formule, sont comprises dans le tableau suivant :

$$\begin{aligned}
&Z'\tfrac{1}{4} = -C - \tfrac{3}{2}\mathcal{L}2 - \tfrac{1}{2}\pi, && Z'\tfrac{5}{4} = 4 - C - \tfrac{3}{2}\mathcal{L}2 - \tfrac{1}{2}\pi,\\
&Z'\tfrac{1}{3} = -C - \tfrac{3}{2}\mathcal{L}3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, && Z'\tfrac{4}{3} = 3 - C - \tfrac{3}{2}\mathcal{L}3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}},\\
&Z'\tfrac{1}{2} = -C - 2\mathcal{L}2, && Z'\tfrac{3}{2} = 1 - C - 2\mathcal{L}2,\\
&Z'\tfrac{2}{3} = -C - \tfrac{3}{2}\mathcal{L}3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, && Z'\tfrac{5}{3} = \tfrac{3}{2} - C - \tfrac{3}{2}\mathcal{L}3 + \frac{\pi}{2\sqrt{}},\\
&Z'\tfrac{3}{4} = -C - 3\mathcal{L}2 + \tfrac{1}{2}\pi, && Z'\tfrac{7}{4} = \tfrac{4}{3} - C - 3\mathcal{L}2 + \tfrac{1}{2}\pi,\\
&Z'1 = -C, && Z'2 = 1 - C.
\end{aligned}$$

Nous remarquerons de plus qu'en supposant ω infiniment petit, on a

$$Z'\omega = -\frac{1}{\omega} - C,$$

$$Z'\frac{1}{\omega} = \log\frac{1}{\omega} - \tfrac{1}{2}\omega.$$

2. On voit donc que la fonction $Z'a$ est plus simple que Za ou $\log \Gamma a$, puisque dans chaque période on peut trouver exactement une infinité de valeurs de $Z'a$, en supposant seulement la

constante C connue. La fonction $Z'a$ a en outre d'autres propriétés; et d'abord on a l'équation

$$Z'(1+a) = \frac{1}{a} + Z'a,$$

au moyen de laquelle la fonction $Z'x$, comprise dans une période quelconque, s'exprime par une fonction semblable comprise dans une période donnée, par exemple dans la seconde période pour laquelle la Table des Logarithmes de Γa a été construite.

On a ensuite, pour toute valeur de a, une équation *des complémens*, laquelle est, dans la première période,

$$Z'(\tfrac{1}{2}+c) - Z'(\tfrac{1}{2}-c) = -\pi \operatorname{tang} c\pi.$$

Dans la seconde période, cette équation est

$$Z'(\tfrac{3}{2}+c) - Z'(\tfrac{3}{2}-c) = \pi \operatorname{tang} c\pi - \frac{2c}{\frac{1}{4}-c^2};$$

c'est ce qui résulte des formules de la page 10.

Enfin les équations (D), (E), etc., pag. 25, donnent par la différentiation,

$$Z'a + Z'(\tfrac{1}{2}+a) - 2Z'(2a) = -2\mathcal{L}2,$$
$$Z'a + Z'(\tfrac{1}{3}+a) + Z'(\tfrac{2}{3}+a) - 3Z'(3a) = -3\mathcal{L}3,$$
etc.

Ces équations servent à établir entre les fonctions $Z'a$, les mêmes réductions qui ont lieu entre les fonctions Γa, et elles offrent les moyens de calculer ces fonctions pour une période entière, en les supposant connues dans une petite partie de cette période; mais il est inutile de construire une table particulière des fonctions $Z'a$, puisqu'elles peuvent se calculer aisément, avec neuf décimales, au moyen de la Table que nous avons donnée pour log Γa. (Voyez à ce sujet l'art. 88 et suiv., pag. 79.)

3. Nous allons maintenant faire voir par quelques exemples, que les fonctions $Z'a$ peuvent servir à exprimer des intégrales qu'on n'obtiendrait que difficilement par une autre voie. On aura d'abord,

en vertu de l'équation (1), et en supposant a et b positifs,

$$\int \frac{x^a - x^b}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = Z'b - Z'a\,; \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \tag{2}$$

on en déduit les corollaires suivans où l'on suppose $a < 1$ et $b < 1$.

$$\int \frac{x^{-a} - 1}{1-x}\, dx = Z'1 - Z'(1-a) = -C - Z'(1-a),$$

$$\int \frac{x^{-a} - x^{-b}}{1-x}\, dx = Z'(1-b) - Z'(1-a), \tag{3}$$

$$\int \frac{x^{-a} - x^{a}}{1-x}\, dx = Z'(1+a) - Z'(1-a) = \frac{1}{a} - \pi \cot a\pi.$$

Si l'on multiplie la dernière par da, et qu'on intègre les deux membres par rapport à a depuis $a = 0$, on aura

$$\int \frac{x^a + x^{-a} - 2}{1-x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}} = \log \frac{a\pi}{\sin a\pi}. \tag{4}$$

Faisant $a = \frac{1}{2}$, et mettant x^2 à la place de x, il viendra

$$\int \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}} = \log \tfrac{1}{2}\pi. \tag{5}$$

Soit encore $a = \frac{1}{4}$, on aura, en mettant x^4 au lieu de x,

$$\int \frac{(1-x)\,x^2 dx}{(1+x)(1+x^2)\, l\frac{1}{x}} = \log \frac{\pi}{2\sqrt{2}}:$$

le premier membre $= \frac{1}{2}\int \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{dx}{l\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{(1-x)^2\, dx}{(1+x^2)\, l\frac{1}{x}}$; donc

$$\int \frac{(1-x)^2\, dx}{(1+x^2)\, l\frac{1}{x}} = \log \frac{4}{\pi}\,; \tag{6}$$

ajoutant à cette équation ce que devient l'équation (5) lorsqu'on met x^2 au lieu de x, on aura

$$\int (1-x)\frac{dx}{l\frac{1}{x}} = \log 2,$$

résultat qui s'accorde avec la formule (1), III^e partie, pag. 370.

4. Soit proposé maintenant de trouver la valeur de l'intégrale $Q = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. On pourra donner à cette intégrale la forme $\int \frac{x^{a-1}(1-x)\,dx}{1-x^2}$ qui, en mettant $x^{\frac{1}{2}}$ au lieu de x, devient $\frac{1}{2}\int \frac{x^{\frac{1}{2}a-1}(1-x^{\frac{1}{2}})\,dx}{1-x}$; on aura donc, par l'application de la formule (2),

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \tfrac{1}{2}Z'\left(\frac{a+1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}Z'\left(\frac{a}{2}\right). \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Ainsi l'intégrale dont il s'agit sera connue, quel que soit a, au moyen des fonctions Z'.

Si on met x^n à la place de x, ce qui ne change pas les limites de l'intégrale, on aura, en mettant $\frac{a}{n}$ à la place de a,

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{1+x^n} = \frac{1}{2n}Z'\left(\frac{a+n}{2n}\right) - \frac{1}{2n}Z'\left(\frac{a}{2n}\right). \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Si on multiplie l'équation (7) par da, et qu'on intègre les deux membres par rapport à a depuis $a = 0$, on aura

$$\int \frac{(1-x^{a-1})\,dx}{(1+x)\,l\frac{1}{x}} = Z\left(\frac{a+1}{2}\right) - Z\frac{a}{2} + Z\tfrac{1}{2},$$

formule qui se déduirait aisément de l'équation (a), pag. 108.

5. Soit proposé maintenant l'intégrale $Q(n) = \int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^n}$, prise toujours entre les limites $x = 0$, $x = 1$; cette intégrale se ramène aisément au cas de $n = 1$, lorsque n est un nombre entier. En effet, si on différentie la quantité $V = \frac{x^a}{(1+x)^n}$, on aura

$$dV = \frac{(a-n)\,x^{a-1}\,dx}{(1+x)^n} + \frac{nx^{a-1}\,dx}{(1+x)^{n+1}};$$

intégrant ensuite entre les limites données, il vient

$$(\tfrac{1}{2})^n = (a-n)\,Q(n) + nQ(n+1); \tag{9}$$

de là on tire successivement

$$Q2 = \tfrac{1}{2} + (1 - a)\,Q1,$$
$$Q3 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{2-a}{2}\,Q2,$$
$$Q4 = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \frac{3-a}{3}\,Q3,$$
etc.

Ainsi n étant un entier quelconque, on déterminera généralement $Q(n)$ par le moyen de $Q1$ dont la valeur est donnée par l'équation (7).

6. Soit $\frac{x}{1+x} = z$ ou $x = \frac{z}{1-z}$, l'intégrale $Q(n)$ prendra cette forme

$$Q(n) = \int z^{a-1}\,dz\,(1-z)^{n-a-1}; \qquad \begin{cases} z = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

développant le binome et intégrant dans les limites requises, on aura $Q(n)$ ou

$$(10)\quad \int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{(\frac{1}{2})^a}{a} - \frac{n-a-1}{1}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{a+1}}{a+1} + \frac{n-a-1\,.\,n-a-2}{1\,.\,2}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{a+2}}{a+2} - \text{etc.}$$

Cette formule se termine d'elle-même et donne une intégrale exacte, toutes les fois que $n - a$ est un entier positif; dans tout autre cas, elle donnera pour l'intégrale une valeur approchée et facile à calculer, puisque chaque terme de la suite n'est qu'environ la moitié du précédent.

7. Pour trouver d'autres cas d'intégrabilité de la formule.... $Q(n) = \int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^n}$, soit $x = \frac{1-z}{1+z}$, on aura la transformée

$$Q(n) = 2^{1-n}\int (1-z)^{a-1}(1+z)^{n-a-1}dz. \qquad \begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Si on a $n = 2a$, cette quantité deviendra $2^{1-n}\int (1-z^2)^{a-1}dz$, et en mettant $z^{\frac{1}{2}}$ à la place de z, elle se réduit à $2^{-n}\int z^{-\frac{1}{2}}dz(1-z)^{a-1}$; celle-ci étant comprise dans les intégrales Eulériennes, sa valeur est $2^{-n}.\frac{\Gamma a \Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$; donc on a

(11) $$\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{2a}} = 2^{-2a}.\frac{\Gamma a \Gamma \frac{1}{2}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}.$$

8. Si, au lieu de supposer $n = 2a$, on fait $n = 2a+1$, ou en général $n = 2a+k$, k étant un entier, on aura

$$Q(n) = 2^{1-n}\int dz(1+z)^k(1-z^2)^{a-1};$$

mettant $z^{\frac{1}{2}}$ à la place de z et développant la puissance $(1+z^{\frac{1}{2}})^k$, on aura

$$Q(n) = 2^{-n}\int(1-z)^{a-1}z^{-\frac{1}{2}}dz\left(1+kz^{\frac{1}{2}}+\frac{k.k-1}{1.2}z+\text{etc.}\right).$$

Les différens termes de cette série sont intégrables par les fonctions Γ et il en résulte la formule

$$\int\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{2a+k}} = 2^{-2a-k}\left(\frac{\Gamma a\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}+\frac{k}{1}.\frac{\Gamma a\Gamma 1}{\Gamma(a+1)}+\frac{k.k-1}{1.2}.\frac{\Gamma a\Gamma\frac{3}{2}}{\Gamma(a+\frac{3}{2})}+\text{etc.}\right).$$

On peut séparer les termes transcendans des termes rationnels qui se succèdent alternativement, et on obtient de cette manière

(12) $$\int\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{2a+k}} = \frac{2^{-2a-k}\Gamma a\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}\left(1+\frac{k.k-1}{1.2}.\frac{1}{2a+1}+\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}.\frac{1.2}{2a+1.2a+3}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{2^{-2a-k}}{a}\left(k+\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}.\frac{1}{a+1}+\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}.\frac{1.2}{a+1.a+2}+\text{etc.}\right)$$

Cette formule se termine d'elle-même lorsque a est un entier.

9. Il est également facile de trouver l'intégrale $Q(2a-k)$, ou $\int\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{2a-k}}$, k étant un entier. En effet on a, d'après la formule (9),

$$(1-a)Q(2a-1) = 2^{1-2a}+(1-2a)Q(2a),$$
$$(2-a)Q(2a-2) = 2^{2-2a}+(2-2a)Q(2a-1),$$
$$\text{etc.}$$

Ainsi toutes ces intégrales seront connues, d'après la valeur de $Q(2a)$ donnée par la formule (11).

10. Il résulte de ce qui précède, que l'intégrale $Q(n)$ ou $\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^n}$, peut s'exprimer, soit exactement, soit à l'aide des fonctions $Z'a$ et Γa, dans les cas suivans :

1°. Lorsque a est un nombre entier, l'intégrale se trouve immédiatement, quel que soit n, en faisant $1+x=z$.

2°. Si on a $n=a+k$, k étant un entier, l'intégrale $Q(n)$, ou $\int \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+k}}$, se réduit à $\int z^{a-1}dz(1-z)^{k-1}$, en faisant $x=\frac{z}{1-z}$; elle se détermine donc exactement pour toute valeur de a.

3°. Lorsque n est un nombre entier, l'intégrale $Q(n)$ pourra toujours s'exprimer par les fonctions $Z'a$, au moyen des formules (9) et (7).

4°. Si on a $n=2a\pm k$, k étant un entier, l'intégrale $Q(n)$ pourra toujours se ramener à l'intégrale $Q(2a)$ par la formule (9), et ne dépendra ainsi que des fonctions Γ.

Si aucun de ces cas n'a lieu, on pourra trouver au moins une valeur approchée de l'intégrale $Q(n)$ par la suite convergente de l'article 6.

11. Considérons maintenant l'intégrale

$$T=\int\left(\frac{x^{a-1}dx}{1-x}-\frac{x^{m-1}dx}{l\frac{1}{x}}\right), \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

que nous mettrons sous cette forme,

$$T=\int\left(\frac{x^{a-1}-1}{1-x}\right)dx+\int(1-x^{m-1})\frac{dx}{l\frac{1}{x}}+\int\left(\frac{dx}{1-x}-\frac{dx}{l\frac{1}{x}}\right).$$

La première partie, en vertu de l'équation (1), $=-C-Z'a$; la seconde $=\log m$ (III^e part., page 370); il reste donc à trouver la troisième partie, $V=\int\left(\frac{dx}{1-x}-\frac{dx}{l\frac{1}{x}}\right)$.

12. Lorsque n est très-grand, on a $Z'(1+n)=\log n$, et par conséquent

conséquent la formule (1) donne

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = C + \log n\,;$$

mais la formule (21), page 50, donne

$$\int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{nx^{n-1}dx}{1-x^n}\right) = \log n.$$

Donc

$$\int\left(\frac{nx^{n-1}dx}{1-x^n} - \frac{x^n dx}{1-x}\right) = C\,;$$

mettant $x^{\frac{1}{n}}$ au lieu de x, les limites de l'intégrale seront toujours les mêmes, et on aura

$$\int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{1}{n}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n}}dx}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right) = C\,;$$

mais n étant infiniment grand, on a $x^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}\log\frac{1}{x}$; donc

(13) $$\int\left(\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{l\frac{1}{x}}\right) = C.$$

C'est la valeur de l'intégrale V, telle qu'elle a été donnée par Euler (*Nova Acta Petrop.*, tome IV).

Si on la substitue dans la valeur de T de l'article précédent, on aura $T = \log m - Z'a$, ce qui donne la formule

(14) $$\int\left(\frac{x^{a-1}dx}{1-x} - \frac{x^{m-1}dx}{l\frac{1}{x}}\right) = \log m - Z'a.$$

13. L'intégrale que nous venons d'évaluer est du même genre que celles que nous avons considérées page 107 ; elle est composée de deux parties infinies dont la différence est finie et assignable. Quelquefois une même intégrale contient à la fois deux semblables parties ; telle est par exemple l'intégrale

$$T = \int \frac{z^{a-1}dz}{1-z^n},$$

prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$; cette intégrale, où l'on suppose a positif et $n>a$, est composée de deux parties, l'une positive et infinie, depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$; l'autre négative et aussi infinie, depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$; cette dernière, en faisant $z=\frac{1}{x}$, peut se mettre sous la forme $-\int \frac{x^{n-a-1}dx}{1-x^n}$, de sorte qu'on aura

$$T=\int \frac{x^{a-1}-x^{n-a-1}}{1-x^n}\,dx. \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Mais en mettant x^n au lieu de x, et $\frac{a}{n}$ au lieu de a, dans la formule (c), page 98, on a

$$\int \frac{x^{a-1}-x^{n-a-1}}{1-x^n}\,dx=\frac{\pi}{n}\cot\frac{a\pi}{n};$$

donc l'intégrale cherchée,

$$(15) \qquad \int \frac{z^{a-1}dz}{1-z^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{a\pi}{n}. \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

De là on tire les corollaires suivans :

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\int \frac{dz}{c^2-z^2}=0, \\ &\int \frac{(A+Bz^2)dz}{(m^2+z^2)(c^2-z^2)}=\frac{A-Bm^2}{c^2+m^2}\cdot\frac{\pi}{2m}, \\ &\int \frac{z^{a-1}dz}{(m^2+z^2)(c^2-z^2)}=\frac{m^{a-2}+c^{a-2}\cos\frac{1}{2}a\pi}{m^2+c^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sin\frac{1}{2}a\pi}. \end{aligned} \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\infty \end{cases}$$

14. Soit proposé enfin l'intégrale

$$T=\int \frac{x^a dx}{1+2x\cos\theta+x^2}. \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Cette intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, a pour valeur (page 101) $\frac{\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{\sin a\theta}{\sin\theta}$; mais si on la prend seulement depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, elle offre une transcendante d'une nature particulière, qui ne peut être évaluée facilement que dans quelques cas que nous allons examiner.

Par un développement connu, on a

$$\frac{\sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}=\sin\theta-x\sin 2\theta+x^2\sin 3\theta-x^3\sin 4\theta+\text{etc.}$$

Multipliant de part et d'autre par $x^a dx$, et intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on trouve

$$T=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{a+1}-\frac{\sin 2\theta}{a+2}+\frac{\sin 3\theta}{a+3}-\text{etc.}\right);$$

mais cette suite est fort peu convergente, et on n'en pourrait tirer que très-difficilement une valeur approchée de T.

Si cependant l'angle θ est dans un rapport rationnel avec l'angle droit, on pourra sommer la suite précédente, au moyen des fonctions $Z'(x)$. En effet, soit $\theta=\frac{m}{n}\pi$, m et n étant des nombres entiers, on aura $\sin n\theta=0$, $\sin(n+1)\theta=\sin\theta\cos m\pi$, $\sin(n+2)\theta=\sin 2\theta\cos m\pi$, etc., $\sin 2n\theta=0$, $\sin(2n+1)\theta=\sin\theta$, $\sin(2n+2)\theta=\sin 2\theta$, etc. De là on voit que la valeur de $T\sin\theta$ se partagera en un nombre $n-1$ de suites, savoir,

$$\begin{aligned}
T\sin\theta = {} & \sin\theta\left(\frac{1}{a+1}+\frac{\cos m\pi}{a+n+1}+\frac{1}{a+2n+1}+\frac{\cos m\pi}{a+3n+1}+\text{etc.}\right)\\
- {} & \sin 2\theta\left(\frac{1}{a+2}+\frac{\cos m\pi}{a+n+2}+\frac{1}{a+2n+2}+\frac{\cos m\pi}{a+3n+2}+\text{etc.}\right)\\
+ {} & \sin 3\theta\left(\frac{1}{a+3}+\frac{\cos m\pi}{a+n+3}+\frac{1}{a+2n+3}+\frac{\cos m\pi}{a+3n+3}+\text{etc.}\right)\\
& \vdots\\
\pm {} & \sin(n-1)\theta\left(\frac{1}{a+n-1}+\frac{\cos m\pi}{a+2n-1}+\frac{1}{a+3n-1}+\frac{\cos m\pi}{a+4n-1}+\text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

Pour trouver la somme de ces diverses suites, il faut distinguer deux cas, selon que m est pair ou impair.

15. Si m est impair, on aura $\cos m\pi=-1$; mais par la formule du n° 21, page 17, la suite infinie

$$\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right)+\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2+y}\right)+\left(\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3+y}\right)+\text{etc.}$$

a pour somme $Z'(1+y)-Z'(1+x)$. De là on tire aisément

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
2nT\sin\theta = &\quad \sin\theta \left[Z'\left(\frac{a+1+n}{2n}\right)-Z'\left(\frac{a+1}{2n}\right)\right]\\
&- \sin 2\theta \left[Z'\left(\frac{a+2+n}{2n}\right)-Z'\left(\frac{a+2}{2n}\right)\right]\\
&+ \sin 3\theta \left[Z'\left(\frac{a+3+n}{2n}\right)-Z'\left(\frac{a+3}{2n}\right)\right]\\
&\vdots\\
&\pm \sin(n-1)\theta\left[Z'\left(\frac{a+2n-1}{2n}\right)-Z'\left(\frac{a+n-1}{2n}\right)\right],
\end{aligned}
$$

où l'on peut remarquer que $n\theta-\pi$ étant de la forme $2k\pi$, puisque m est impair, on aura $\sin(n-1)\theta=\sin\theta$, $\sin(n-2)\theta=\sin 2\theta$, etc. Mais il ne résulte de là aucune simplification de la formule.

16. Si m est pair, on aura $\cos m\pi=1$, et alors les diverses suites qui multiplient $\sin\theta$, $\sin 2\theta$, etc., dans la formule de l'article 14, ont des sommes infinies. Mais il faut observer que dans ce même cas on a $\sin(n-1)\theta=-\sin\theta$, $\sin(n-2)\theta=-\sin 2\theta$, etc., de sorte qu'en réunissant les termes également éloignés des extrêmes, la formule devient

$$
\begin{aligned}
T\sin\theta = &\ \sin\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+n+1}+\frac{1}{a+2n+1}+\text{etc.}\\ -&\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+2n-1}-\frac{1}{a+3n-1}-\text{etc.}\end{aligned}\right\}\\
&-\sin 2\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+n+2}+\frac{1}{a+2n+2}+\text{etc.}\\ -&\frac{1}{a+n-2}-\frac{1}{a+2n-2}-\frac{1}{a+3n-2}-\text{etc.}\end{aligned}\right\}\\
&\vdots\\
&\pm\sin k\theta\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a+n+k}+\frac{1}{a+2n+k}+\text{etc.}\\ -&\frac{1}{a+n-k}-\frac{1}{a+2n-k}-\frac{1}{a+3n-k}-\text{etc.}\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
$$

k est mis pour $\frac{n-1}{2}$, car n doit être impair, puisqu'on suppose m pair.

Cela posé, si l'on somme les suites contenues dans cette expression, par la formule donnée ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned}
n \sin\theta . \mathrm{T} = & \quad \sin\theta \left[\mathrm{Z}'\left(\frac{a+n-1}{n}\right) - \mathrm{Z}'\left(\frac{a+1}{n}\right) \right] \\
& - \sin 2\theta \left[\mathrm{Z}'\left(\frac{a+n-2}{n}\right) - \mathrm{Z}'\left(\frac{a+2}{n}\right) \right] \\
(18) \quad & + \sin 3\theta \left[\mathrm{Z}'\left(\frac{a+n-3}{n}\right) - \mathrm{Z}'\left(\frac{a+3}{n}\right) \right] \\
& \vdots \\
& \pm \sin\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta \left[\mathrm{Z}'\left(\frac{a+\frac{1}{2}(n+1)}{n}\right) - \mathrm{Z}'\left(\frac{a+\frac{1}{2}(n-1)}{n}\right) \right].
\end{aligned}$$

Voici les cas les plus simples de ces deux formules :

$$\begin{aligned}
& \theta = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \int \frac{x^a dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+3}{4}\right) - \tfrac{1}{4}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+1}{4}\right) \\
& \theta = \tfrac{1}{3}\pi, \quad \int \frac{x^a dx}{1+x+x^2} = \tfrac{1}{3}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+2}{3}\right) - \tfrac{1}{3}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+1}{3}\right) \\
(19) \quad & \theta = \tfrac{2}{3}\pi, \quad \int \frac{x^a dx}{1-x+x^2} = \tfrac{1}{6}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+4}{6}\right) - \tfrac{1}{6}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+1}{6}\right) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{6}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+5}{6}\right) - \tfrac{1}{6}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+2}{6}\right) \\
& \left.\begin{array}{l} \theta = \tfrac{1}{4}\pi \\ \theta = \tfrac{3}{4}\pi \end{array}\right\}, \quad \int \frac{x^a dx}{1 \pm 2x\cos\frac{\pi}{4} + x^2} = \tfrac{1}{8}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+5}{8}\right) - \tfrac{1}{8}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+1}{8}\right) \\
& \qquad\qquad \mp \tfrac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}\left[\mathrm{Z}'\left(\frac{a+6}{8}\right) - \mathrm{Z}'\left(\frac{a+2}{8}\right)\right] \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{8}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+7}{8}\right) - \tfrac{1}{8}\mathrm{Z}'\left(\frac{a+3}{8}\right).
\end{aligned}$$

17. Par ces formules on pourra toujours trouver la valeur de l'intégrale $\mathrm{Q}(a, \theta) = \int \frac{x^a dx}{1+2x\cos\theta + x^2}$, quel que soit a, pourvu que le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ soit rationnel. D'un autre côté, on peut toujours trouver la valeur de cette intégrale, quel que soit θ, si a est rationnel, puisqu'alors la fraction à intégrer peut être rendue rationnelle. On voit donc que dans ces deux cas on pourra trouver la somme de la suite

$$\frac{\sin\theta}{a+1} \pm \frac{\sin 2\theta}{a+2} + \frac{\sin 3\theta}{a+3} \pm \frac{\sin 4\theta}{a+4} + \text{etc.};$$

dans le premier cas, elle sera exprimée par les fonctions Z'; dans le second, elle sera exprimée généralement par des arcs de cercle et des logarithmes.

Représentons par $Q(a, \theta)$ l'intégrale $\int \frac{x^a dx}{1+2x\cos\theta+x^2}$, et supposons la fonction $Q(a, \theta)$ connue; s'il s'agit de trouver l'intégrale $\int \frac{x^a dx}{(1+2x\cos\theta+x^2)^2}$, prise toujours dans les limites $x=0$, $x=1$, on différentiera la quantité $V = \frac{x^a(x+\cos\theta)}{1+2x\cos\theta+x^2}$, et on aura

$$dV = \frac{(a-1)x^a + ax^{a-1}\cos\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}dx + \frac{2x^a dx \sin^2\theta}{(1+2x\cos\theta+x^2)^2};$$

d'où l'on déduit

$$(20)\quad \int \frac{x^a dx}{(1+2x\cos\theta+x^2)^2} = \frac{1-a}{2\sin^2\theta}Q(a, \theta) - \frac{a\cos\theta}{2\sin^2\theta}Q(a-1, \theta) + \frac{1}{4\sin\theta};$$

on procéderait semblablement si le polynome était élevé à une plus haute puissance.

§ II. *Du développement des fonctions* $\frac{\sin ax}{\sin bx}$, $\frac{\cos ax}{\sin bx}$, *etc.*

18. Considérons d'abord la fonction $\frac{\sin ax}{\sin bx}$: on sait que son dénominateur peut se mettre sous la forme

$$\sin bx = bx\left(1-\frac{b^2x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{b^2x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{b^2x^2}{9\pi^2}\right), \text{ etc.}$$

Ainsi on pourra exprimer la fonction $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ par une suite infinie de fractions partielles, qui auront pour dénominateurs les différens facteurs dont $\sin bx$ est composé.

Le facteur x n'entre point en considération, parce qu'il se trouve détruit par un facteur semblable compris dans $\sin ax$; prenons donc le facteur général $1-\frac{bx}{k\pi}$, k étant un entier quelconque positif ou négatif, et soit la fraction partielle correspondante $\frac{A}{k\pi-bx}$; on déterminera le coefficient A en faisant $x=\frac{k\pi}{b}$ dans la valeur

$A = \frac{k\pi - bx}{\sin bx} \sin ax$. Par cette substitution on a $\frac{k\pi - bx}{\sin bx} = -\frac{b}{b \cos bx} = -\cos k\pi$; donc $A = -\cos k\pi \sin \frac{ka\pi}{b}$.

Si on prend k successivement positif et négatif, on aura les deux fractions partielles qui naissent du facteur général $1 - \frac{b^2x^2}{k^2\pi^2}$, et leur somme sera

$$-\frac{\cos k\pi \sin \frac{ka\pi}{b}}{k\pi - bx} - \frac{\cos k\pi \sin \frac{ka\pi}{b}}{k\pi + bx} = -\frac{2k\pi \cos k\pi \sin \frac{ka\pi}{b}}{k^2\pi^2 - b^2x^2}.$$

Il ne s'agit plus que de donner à k les valeurs successives 1, 2, 3, etc., et d'ajouter tous les résultats; on aura, en faisant $\theta = \frac{a\pi}{b}$, la formule

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = 2\pi\left(\frac{\sin\theta}{\pi^2 - b^2x^2} - \frac{2\sin 2\theta}{4\pi^2 - b^2x^2} + \frac{3\sin 3\theta}{9\pi^2 - b^2x^2} - \frac{4\sin 4\theta}{16\pi^2 - b^2x^2} + \text{etc.}\right).$$

19. Si on différentie cette formule par rapport à a, on en déduira

$$\frac{x\cos ax}{\sin bx} = \frac{2}{b}\left(\frac{\pi^2\cos\theta}{\pi^2 - b^2x^2} - \frac{4\pi^2\cos 2\theta}{4\pi^2 - b^2x^2} + \frac{9\pi^2\cos 3\theta}{9\pi^2 - b^2x^2} - \text{etc.}\right);$$

le second membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{2}{b}(\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \text{etc.})$$
$$+ 2bx^2\left(\frac{\cos\theta}{\pi^2 - b^2x^2} - \frac{\cos 2\theta}{4\pi^2 - b^2x^2} + \frac{\cos 3\theta}{9\pi^2 - b^2x^2} + \text{etc.}\right).$$

Or on a, pag. 103, la formule

$$\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta - \text{etc.},$$

qui donne, par la différentiation,

$$\tfrac{1}{2} = \cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \text{etc.};$$

donc on aura en général,

$$\frac{\cos ax}{\sin bx} = \frac{1}{bx} + 2bx\left(\frac{\cos\theta}{\pi^2 - b^2x^2} - \frac{\cos 2\theta}{4\pi^2 - b^2x^2} + \frac{\cos 3\theta}{9\pi^2 - b^2x^2} - \text{etc.}\right).$$

C'est aussi ce qu'on trouverait directement en cherchant la fraction partielle qui répond au facteur $1 - \frac{bx}{k\pi}$, dans le développement de la fonction $\frac{\cos ax}{\sin bx}$.

20. Considérons maintenant la fonction $\frac{\sin ax}{\cos bx}$; puisque le dénominateur $\cos bx$ est composé d'une infinité de facteurs de la forme $1 - \frac{4b^2x^2}{(2k+1)^2\pi^2}$, il faudra chercher en général la fraction partielle qui a pour dénominateur $(2k+1)\pi - 2bx$. Soit cette fraction $\frac{A}{(2k+1)\pi - 2bx}$, on pourra supposer $A = \frac{(2k+1)\pi - 2bx}{\cos bx} . \sin ax$, pourvu que dans cette expression on fasse $x = \frac{(2k+1)\pi}{2b}$; par cette substitution on obtient $A = -2\cos k\pi \sin(k+\frac{1}{2})\theta$, en faisant toujours $\theta = \frac{a\pi}{b}$.

De là on voit que le facteur $1 - \frac{4b^2x^2}{(2k+1)^2\pi^2}$ produira dans le développement total deux fractions dont la somme est

$$-\frac{2\cos k\pi \sin(k+\frac{1}{2})\theta}{(2k+1)\pi - 2bx} + \frac{2\cos k\pi \sin(k+\frac{1}{2})\theta}{(2k+1)\pi + 2bx} = -\frac{8bx\cos k\pi \sin(k+\frac{1}{2})\theta}{(2k+1)^2\pi^2 - 4b^2x^2};$$

donnant à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3, etc., et ajoutant tous les résultats, on aura la formule

$$\frac{\sin ax}{\cos bx} = 8bx\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\pi^2 - 4b^2x^2} - \frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2 - 4b^2x^2} + \frac{\sin\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2 - 4b^2x^2} - \text{etc.}\right).$$

Si on différentie cette équation par rapport à a, il en résultera, après avoir divisé chaque membre par x,

$$\frac{\cos ax}{\cos bx} = 4\pi\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\pi^2 - 4b^2x^2} - \frac{3\cos\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2 - 4b^2x^2} + \frac{5\cos\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2 - 4b^2x^2} - \text{etc.}\right),$$

formule à laquelle on pourrait parvenir directement par de semblables opérations.

21. Les quatre formules précédentes réunies sous un même point de vue sont, en faisant toujours $\frac{a\pi}{b} = \theta$,

sin ax

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = 2\pi\left(\dfrac{\sin\theta}{\pi^2-b^2x^2} - \dfrac{2\sin 2\theta}{4\pi^2-b^2x^2} + \dfrac{3\sin 3\theta}{9\pi^2-b^2x^2} - \text{etc.}\right), \\ \dfrac{\cos ax}{\sin bx} = \dfrac{1}{bx} + 2bx\left(\dfrac{\cos\theta}{\pi^2-b^2x^2} - \dfrac{\cos 2\theta}{4\pi^2-b^2x^2} + \dfrac{\cos 3\theta}{9\pi^2-b^2x^2} - \text{etc.}\right), \\ \dfrac{\sin ax}{\cos bx} = 8bx\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\pi^2-4b^2x^2} - \dfrac{\sin\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2-4b^2x^2} + \dfrac{\sin\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2-4b^2x^2} - \text{etc.}\right), \\ \dfrac{\cos ax}{\cos bx} = 4\pi\left(\dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\pi^2-4b^2x^2} - \dfrac{3\cos\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2-4b^2x^2} + \dfrac{5\cos\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2-4b^2x^2} - \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Euler a donné les deux premières sous une autre forme dans ses *Opusc. anal.*, tom. II, pag. 73 et 75.

22. Si au lieu de x on met $x\sqrt{-1}$, on obtiendra les quatre formules suivantes.

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} = 2\pi\left(\dfrac{\sin\theta}{\pi^2+b^2x^2} - \dfrac{2\sin 2\theta}{4\pi^2+b^2x^2} + \dfrac{3\sin 3\theta}{9\pi^2+b^2x^2} - \text{etc.}\right), \\ \dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} = \dfrac{1}{bx} - 2bx\left(\dfrac{\cos\theta}{\pi^2+b^2x^2} - \dfrac{\cos 2\theta}{4\pi^2+b^2x^2} + \dfrac{\cos 3\theta}{9\pi^2+b^2x^2} - \text{etc.}\right), \\ \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}} = 8bx\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\pi^2+4b^2x^2} - \dfrac{\sin\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2+4b^2x^2} + \dfrac{\sin\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2+4b^2x^2} - \text{etc.}\right), \\ \dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}} = 4\pi\left(\dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\pi^2+4b^2x^2} - \dfrac{3\cos\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2+4b^2x^2} + \dfrac{5\cos\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2+4b^2x^2} - \text{etc.}\right). \end{cases}$$

23. Si on fait $b=\pi$, la première et la seconde des formules (a) deviennent

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sin ax}{\sin \pi x} = \dfrac{\sin a}{1-x^2} - \dfrac{2\sin 2a}{4-x^2} + \dfrac{3\sin 3a}{9-x^2} - \text{etc.}, \\ \dfrac{1}{2\pi x}\cdot\dfrac{\cos ax}{\sin \pi x} - \dfrac{1}{2\pi^2x^2} = \dfrac{\cos a}{1-x^2} - \dfrac{\cos 2a}{4-x^2} + \dfrac{\cos 3a}{9-x^2} - \text{etc.}, \end{cases}$$

D'où l'on voit qu'on peut généralement sommer les deux suites

$$\sin a - \frac{\sin 2a}{2^{2k+1}} + \frac{\sin 3a}{3^{2k+1}} - \frac{\sin 4a}{4^{2k+1}} + \text{etc.},$$

$$\cos a - \frac{\cos 2a}{2^{2k}} + \frac{\cos 3a}{3^{2k}} - \frac{\cos 4a}{4^{2k}} + \text{etc.};$$

savoir, la première en développant suivant les puissances de x, la fonction $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin ax}{\sin \pi x}$, et la seconde en développant de même la fonction $\frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{\cos ax}{\sin \pi x} - \frac{1}{2\pi^2 x^2}$; c'est ce qui s'accorde avec les formules des n^{os} 106 et 107, IV^e partie.

De même si on fait $b = \frac{1}{2}\pi$ dans la troisième et la quatrième des formules (a), on aura

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin ax}{x \cos \frac{1}{2}\pi x} = \frac{\sin a}{1-x^2} - \frac{\sin 3a}{9-x^2} + \frac{\sin 5a}{25-x^2} - \text{etc.}, \\ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos ax}{\cos \frac{1}{2}\pi x} = \frac{\cos a}{1-x^2} - \frac{3\cos 3a}{9-x^2} + \frac{5\cos 5a}{25-x^2} - \text{etc.}; \end{cases}$$

d'où il résulte qu'on peut sommer généralement les deux suites

$$\sin a - \frac{\sin 3a}{3^{2k}} + \frac{\sin 5a}{5^{2k}} - \frac{\sin 7a}{7^{2k}} + \text{etc.},$$

$$\cos a - \frac{\cos 3a}{3^{2k+1}} + \frac{\cos 5a}{5^{2k+1}} - \frac{\cos 7a}{7^{2k+1}} + \text{etc.}$$

24. Il est essentiel de remarquer que les équations (a), ainsi que les équations (b), supposent $a < b$ ou $\theta < \pi$. On ne peut même faire $a = b$ que dans la deuxième et dans la troisième des équations (a) ; car le cas de $a = b$ qui donne $\theta = \pi$, rend défectueuses la première et la quatrième de ces équations. Il en est de même des équations (b).

Pour trouver le développement des mêmes fonctions lorsque a est $> b$, nous supposerons en général

$$a = 2kb + c,$$

k étant un entier, et c un nombre positif ou négatif, mais moindre que b.

Cela posé, il faut réduire d'abord la quantité $\frac{\sin ax}{\sin bx}$, ce qui se fera au moyen de la formule

$$\sin Ax - \sin(A - 2b)x = 2 \sin bx \cos(A - b)x.$$

On en tire successivement

$$\frac{\sin(2b + c)x}{\sin bx} = \frac{\sin cx}{\sin bx} + 2\cos(b + c)x,$$

$$\frac{\sin(4b+c)x}{\sin bx} = \frac{\sin(2b+c)x}{\sin bx} + 2\cos(3b+c)x,$$
$$\frac{\sin(6b+c)x}{\sin bx} = \frac{\sin(4b+c)x}{\sin bx} + 2\cos(5b+c)x,$$
etc.

Donc si on fait $\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin cx}{\sin bx} + \text{M}$, on aura

$$\text{M} = 2\cos(b+c)x + 2\cos(3b+c)x + 2\cos(5b+c)x \ldots + 2\cos(a-b)x,$$

série dont le nombre des termes est k.

On voit maintenant qu'en supposant $a = 2kb + c$ et $\frac{c\pi}{b} = \theta$, le développement de $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ sera donné généralement par la formule

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = 2\cos(a-b)x + 2\cos(a-3b)x \ldots + 2\cos(b+c)x$$
$$+ 2\pi\left(\frac{\sin\theta}{\pi^2 - b^2x^2} - \frac{2\sin 2\theta}{4\pi^2 - b^2x^2} + \frac{3\sin 3\theta}{9\pi^2 - b^2x^2} - \text{etc.}\right).$$

25. Pour avoir, dans le même cas, le développement de la fonction $\frac{\cos ax}{\sin bx}$, j'observe qu'on a la formule

$$\cos \text{A}x - \cos(\text{A} - 2b)x = -2\sin bx \sin(\text{A} - b)x,$$

d'où résultent successivement les valeurs

$$\frac{\cos(2b+c)x}{\sin bx} = \frac{\cos cx}{\sin bx} - 2\sin(b+c)x,$$
$$\frac{\cos(4b+c)x}{\sin bx} = \frac{\cos(2b+c)x}{\sin bx} - 2\sin(3b+c)x,$$

et en général,

$$\frac{\cos ax}{\sin bx} = \frac{\cos cx}{\sin bx} - 2\sin(b+c)x - 2\sin(3b+c)x \ldots - 2\sin(a-b)x;$$

donc en faisant toujours $\frac{c\pi}{b} = \theta$, la valeur développée de $\frac{\cos ax}{\sin bx}$ sera

$$\frac{\cos ax}{\sin bx} = -2\sin(a-b)x - 2\sin(a-3b)x - 2\sin(a-5b)x \ldots - 2\sin(b+c)x$$
$$+ \frac{1}{bx} + 2bx\left(\frac{\cos\theta}{\pi^2 - b^2x^2} - \frac{\cos 2\theta}{4\pi^2 - b^2x^2} + \frac{\cos 3\theta}{9\pi^2 - b^2x^2} - \text{etc.}\right).$$

26. Pour développer semblablement la fonction $\frac{\sin ax}{\cos bx}$, nous ferons usage de la formule

$$\sin Ax + \sin(A - 2b)x = 2\sin(A - b)x\cos bx,$$

d'où résulte

$$\frac{\sin(2b + c)x}{\cos bx} = -\frac{\sin cx}{\cos bx} + 2\sin(b + c)x,$$
$$\frac{\sin(4b + c)x}{\cos bx} = -\frac{\sin(2b + c)x}{\cos bx} + 2\sin(3b + c)x;$$

et en général, prenant $\cos k\pi$ pour désigner $(-1)^k$,

$$\frac{\sin ax}{\cos bx} = \cos k\pi . \frac{\sin cx}{\cos bx} + 2\sin(a-b)x - 2\sin(a-3b)x + 2\sin(a-5b)x \ldots - \ldots - 2\cos k\pi \sin(b+c)x.$$

Enfin s'il s'agit de la fonction $\frac{\cos ax}{\cos bx}$, on aura la formule

$$\cos Ax + \cos(A - 2b)x = 2\cos bx\cos(A - b)x;$$

d'où l'on déduit successivement

$$\frac{\cos(2b + c)x}{\cos bx} = -\frac{\cos cx}{\cos bx} + 2\cos(b + c)x,$$
$$\frac{\cos(4b + c)x}{\cos bx} = -\frac{\cos(2b + c)x}{\cos bx} + 2\cos(3b + c)x;$$

et en général,

$$\frac{\cos ax}{\cos bx} = \cos k\pi . \frac{\cos cx}{\cos bx} + 2\cos(a-b)x - 2\cos(a-3b)x \ldots\ldots - 2\cos k\pi\cos(b + c)x.$$

27. Rassemblant les quatre résultats précédens, on voit que si a est plus grand que b, et qu'on fasse $a = 2kb + c$, k étant un entier, et c un nombre positif ou négatif, mais moindre que b, ou tout au plus égal à b, on aura, en faisant $\frac{c\pi}{b} = \theta$, les quatre formules

$$(e)\quad\begin{aligned}
\frac{\sin ax}{\sin bx} &= \begin{cases} 2\cos(a-b)x + 2\cos(a-3b)x + 2\cos(a-5b)x \ldots + 2\cos(b+c)x \\ + 2\pi\left(\dfrac{\sin\theta}{\pi^2-b^2x^2} - \dfrac{2\sin 2\theta}{4\pi^2-b^2x^2} + \dfrac{3\sin 3\theta}{9\pi^2-b^2x^2} - \text{etc.}\right)\end{cases}\\
\frac{\cos ax}{\sin bx} &= \begin{cases} -2\sin(a-b)x - 2\sin(a-3b)x - 2\sin(a-5b)x \ldots - 2\sin(b+c)x \\ + \dfrac{1}{bx} + 2bx\left(\dfrac{\cos\theta}{\pi^2-b^2x^2} - \dfrac{\cos 2\theta}{4\pi^2-b^2x^2} + \dfrac{\cos 3\theta}{9\pi^2-b^2x^2} - \text{etc.}\right)\end{cases}\\
\frac{\sin ax}{\cos bx} &= \begin{cases} 2\sin(a-b)x - 2\sin(a-3b)x + 2\sin(a-5b)x \ldots - 2\cos k\pi\sin(b+c)x \\ + 8bx\cos k\pi\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\pi^2-4b^2x^2} - \dfrac{\sin\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2-4b^2x^2} + \dfrac{\sin\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2-4b^2x^2} - \text{etc.}\right)\end{cases}\\
\frac{\cos ax}{\cos bx} &= \begin{cases} 2\cos(a-b)x - 2\cos(a-3b)x + 2\cos(a-5b)x \ldots - 2\cos k\pi\cos(b+c)x \\ + 4\pi\cos k\pi\left(\dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\pi^2-b^2x^2} - \dfrac{3\cos\frac{3}{2}\theta}{9\pi^2-4b^2x^2} + \dfrac{5\cos\frac{5}{2}\theta}{25\pi^2-4b^2x^2} - \text{etc.}\right)\end{cases}
\end{aligned}$$

Ces formules diffèrent des formules (a) par la partie entière qu'on en a extraite, comme cela a lieu dans le développement des fractions algébriques, lorsque l'exposant de la variable dans le numérateur, est plus grand que dans le dénominateur. Une semblable réduction aurait lieu dans les formules (b) ; mais elle est indiquée plus immédiatement dans ces formules où, lorsque a sera plus grand que b, on pourra exécuter la division du numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que le plus grand exposant de x soit moindre dans le numérateur que dans le dénominateur.

28. Le cas où a est un multiple de b mérite d'être examiné particulièrement et avec quelque détail.

Supposons d'abord que ce multiple soit pair, et qu'on ait $a = 2kb$, ce qui donne $c = 0$, $\theta = 0$; alors les fonctions $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\frac{\sin ax}{\cos bx}$ se réduisent aux parties entières de leurs valeurs données par les formules (e), et les séries disparaissent. Quant aux deux autres fonctions, elles deviennent

$$(f)\quad\begin{aligned}
\frac{\cos ax}{\sin bx} &= \begin{cases} -2\sin(a-b)x - 2\sin(a-3b)x - 2\sin(a-5b)x \ldots - 2\sin bx \\ + \dfrac{1}{bx} + 2bx\left(\dfrac{1}{\pi^2-b^2x^2} - \dfrac{1}{4\pi^2-b^2x^2} + \dfrac{1}{9\pi^2-b^2x^2} - \text{etc.}\right)\end{cases}\\
\frac{\cos ax}{\cos bx} &= \begin{cases} 2\cos(a-b)x - 2\cos(a-3b)x + 2\cos(a-5b)x \ldots - 2\cos k\pi\cos bx \\ + 4\pi\cos k\pi\left(\dfrac{1}{\pi^2-4b^2x^2} - \dfrac{3}{9\pi^2-4b^2x^2} + \dfrac{5}{25\pi^2-4b^2x^2} - \text{etc.}\right)\end{cases}
\end{aligned}$$

Soit en second lieu $a=(2k+1)b$, on pourra mettre $k+1$ au lieu de k, puisqu'on a également $a=2kb+b$ et $a=(2k+2)b-b$; dans la première supposition, on aura $c=b$, et dans la seconde $c=-b$. Alors les deux fonctions $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\frac{\cos ax}{\cos bx}$ se réduisent à une partie entière, et ne contiennent point de série infinie. Quant aux deux autres fonctions $\frac{\cos ax}{\sin bx}$ et $\frac{\sin ax}{\cos bx}$, leurs valeurs seront les mêmes, soit qu'on fasse $a=2kb+b$ et $c=b$, soit qu'on fasse $a=(2k+2)b-b$ et $c=-b$. Ces valeurs sont

$$(g)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos ax}{\sin bx}=\left\{\begin{array}{l} -2\sin(a-b)x-2\sin(a-3b)x-2\sin(a-5b)x\ldots-2\sin 2bx \\ +\dfrac{1}{bx}-2bx\left(\dfrac{1}{\pi^2-b^2x^2}+\dfrac{1}{4\pi^2-b^2x^2}+\dfrac{1}{9\pi^2-b^2x^2}-\text{etc.}\right)\end{array}\right. \\[2ex] \dfrac{\sin ax}{\cos bx}=\left\{\begin{array}{l} 2\sin(a-b)x-2\sin(a-3b)x+2\sin(a-5b)x\ldots-2\cos k\pi\sin 2bx \\ +8bx\cos k\pi\left(\dfrac{1}{\pi^2-4b^2x^2}+\dfrac{1}{9\pi^2-4b^2x^2}+\dfrac{1}{25\pi^4-4b^2x^2}+\text{etc.}\right).\end{array}\right. \end{cases}$$

§ III. *De l'intégrale* $\int\frac{\sin\text{ ax}}{\sin\text{ bx}}\cdot\frac{\text{dx}}{1+\text{xx}}$, *et autres semblables, prises depuis* x = 0 *jusqu'à* x = ∞.

29. Supposons d'abord $a<b$ et $\frac{a\pi}{b}=\theta$; par la première des formules (a) du paragraphe précédent, on pourra mettre l'intégrale $Z=\int\frac{\sin ax}{\sin bx}\cdot\frac{dx}{1+xx}$ sous cette forme

$$Z=2\pi\int\frac{dx}{1+xx}\left(\frac{\sin\theta}{\pi^2-b^2x}-\frac{2\sin 2\theta}{4\pi^2-b^2x^2}+\frac{3\sin 3\theta}{9\pi^2-b^2x^2}-\text{etc.}\right);\quad \begin{Bmatrix}x=0\\x=\infty\end{Bmatrix}$$

or suivant les formules (16) du § I, on a généralement dans les limites données,

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)(k^2\pi^2-b^2x^2)}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{k^2\pi^2+b^2};$$

de là résulte

$$Z=\frac{\pi^2\sin\theta}{\pi^2+b^2}-\frac{2\pi^2\sin 2\theta}{4\pi^2+b^4}+\frac{3\pi^2\sin 3\theta}{9\pi+b^4}-\text{etc.}$$

Cette suite peut se sommer par la première des formules $(b)'$ du paragraphe précédent, et on en tire

$$Z = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}};$$

c'est la valeur de l'intégrale cherchée $\int \frac{dx}{1+xx} \cdot \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

La même analyse étant appliquée aux intégrales $\int \frac{xdx}{1+xx} \cdot \frac{\cos ax}{\sin bx}$, $\int \frac{dx}{x(1+xx)} \cdot \frac{\sin ax}{\cos bx}$, $\int \frac{dx}{1+xx} \cdot \frac{\cos ax}{\cos bx}$, on obtiendra les résultats suivans :

$$(a') \quad \begin{cases} \int \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}}, \\ \int \frac{\cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{xdx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{e^b - e^{-b}}, \\ \int \frac{\sin ax}{\cos bx} \cdot \frac{dx}{x(1+xx)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^b + e^{-b}}, \\ \int \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{e^b + e^{-b}}. \end{cases}$$

30. On peut parvenir directement à ces résultats par les considérations suivantes. Soit X ou X (x) une fonction paire de x qui puisse se décomposer en un nombre fini ou infini de fractions partielles de la forme $\frac{A}{c^2 - x^2}$, c étant une quantité réelle, ensorte qu'on ait $X(x) = S\left(\frac{A}{c^2 - x^2}\right)$, le signe *somme* se rapportant à toutes les valeurs correspondantes de A et de c. Pour avoir l'intégrale $\int \frac{Xdx}{1+xx}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, il faudra prendre entre les mêmes limites l'intégrale $\int \frac{Adx}{(c^2 - x^2)(1 + x^2)}$, et réunir toutes les quantités de la même espèce. Or par la formule (16) du § I, on a

$$\int \frac{Adx}{(c^2 - x^2)(1 + x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A}{c^2 + 1};$$

donc

$$\int \frac{Xdx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} S \frac{A}{c^2+1} = \frac{\pi}{2} X(\sqrt{-1});$$

c'est-à-dire qu'il faut faire $x^2 = -1$ dans la fonction X, et multiplier le résultat par $\frac{\pi}{2}$.

Soit, par exemple, $X(x) = \frac{\sin ax}{x \cos bx}$, on aura $X(\sqrt{-1}) = \frac{\sin(a\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}.\cos(b\sqrt{-1})} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^b + e^{-b}}$; donc $\int \frac{\sin ax}{x \cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^b + e^{-b}}$.

31. Les formules (a') supposent $a < b$; lorsqu'on aura $a > b$, il faudra faire $a = 2kb + c$, k étant un entier et c une quantité positive ou négative, mais moindre que b.

Considérons d'abord la première formule; nous avons trouvé dans le § précédent, que dans le cas dont il s'agit on a

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin cx}{\sin bx} + 2\cos(a-b)x + 2\cos(a-3b)x \ldots + 2\cos(b+c)x.$$

D'un autre côté, par la formule (1) de la troisième partie, page 358, on a

$$\int \frac{dx \cos nx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} e^{-n};$$

donc

$$\int \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \pi(e^{-(a-b)} + e^{-(a-3b)} + e^{-(a-5b)} \ldots + e^{-(b+c)}) + \int \frac{\sin cx}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx}.$$

La somme de la suite comprise dans cette valeur est

$$\pi \cdot \frac{e^{-(a-b)} - e^{b-c}}{1 - e^{2b}} = \pi \cdot \frac{e^{-c} - e^{-a}}{e^b - e^{-b}},$$

et l'intégrale $\int \frac{\sin cx}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx}$ est donnée par la première des formules (a'), puisqu'on a $c < b$; donc on aura

$$(b') \quad \int \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \pi \cdot \frac{e^{-c} - e^{-a}}{e^b - e^{-b}} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c - e^{-c}}{e^b - e^{-b}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c + e^{-c} - 2e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

32. Si on différentie cette équation par rapport à a, et qu'on observe qu'alors $\frac{dc}{da} = 1$, il en résultera cette autre formule

$$(c') \quad \int \frac{x \cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c - e^{-c} + 2e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

C'est

C'est aussi ce qu'on trouverait directement par le développement de $\frac{\cos ax}{\sin bx}$, donné par la seconde des formules (e) du § II.

Nous remarquerons cependant que la formule précédente est sujette à exception, lorsque $a=(2k+1)b$; car alors on pourrait faire indifféremment $a=2kb+b$, ou $a=(2k+2)b-b$, c'est-à-dire $c=b$, ou $c=-b$. Or le résultat de la formule n'est pas le même quand on fait $c=b$ et quand on fait $c=-b$, puisque dans la première supposition elle donne $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi e^{-a}}{e^b-e^{-b}}$, et dans la seconde, $\frac{\pi e^{-a}}{e^b-e^{-b}}-\frac{1}{2}\pi$. Il faut donc recourir à une autre méthode pour trouver la valeur exacte de l'intégrale dont il s'agit.

33. Lorsque $a=(2k+1)b$, on a la formule

$$\frac{\cos ax}{\sin bx}=\frac{\cos bx}{\sin bx}-2\sin 2bx-2\sin 4bx\ldots-2\sin 2kbx,$$

laquelle ne souffre aucune exception. Si on multiplie de part et d'autre par $\frac{xdx}{1+xx}$, le résultat dû aux termes $-2\sin 2bx$, $-2\sin 4bx$, etc. se trouvera exactement par la formule connue

$$\int\frac{xdx\sin mx}{1+xx}=\frac{\pi}{2}e^{-m};$$

ainsi l'erreur que nous avons remarquée ne peut venir que de l'intégrale $\int\frac{\cos bx}{\sin bx}\cdot\frac{xdx}{1+xx}$, qui ne peut être $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^b+e^{-b}}{e^b-e^{-b}}$, comme l'indiquerait la seconde des formules (a').

La vraie intégrale, dans le cas de $a=b$, se trouve par l'équation (c), IV^e^ partie, n° 131, et cette intégrale est

$$\int\frac{\cos bx}{\sin bx}\cdot\frac{xdx}{1+xx}=\frac{\pi e^{-b}}{e^b-e^{-b}}.$$

D'ailleurs on a sans difficulté

$$\int\frac{xdx}{1+xx}(2\sin 2bx+2\sin 4bx\ldots+2\sin 2kbx)$$
$$=\pi(e^{-2b}+e^{-4b}\ldots+e^{-2kb})=\pi\cdot\frac{e^{-2b}-e^{-(2k+2)b}}{1-e^{-2b}}=\pi\cdot\frac{e^{-b}-e^{-a}}{e^b-e^{-b}};$$

donc, lorsque $a = (2k+1)b$, on aura généralement

$$(d') \qquad \int \frac{\cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{x dx}{1+xx} = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Ce résultat est le milieu précis entre les deux valeurs que semblait donner, pour le même cas, la formule (c').

C'est, au reste, un phénomène analytique assez remarquable, que l'intégrale $\int \frac{\cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{x dx}{1+xx}$ ait trois valeurs très-différentes, lorsque $a = (2k+1)b$, et lorsque a diffère infiniment peu de cette valeur en plus ou en moins. Ainsi ω étant infiniment petit, l'intégrale Z correspondra de la manière suivante aux trois valeurs de a:

$$a = (2k+1)b - \omega, \qquad Z = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}} + \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$a = (2k+1)b, \qquad Z = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}},$$

$$a = (2k+1)b + \omega, \qquad Z = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}} - \tfrac{1}{2}\pi.$$

La première intégrale résulte de la formule générale (c'), en faisant $c = b - \omega$, et négligeant ensuite ω; la troisième résulte de la même formule, en faisant $a = (2k+2)b - (b - \omega)$, ou $c = -(b - \omega)$, puis négligeant ω.

La seule exception à la formule générale a donc lieu dans le cas où $\frac{a}{b}$ est un nombre entier impair; cette exception est indiquée par la formule elle-même, qui passe de la valeur $\frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}} + \frac{1}{2}\pi$ à la valeur $\frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}} - \frac{1}{2}\pi$, dans l'intervalle infiniment petit compris depuis $a = (2k+1)b - \omega$ jusqu'à $a = (2k+1)b + \omega$.

34. Venons maintenant à l'intégrale $Z = \int \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx}$. En supposant toujours $a = 2kb + c$, on aura, suivant l'article 26 du § précédent,

$$\frac{\cos ax}{\cos bx} = \cos k\pi \cdot \frac{\cos cx}{\cos bx} + 2\cos(a-b)x - 2\cos(a-3b)x \ldots\ldots$$
$$\ldots - 2\cos k\pi \cos(b+c)x.$$

Multipliant par $\frac{dx}{1+xx}$, et intégrant dans les limites requises, on aura d'abord, par les formules (a'),

$$\int \frac{\cos cx}{\cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c + e^{-c}}{e^b + e^{-b}};$$

ensuite l'intégrale $\int \frac{dx}{1+xx} [2\cos(a-b)x - 2\cos(a-3b)x \ldots - 2\cos k\pi \cos(b+c)x]$ a pour valeur $\pi(e^{-(a-b)} - e^{-(a-3b)} + e^{-(a-5b)} - \cos k\pi e^{-(b+c)})$, progression dont la somme est

$$\pi \cdot \frac{e^{-(a-b)} - e^{b-c} \cos k\pi}{1 + e^{-2b}}, \quad \text{ou} \quad \pi \cdot \frac{e^{-a} - e^{-c} \cos k\pi}{e^b + e^{-b}}.$$

Donc on a en général

$$(e') \qquad \int \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cos k\pi \cdot \frac{e^c - e^{-c}}{e^b + e^{-b}} + \frac{\pi e^{-a}}{e^b + e^{-b}}.$$

Cette formule n'est sujette à aucune exception; car si on avait $a = (2i+1)b$, ce qui donnerait en même temps $a = (2i+2)b - b$, il est aisé de voir que la formule donnera le même résultat, soit qu'on fasse $k = i$ et $c = b$, soit qu'on fasse $k = i + 1$ et $c = -b$. Alors, en effet, les deux facteurs $\cos k\pi$ et $e^c - e^{-c}$, changeant à la fois de signe, leur produit reste toujours le même.

35. Soit proposé enfin de trouver la valeur de l'intégrale

$$Z = \int \frac{\sin ax}{x \cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx},$$

lorsque $a = 2kb + c$. Alors on a, par les formules du § précédent,

$$\frac{\sin ax}{\cos bx} = \cos k\pi \cdot \frac{\sin cx}{\cos bx} + P,$$

$$P = 2\sin(a-b)x - 2\sin(a-3b)x + 2\sin(a-5b)x \ldots$$
$$\ldots - 2\cos k\pi \sin(b+c)x.$$

Mais au moyen de la formule $\int \frac{dx \sin ax}{x(1+xx)} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a})$, donnée troisième partie, page 360, on trouve

$$\int \frac{\mathrm{P}dx}{x(1+xx)} = \begin{cases} \pi(1-1+1\ldots\ldots-\cos k\pi) \\ -\pi(e^{-a+b}-e^{-a+3b}+e^{-a+5b}\ldots-\cos k\pi e^{-b-c}). \end{cases}$$

La série $1-1+1\ldots\ldots-\cos k\pi$ a pour somme zéro, si k est pair, et 1 si k est impair; donc cette somme est représentée généralement par $\frac{1}{2}(1-\cos k\pi)$; quant à l'autre série, elle a pour somme, comme dans l'article précédent,

$$\pi.\frac{e^{-a}-e^{-c}\cos k\pi}{e^{b}+e^{-b}}.$$

Donc en substituant la valeur de $\int \frac{\sin cx}{x\cos bx}.\frac{dx}{1+xx}$, donnée par les formules (a'), on aura

$$(f')\quad \int \frac{\sin ax}{x\cos bx}.\frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2}(1-\cos k\pi) - \frac{\pi e^{-a}}{e^{b}+e^{-b}} + \frac{\pi}{2}\cos k\pi.\frac{e^{c}+e^{-c}}{e^{b}+e^{-b}}.$$

Cette formule n'est encore sujette à aucune exception; car lorsqu'on a $a=(2i+1)b$, soit qu'on fasse $k=i$, $c=b$, ou $k=i+1$, $c=-b$, on obtient toujours le même résultat, savoir,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi e^{-a}}{e^{b}+e^{-b}}.$$

Ainsi, par exemple, lorsque $a=b$, on a

$$(g')\quad \int \frac{dx \operatorname{tang} ax}{x(1+xx)} = \frac{\pi}{2}.\frac{e^{a}-e^{-a}}{e^{a}+e^{-a}}.$$

Cette formule étant combinée avec la formule (d) du nº 131, quatrième partie, qui donne,

$$\int \frac{xdx \operatorname{tang} ax}{1+xx} = \frac{\pi e^{-a}}{e^{a}+e^{-a}},$$

on en tire

$$(h')\quad \int \frac{dx}{x}\operatorname{tang} ax = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Or celle-ci peut se démontrer directement; d'ailleurs elle se déduit de la formule (d) qu'on vient de citer, en faisant $m=0$.

36. Il résulte de ce qui précède, que lorsque a est $> b$, si on fait $a = 2kb + c$, k étant un entier et c étant plus petit que b, ou tout au plus égal à b, on aura les quatre formules suivantes :

$$(i')\quad\begin{cases}\displaystyle\int \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c + e^{-c} - 2e^{-a}}{e^b - e^{-b}}, \\[2ex] \displaystyle\int \frac{\cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{xdx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c - e^{-c} + 2e^{-a}}{e^b - e^{-b}}, \\[2ex] \displaystyle\int \frac{\sin ax}{x \cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos k\pi) + \frac{\pi}{2} \cos k\pi . \frac{e^c + e^{-c}}{e^b + e^{-b}} - \frac{\pi e^{-a}}{e^b + e^{-b}}, \\[2ex] \displaystyle\int \frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx} = \frac{\pi}{2} \cos k\pi . \frac{e^c - e^{-c}}{e^b + e^{-b}} + \frac{\pi e^{-a}}{e^b + e^{-b}}.\end{cases}$$

La seconde de ces formules est la seule qui soit sujette à exception, lorsque $a = (2k+1)b$; alors cette formule doit être remplacée par la suivante :

$$\int \frac{\cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{xdx}{1+xx} = \frac{\pi e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

37. Si on différentie par rapport à a la quatrième des équations (i'), on aura, en observant que $dc = da$,

$$(k')\qquad \int \frac{\sin ax}{\cos bx} \cdot \frac{xdx}{1+xx} = -\frac{\pi}{2} \cos k\pi . \frac{e^c + e^{-c}}{e^b + e^{-b}} + \frac{\pi e^{-a}}{e^b + e^{-b}}.$$

Ajoutant cette équation à la troisième des équations (i'), il viendra

$$(l')\qquad \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{\sin ax}{\cos bx} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos k\pi).$$

Ce résultat peut être vérifié directement de la manière suivante.

38. Soit pour plus de simplicité $b = 1$, ce qui ne diminue pas la généralité de la formule, et soit proposé de trouver l'intégrale $Z = \int \frac{dx \sin ax}{x \cos x}$; nous considérerons cette intégrale comme composée de plusieurs parties, la première depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; la seconde depuis $x = \pi$ jusqu'à $x = 2\pi$, et ainsi à l'infini.

Pour avoir la première partie, je fais successivement $x = \frac{1}{2}\pi - \omega$, $x = \frac{1}{2}\pi + \omega$, et prenant, dans les deux cas, $dx = d\omega$, j'aurai l'intégrale

$$\int \frac{d\omega}{\sin\omega} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}a\pi - \frac{1}{2}a\omega\right)}{\frac{1}{2}\pi - \omega} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}a\pi + \frac{1}{2}a\omega\right)}{\frac{1}{2}\pi + \omega}\right),$$

ou

$$\int \frac{d\omega}{\sin\omega} \cdot \left(\frac{2\omega \sin\frac{1}{2}a\pi \cos a\omega - \pi \cos\frac{1}{2}a\pi \sin a\omega}{\frac{1}{4}\pi^2 - \omega^2}\right),$$

qu'il faudra prendre depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{1}{2}\pi$.

La seconde partie, depuis $x = \pi$ jusqu'à $x = 2\pi$, se trouvera de même en faisant successivement $x = \frac{3}{2}\pi - \omega$, $x = \frac{3}{2}\pi + \omega$, et on aura l'intégrale

$$\int \frac{d\omega}{\sin\omega} \left(\frac{2\omega \sin\frac{3}{2}a\pi \cos a\omega - 3\pi \cos\frac{3}{2}a\pi \sin a\omega}{\frac{9}{4}\pi^2 - \omega^2}\right),$$

qu'il faudra encore prendre entre les limites $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$.

Si l'on continue ainsi indéfiniment et qu'on fasse, pour abréger,

$$M = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\pi}{\frac{1}{4}\pi^2 - \omega^2} - \frac{2\sin\frac{3}{2}a\pi}{\frac{9}{4}\pi^2 - \omega^2} + \frac{2\sin\frac{5}{2}a\pi}{\frac{25}{4}\pi^2 - \omega^2} - \text{etc.},$$

$$N = \frac{\pi\cos\frac{1}{2}a\pi}{\frac{1}{4}\pi^2 - \omega^2} - \frac{3\pi\cos\frac{3}{2}a\pi}{\frac{9}{4}\pi^2 - \omega^2} + \frac{5\pi\cos\frac{5}{2}a\pi}{\frac{25}{4}\pi^2 - \omega^2} - \text{etc.},$$

l'intégrale cherchée Z sera transformée en une autre qui doit être prise depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{1}{2}\pi$, savoir

$$Z = \int \frac{M\omega d\omega \cos a\omega}{\sin\omega} - \int \frac{N d\omega \sin a\omega}{\sin\omega}.$$

Maintenant il résulte des formules (a) du § II, qu'en supposant $a < 1$, on a

$$M = \frac{\sin a\omega}{\omega\cos\omega}, \quad N = \frac{\cos a\omega}{\cos\omega}.$$

Donc en faisant la substitution, on aura $Z = 0$. Lors donc qu'on suppose $a < 1$, on aura

$$\int \frac{dx \sin ax}{x \cos x} = 0.$$

Lorsque $a = 1$, cette formule cesse d'être exacte ; on voit en effet, dans ce cas, que tous les termes qui composent la suite N, sont nuls, et qu'ainsi on a $N = 0$; dans le même cas on a $M = \frac{\sin\omega}{\omega\cos\omega}$, ce qui donne $Z = \int d\omega = \omega = \frac{1}{2}\pi$. Donc on a alors

$$\int \frac{dx}{x} \tang x = \tfrac{1}{2}\pi\,;$$

ce qui s'accorde avec une formule déjà trouvée.

Si dans les deux formules précédentes, on met bx à la place de x et $\frac{a}{b}$ au lieu de a, on aura, en supposant $a < b$,

$$\int \frac{dx \sin ax}{x \cos bx} = 0,$$

et lorsque $a = b$,

$$\int \frac{dx}{x} \tang ax = \tfrac{1}{2}\pi.$$

39. Il faut maintenant trouver la valeur de la même intégrale lorsque a est $> b$; pour cet effet nous supposerons à l'ordinaire $a = 2kb + c$, k étant un entier, et c étant moindre que b. Or on a

$$\frac{\sin ax + \sin(a-2b)x}{\cos bx} = 2\sin(a-b)x\,,$$

de là on tire

$$\int \frac{dx \sin ax}{x \cos bx} + \int \frac{dx \sin(a-2b)x}{x\cos bx} = 2\int \frac{dx}{x}\sin(a-b)x = \pi.$$

Donc on a successivement, lorsque c n'est pas égal à b,

$$\int \frac{dx \sin(2b+c)x}{x\cos bx} = \pi,$$

$$\int \frac{dx \sin(4b+c)x}{x\cos bx} = 0,$$

$$\int \frac{dx \sin(6b+c)x}{x\cos bx} = \pi;$$

et en général,

$$\int \frac{dx \sin ax}{x\cos bx} = \frac{\pi}{2}(1 - \cos k\pi)\,,$$

ce qui s'accorde avec la formule (l').

40. Cette formule est cependant sujette à exception lorsque $a = b$, et en général lorsque $a = (2k+1)b$. En effet, dans le cas de

$a = b$, on a $\int \frac{dx \sin bx}{x \cos bx} = \frac{\pi}{2}$, d'où l'on déduit

$$\int \frac{dx \sin 3bx}{x \cos bx} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int \frac{dx \sin 5bx}{x \cos bx} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2};$$

et en général i étant un entier quelconque,

$$\int \frac{dx \sin (2i+1) bx}{x \cos bx} = \frac{\pi}{2}.$$

On voit *a priori* pourquoi la formule (l') ne peut avoir lieu lorsque $a = 2ib + b$, c'est qu'on peut faire également $a = (2i+2)b - b$, ce qui donne $k = i$ ou $k = i + 1$. Or ces deux valeurs de k donnent pour $\frac{\pi}{2}(1 - \cos k\pi)$, deux valeurs différentes 0 et π. La vraie valeur de l'intégrale est une moyenne $\frac{\pi}{2}$ entre les deux.

41. Puisque la formule (l') est sujette à exception lorsque $a = (2i+1)b$, il s'ensuit que la formule (k') est sujette aussi à exception dans le même cas, sans quoi la différence des deux ne pourrait donner la troisième des formules (i'), laquelle n'est sujette à aucune exception. Or on a toujours

$$\int \frac{dx \sin ax}{x \cos bx} - \int \frac{\sin ax}{\cos bx} \cdot \frac{xdx}{1+xx} = \int \frac{\sin ax}{x \cos bx} \cdot \frac{dx}{1+xx};$$

donc dans le cas de $a = (2i+1)b$, la formule (k') doit être remplacée par celle-ci,

$$\int \frac{\sin ax}{\cos bx} \cdot \frac{xdx}{1+xx} = \frac{\pi e^{-a}}{e^b + e^{-b}}:$$

lorsqu'on a simplement $a = b$, cette formule s'accorde avec la valeur connue de $\int \frac{xdx \tang ax}{1+xx}$. (*Voyez* la formule (d) du n° 131, IVe partie.)

§ IV.

§ IV. *De l'intégrale* $Z = \int \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx \sin rx$, *et autres semblables, prises depuis* $x = 0$ *jusqu'à* $x = \infty$.

42. Il faut supposer $a < \pi$, sans quoi l'intégrale deviendrait infinie ; cela posé, on pourra, en vertu des formules (b) du § II, mettre l'intégrale Z sous cette forme :

$$Z = \int \frac{dx \sin rx}{\pi x} - \int \frac{2x dx \sin rx}{\pi} \left(\frac{\cos a}{1 + x^2} - \frac{\cos 2a}{4 + x^2} + \frac{\cos 3a}{9 + x^2} - \text{etc.} \right).$$

Mais dans les limites données, on a trouvé $\int \frac{x dx \sin rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-mr}$, et $\int \frac{dx}{x} \sin rx = \frac{\pi}{2}$; donc

$$Z = \tfrac{1}{2} - e^{-r} \cos a + e^{-2r} \cos 2a - e^{-3r} \cos 3a + \text{etc.}$$

Or la suite $z \cos a - z^2 \cos 2a + z^3 \cos 3a - \text{etc.}$ est le développement de la fonction $\frac{z \cos a + z^2}{1 + 2z \cos a + z^2}$; donc en faisant $z = e^{-r}$, on aura l'intégrale cherchée

$$Z = \tfrac{1}{2} - \frac{(e^{-r} \cos a + e^{-2r})}{1 + 2e^{-r} \cos a + e^{-2r}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r} + 2 \cos a}.$$

43. Soit proposé semblablement l'intégrale $Z = \int \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} dx \cos rx$, dans laquelle on suppose toujours $a < \pi$; on pourra, au moyen des formules (b) du § II, mettre cette intégrale sous la forme

$$Z = \frac{1}{\pi} \int dx \cos rx \left(\frac{\cos \frac{1}{2} a}{\frac{1}{4} + x^2} - \frac{3 \cos \frac{3}{2} a}{\frac{9}{4} + x^2} + \frac{5 \cos \frac{5}{2} a}{\frac{25}{4} + x^2} - \text{etc.} \right).$$

Effectuant les intégrations au moyen de la formule connue...... $\int \frac{dx \cos rx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} e^{-mr}$, il viendra

$$Z = e^{-\frac{1}{2} r} \cos \tfrac{1}{2} a - e^{-\frac{3}{2} r} \cos \tfrac{3}{2} a + e^{-\frac{5}{2} r} \cos \tfrac{5}{2} a - \text{etc.}$$

Mais on a

$$\cos \theta - z \cos 3\theta + z^2 \cos 5\theta - \text{etc.} = \frac{(1 + z) \cos \theta}{1 + 2z \cos 2\theta + z^2};$$

donc en faisant $z = e^{-r}$, $\theta = \frac{1}{2}a$, on trouvera Z ou

$$\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx \cos rx = \frac{(e^{\frac{1}{2}r}+e^{-\frac{1}{2}r})\cos\frac{1}{2}a}{e^{r}+e^{-r}+2\cos a}.$$

44. Par une analyse semblable, on déduira des formules (b) du § II, deux autres intégrales, que nous comprenons avec les deux précédentes dans le tableau suivant :

$$(a')\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx \sin rx = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{r}-e^{-r}}{e^{r}+e^{-r}+2\cos a}, \\ \displaystyle\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx \cos rx = \frac{(e^{\frac{1}{2}r}+e^{-\frac{1}{2}r})\cos\frac{1}{2}a}{e^{r}+e^{-r}+2\cos a}, \\ \displaystyle\int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx \sin rx = \frac{(e^{\frac{1}{2}r}-e^{-\frac{1}{2}r})\sin\frac{1}{2}a}{e^{r}+e^{-r}+2\cos a}, \\ \displaystyle\int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx \cos rx = \frac{\sin a}{e^{r}+e^{-r}+2\cos a}. \end{cases}$$

Il ne faut pas perdre de vue que ces intégrales sont prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et qu'elles supposent $a<\pi$.

45. Les principaux corollaires qu'on déduit de ces formules, sont

$$(b'')\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx \sin rx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{r}-1}{e^{r}+1}, \\ \displaystyle\int \frac{dx \cos rx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}r}+e^{-\frac{1}{2}r}} = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}}{e^{r}+1}, \\ \displaystyle\int \frac{x dx \cos rx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} = \frac{\frac{1}{2}e^{r}}{(e^{r}+1)^2}, \\ \displaystyle\int \frac{x dx \sin rx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}r}-e^{-\frac{1}{2}r}}{(e^{\frac{1}{2}r}+e^{-\frac{1}{2}r})^2}, \\ \displaystyle\int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a, \\ \displaystyle\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}a}. \end{cases}$$

Ces formules sont faciles à vérifier par le développement en séries et les formules d'intégration connues. D'ailleurs on peut observer que la troisième et la quatrième se déduisent de la première et de la deuxième, en différentiant celles-ci par rapport à r.

Ces formules sont d'ailleurs susceptibles d'en fournir une infinité d'autres par la différentiation ou l'intégration relatives aux coefficiens a et r.

Par exemple, si on multiplie la cinquième et la sixième par da, et qu'on intègre chaque membre depuis $a=0$, on aura les deux formules

$$(c'')\quad \begin{cases} \int \frac{e^{ax}+e^{-ax}-2}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{2}a}\right), \\ \int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} \cdot \frac{dx}{x} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{4}\right); \end{cases}$$

la première s'accorde avec l'équation (b), page 109.

46. Considérons de nouveau la première des équations (a''); si on multiplie chaque membre par $e^{-mr}dr$, et qu'on intègre par rapport à r, depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$; comme on a dans ces limites $\int e^{-mr}\,dr \sin rx = \frac{x}{m^2+x^2}$, il viendra

$$(d'')\quad \int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{xdx}{m^2+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(e^r-e^{-r})\,e^{-mr}\,dr}{e^r+e^{-r}+2\cos a}.$$

Si on fait $e^{-r}=z$, le second membre prendra la forme

$$\frac{1}{2}\int \frac{(1-z^2)\,z^{m-1}\,dz}{1+2z\cos a+z^2}, \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases}$$

intégrale qui pourra s'exprimer par arcs de cercle et par logarithmes toutes les fois que m sera rationnel. Par exemple, si on a $m=1$, on trouvera

$$(e'')\quad \int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(a\sin a-1)+\frac{1}{2}\cos a\log(2+2\cos a).$$

Si on multiplie celle-ci par da, et qu'on intègre chaque membre depuis $a=0$, on aura

$$\int \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cdot \frac{dx}{1+xx} = -\frac{1}{2}a\cos a+\frac{1}{2}\sin a\log(2+2\cos a).$$

47. En général, soit $Z = \frac{1}{2}\int \frac{(1-z^2)\,z^{m-1}\,dz}{1+2z\cos a+z^2}$, le développement en série donne

$$\frac{(1-z^2)\,z^{m-1}}{1+2z\cos a+z^2} = z^{m-1} - 2z^m \cos a + 2z^{m+1}\cos 2a - 2z^{m+2}\cos 3a + \text{etc.},$$

multipliant par $\frac{1}{2}\,dz$ et intégrant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, il viendra

$$Z = \tfrac{1}{2}.\frac{1}{m} - \frac{\cos a}{m+1} + \frac{\cos 2a}{m+2} - \frac{\cos 3a}{m+3} + \text{etc.}$$

Cette suite représente la valeur de l'intégrale proposée $\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \times \frac{x\,dx}{m^2+x^2}$; mais elle n'est pas assez convergente pour servir au calcul numérique de cette intégrale; et nous remarquerons seulement qu'elle a la propriété d'être sommable par arcs de cercle et par logarithmes, toutes les fois que m sera un nombre rationnel.

On déduit des formules de l'art. 14, § I, une autre valeur de Z, laquelle est

$$\begin{aligned} Z = {} & \frac{1}{2\sin a}\left(\frac{\sin a}{m} - \frac{\sin 2a}{m+1} + \frac{\sin 3a}{m+2} - \text{etc.}\right) \\ & - \frac{1}{2\sin a}\left(\frac{\sin a}{m+2} - \frac{\sin 2a}{m+3} + \frac{\sin 3a}{m+4} - \text{etc.}\right), \end{aligned}$$

ou

$$Z = \frac{1}{\sin a}\left(\frac{\sin a}{m.m+2} - \frac{\sin 2a}{m+1.m+3} + \frac{\sin 3a}{m+2.m+4} - \text{etc.}\right).$$

Cette formule est plus convergente dans les premiers termes que la précédente; mais elle ne peut donner encore qu'une approximation assez bornée, parce que le rapport de deux coefficiens consécutifs tend de plus en plus vers l'unité.

Au reste l'identité des deux expressions est facile à démontrer immédiatement; car si on multiplie par sin a la suite

$$\frac{1}{2m} - \frac{\cos a}{m+1} + \frac{\cos 2a}{m+2} - \frac{\cos 3a}{m+3} + \text{etc.},$$

le produit sera

$$\frac{\sin a}{2m} - \tfrac{1}{2}.\frac{\sin 2a}{m+1} + \tfrac{1}{2}.\frac{\sin 3a - \sin a}{m+2} - \tfrac{1}{2}.\frac{\sin 4a - \sin 2a}{m+3} + \text{etc.},$$

et il se réduit ultérieurement à

$$\frac{\sin a}{m \cdot m+2} - \frac{\sin 2a}{m+1 \cdot m+3} + \frac{\sin 3a}{m+2 \cdot m+4} - \text{etc.}$$

On peut encore multiplier cette dernière expression par sin a, et le produit sera

$$\frac{1}{2m \cdot m+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos a}{m+1 \cdot m+3}$$

$$- \frac{2\cos 2a}{m \cdot m+2 \cdot m+4} + \frac{2\cos 3a}{m+1 \cdot m+3 \cdot m+5} - \frac{2\cos 4a}{m+2 \cdot m+4 \cdot m+6} + \text{etc.};$$

mais la valeur de Z qui résulte de ces transformations n'est convergente que dans les premiers termes, et ne peut donner que difficilement un certain degré d'approximation.

48. Reprenons la formule

$$\int \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} dx \sin rx = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r} + 2\cos a},$$

et soit $a = \pi - \omega$, ω étant infiniment petit, on aura, en substituant et négligeant les quantités de l'ordre ω^2 dans le second membre,

$$\int \frac{e^{\omega x}+e^{-\omega x}}{e^{2\pi x}-1} dx \sin rx + \int e^{-\omega x} dx \sin rx = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^r+1}{e^r-1}.$$

Mais en intégrant à l'ordinaire dans les limites $x=0$, $x=\infty$, on a $\int e^{-\omega x} dx \sin rx = \frac{r}{r^2+\omega^2}$; donc en négligeant les quantités de l'ordre ω^2, dans les deux membres, on aura la formule suivante, dans laquelle ω n'entre plus,

$$\int \frac{dx \sin rx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^r+1}{e^r-1} - \frac{1}{2r}.$$

Cette formule, développée suivant les puissances de r, reviendrait aux formules connues par lesquelles on détermine la valeur de la suite $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$, n étant un nombre pair.

49. Multiplions les deux membres de l'équation précédente par

$e^{-mr}dr$ et intégrons depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$, nous aurons

$$\int \frac{xdx}{(e^{2\pi x}-1)(m^2+x^2)} = \tfrac{1}{2}\int \left(\tfrac{1}{2}e^{-mr}dr + \frac{e^{-mr}dr}{e^r-1} - \frac{e^{-mr}dr}{r}\right).$$

Si on fait $e^{-r}=z$, et qu'on appelle T l'intégrale $\int \left(\frac{z^{m-1}dz}{1-z} - \frac{z^{m-1}dz}{l\frac{1}{z}}\right)$ prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, le second membre de l'équation précédente se réduira à $-\frac{1}{4m}+\frac{1}{2}T$; il ne s'agit donc que de trouver T. Or, par la formule (14) du § I, on a $T=\log m - Z'm$; donc

$$\int \frac{xdx}{(e^{2\pi x}-1)(m^2+x^2)} = -\frac{1}{4m}+\tfrac{1}{2}\log m - \tfrac{1}{2}Z'm;$$

et dans le cas de $m=1$,

$$\int \frac{xdx}{(e^{2\pi x}-1)(1+x^2)} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}Z'1 = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{4} = 0.0386078324 50.$$

50. Considérons maintenant la formule

$$\int \frac{dx \cos rx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}r}+e^{-\frac{1}{2}r}},$$

et multiplions chaque membre par $e^{-mr}dr$; si on intègre de part et d'autre depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$, ce qui donne $\int e^{-mr}dr\cos rx = \frac{m}{m^2+x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx}{(e^{\pi x}+e^{-\pi x})(m^2+x^2)} = \frac{1}{2m}\int \frac{e^{-mr}dr}{e^{\frac{1}{2}r}+e^{-\frac{1}{2}r}}.$$

Soit $e^{-r}=z$, le second membre deviendra $\frac{1}{2m}\int \frac{z^{m-\frac{1}{2}}dz}{1+z}$, cette intégrale devant être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$. Donc en vertu de la formule (7) du § I, on aura

$$\int \frac{dx}{(e^{\pi x}+e^{-\pi x})(m^2+x^2)} = \frac{1}{4m}Z'(\tfrac{1}{2}m+\tfrac{3}{4}) - \frac{1}{4m}Z'(\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{4});$$

de sorte que cette intégrale pourra toujours être évaluée facilement au moyen des fonctions $Z'(a)$ dont on a montré l'usage dans le § I. Elle sera d'ailleurs déterminable par arcs de cercle et par logarithmes, toutes les fois que m sera rationnelle. C'est ainsi qu'on trouve, dans les cas de $m = 1$ et $m = \frac{1}{2}$, les formules

$$\int \frac{dx}{(e^{\pi x} + e^{-\pi x})(1 + x^2)} = 1 - \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int \frac{dx}{(e^{\pi x} + e^{-\pi x})(\frac{1}{4} + x^2)} = \log 2.$$

§ V. *De l'intégrale* $\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x \pm a}$.

51. Supposons d'abord $a < 1$, et soit $a = \cos\theta$; cette valeur peut représenter une quantité négative en prenant $\theta > \frac{1}{2}\pi$; mais pour plus de simplicité, nous supposerons $\theta < \frac{1}{2}\pi$, et nous considérerons séparément les deux intégrales :

$$P = \int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x + \cos\theta}, \quad Q = \int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x - \cos\theta},$$

que nous supposerons prises toutes deux depuis $x = 0$ jusqu'à une même limite $x = \alpha$.

Les quantités P et Q sont des fonctions de α et θ, qu'on peut désigner par $P(\alpha, \theta)$, $Q(\alpha, \theta)$, et ces fonctions ont entr'elles des relations qui méritent d'être remarquées. On a d'abord

$$P + Q = \int \frac{2x^m dx \sin x \cos x}{\cos^2 x - \cos^2\theta},$$

ou, en faisant $2x = z$,

$$P + Q = 2^{-m} \int \frac{z^m dz \sin z}{\cos z - \cos 2\theta}. \qquad \begin{cases} z = 0 \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

L'intégrale en z n'est autre chose que la fonction Q dans laquelle on mettrait 2α et 2θ à la place de α et θ; ainsi on a généralement

$$(1) \qquad P(\alpha, \theta) + Q(\alpha, \theta) = 2^{-m} Q(2\alpha, 2\theta).$$

52. D'un autre côté, si on ne fait aucune hypothèse sur la gran-

deur de θ, on a évidemment

$$P(\alpha, \theta) = Q(\alpha, \pi - \theta);$$

donc la fonction Q doit satisfaire à l'équation

$$Q(\alpha, \theta) + Q(\alpha, \pi - \theta) = 2^{-m} Q(2\alpha, 2\theta).$$

Réciproquement on tire de cette équation

$$(2) \qquad Q(\alpha, \theta) = 2^m Q(\tfrac{1}{2}\alpha, \tfrac{1}{2}\theta) + 2^m Q(\tfrac{1}{2}\alpha, \pi - \tfrac{1}{2}\theta);$$

d'où l'on voit que la transcendante $Q(\alpha, \theta)$ peut s'exprimer par deux transcendantes semblables dans lesquelles la limite α sera deux fois moindre. Celles-ci s'exprimeront semblablement, chacune par deux autres, dans lesquelles la limite sera encore deux fois moindre, ainsi de suite. Donc la transcendante Q, pour une limite donnée α, peut se déterminer par des transcendantes semblables qui répondront à des limites aussi petites qu'on voudra.

Lorsque x demeure très-petit dans toute l'étendue de l'intégrale, on peut faire $Q = \int \frac{x^{m+1}dx}{1 - \cos\theta} = \frac{x^{m+2}}{(m+2)(1-\cos\theta)}$, ce qui donne $Q(\alpha, \theta) = \frac{\alpha^{m+2}}{(m+2)(1-\cos\theta)}$. Mais si on se bornait à ce seul terme pour exprimer $Q(\alpha, \theta)$, la formule (2) donnerait une valeur entièrement semblable pour $Q(2\alpha, \theta)$, $Q(4\alpha, \theta)$, etc., laquelle cesserait bientôt d'être assez approchée. Il faut donc admettre d'autres termes dans la valeur de $Q(\alpha, \theta)$ lorsque α est très-petit, pour pouvoir en déduire avec une exactitude suffisante, la valeur de cette fonction lorsque α est d'une grandeur quelconque.

53. Pour avoir maintenant la valeur de l'intégrale Q, j'observe qu'en intégrant par parties on a

$$Q = -x^m \log(\cos x - \cos\theta) + m\int x^{m-1}dx \log(\cos x - \cos\theta):$$

il faut, pour aller plus loin, avoir la valeur développée de $\log(\cos x - \cos\theta)$. Or en faisant $m = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, $M = \cos(\pi - \theta) + \sqrt{-1}\sin(\pi - \theta) = e^{(\pi-\theta)\sqrt{-1}}$, on peut mettre

mettre $\cos x - \cos\theta$ sous cette forme

$$\cos x - \cos\theta = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(1 - me^{x\sqrt{-1}})\,(1 - me^{-x\sqrt{-1}}).$$

Prenant les logarithmes et développant en séries, il viendra

$$\begin{aligned}\log(\cos x - \cos\theta) = \mathcal{L}\mathrm{M} - me^{x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}m^2e^{2x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{3}m^3e^{3x\sqrt{-1}} - \text{etc.}\\ + \mathcal{L}\tfrac{1}{2} - me^{-x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}m^2e^{-2x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{3}m^3e^{-3x\sqrt{-1}} - \text{etc.}\end{aligned}$$

Substituant les valeurs $m = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, $\mathcal{L}\mathrm{M} = (\pi - \theta)\sqrt{-1}$, on aura

$$\begin{aligned}\log(2\cos x - 2\cos\theta) = (\pi-\theta)\sqrt{-1} - 2\cos x\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\\ - \frac{2\cos 2x}{2}(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta)\\ - \frac{2\cos 3x}{3}(\cos 3\theta + \sqrt{-1}\sin 3\theta)\\ - \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette équation en donne deux autres, savoir,

$$(3)\quad \begin{aligned}\frac{\pi-\theta}{2} = \cos x\sin\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2x\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\cos 3x\sin 3\theta + \text{etc.}\\ \log(2\cos x - 2\cos\theta) = -2\cos x\cos\theta - \tfrac{2}{2}\cos 2x\cos 2\theta\\ - \tfrac{2}{3}\cos 3x\cos 3\theta - \text{etc.};\end{aligned}$$

elles supposent d'ailleurs l'une et l'autre $x < \theta$.

La première des deux équations précédentes est une suite de l'équation connue

$$\tfrac{1}{2}(\pi - \theta) = \sin\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \tfrac{1}{3}\sin 3\theta + \tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \text{etc.};$$

car si à la place de θ on met successivement $\theta + x$ et $\theta - x$, et qu'on ajoute les deux résultats, on aura la première des équations (3).

54. Au moyen de la valeur trouvée de $\log(2\cos x - 2\cos\theta)$, on aura l'intégrale

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} = -x^m\log(2\cos x - 2\cos\theta)\\ -2m\int x^{m-1}dx(\cos x\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2x\cos 2\theta + \tfrac{1}{3}\cos 3x\cos 3\theta + \text{etc.}\end{aligned}$$

Continuant d'intégrer par parties, on aura l'intégrale cherchée Q ou

$$
(4)\quad \begin{aligned}
\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x - \cos \theta} = {} & C - x^m \log(2\cos x - 2\cos\theta) \\
& - 2mx^{m-1}\left(\cos\theta \sin x + \frac{\cos 2\theta}{2^2}\sin 2x + \frac{\cos 3\theta}{3^2}\sin 3x + \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.x^{m-2}\left(\cos\theta\cos x + \frac{\cos 2\theta}{2^3}\cos 2x + \frac{\cos 3\theta}{3^3}\cos 3x + \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.m-2.x^{m-3}\left(\cos\theta\sin x + \frac{\cos 2\theta}{2^4}\sin 2x + \frac{\cos 3\theta}{3^4}\sin 3x + \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.m-2.m-3.x^{m-4}(\cos\theta\cos x + \text{etc.}) \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Lorsque m est impair, la constante C est nulle; mais lorsque m est pair, la constante C sera égale au dernier terme de la série prise avec un signe contraire, en y supposant $x=0$; on aura donc en général,

$$C = -2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2^{m+1}} + \frac{\cos 3\theta}{3^{m+1}} + \text{etc.}\right),$$

$\Gamma(m+1)$ étant mis pour le produit $1.2.3\ldots\ldots m$. Cette valeur de C pourra même être employée lorsque m est impair, parce qu'alors elle devient nulle.

55. Il faut observer que la formule (4) éprouvera une modification, si on l'applique à une valeur de x plus grande que θ; alors le terme $-x^m\log(2\cos x - 2\cos\theta)$ devra être changé en $-x^m\log(2\cos\theta - 2\cos x)$.

Ainsi, par exemple, si on veut avoir l'intégrale Q depuis $x=0$ jusqu'à $\frac{1}{2}\pi$, on trouvera, en vertu de la remarque précédente,

$$
(5)\ \begin{Bmatrix} x=0 \\ x=\frac{1}{2}\pi \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned}
\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x - \cos\theta} = {} & -\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \log(2\cos\theta) \\
& - 2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2^{m+1}} + \frac{\cos 3\theta}{3^{n+1}} + \text{etc.}\right) \\
& - 2m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}\left(\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3^2} + \frac{\cos 5\theta}{5^2} - \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{\cos 2\theta}{2^3} - \frac{\cos 4\theta}{4^3} + \frac{\cos 6\theta}{6^3} - \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.m-2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3}\left(\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3^4} + \frac{\cos 5\theta}{5^4} - \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.m-3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{\cos 2\theta}{2^5} - \frac{\cos 4\theta}{4^5} + \text{etc.}\right) \\
& - \text{etc}
\end{aligned}
$$

56. Ayant trouvé en général la valeur de l'intégrale $Q = \int \frac{x^m\,dx \sin x}{\cos x - \cos\theta}$, il suffit de mettre $\pi - \theta$ au lieu de θ, et on aura la valeur de l'intégrale P, laquelle sera

$$
(6)\quad \begin{aligned}
\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x + \cos\theta} = \; & C - x^m \log(2\cos x + 2\cos\theta) \\
& + 2m.x^{m-1}\left(\cos\theta \sin x - \frac{\cos 2\theta}{2^2}\sin 2x + \frac{\cos 3\theta}{3^2}\sin 3x - \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.x^{m-2}\left(\cos\theta\cos x - \frac{\cos 2\theta}{2^3}\cos 2x + \frac{\cos 3\theta}{3^3}\cos 3x - \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.x^{m-3}\left(\cos\theta \sin x - \frac{\cos 2\theta}{2^4}\sin 2x + \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.x^{m-4}\left(\cos\theta\cos x - \frac{\cos 2\theta}{2^5}\cos 2x + \text{etc.}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Prenant d'ailleurs, comme dans le premier cas, la valeur de l'intégrale à compter de $x = 0$, on aura la constante

$$C = 2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2^{m+1}} + \frac{\cos 3\theta}{3^{m+1}} - \text{etc.}\right).$$

57. Si l'on prend l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, il faudra faire $x = \frac{1}{2}\pi$ dans la formule (6), ce qui donnera

$$
(7)\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}\pi \end{cases} \quad \begin{aligned}
\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x + \cos\theta} = & -\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \log(2\cos\theta) \\
& + 2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2^{m+1}} + \frac{\cos 3\theta}{3^{m+1}} - \text{etc.}\right) \\
& + 2m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}\left(\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3^2} + \frac{\cos 5\theta}{5^2} - \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{\cos 2\theta}{2^3} - \frac{\cos 4\theta}{4^3} + \frac{\cos 6\theta}{6^3} - \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3}\left(\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3^4} + \frac{\cos 5\theta}{5^4} - \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.m-3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{\cos 2\theta}{2^5} - \frac{\cos 4\theta}{4^5} + \text{etc.}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Dans ce cas, on voit que l'intégrale $\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x + \cos\theta}$ pourra toujours s'exprimer exactement au moyen des deux transcendantes

$$A(2k) = \cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3^{2k}} + \frac{\cos 5\theta}{5^{2k}} - \text{etc.}$$

$$B(2k+1) = \frac{\cos 2\theta}{2^{2k+1}} - \frac{\cos 4\theta}{4^{2k+1}} + \frac{\cos 6\theta}{6^{2k+1}} - \text{etc.}$$

Il faut y joindre encore la transcendante $\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2^{m+1}} + \frac{\cos 3\theta}{3^{m+1}} - \text{etc.}$ qui entre dans la valeur de la constante lorsque m est pair; mais celle-ci n'est autre chose que la fonction $B(m+1)$, dans laquelle on mettrait $\frac{1}{2}\theta$ au lieu de θ, et qu'on multiplierait ensuite par 2^{m+1}.

En général si on supposait connues les deux transcendantes

$$\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2^{2m}} + \frac{\sin 3\theta}{3^{2m}} - \text{etc.}, \quad \text{et} \quad \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2^{2m+1}} + \frac{\cos 3\theta}{3^{2m+1}} - \text{etc.},$$

on pourrait déterminer exactement l'intégrale donnée par la formule (6) pour toute limite $x = a$.

58. Le cas de $\theta = 0$ mérite d'être développé; alors on a $P = \int \frac{x^m dx \sin x}{1 + \cos x} = \int x^m dx \tang \frac{1}{2} x$; si donc on prend cette intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$(8) \quad \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}\pi \end{matrix} \right. \quad \begin{aligned} \int x^m dx \tang \tfrac{1}{2} x = & - \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \log 2 \\ & + 2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \text{etc.}\right) \\ & + 2m\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} M_2 \\ & + 2m(m-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2} N_3 \\ & - 2m(m-1)(m-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3} M_4 \\ & - 2m(m-1)(m-2)(m-3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-4} N_5 \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

formule où l'on désigne en général par $M(2k)$, $N(2k+1)$, les deux transcendantes

$$M(2k) = 1 - \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} - \frac{1}{7^{2k}} + \text{etc.};$$

$$N(2k+1) = \frac{1}{2^{2k+1}} - \frac{1}{4^{2k+1}} + \frac{1}{6^{2k+1}} - \text{etc.},$$

la dernière a un rapport connu avec la transcendante

$$S(2k+1) = 1 + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{4^{2k+1}} + \text{etc.},$$

puisqu'on a

$$N(2k+1) = \frac{1}{2^{2k+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) S(2k+1);$$

mais elles ne peuvent s'exprimer ni l'une ni l'autre par les puissances du nombre π.

59. Si dans la formule (4) on fait $\theta = 0$, ce qui oblige de changer $\log(2\cos x - 2\cos\theta)$ en $\log(2 - 2\cos x)$, on aura

$$\begin{aligned}
\int x^m dx \cot\tfrac{1}{2}x = \; & x^m \log(2 - 2\cos x) \\
& + 2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \text{etc.}\right) \\
& + 2m.x^{m-1}\left(\sin x + \frac{1}{2^2}\sin 2x + \frac{1}{3^2}\sin 3x + \text{etc.}\right) \\
(9) \qquad & + 2m.m-1.x^{m-2}\left(\cos x + \frac{1}{2^3}\cos 2x + \frac{1}{3^3}\cos 3x + \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.x^{m-3}\left(\sin x + \frac{1}{2^4}\sin 2x + \frac{1}{3^4}\sin 3x + \text{etc}\right) \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Dans cette formule faisons $x = \frac{1}{2}\pi$, afin d'avoir l'intégrale $\int x^m dx \cot\frac{1}{2}x$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$; nous aurons

$$\begin{aligned}
\int x^m dx \cot\tfrac{1}{2}x = \; & \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \log 2 + 2\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(m+1)\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \text{etc.}\right) \\
& + 2m.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} M_2 \\
& - 2m.m-1.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2} N_3 \\
(10) \qquad & - 2m.m-1.m-2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3} M_4 \\
& + 2m.m-1.m-2.m-3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-4} N_5 \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On retrouve dans la composition de cette formule, les mêmes transcendantes qui entrent dans la valeur de $\int x^m dx \tang\frac{1}{2}x$, prise entre les mêmes limites.

60. Nous avons déjà fait $S(m+1) = 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \text{etc.}$, faisons semblablement $T(m+1) = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \text{etc.}$; ces deux transcendantes n'en font réellement qu'une, puisqu'elles ont entr'elles cette relation

$$T(m+1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) S(m+1).$$

Cela posé, les deux formules (8) et (10) donneront, par leur somme et leur différence, les résultats suivans :

$$\text{(11)} \quad \begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{\sin x} = \; & \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(m+1).[S(m+1) + T(m+1)] \\ & + 2m.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} M_2 \\ & - 2m.m-1.m-2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3} M_4 \\ & + 2m.m-1.m-2.m-3.m-4.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-5} M_6 \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} \int x^m dx \cot x = \; & \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \log 2 + \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(m+1).[S(m+1) - T(m+1)] \\ & - 2m.m-1.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2} N_3 \\ & + 2m.m-1.m-2.m-3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-4} N_5 \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

61. Les cas les plus simples de ces formules sont

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sin x} &= 2M_2, \\ \int \frac{x^2 dx}{\sin x} &= -2(S_3 + T_3) + 2.\left(\frac{\pi}{2}\right) 2M, \\ \int \frac{x^3 dx}{\sin x} &= 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 2M_2 - 3.2.1.2M_4, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$\int x\,dx \cot x = \frac{\pi}{2} \log 2$,

$\int x^2 dx \cot x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \log 2 - 2\,(S_3 - T_3) - 2.2N_3$,

$\int x^3 dx \cot x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \log 2 - 3.2\left(\frac{\pi}{2}\right).2N_3$,

etc.

Ces formules donnent des rapports assez remarquables entre les intégrales $\int x^m dx \cot x$, $\int \frac{x^m dx}{\sin x}$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, et les transcendantes désignées par $M\,(2k)$, $N\,(2k+1)$, $S\,(2k+1)$, $T\,(2k+1)$, lesquelles peuvent se réduire aux deux $M(2k)$, $S(2k+1)$, parce qu'il y a des rapports connus entre $S\,(2k+1)$, $T\,(2k+1)$ et $N\,(2k+1)$. On peut conclure de ces équations,

1°. Que la transcendante N_3 ou S_3 se détermine également par l'intégrale $\int x^2 dx \cot x$ et par l'intégrale $\int x^3 dx \cot x$; il y a donc une relation entre ces intégrales, et cette relation est

$$9\pi \int x^2 dx \cot x - 14 \int x^3 dx \cot x = \frac{\pi^3}{2} \log 2.$$

2°. Que la transcendante N_5 peut se déterminer par N_3 et par $\int x^4 dx \cot x$, et qu'elle peut l'être également par N_3 et par $\int x^5 dx \cot x$, ce qui donnera encore une relation entre N_3, $\int x^4 dx \cot x$ et $\int x^5 dx \cot x$.

62. Si l'on se propose seulement d'avoir des valeurs approchées des intégrales $\int \frac{x^m dx}{\sin x}$, $\int x^m dx \cot x$, pour toute valeur de x, on y parviendra aisément par les formules du n° 160, quatrième partie. En effet on a par ces formules,

$$\frac{x^m dx}{\sin x} = x^{m-1} dx \left(1 + (2-1) H_1\, x^2 + \frac{2^3-1}{2^2} H_2\, x^4 + \frac{2^5-1}{2^4} H_3\, x^6 + \text{etc.}\right),$$
$$x^m dx \cot x = x^{m-1} dx\,(1 - 2H_1 x^2 - 2H_2 x^4 - 2H_3 x^6 - \text{etc.})\,;$$

ces expressions étant intégrées depuis $x = 0$, on a

$$(13)\quad \begin{cases} \int \frac{x^m dx}{\sin x} = \frac{x^m}{m} + H_1 . \frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{2^3-1}{2^2} H_2 \frac{x^{m+4}}{m+4} + \frac{2^5-1}{2^4} H_3 \frac{x^{m+6}}{m+6} + \text{etc.} \\ \int x^m dx \cot x = \frac{x^m}{m} - 2H_1 . \frac{x^{m+2}}{m+2} - 2H_2 \frac{x^{m+4}}{m+4} - 2H_3 \frac{x^{m+6}}{m+6} - \text{etc.} \end{cases}$$

Il en résulte cette troisième formule plus convergente que les deux autres,

$$(14)\qquad \int x^m dx \cot \tfrac{1}{2}x = \frac{2x^m}{m} - H_1 \frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{H_2}{2^2}\cdot\frac{x^{m+4}}{m+4} - \frac{H_3}{2^4}\cdot\frac{x^{m+6}}{m+6} - \text{etc.}$$

63. Si l'on fait $x = \frac{1}{2}\pi$, pour avoir ces mêmes intégrales prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, et qu'on substitue la valeur $\pi^{2m}H_{(m)} = S_{(2m)}$, il viendra

$$\int \frac{x^m dx}{\sin x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left(1 + \frac{S_2}{m+2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2^3-1}{2^2}\cdot\frac{S_4}{m+4}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{2^5-1}{2^4}\cdot\frac{S_6}{m+6}\cdot\frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

$$(15)\quad \int x^m dx \cot x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left(1 - \frac{2S_2}{m+2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2S_4}{m+4}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{2S_6}{m+6}\cdot\frac{1}{4^3} - \text{etc.}\right)$$

$$\int x^m dx \cot \tfrac{1}{2}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \left(2 - \frac{S_2}{m+2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{S_4}{m+4}\cdot\frac{1}{4^3} - \frac{S_6}{m+6}\cdot\frac{1}{4^5} - \text{etc.}\right).$$

Ces formules ont l'avantage de ne pas supposer m entier; elles serviront dans tous les cas à calculer, par approximation, les valeurs des intégrales $\int \frac{x^m dx}{\sin x}$, $\int x^m dx \cot x$, $\int x^m dx \cot \frac{1}{2}x$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, au moyen des valeurs de S_2, S_4, S_6, etc. données ci-dessus, page 65. L'expression de $\int x^m dx \cot \frac{1}{2}x$ est surtout remarquable, en ce que les termes successifs décroissent dans le rapport de 16 à 1 environ; de sorte qu'elle offre un moyen facile de déterminer cette intégrale pour toute valeur de m.

64. Mais en vertu de la formule (10), on a successivement

$$\int x dx \cot \tfrac{1}{2}x = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2M_2,$$

$$\int x^2 dx \cot \tfrac{1}{2}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \log 2 - 2.2.1\, S_3 + 2.2.\frac{\pi}{2}.M_2 - 2.2.1\, N_3,$$

$$\int x^3 dx \cot \tfrac{1}{2}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \log 2 + 2.3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M_2 - 2.3.2.\frac{\pi}{2}.N_3 - 2.3.2.1.M_4$$

$$\int x^4 dx \cot \tfrac{1}{2}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \log 2 + 2.4.3.2.1\, S_5 + 2.4.\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 M_2$$
$$- 2.4.3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 N_3 - 2.4.3.2.\frac{\pi}{2}M_4 + 2.4.3.2.1\, N_5,$$

etc.

Connaissant donc ces diverses intégrales, on connaîtra par la première

première équation la valeur de M_2; par la seconde, on connaîtra la valeur de S_3 et N_3, puisqu'on a d'ailleurs $N_3 = \frac{2^2 - 1}{2^5} S_3$. On connaîtra de même, par la troisième équation, la valeur de M_4; par la quatrième celles de N_5 et S_5, puisqu'on a $N_5 = \frac{2^4 - 1}{2^9} S_5$, et ainsi de suite. Il serait peut-être difficile de trouver des moyens plus simples pour calculer, par des suites convergentes et régulières, les valeurs des transcendantes $S(2k+1)$ et $M(2k)$.

65. On pourrait rendre encore plus convergente la formule employée pour ces calculs; car si l'on fait

$$A = \frac{1}{m+2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{m+4} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{m+6} \cdot \frac{1}{4^5} + \text{etc.},$$

$$B = \frac{S2 - 1}{m+2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{S4 - 1}{m+4} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{S6 - 1}{m+6} \cdot \frac{1}{4^5} + \text{etc.},$$

on aura

$$(16) \qquad \int x^m dx \cot \tfrac{1}{2} x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m (2 - A - B).$$

La suite B est fort convergente, puisque chaque terme est moindre que la 64^me partie du précédent : quant à la série A, elle est facile à calculer jusqu'à tel degré d'approximation qu'on voudra; mais on pourrait aussi trouver sa valeur en logarithmes, par l'intégrale $A = \int \frac{x^{m+1} dx}{1 - x^2}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{4}$.

66. Revenons maintenant à la formule (6), et supposons que l'intégrale $\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x + \cos \theta}$, que nous désignerons par P^m, soit prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$. Il résulte de cette formule que si on fait pour abréger,

$$F(n) = \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2^n} + \frac{\cos 3\theta}{3^n} + \frac{\cos 4\theta}{4^n} + \text{etc.},$$

$$G(n) = \cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2^n} + \frac{\cos 3\theta}{3^n} - \frac{\cos 4\theta}{4^n} + \text{etc.},$$

l'intégrale P^m aura pour expression

$$
(17)\quad \begin{aligned}
P^m = & -\pi^m \log(2 - 2\cos\theta) + 2\cos\frac{m\pi}{2}\Gamma(m+1)G(m+1) \\
& - m.m-1.\pi^{m-2}.2F_3 \\
& + m.m-1.m-2.m-3.\pi^{m-4}.2F_5 \\
& - m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.\pi^{m-6}.2F_7 \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

La formule (6) donne pour premier terme $-\pi^m \log(2\cos\theta - 2)$; mais ce terme a dû être changé en $-\pi^m \log(2 - 2\cos\theta)$, conformément à l'observation de l'art. 55. Ce même terme peut être aussi remplacé par $\pi^m.2F1$, qui conserve l'analogie avec les suivans; car on a $F1 = -\frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\theta)$ et $G1 = \frac{1}{2}\log(2 + 2\cos\theta)$.

67. Si dans la formule précédente on met $\pi - \theta$ à la place de θ, et qu'on désigne semblablement par Q^m l'intégrale $\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x - \cos\theta}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura la formule

$$
(18)\quad \begin{aligned}
Q^m = & -\pi^m \log(2 + 2\cos\theta) - 2\cos\frac{m\pi}{2}\Gamma(m+1)F(m+1) \\
& + m.m-1.\pi^{m-2}.2G_3 \\
& - m.m-1.m-2.m-3.\pi^{m-4}.2G_5 \\
& + m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.\pi^{m-6}.2G_7 \\
& - \text{etc.},
\end{aligned}
$$

où le premier terme $-\pi^m \log(2 + 2\cos\theta)$ peut être remplacé par $-\pi^m.2G1$.

68. Soit $\theta = 0$, on aura dans ce cas,

$$F(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = Sn,$$

$$G(n) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{2}{2^n}\right)S_n,$$

et la formule (18) donnera successivement

$$
(19)\quad \begin{aligned}
& \int x dx \cot\tfrac{1}{2}x = 2\pi\, \mathcal{L}2, \\
& \int x^2 dx \cot\tfrac{1}{2}x = 2\pi^2 \mathcal{L}2 - 2.1.(2F_3 + 2G_3), \\
& \int x^3 dx \cot\tfrac{1}{2}x = 2\pi^3 \mathcal{L}2 - 3.2.\pi.2G_3, \\
& \int x^4 dx \cot\tfrac{1}{2}x = 2\pi^4 \mathcal{L}2 - 4.3.\pi^2.2G_3 + 4.3.2.1.(2F_3 + 2G_3), \\
& \int x^5 dx \cot\tfrac{1}{2}x = 2\pi^5 \mathcal{L}2 - 5.4.\pi^3.2G_3 + 5.4.3.2.\pi.2G_5 \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Réciproquement on voit qu'à l'aide de ces formules, les transcendantes S_3, S_5, S_7, etc. peuvent être déterminées au moyen des intégrales $\int x^m dx \cot \frac{1}{2} x$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; mais comme il y a plus d'équations qu'il ne faut pour déterminer ces transcendantes, on aura des relations entre les intégrales $\int x^m dx \cot \frac{1}{2} x$, au moyen desquelles plusieurs de ces intégrales pourront être déterminées par les autres. On voit, par exemple, qu'il suffit de connaître $\int x^m dx \cot \frac{1}{2} x$ lorsque m est impair, pour déterminer cette intégrale lorsque m est pair, et réciproquement.

69. Il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut parvenir aux mêmes résultats par une autre voie. Considérons l'intégrale $T = \int dx \cot \frac{1}{2} x . \frac{\sin ax}{\sin a\pi}$, que nous supposerons prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; en substituant la valeur de $\frac{\sin ax}{\sin a\pi}$ donnée par les formules (a), § II, on aura

$$T = \frac{2}{\pi} \int dx \cot \frac{1}{2} x \left(\frac{\sin x}{1 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{4 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{9 - a^2} - \text{etc.} \right). \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Pour effectuer l'intégration, il faut connaître en général l'intégrale $\int dx \cot \frac{1}{2} x \sin mx$, prise entre les limites $x = 0$, $x = \pi$; or je dis que cette intégrale est égale à π, quel que soit l'entier m.

En effet, désignons l'intégrale dont il s'agit par A^m, on aura $A^{m+1} - A^m = \int dx \cot \frac{1}{2} x [\sin(m+1)x - \sin mx] = \int 2dx \cos \frac{1}{2} x \cos(m + \frac{1}{2})x$ $= \int dx [\cos mx - \cos(m+1)x] = \frac{\sin mx}{m} - \frac{\sin(m+1)x}{m+1}$; cette quantité est nulle dans les deux limites de l'intégrale; ainsi on a $A^{m+1} = A^m = A^1$; mais $A^1 = \int dx \cot \frac{1}{2} x \sin x = \int 2dx \cos^2 \frac{1}{2} x$ $= \int dx (1 + \cos x) = x + \sin x$, et en faisant $x = \pi$, on a $A^1 = \pi$; donc $A^m = \pi$.

70. Cela posé, la valeur de l'intégrale T sera

$$T = 2 \left(\frac{1}{1 - a^2} - \frac{2}{4 - a^2} + \frac{3}{9 - a^2} - \frac{4}{16 - a^2} + \text{etc.} \right).$$

Développant les différens termes suivant les puissances de a, il viendra

$$\begin{aligned}T = \;& 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.}\right)\\ &+2a^2\left(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\text{etc.}\right)\\ &+2a^4\left(1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\text{etc.}\right)\\ &+\text{etc.},\end{aligned}$$

et par conséquent en faisant $Gn = 1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\text{etc.} = \left(1-\frac{2}{2^n}\right)Sn$,

$$T = 2\log 2 + 2a^2 G_3 + 2a^4 G_5 + 2a^6 G_7 + \text{etc.}$$

De là on voit que pour obtenir les sommes des suites désignées par G_3, G_5, G_7, etc., il suffit de développer, suivant les puissances de a, l'intégrale $T = \int dx \cot\frac{1}{2}x \cdot \frac{\sin ax}{\sin a\pi}$.

Soit $\frac{x}{\pi}(1 + a^2p' + a^4p'' + a^6p''' + \text{etc.})$ la suite qui résulte du développement de la quantité

$$\frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \frac{x}{\pi}\cdot\frac{1-\dfrac{a^2x^2}{2.3}+\dfrac{a^4x^4}{2.3.4.5}-\text{etc.}}{1-\dfrac{a^2\pi^2}{2.3}+\dfrac{a^4\pi^4}{2.3.4.5}-\text{etc.}},$$

on aura par la loi des suites récurrentes,

$$\begin{aligned}p' &= \frac{\pi^2}{2.3} - \frac{x^2}{2.3},\\ p'' &= \frac{\pi^2}{2.3}p' - \frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{x^4}{2.3.4.5},\\ p''' &= \frac{\pi^2}{2.3}p'' - \frac{\pi^4}{2.3.4.5}p' + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7},\\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

de là résulte cette autre expression de l'intégrale T,

$$T = \frac{1}{\pi}\int x dx \cot\frac{1}{2}x + \frac{a^2}{\pi}\int p'x dx \cot\frac{1}{2}x + \frac{a^4}{\pi}\int p''x dx \cot\frac{1}{2}x + \text{etc.},$$

et la comparaison des deux valeurs donne

$$2\log 2 = 2G_1 = \frac{1}{\pi}\int x dx \cot\tfrac{1}{2}x,$$

$$2G_3 = \frac{1}{\pi}\int p' x dx \cot\tfrac{1}{2}x = \frac{1}{2.3\pi}\int(\pi^2 - x^2) x dx \cot\tfrac{1}{2}x,$$

$$2G_5 = \frac{1}{\pi}\int p'' x dx \cot\tfrac{1}{2}x = \frac{\pi^2}{2.3}.2G_3 - \frac{1}{2.3.4.5\pi}\int(\pi^4 - x^4) x dx \cot\tfrac{1}{2}x,$$

$$2G_7 = \frac{1}{\pi}\int p''' x dx \cot\tfrac{1}{2}x = \frac{\pi^2}{2.3}.2G_5 - \frac{\pi^4}{2.3.4.5}.2G_3 + \frac{\int(\pi^6 - x^6) x dx \cot\frac{1}{2}x}{2.3.4.5.6.7\pi},$$

etc.

Ces formules donnent directement les valeurs des transcendantes G_3, G_5, etc., ou celles des sommes S_3, S_5, S_7, etc. par le moyen des intégrales de la forme $\int x^{2i+1} dx \cot\frac{1}{2}x$, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$.

Au reste si on veut se borner à des approximations, on trouvera comme ci-dessus,

$$\int(\pi^m - x^m) x dx \cot\tfrac{1}{2}x = 2m\pi^{m+1}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{S2}{3(m+3)} + \frac{S4}{5(m+5)} - \text{etc.}\right);$$

mais ces formules sont moins convergentes que celles que nous avons trouvées pour la limite $x = \frac{1}{2}\pi$.

71. Nous avons considéré jusqu'ici le cas où a est < 1 dans la formule $\int \frac{x^m dx \sin x}{\cos x \pm a}$; soit maintenant $a > 1$, on pourra faire $a = \frac{1 + cc}{2c}$, ce qui donnera $c = a - \sqrt{(a^2 - 1)}$, et par les formules connues on aura

$$\frac{\sin x}{a - \cos x} = \frac{2c\sin x}{1 - 2c\cos x + c^2} = 2c\sin x + 2c^2\sin 2x + 2c^3\sin 3x + \text{etc.};$$

donc en intégrant par parties,

$$\int\frac{x^m dx \sin x}{a - \cos x} = -2x^m\left(c\cos x + \frac{c^2}{2}\cos 2x + \frac{c^3}{3}\cos 3x + \text{etc.}\right)$$
$$+ 2m\int x^{m-1} dx\left(c\cos x + \frac{c^2}{2}\cos 2x + \frac{c^3}{3}\cos 3x + \text{etc.}\right);$$

on aura de même,

$$\int x^{m-1} dx\left(c\cos x + \frac{c^2}{2}\cos 2x + \frac{c^3}{3}\cos 3x + \text{etc.}\right)$$
$$= x^{m-1}\left(c\sin x + \frac{c^2}{2^2}\sin 2x + \frac{c^3}{3^2}\sin 3x + \text{etc.}\right)$$
$$-(m-1)\int x^{m-2} dx\left(c\sin x + \frac{c^2}{2^2}\sin 2x + \frac{c^3}{3^2}\sin 3x + \text{etc.}\right).$$

Continuant d'intégrer par parties, on aura l'intégrale indéfinie

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^m dx \sin x}{a-\cos x} = \mathrm{C} \mp 2x^m & \left(c \cos x + \frac{c^2}{2} \cos 2x + \frac{c^3}{3} \cos 3x + \text{etc.}\right) \\
& + 2m x^{m-1} \left(c \sin x + \frac{c^2}{2^2} \sin 2x + \frac{c^3}{3^2} \sin 3x + \text{etc.}\right) \\
(21) \qquad & + 2m.m-1.x^{m-2} \left(c \cos x + \frac{c^2}{2^3} \cos 2x + \frac{c^3}{3^3} \cos 3x + \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.x^{m-3} \left(c \sin x + \frac{c^2}{2^4} \sin 2x + \frac{c^3}{3^4} \sin 3x + \text{etc}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.m-3.x^{m-4} \left(c \cos x + \frac{c^2}{2^5} \cos 2x + \text{etc.}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

L'intégrale devant être prise depuis $x=0$, on aura la constante

$$\mathrm{C} = 2 \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(m+1).\left(c + \frac{c^2}{2^{m+1}} + \frac{c^3}{3^{m+1}} + \text{etc.}\right);$$

elle sera donc nulle pour toutes les valeurs impaires de m.

72. Si dans la formule précédente on change le signe de a, et qu'on fasse toujours $c = a - \sqrt{(a^2-1)}$, on aura semblablement

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^m dx \sin x}{a+\cos x} = \; & 2 \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(m+1).\left(c - \frac{c^2}{2^{m+1}} + \frac{c^3}{3^{m+1}} - \text{etc.}\right) \\
& - 2x^m \left(c \cos x - \frac{c^2}{2} \cos 2x + \frac{c^3}{3} \cos 3x + \text{etc.}\right) \\
(22) \qquad & + 2m.x^{m-1} \left(c \sin x - \frac{c^2}{2^2} \sin 2x + \frac{c^3}{3^2} \sin 3x - \text{etc.}\right) \\
& + 2m.m-1.x^{m-2} \left(c \cos x - \frac{c^2}{2^3} \cos 2x + \frac{c^3}{3^3} \cos 3x - \text{etc.}\right) \\
& - 2m.m-1.m-2.x^{m-3} \left(c \sin x - \frac{c^2}{2^4} \sin 2x + \frac{c^3}{3^4} \sin 3x - \text{etc.}\right) \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ces formules ont lieu quelle que soit la limite de l'intégrale; d'ailleurs il faut observer qu'on a

$$c \cos x + \frac{c^2}{2} \cos 2x + \frac{c^3}{3} \cos 3x + \text{etc.} = -\tfrac{1}{2} \log(1 + c^2 - 2c \cos x),$$

et par conséquent aussi

$$c \cos x - \frac{c^3}{2} \cos 2x + \frac{c^3}{3} \cos 3x - \text{etc.} = \tfrac{1}{2} \log(1 + c^2 + 2c \cos x).$$

73. Supposons maintenant que les intégrales s'étendent jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$; nous ferons pour abréger,

$$A_n = c - \frac{c^3}{3^n} + \frac{c^5}{5^n} - \text{etc.},$$

$$B_n = \frac{c^2}{2^n} - \frac{c^4}{4^n} + \frac{c^6}{6^n} - \text{etc.},$$

et nous aurons les deux formules

$$(23)\quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right. \qquad \int \frac{x^m dx \sin x}{a - \cos x} = \begin{aligned}[t] & 2 \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(1 + m).\left(c + \frac{c^2}{2^{m+1}} + \frac{c^3}{3^{m+1}} + \text{etc.}\right) \\ & + \left(\frac{\pi}{2}\right)^m 2B_1 \\ & + m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} 2A_2 \\ & - m.m-1.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2} 2B_3 \\ & - m.m-1.m-2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3} 2A_4 \\ & + \text{etc.};\end{aligned}$$

$$(24)\quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right. \qquad \int \frac{x^m dx \sin x}{a + \cos x} = \begin{aligned}[t] & 2 \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(1 + m).\left(c - \frac{c^2}{2^{m+1}} + \frac{c^3}{3^{m+1}} - \text{etc.}\right) \\ & - \left(\frac{\pi}{2}\right)^m . 2B_1 \\ & + m.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} 1\ 2A_2 \\ & + m.m-1.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2} . 2B_3 \\ & - m.m-1.m-2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-3} . 2A_4 \\ & - \text{etc.}\end{aligned}$$

74. Si on intègre les mêmes formules depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura les résultats suivans :

$$(25)\quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = \pi \end{matrix}\right. \qquad \int \frac{x^m dx \sin x}{a - \cos x} = \begin{aligned}[t] & 2 \cos \frac{m\pi}{2} \Gamma(1 + m).\left(c + \frac{c^2}{2^{m+1}} + \frac{c^3}{3^{m+1}} + \text{etc.}\right) \\ & + 2\pi^m \log(1 + c) \\ & - 2m(m - 1)\pi^{m-2}\left(c - \frac{c^2}{2^3} + \frac{c^3}{3^3} - \text{etc.}\right) \\ & + 2m(m-1)(m-2)(m-3)\pi^{m-4}\left(c - \frac{c^2}{2^5} + \frac{c^3}{3^5} - \text{etc.}\right) \\ & - \text{etc.};\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^m dx \sin x}{a + \cos x} = \quad 2\cos\frac{m\pi}{2}\Gamma(1+m).\left(c - \frac{c^2}{2^{m+1}} + \frac{c^3}{3^{m+1}} - \text{etc.}\right)$$

$$-2\pi^m \log(1-c)$$

(26) $$-2m(m-1)\pi^{m-2}\left(c + \frac{c^2}{2^3} + \frac{c^3}{3^3} + \text{etc.}\right)$$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$ $$+2m(m-1)(m-2)(m-3)\pi^{m-4}\left(c + \frac{c^2}{2^5} + \frac{c^3}{3^5} + \text{etc.}\right)$$

$$-\text{etc.}$$

Ces deux intégrales dépendent uniquement des suites

$$c + \frac{c^2}{2^{2k+1}} + \frac{c^3}{3^{2k+1}} + \frac{c^4}{4^{2k+1}} + \text{etc.},$$

$$c - \frac{c^2}{2^{2k+1}} + \frac{c^3}{3^{2k+1}} - \frac{c^4}{4^{2k+1}} + \text{etc.},$$

dont les sommes sont supposées connues pour toutes les valeurs de l'exposant $2k+1$, non plus grandes que $m+1$.

75. Les cas les plus simples des formules (25) et (26) sont

(27) $$\int \frac{x dx \sin x}{a - \cos x} = 2\pi \log(1+c) = 2\pi \log[1 + a - \sqrt{(a^2-1)}]$$
$$\int \frac{x dx \sin x}{a + \cos x} = -2\pi \log(1-c) = -2\pi \log[1 - a + \sqrt{(a^2-1)}]$$
$a > 1 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$

Lorsque a est plus petit que l'unité, et qu'on peut, par conséquent, faire $a = \cos\theta$, les formules (4) et (6) donnent dans les mêmes limites,

(28) $$\int \frac{x dx \sin x}{\cos x - a} = -\pi \log(2 + 2a)$$
$$\int \frac{x dx \sin x}{\cos x + a} = -\pi \log(2 - 2a)$$
$a < 1 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$

Ces formules sont, comme on voit, très-différentes des formules (27); cependant si dans celles-ci on fait $a = \cos\theta$, et qu'après avoir réduit les seconds membres à la forme $A + B\sqrt{-1}$, on omette entièrement les parties imaginaires, on retombera exactement sur les formules (28).

Cette sorte de phénomène analytique que l'on remarque aussi dans d'autres formules, tient à ce que les intégrales exprimées par les formules

formules (28) ont passé par l'infini avant d'arriver à la valeur finie qu'elles acquièrent à la limite $x=\pi$, tandis que les intégrales exprimées par les formules (27), augmentent graduellement et en restant toujours finies, depuis la limite $x=0$ où elles sont nulles, jusqu'à la limite $x=\pi$.

76. Il est facile, au reste, de vérifier l'exactitude des formules (28) par une analyse rigoureuse.

En effet, désignons par $\mathrm{Z}(\theta)$ l'intégrale $\int \frac{x dx \sin x}{\cos x+\cos \theta}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; si l'on observe que $\varphi(x)$ étant une fonction quelconque de x, l'intégrale $\int \varphi(x) dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, est la même que l'intégrale $\int\left[\varphi\left(\frac{1}{2} a-x\right)+\varphi\left(\frac{1}{2} a+x\right)\right] dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2} a$, on aura

$$\mathrm{Z}(\theta)=\int\left(\frac{\left(\frac{1}{2} \pi-x\right) dx \cos x}{\cos \theta+\sin x}+\frac{\left(\frac{1}{2} \pi+x\right) dx \cos x}{\cos \theta-\sin x}\right)$$

ou

$$\mathrm{Z}(\theta)=\pi \cos \theta \int \frac{dx \cos x}{\cos^2 \theta-\sin^2 x}+\int \frac{2 x dx \sin x \cos x}{\cos^2 \theta-\sin^2 x} \qquad \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \pi \end{array}\right.$$

Soit $\sin x=y \cos \theta$, la première partie deviendra $\pi \int \frac{dy}{1-y^2}$, intégrale qui devra être prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=\frac{1}{\cos \theta}$; mais on sait par les formules de l'art. 13 que la même intégrale, prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, est nulle, donc l'intégrale dont il s'agit est la même que $\pi \int \frac{dy}{y^2-1}$, prise depuis $y=\frac{1}{\cos \theta}$ jusqu'à $y=\infty$; elle se réduit par conséquent à $\frac{1}{2} \pi \log \left(\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}\right)$.

Il reste à trouver la seconde partie $\int \frac{2 x dx \sin x \cos x}{\cos^2 \theta-\sin^2 x}$; or en faisant $2 x=z$, cette intégrale devient $\frac{1}{2} \int \frac{z dz \sin z}{\cos z+\cos 2 \theta}$; et comme elle doit être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\pi$, sa valeur sera représentée par $\frac{1}{2} \mathrm{Z}(2 \theta)$. On aura donc l'équation

$$\mathrm{Z}(\theta)=\frac{1}{2} \pi \log \left(\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}\right)+\frac{1}{2} \mathrm{Z}(2 \theta) ; \tag{29}$$

d'où l'on déduit

$$Z(\theta)+\pi \log(2-2\cos\theta)=\tfrac{1}{2}[Z(2\theta)+\pi\log(2-2\cos 2\theta)];$$

mais si $\psi(x)$ est une telle fonction de x, qu'on ait $\psi(x)=\frac{1}{2}\psi(2x)$, on aura $\psi'(x)=\psi'(2x)$, $\psi'(x)$ désignant $\frac{d\psi(x)}{dx}$. De là on voit que $\psi'(x)$ doit être une constante, et qu'ainsi en faisant $\psi'(x)=c$, on aura $\psi(x)=cx+b$, ou seulement $\psi(x)=cx$; car l'équation $\psi(x)=\frac{1}{2}\psi(2x)$ exige qu'on ait $b=0$. Cela posé, la fonction $Z(\theta)$ devra satisfaire à l'équation

$$Z(\theta)+\pi\log(2-2\cos\theta)=c\theta,$$

et il ne reste plus qu'à déterminer la constante c.

Pour cela j'observe qu'en faisant $\theta=\frac{2}{3}\pi$, on aura $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ et $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$; de sorte que dans ce cas les deux fonctions $Z(\theta)$, $Z(2\theta)$ devant être égales, on aura par l'équation (29),

$$Z(\theta)=-\tfrac{1}{2}\pi\, \mathcal{L}3+\tfrac{1}{2}Z(\theta);$$

donc $Z(\frac{2}{3}\pi)=-\pi\,\mathcal{L}3$; substituant cette valeur et celle de $\cos\theta$ dans l'équation précédente, on aura $c=0$; donc en général $Z(\theta)$ ou l'intégrale cherchée

$$\int\frac{xdx\sin x}{\cos x+\cos\theta}=-\pi\log(2-2\cos\theta).$$

On peut dans cette formule changer le signe de $\cos\theta$, ce qui revient à mettre $\pi-\theta$ au lieu de θ, et on aura ainsi les formules (28) qu'il s'agissait de démontrer.

77. Au moyen des formules (27) on peut parvenir à d'autres résultats non moins remarquables. Soit $a=m(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$; si on fait $\sqrt{(a^2-1)}=n(\cos6+\sqrt{-1}\sin6)$, on aura pour déterminer n et 6, les équations

$$n^4=1-2m^2\cos 2\alpha+m^4$$

$$\text{tang}\, 26=\frac{m^2\sin 2\alpha}{m^2\cos 2\alpha-1};$$

ces valeurs donnent

$$1-a+\sqrt{(a^2-1)}=1-m\cos\alpha+n\cos6+(n\sin6-m\sin\alpha)\sqrt{-1}.$$

Soit cette quantité $= p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, on aura de nouveau, pour déterminer p et φ, les équations

$$p^2 = 1 - 2m\cos\alpha + 2n\cos 6 + m^2 + n^2 - 2mn\cos(\alpha - 6),$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{n\sin 6 - m\sin\alpha}{1 - m\cos\alpha + n\cos 6}.$$

Cela posé, si on substitue ces valeurs dans la seconde des équations (27), on aura

$$\int \frac{xdx\sin x}{\cos x + m\cos\alpha + m\sin\alpha\sqrt{-1}} = -2\pi\log p - 2\pi\varphi\sqrt{-1};$$

d'où l'on déduit les deux équations

$$\int \frac{xdx\sin x(\cos x + m\cos\alpha)}{m^2 + 2m\cos\alpha\cos x + \cos^2 x} = -2\pi\log p,$$
$$\int \frac{xdx\sin x}{m^2 + 2m\cos\alpha\cos x + \cos^2 x} = \frac{2\pi\varphi}{m\sin\alpha}.$$

Ces deux formules sont comprises dans la suivante, où A et B sont deux coefficiens arbitraires :

$$(30) \qquad \int \frac{xdx\sin x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B})}{m^2 + 2m\cos\alpha\cos x + \cos^2 x} = -2\pi\mathrm{A}\log p + \frac{\mathrm{B} - \mathrm{A}m\cos\alpha}{m\sin\alpha}\cdot 2\pi\varphi.$$

Si dans cette formule on fait $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ et $m = \cot\mu$, on trouvera le résultat suivant remarquable par sa simplicité :

$$(31) \qquad \int \frac{xdx\sin x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B})}{\cos^2 x + \cot^2\mu} = 2\pi\mathrm{A}\log\cos\tfrac{1}{2}\mu + \pi\mathrm{B}\mu\operatorname{tang}\mu.$$

78. Si on différentie l'équation (30) par rapport à m et α, en faisant $m\cos\alpha$ constant, et qu'on répète ces différentiations autant de fois qu'il sera nécessaire, on aura en général la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{xdx\sin x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B})}{(m^2 + 2m\cos\alpha\cos x + \cos^2 x)^k}, \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

k étant un entier quelconque.

De même les différentielles successives de l'équation (31), prises par rapport à μ, feront connaître la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{xdx\sin x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B})}{(\cos^2 x + \cot^2\mu)^k}. \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Donc en général étant proposé l'intégrale $\int \mathrm{P}x dx \sin x$, dans laquelle P est une fonction rationnelle de $\cos x$, la valeur de cette intégrale, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, pourra toujours s'exprimer exactement par les arcs de cercle et les logarithmes, pourvu toutefois que la fonction P n'ait dans son dénominateur aucun facteur multiple de la forme $(\cos x \pm \cos \theta)^n$. L'opération à faire pour cet objet, sera la même que celle dont on fait usage pour l'intégration des fractions rationnelles, en regardant $\cos x$ comme la variable.

79. La raison de l'exception est que l'intégrale $\int \frac{x dx \sin x}{(\cos x \pm \cos \theta)^n}$, prise entre les limites $x = 0$, $x = \pi$, est infinie lorsque n est égal à 2 ou plus grand que 2.

En effet soit l'intégrale proposée $\mathrm{Z}_n = \int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - \cos \theta)^n}$; si elle devient infinie, ce ne peut être que dans la partie qui est due aux valeurs de x très-voisines de θ. Pour juger de la grandeur de cette partie, faisons $\cos x - \cos \theta = z$, et supposons que z varie depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$, ω étant une quantité très-petite, on aura $x = \theta - \frac{z}{\sin \theta} - \frac{z^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} + \text{etc.}$, et la partie de l'intégrale $\mathrm{Z}_{(n)}$ prise depuis la valeur de x qui satisfait à l'équation $\cos x - \cos \theta = \omega$, jusqu'à $x = \theta$, sera donnée par l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^n} \left(\theta - \frac{z}{\sin \theta} - \frac{z^2 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} - \text{etc.} \right),$$

prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$.

De même la partie de l'intégrale Z_n, comprise depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui satisfait à l'équation $\cos x - \cos \theta = -\omega$, sera donnée par l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^n} \left(\theta + \frac{z}{\sin \theta} - \frac{z^2}{2 \sin^3 \theta} - \text{etc.} \right),$$

prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$.

Donc, 1°. si n est pair, la partie de l'intégrale Z_n comprise entre les deux valeurs de x qui donnent $\cos x - \cos \theta = \omega$ et $\cos x - \cos \theta = -\omega$, sera égale à l'intégrale $2\theta \int \frac{dz}{z^n}$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \omega$.

2°. Si n est impair, la partie de l'intégrale Z_n comprise entre les mêmes limites, sera égale à l'intégrale $-\frac{2}{\sin\theta}.\int\frac{dz}{z^{n-1}}$, prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=\omega$.

Les intégrales en z sont infinies dans les deux cas, puisque, dans le second cas, on suppose $n=3$ ou >3; donc l'intégrale $\int\frac{xdx\sin x}{(\cos x-\cos\theta)^n}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, est infinie, quel que soit l'entier $n>1$. Il en est de même de l'intégrale $\int\frac{xdx\sin x}{(\cos x+\cos\theta)^n}$ qu'on ramène à la précédente, en mettant $\pi-\theta$ au lieu de θ.

80. Il ne sera pas inutile de joindre ici la solution d'une difficulté que présentent les équations (28).

Puisqu'on a l'équation $\int\frac{xdx\sin x}{\cos x-a}=-\pi\log(2+2a)$, dans laquelle $a=\cos\theta$, il semble qu'on en peut déduire, par des différentiations successives prises par rapport à a, les formules

$$\int\frac{xdx\sin x}{(\cos x-a)^2}=-\frac{\pi}{1+a},\quad \int\frac{xdx\sin x}{(\cos x-a)^3}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{(1+a)^2},\quad \text{etc.}$$

Cependant ces équations sont toutes fautives, puisque nous avons démontré que les premiers membres sont des quantités infinies; d'ailleurs l'absurdité est palpable pour la première équation qui donnerait une valeur négative de l'intégrale $\int\frac{xdx\sin x}{(\cos x-\cos\theta)^2}$, tandis que tous ses élémens, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, sont positifs.

Il s'agit donc d'expliquer comment les conclusions tirées d'une équation exacte telle que $\int\frac{xdx\sin x}{\cos x-\cos\theta}=-\pi\log(2+2\cos\theta)$, en lui appliquant les règles les plus simples de la différentiation, peuvent être erronées.

Examinons pour cet effet ce qui se passe dans le procédé ordinaire de la différentiation. Soient $a-\omega$, $a+\omega$ les cosinus de deux arcs peu différens de l'arc θ, on aura les deux équations rigoureuses

$$\int\frac{xdx\sin x}{\cos x-a+\omega}=-\pi\log(2+2a-2\omega),$$

$$\int\frac{xdx\sin x}{\cos x-a-\omega}=-\pi\log(2+2a+2\omega);$$

et par leur différence on aura encore exactement

$$\int \frac{xdx \sin x}{(\cos x - a)^2 - \omega^2} = -\frac{\pi}{2\omega} \log \frac{1+a+\omega}{1+a-\omega};$$

si on suppose ensuite ω infiniment petit, le second membre se réduit à $-\frac{\pi}{1+a}$, de sorte qu'on aura

$$(32) \qquad \int \frac{xdx \sin x}{(\cos x - a)^2 - \omega^2} = -\frac{\pi}{1+a},$$

valeur qui est exacte aux quantités près de l'ordre ω^2.

Maintenant si on fait $\omega = 0$ dans le premier membre, comme l'exige le procédé ordinaire de la différentiation, on trouve

$$\int \frac{xdx \sin x}{(\cos x - a)^2} = -\frac{\pi}{1+a},$$

équation entièrement défectueuse. Ainsi on voit que la conservation du terme ω^2, quelque petit qu'il puisse être, est nécessaire pour que l'intégrale $\int \frac{xdx \sin x}{(\cos x - a)^2 - \omega^2}$ soit égale à $-\frac{\pi}{1+a}$, et il est remarquable qu'alors l'intégrale ne dépend pas de cette quantité ω qu'on doit supposer infiniment petite, mais non pas nulle.

81. Pour achever d'éclaircir ce point d'analyse, j'observerai que tant que ω est infiniment petit, mais non pas nul, l'intégrale $\int \frac{xdx \sin x}{(\cos x - a)^2 - \omega^2}$ a une partie négative comprise entre les deux valeurs prochaines de x qui satisfont aux équations $\cos x = \cos\theta + \omega$, $\cos x = \cos\theta - \omega$. Les calculs précédens prouvent que cette partie négative, dont la valeur est infinie, suffit non-seulement pour détruire l'infini positif qui résulte des deux autres parties de l'intégrale, mais encore pour donner au résultat total une valeur négative $-\frac{\pi}{1+a}$. Cela a lieu tant que ω est quelque chose; mais lorsque ω devient nul, la partie négative n'existe plus, et la valeur de l'intégrale, composée toute entière de parties positives, devient tout à coup infinie.

Nous devons conclure de là que toutes les fois qu'une intégrale passe par l'infini avant d'arriver à la valeur finie qu'elle obtient pour une limite déterminée, on ne peut exécuter sur cette intégrale définie, les différentiations relatives aux constantes arbitraires, qu'après s'être assuré que les infinis qui composent les deux parties de l'intégrale définie, ne rendront pas défectueux les résultats de la différentiation de cette intégrale.

82. Les difficultés dont nous venons de nous occuper cessent d'avoir lieu, lorsque $\cos x - \cos \theta$ conserve le même signe dans toute l'étendue de l'intégrale $Z_n = \int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - \cos \theta)^n}$; alors la valeur de cette intégrale, entre des limites données, peut être déterminée exactement, quel que soit l'entier n. En effet l'intégration par parties donne

$$(33) \qquad (n-1) Z_n = - \frac{x}{(\cos x - \cos \theta)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(\cos x - \cos \theta)^{n-1}};$$

d'un autre côté, en différentiant la quantité $\frac{\sin x}{(\cos x - \cos \theta)^k}$, on trouve la formule

$$(34) \qquad k \sin^2\theta . T_{(k+1)} = \frac{\sin x}{(\cos x - \cos \theta)^k} + (2k-1)\cos\theta . T_{(k)} + (k-1) T_{(k-1)},$$

dans laquelle $T_{(k)}$ représente en général l'intégrale $\int \frac{dx}{(\cos x - \cos \theta)^k}$.

Il suit de là que l'intégrale Z_n peut toujours se ramener à l'intégrale $T_1 = \int \frac{dx}{\cos x - \cos \theta}$; or on a

$$(35) \qquad \begin{cases} T_1 = \frac{1}{\sin \theta} \log \frac{\sin \frac{1}{2}(\theta + x)}{\sin \frac{1}{2}(\theta - x)}, \text{ si } x \text{ est } < \theta, \\ \text{et } \quad T_1 = \frac{1}{\sin \theta} \log \frac{\sin \frac{1}{2}(x + \theta)}{\sin \frac{1}{2}(x - \theta)}, \text{ si } x \text{ est } > \theta. \end{cases}$$

Ainsi, dans tous les cas, on aura la valeur de l'intégrale indéfinie $Z_{(n)}$, prise entre des limites données, pourvu que $\cos x - \cos \theta$ conserve le même signe dans toute l'étendue de l'intégrale.

83. Par exemple, si l'on veut avoir l'intégrale $Z'_3 = \int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - \cos \theta)^3}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = b'$, b' étant $< \theta$, on trouvera par

les formules précédentes,

$$Z'_3 = -\frac{b'}{2(\cos b' - \cos\theta)} + \frac{\sin b'}{2\sin^2\theta(\cos b' - \cos\theta)} + \frac{\cos\theta}{2\sin^3\theta}\,\mathcal{L}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta + b')}{\sin\frac{1}{2}(\theta - b')}.$$

De même l'intégrale $Z''_3 = \int \frac{x dx \sin x}{(\cos x - \cos\theta)}$, prise depuis $x = b''$ jusqu'à $x = \pi$, b'' étant $> \theta$, sera

$$Z''_3 = -\frac{\pi}{2(1 + \cos\theta)^2} + \frac{b'}{2(\cos\theta - \cos b')^2} + \frac{\sin b''}{2\sin^2\theta(\cos\theta - \cos b'')}$$
$$- \frac{\cos\theta}{2\sin^3\theta}\,\mathcal{L}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b'' + \theta)}{\sin\frac{1}{2}(b'' - \theta)}.$$

Supposons que les limites b', b'' soient telles qu'on ait $\cos b' = \cos\theta + \omega$ et $\cos b'' = \cos\theta - \omega$, ω étant une quantité infiniment petite; alors en développant les valeurs de b' et b'' suivant les puissances de ω, on aura

$$b' = \theta - \frac{\omega}{\sin\theta} - \frac{\omega^2\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \text{etc.},$$

$$b'' = \theta + \frac{\omega}{\sin\theta} - \frac{\omega^2\cos\theta}{2\sin^3\theta} - \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans les formules précédentes, et négligeant les termes qui demeurent infiniment petits après les réductions, il viendra

$$Z'_3 + Z''_3 = \frac{2}{\omega\sin\theta} - \frac{\pi}{2(1 + \cos\theta)^2}.$$

Si on fait $\omega = 0$, la quantité $Z'_3 + Z''_3$ ne sera autre chose que l'intégrale Z_3, prise sans interruption depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; donc la valeur de cette intégrale est infinie, comme on l'a déjà trouvé.

84. Nous terminerons ces recherches par la détermination de l'intégrale $Z = \int \frac{x dx}{a + \cos x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$. Soit d'abord $a > 1$, on pourra supposer $a = \frac{1 + c^2}{2c}$ ou $c = a - \sqrt{(a^2 - 1)}$, et on aura

$$\frac{1}{a + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - 1)}} \cdot (1 - 2\cos x + 2c^2\cos^2 x - 2c^3\cos 3x + \text{etc.});$$

multipliant

multipliant de part et d'autre par xdx, et observant qu'entre les limites données $\int xdx \cos mx = \frac{1}{m^2}(\cos m\pi - 1)$, on aura Z ou

$$(36)\quad \int \frac{xdx}{a+\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\pi^2}{\sqrt{(a^2-1)}} + \frac{4}{\sqrt{(a^2-1)}}\left(c + \frac{c^3}{3^2} + \frac{c^5}{5^2} + \text{etc.}\right); \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

on trouvera de même

$$(37)\quad \int \frac{xdx}{a-\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\pi^2}{\sqrt{(a^2-1)}} - \frac{4}{\sqrt{(a^2-1)}}\left(c + \frac{c^3}{3^2} + \frac{c^5}{5^2} + \text{etc.}\right). \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

On connaît quelques cas où la série comprise dans ces formules est sommable. *Voyez* IIe Part., pag. 246.

85. Si dans ces formules on fait $a = \cos\theta$, ce qui donnera $c = \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta$, on aura, en négligeant les parties imaginaires,

$$(38)\quad \left.\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\cos x + \cos\theta} &= -\frac{4}{\sin\theta}\left(\sin\theta + \frac{\sin 3\theta}{3^2} + \frac{\sin 5\theta}{5^2} + \text{etc.}\right) \\ \int \frac{xdx}{\cos x - \cos\theta} &= -\frac{4}{\sin\theta}\left(\sin\theta + \frac{\sin 3\theta}{3^2} + \frac{\sin 5\theta}{5^2} + \text{etc.}\right). \end{aligned}\right. \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Pour s'assurer de l'exactitude de ces formules, on observera d'abord que, suivant la transformation indiquée art. 76, l'intégrale... $Z = \int \frac{xdx}{\cos x + \cos\theta}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, peut se changer en une autre, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}\pi$, savoir,

$$Z = \int \left(\frac{(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx}{\cos\theta + \sin x} + \frac{(\frac{1}{2}\pi + x)\,dx}{\cos\theta - \sin x}\right),$$

ou

$$Z = \pi\cos\theta \int \frac{dx}{\cos^2\theta - \sin^2 x} + \int \frac{2xdx \sin x}{\cos^2\theta - \sin^2 x}.$$

Soit $\tang x = y \cot\theta$, on aura $\int \frac{dx}{\cos^2\theta - \sin^2 x} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\int \frac{dy}{1-y^2}$; cette intégrale devant être prise depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$, se trouvera nulle d'après les formules (16), pag. 162; donc on a simplement

$$Z = \int \frac{2xdx \sin x}{\cos^2\theta - \sin^2 x};$$

28

celle-ci peut se mettre sous la forme

$$Z = \frac{1}{\sin\theta}\int\frac{xdx\sin x}{\cos x - \sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\int\frac{xdx\sin x}{\cos x + \sin x}. \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

Or par les formules (5) et (7) relatives aux limites $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, on a

$$\int\frac{xdx\sin x}{\cos x + \sin\theta} = -\frac{\pi}{2}\log(2\sin\theta) + 2\sin\theta + \frac{2\sin 3\theta}{3^2} + \frac{2\sin 5\theta}{5^2} + \text{etc.},$$

$$\int\frac{xdx\sin x}{\cos x - \sin\theta} = -\frac{\pi}{2}\log(2\sin\theta) - 2\sin\theta - \frac{2\sin 3\theta}{3^2} - \frac{2\sin 5\theta}{5^2} - \text{etc.};$$

donc enfin l'intégrale cherchée

$$Z = -\frac{4}{\sin\theta}\left(\sin\theta + \frac{\sin 3\theta}{3^2} + \frac{\sin 5\theta}{5^2} + \text{etc.}\right),$$

et la même valeur a lieu en mettant $\pi - \theta$ à la place de θ, ce qui s'accorde avec les formules (38).

§ VI. *De quelques Transcendantes exprimées en fractions continues.*

86. J'ai fait voir dans la note IV de mes *Élémens de Géométrie*, que la fraction continue

$$\cfrac{x}{m + \cfrac{x}{m+1 + \cfrac{x}{m+2 + \text{etc.}}}},$$

dont les dénominateurs croissent en progression arithmétique, peut être sommée au moyen de la fonction

$$\varphi(m) = 1 + \frac{x}{m} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{m.\overline{m+1}} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{x^3}{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}} + \text{etc.},$$

et qu'en appelant y la valeur de la fraction continue, prolongée à l'infini, on a

$$y = \frac{x}{m}\cdot\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)}.$$

Si on prend les différentielles successives de la fonction $\varphi(m)$

ou φ par rapport à x, on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{m} + \frac{x}{m.m+1} + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{m.m+1.m+2} + \frac{1}{2.3}.\frac{x^3}{m.m+1.m+2.m+3} + \text{etc.},$$

$$\frac{xdd\varphi}{dx^2} = \frac{x}{m.m+1} + \frac{x^2}{m.m+1.m+2} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{m\ldots m+3} + \frac{1}{2.3}.\frac{x^4}{m\ldots m+4} + \text{etc.}$$

De là on voit que la fonction φ satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{dd\varphi}{dx^2} + m\frac{d\varphi}{dx} = \varphi;$$

d'ailleurs on a $\varphi(m+1) = \frac{md\varphi}{dx}$; ainsi la somme cherchée y se déduira de φ au moyen de l'équation

$$y = \frac{xd\varphi}{\varphi dx}.$$

Cette équation donne réciproquement $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y\varphi}{x}$, de sorte qu'en éliminant φ on pourra déterminer directement y par l'équation différentielle du premier ordre

$$(a) \qquad \frac{xdy}{dx} + y^2 + (m-1)y - x = 0,$$

équation qu'il serait facile de ramener à la même forme que l'équation de Riccati.

87. Si l'on propose donc de trouver la somme de la fraction continue

$$\cfrac{x}{m + \cfrac{x}{m+1 + \cfrac{x}{m+2 + \text{etc.}}}},$$

cette somme étant représentée par y, il faudra intégrer l'équation (a), de manière qu'on ait à la fois $x=0$ et $y=0$.

Ce résultat peut se vérifier immédiatement; car si dans l'équation (a) on fait $y = \frac{x}{m+y'}$, la transformée sera

$$x\frac{dy'}{dx} + y'^2 + my' - x = 0,$$

équation qui ne diffère de l'équation (a) qu'en ce que m est mise au lieu de $m-1$; ainsi y' est la même fonction de $m+1$, que y est de m; on aura donc $y'=\frac{x}{m+1+y''}$, $y''=\frac{x}{m+2+y'''}$, etc., ce qui reproduit la fraction continue proposée.

88. Si on multiplie cette même fraction par c, on aura

$$cy=\frac{c^2x}{mc}+\frac{c^2x}{mc+c}+\frac{c^2x}{mc+2c}+\text{etc.}$$

Si ensuite on fait $c^2x=x'$, $cy=y'$ et $mc=a$, on aura une nouvelle fraction continue

$$y'=\frac{x'}{a}+\frac{x'}{a+c}+\frac{x'}{a+2c}+\text{etc.},$$

et la somme y' dépendra de l'équation différentielle

$$(b)\qquad cx'\frac{dy'}{dx'}+y'^2+(a-c)y'-x'=0,$$

résultat plus général que le précédent, puisque les dénominateurs de la fraction continue représentent une progression arithmétique quelconque.

89. Nous placerons ici l'explication de l'erreur qui a été remarquée dans un résultat d'Euler, cité III^e Partie, page 367.

Ayant désigné par $Z(k)$ l'intégrale $\int x^{k-\frac{1}{2}}dx\, e^{-\left(\frac{1+xx}{2nx}\right)}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, nous avons trouvé, page 366, qu'on a généralement

$$Z(k+1)=(2k+1)nZ(k)+Z(k-1).$$

Soit $\frac{Z(k+1)}{Z(k)}=P(k)$, on tirera de cette équation

$$P(k-1)=\frac{1}{-(2k+1)n}+P(k);$$

on aura semblablement

$$P(k)=\frac{1}{-(2k+3)n}+P(k+1)$$

De là il ne faut pas conclure qu'on ait indéfiniment :

$$P(k-1) \text{ ou } \frac{Z(k)}{Z(k-1)} = \cfrac{1}{-(2k+1)n + \cfrac{1}{-(2k+3)n + \cfrac{1}{-(2k+5)n + \text{etc.}}}};$$

car il s'ensuivrait que la quantité négative $-\frac{Z(k)}{Z(k-1)}$ est égale à la somme de la fraction continue

$$\cfrac{1}{(2k+1)n + \cfrac{1}{(2k+3)n + \cfrac{1}{(2k+5)n + \text{etc.}}}},$$

dont tous les termes sont positifs.

Pour que l'égalité en question eût lieu, il faudrait que dans l'équation

$$P(k+i-1) = \cfrac{1}{-(2k+2i+1)n + P(k+i)},$$

on pût, lorsque i est très-grand, négliger le terme $P(k+i)$, vis à vis de $-(2k+2i+1)n$; or bien loin que ce terme puisse être négligé, sa différence avec $(2k+2i+1)n$ diminue continuellement à mesure que i augmente, et cette différence suffit pour altérer totalement la valeur de la fraction continue, prolongée jusqu'au terme $-(2k+2i+1)n$.

On conçoit en effet qu'une quantité donnée quelconque peut être supposée égale à une fraction continue dont les termes seraient pris à volonté, tels que $(2k+1)n$, $(2k+3)n$, etc., pourvu qu'au dernier de ces termes $(2k+2i+1)n$, on ajoute une certaine quantité α qui rétablisse l'égalité. L'omission de la quantité α peut changer le résultat du tout au tout, du positif au négatif ; et c'est ce qui arriverait si, à l'exemple d'Euler, on établissait l'égalité dont nous venons de parler.

90. Pour donner un autre exemple de l'erreur qu'on peut commettre dans l'emploi des fractions continues, reprenons l'équation

$$0 = (1+c^{\circ})\,E^{1}(c) - (2+b^{\circ})\,E^{1}(c^{\circ}) + b^{\circ}(1+b^{\circ})\,E^{1}(c^{\circ\circ}),$$

que nous avons trouvée (page 88, III[e] Partie), entre les trois fonctions complètes $E^1(c)$, $E^1(c^\circ)$, $E^1(c^{\circ\circ})$. Si on fait $\frac{E^1(c)}{E(c^\circ)} = \frac{1+b}{2}.P^\circ$, et par analogie $\frac{E^1(c^\circ)}{E^1(c^{\circ\circ})} = \frac{1+b^\circ}{2}.P^{\circ\circ}$, l'équation précédente deviendra, en observant que $c^\circ = \frac{1-b}{1+b}$,

$$P^\circ = 2 + b^\circ - \frac{2b^\circ}{P^{\circ\circ}};$$

on aurait donc semblablement

$$P^{\circ\circ} = 2 + b^{\circ\circ} - \frac{2b^{\circ\circ}}{P^{\circ\circ\circ}},$$

$$P^{\circ\circ\circ} = 2 + b^{\circ\circ\circ} - \frac{2b^{\circ\circ\circ}}{P^{\circ\circ\circ\circ}},$$

et ainsi de suite. Il s'agit maintenant de savoir si on peut, de ces équations, conclure que la somme de la fraction continue prolongée à l'infini

$$2 + b^\circ - \cfrac{2b^\circ}{2 + b^{\circ\circ} - \cfrac{2b^{\circ\circ}}{2 + b^{\circ\circ\circ} - \text{etc.}}},$$

est égale à P°.

Observons d'abord que lorsque dans la suite des modules décroissans c, c°, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., on est parvenu à un terme très-petit c^μ, la valeur correspondante de son complément b^μ est sensiblement égale à 1, et on a en même temps $E'(c^\mu) = \frac{\pi}{2}$; donc en prolongeant suffisamment la suite P°, $P^{\circ\circ}$, $P^{\circ\circ\circ}$, etc., on parviendra bientôt à un terme P^μ qui ne diffèrera de l'unité que d'une quantité absolument négligeable.

Supposons donc $P^\mu = 1$, on aura

$$P^{(\mu-1)} = 2 + b^{(\mu-1)} - \frac{2b'^{(\mu-1)}}{P^\mu} = 2 - b'^{(\mu-1)},$$

$$P^{(\mu-2)} = 2 + b^{(\mu-2)} - \frac{2b'^{(\mu-2)}}{P^{\mu-1}},$$

et ainsi en remontant jusqu'à P°; de sorte que la valeur de la fraction continue

$$2 + b^\circ - \cfrac{2b^\circ}{2 + b^{\circ\circ} - \cfrac{2b^{\circ\circ}}{2 + b^{\circ\circ\circ} - \text{etc.}}},$$

calculée ainsi qu'on vient de l'indiquer, sera, sinon la valeur exacte de P°, au moins une valeur tellement approchée que l'erreur ne sera que de l'ordre $1 - b^{\mu}$ ou $\frac{1}{2}(c\ )^2$.

91. Mais il faut remarquer que suivant la manière ordinaire de calculer les fractions continues, on trouverait un résultat différent et tout à fait erroné. En effet, s'il s'agit de calculer la valeur de la fraction continue

$$x = a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \text{etc.}}}},$$

on imagine que la fraction continue s'arrête successivement aux termes $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{\beta}{c}$, $\frac{\gamma}{d}$, $\frac{\delta}{e}$, etc., et la limite vers laquelle tendent les résultats successifs calculés dans cette hypothèse, est ce qu'on appelle la somme ou la valeur de la fraction continue.

En procédant de la même manière pour le calcul de la fraction continue qui doit déterminer P°, il faudra supposer que la fraction continue s'arrête successivement aux termes $-\frac{2b^{\circ}}{2+b^{\circ\circ}}$, $-\frac{2b^{\circ\circ}}{2+b^{\circ\circ\circ}}$, etc. Le dernier de ces termes serait $-\frac{2b^{(\mu-1)}}{2+b^{\mu}}$ qui, en supposant toujours $1 - b^{\mu}$ négligeable, se réduit à $-\frac{2b^{(\mu-1)}}{3}$; mais c'est précisément sur ce terme que l'on commettrait une erreur notable, puisque nous avons vu qu'il doit être supposé $-\frac{2b^{(\mu-1)}}{P^{\mu}}$ ou $-2b^{(\mu-1)}$; et cette erreur ne manquerait pas d'influer sur la valeur totale de la fraction continue, qui deviendrait ainsi entièrement défectueuse.

On voit par là que les fractions continues ne doivent être employées qu'avec de grandes précautions, pour représenter les valeurs des quantités qui sont susceptibles d'être exprimées par leur moyen, et qu'il faut s'assurer, dans chaque cas, que la quantité nécessairement omise dans le terme auquel on s'arrête, n'influera pas sensiblement sur la valeur totale de la fraction. Au reste il serait difficile de citer un exemple où l'usage des fractions continues dans le calcul intégral, offrirait quelqu'avantage sur celui des suites qui en représentent la valeur terme à terme.

§ VII. *De quelques formules relatives au développement des fonctions et au retour des suites.*

92. Soit proposée l'équation $F(x)+y\varphi(x)=F(a)$, dans laquelle $F(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions données de x; on pourra, d'après cette équation, regarder x comme une fonction de y et de a, et l'expression de x, ordonnée suivant les puissances de y, sera de la forme

$$x = a + Py + Qy^2 + Ry^3 + \text{etc.},$$

P, Q, R, etc. étant des fonctions de a seule.

Substituant cette valeur dans l'équation proposée, et désignant pour abréger, par F' et φ les quantités $\frac{dF(a)}{da}$ et $\varphi(a)$, on trouvera

$$P=-\frac{\varphi}{F'},\quad Q=\frac{\frac{1}{F'}\,d\left(\frac{\varphi^2}{F'}\right)}{1.2\,da},\quad R=-\frac{\frac{1}{F'}\,d\,\frac{1}{F'}\,d\,\frac{\varphi^3}{F'}}{1.2.3\,da^2},\quad \text{etc.}$$

Il s'ensuit ultérieurement que si $\psi(x)$ est une fonction quelconque de x, et qu'on désigne par ψ et ψ' les fonctions $\psi(a)$ et $\frac{d\psi(a)}{da}$, on aura généralement

$$(1)\qquad \psi(x)=\psi-y.\frac{\varphi\psi'}{F'}+\frac{y^2}{1.2}.\frac{\frac{1}{F'}\,d\,\frac{\varphi^2\psi'}{F'}}{da}-\frac{y^3}{1.2.3}.\frac{\frac{1}{F'}\,d\,\frac{1}{F'}\,d\,\frac{\varphi^3\psi'}{F'}}{da^2}+\text{etc.}$$

La loi de cette formule est facile à saisir; mais il est nécessaire de la démontrer rigoureusement et indépendamment de toute induction.

93. Pour cela, supposons en général,

$$(2)\qquad \psi(x)=\psi-yT'+\frac{y^2}{2}T''-\frac{y^3}{2.3}T'''+\text{etc.}$$

Soit de plus $\Pi(x)$ une autre fonction de x telle qu'on ait

$d\Pi(x)$

$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \varphi(x).\frac{d\psi(x)}{dx}$, ou, pour abréger, $\Pi'(x) = \varphi(x)\psi'(x)$; et supposons qu'on ait semblablement

$$\Pi(x) = \Pi - yt' + \frac{y^2}{2}t'' - \frac{y^3}{2.3}t''' + \text{etc.}$$

Je différentie $\psi(x)$ par rapport à y, et $\Pi(x)$ par rapport à a, j'ai

$$\frac{d\psi(x)}{dy} = -T' + yT'' - \frac{y^2}{2}T''' + \frac{y^3}{2.3}T^{\text{IV}} - \text{etc.},$$
$$\frac{d\Pi(x)}{da} = \Pi' - y\frac{dt'}{da} + \frac{y^2}{2}.\frac{dt''}{da} - \frac{y^3}{2.3}.\frac{dt'''}{da} + \text{etc.};$$

de là résulte

$$(3) \qquad F'\frac{d\psi(x)}{dy} + \frac{d\Pi(x)}{da} = \Pi' - F'T' - y\left(\frac{dt'}{da} - F'T''\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{dt''}{da} - F'T'''\right) - \frac{y^3}{2.3}\left(\frac{dt'''}{da} - F'T^{\text{IV}}\right) + \text{etc.}$$

Or je dis que le premier membre de cette équation se réduit à zéro; en effet on a $\frac{d\psi(x)}{dy} = \psi'(x).\frac{dx}{dy}$, $\frac{d\Pi(x)}{da} = \Pi'(x).\frac{dx}{da} = \varphi(x).\psi'(x).\frac{dx}{da}$; donc

$$F'\frac{d\psi(x)}{dy} + \frac{d\Pi(x)}{da} = \psi'(x).\left[F'\frac{dx}{dy} + \varphi(x)\frac{dx}{da}\right].$$

Mais de l'équation proposée $F(x) + y\varphi(x) = F(a)$, on tire:

$$\frac{dx}{da} = \frac{F'(a)}{F'(x) + y\varphi'(x)},$$
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\varphi(x)}{F'(x) + y\varphi'(x)};$$

donc on a $F'\frac{dx}{dy} + \varphi(x)\frac{dx}{da} = 0$; et par conséquent aussi, $F'\frac{d\psi(x)}{dy} + \frac{d\Pi(x)}{da} = 0$.

Il suit de là que dans le second membre de l'équation (3), on doit égaler à zéro les coefficiens d'une même puissance de y, ce qui donnera d'abord $\Pi' - F'T' = 0$; donc

$$T' = \frac{\Pi'}{F'} = \frac{\varphi\psi'}{F'};$$

la même équation appliquée à la fonction Π donne $t' = \frac{\varphi\Pi'}{F'} = \frac{\varphi^2\psi'}{F}$.

On aura ensuite $\frac{dt'}{da} - F'T'' = 0$; d'où

$$T'' = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi^2\psi'}{F'}}{da}.$$

On aura donc aussi, relativement à la fonction Π,

$$t'' = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi^2\Pi'}{F'}}{da} = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi\,\psi'}{F'}}{da}.$$

Connaissant t'', on trouvera T''' par l'équation $\frac{dt''}{da} - F'T''' = 0$; d'où résulte

$$T''' = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi^3\psi'}{F'}}{da^2}.$$

Cette même valeur appliquée à la fonction Π donne

$$t''' = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi^3\Pi'}{F'}}{da^2} = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi\,\psi'}{F'}}{da^2},$$

et de là

$$T^{\text{IV}} = \frac{1}{F'} \cdot \frac{dt'''}{da} = \frac{\frac{1}{F'}\, d\, \frac{1}{F'}\, d\, \frac{1}{F'}\, d\, \frac{\varphi^4\psi'}{F'}}{da^3},$$

et ainsi de suite; ce qui démontre d'une manière générale la loi de la formule (1). Voici maintenant les différens corollaires qu'on peut en tirer.

COROLLAIRE I.

94. Si l'on fait $F(x) = x$, c'est-à-dire si l'équation proposée est $x = a - y\varphi(x)$, alors on a $F' = 1$, et la formule donne, en

mettant, pour abréger, ψ, ψ', φ au lieu de $\psi(a)$, $\psi'(a)$, $\varphi(a)$,

$$(4)\qquad \psi(x)=\psi-y\varphi\psi'+\frac{y^2}{2}\cdot\frac{d(\varphi^2\psi')}{da}-\frac{y^3}{2.3}\cdot\frac{dd(\varphi^3\psi')}{da^2}+\text{etc.}:$$

c'est la formule connue de Lagrange qui donne lieu à un grand nombre d'applications pour le développement des fonctions et le retour des suites.

Corollaire II.

95. Si l'on a $\varphi(x)=1$, ensorte que l'équation proposée soit

$$F(x)+y=F(a),$$

et qu'on fasse, pour abréger, $\frac{1}{F'(a)}$ ou $\frac{da}{dF(a)}=A$, on aura

$$(5)\qquad \psi(x)=\psi-yA\psi'+\frac{y}{2}\cdot\frac{Ad(A\psi'}{da}-\frac{y^3}{2.3}\cdot\frac{Ad(Ad(A\psi'}{da^2}+\text{etc.}$$

Cette formule est déjà connue des analystes; elle peut servir à résoudre, par approximation, une équation quelconque $F(x)=0$; car si a est une valeur approchée de x, et qu'on ait $F(a)=y$, y étant une quantité assez petite, la formule précédente donnera la valeur de $\psi(x)$ exprimée par une suite convergente.

Corollaire III.

96. Soit proposé l'équation $a=x+y\varphi(x)+y^2\lambda(x)$, dans laquelle $\varphi(x)$ et $\lambda(x)$ sont deux fonctions données de x. Pour avoir la valeur d'une autre fonction $\psi(x)$, développée suivant les puissances de y, il faut, dans la formule (1), substituer $\varphi(a)+y\lambda(a)$ ou simplement $\varphi+y\lambda$ à la place de φ; on aura d'abord

$$\psi(x)=\psi-y(\varphi+y\lambda)\psi'+\frac{y^2}{2}\cdot\frac{d(\varphi+y\lambda)^2\psi'}{da}-\frac{y^3}{2.3}\cdot\frac{dd(\varphi+y\lambda)^3\psi'}{da^2}+\text{etc.}$$

Développant les différens termes et ordonnant toute la suite par rapport à y, on aura

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\psi(x) = \psi &- y\varphi\psi' \\
&+ y^2\left[\frac{d(\varphi^2\psi')}{1.2\,da} - \lambda\psi'\right] \\
&- y^3\left[\frac{dd(\varphi^3\psi')}{1.2.3\,da^2} - \frac{d(\varphi\lambda\psi')}{da}\right] \\
&+ y^4\left[\frac{d^3(\varphi^4\psi')}{1.2.3.4\,da^3} - \frac{dd(\varphi^2\lambda\psi')}{1.2\,da^2} + \frac{d(\lambda^2\psi')}{1.2\,da}\right] \\
&- y^5\left[\frac{d^4(\varphi^5\psi')}{1.2.3.4.5\,da^4} - \frac{d^3(\varphi^3\lambda\psi')}{1.2.3\,da^3} + \frac{d^2(\varphi\lambda^2\psi')}{1.2\,da^2}\right] \\
&+ y^6\left[\frac{d^5(\varphi^6\psi')}{1.2.3.4.5.6\,da^5} - \frac{d^4(\varphi^4\lambda\psi')}{1.2.3.4\,da^4} + \frac{d^3(\varphi^2\lambda^2\psi')}{1.2.1.2\,da^3} - \frac{d^2(\lambda^3\psi')}{1.2.3\,da^2}\right] \\
&- \text{etc.}
\end{aligned}
$$

La loi de cette suite est facile à apercevoir, et on aura en général pour coefficient de y^n la somme des termes représentés par

$$\frac{(-1)^{k+i}\, d^{k+i-1}\,(\varphi^k\lambda^i\psi')}{(1.2.3\ldots k)(1.2.3\ldots i)\,da^{k+i-1}},$$

en donnant à k et i toutes les valeurs en nombres entiers qui satisfont à l'équation $k + 2i = n$.

Corollaire IV.

97. Soit proposé l'équation $a = x + y\varphi(x) + y^2\lambda(x) + y^3\mu(x)$, $\varphi(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ étant des fonctions données de x, on trouvera par des calculs semblables,

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\psi(x) = \psi &- y\varphi\psi' \\
&+ y^2\left[\frac{d(\varphi^2\psi')}{1.2\,da} - \lambda\psi'\right] \\
&- y^3\left[\frac{d^2(\varphi^3\psi')}{1.2.3\,da^2} - \frac{d(\varphi\lambda\psi')}{da} + \mu\psi'\right] \\
&+ y^4\left[\frac{d^3(\varphi^4\psi')}{1.2.3.4\,da^3} - \frac{d^2(\varphi^2\lambda\psi')}{1.2\,da^2} + \frac{d(\varphi\mu\psi')}{da} + \frac{d(\lambda^2\psi')}{1.2\,da}\right] \\
&- y^5\left[\frac{d^4(\varphi^5\psi')}{1.2.3.4.5\,da^4} - \frac{d^3(\varphi^3\lambda\psi')}{1.2.3\,da^3} + \frac{d^2(\varphi\lambda^2\psi')}{1.2\,da^2} + \frac{d^2(\varphi^2\mu\psi')}{1.2\,da^2} - \frac{d(\lambda\mu\psi')}{da}\right] \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

La loi générale de cette suite est telle que le coefficient de y^n est égal à la somme des termes

$$\frac{(-1)^{k+i+l}\, d^{k+i+l-1}\,(\varphi^k\lambda^i\mu^l\psi')}{(1.2.3\ldots k)\,(1.2.3\ldots i)\,(1.2.3\ldots l)\, da^{k+i+l-1}},$$

formés en donnant successivement aux exposans k, i, l toutes les valeurs en nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$n = k + 2i + 3l.$$

On voit qu'il est facile de généraliser encore davantage ces formules, en admettant un plus grand nombre de termes dans l'équation donnée entre x, y et a.

Corollaire V.

98. Soit l'équation donnée $F(a) = F(x) + y\varphi(x) + z\lambda(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\lambda(x)$ étant des fonctions données de x, et soit proposé de trouver la valeur développée suivant les puissances de y et de z, d'une autre fonction de x désignée par $\psi(x)$.

Il suffit, pour cela, de substituer dans la formule générale (1), $\varphi(a) + \frac{z}{y}\lambda(a)$, ou $\varphi + \frac{z}{y}\lambda$ au lieu de φ, ce qui donnera d'abord, en faisant $\frac{1}{F'} = A$,

$$\psi(x) = \psi - (y\varphi + z\lambda)A\psi' + \frac{Ad(y\varphi + z\lambda)^2 A\psi'}{1.2\,da} - \frac{Ad(Ad(y\varphi + z\lambda)^3 A\psi'}{1.2.3\,da^2} + \text{etc.}$$

Si on fait ensuite sortir des signes différentiels les puissances de y et de z, on pourra ordonner ainsi la valeur cherchée de $\psi(x)$,

$$\begin{aligned}
\psi(x) = \psi - yA\varphi\psi' &+ y^2.\frac{Ad(\varphi^2A\psi')}{1.2\,da} - y^3.\frac{Ad(Ad(\varphi^3A\psi'}{1.2.3\,da^2} + \text{etc.}\\
&- zA\lambda\psi' + yz.\frac{Ad(\varphi\lambda A\psi')}{da} - y^2z.\frac{Ad(Ad(\varphi^2\lambda A\psi'}{1.2\,da^2} + \text{etc.}\\
&+ z^2.\frac{Ad(\lambda^2A\psi')}{1.2\,da} - yz^2.\frac{Ad(Ad(\varphi\lambda^2A\psi'}{1.2\,da^2} + \text{etc.}\\
&- z^3.\frac{Ad(Ad(\lambda^3A\psi'}{1.2.3\,da^2} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned} \tag{8}$$

La loi de cette suite est manifeste, et on voit qu'un terme quelconque sera représenté par

$$\frac{(-1)^{k+i} \, Ad\,(Ad\,(A \ldots \; d.(\varphi^k \lambda A \psi')}{(1.2.3\ldots k)(1.2.3\ldots i)\, d\iota^{\;+-1}} \cdot y^k z^i.$$

Si on avait $F(x) = x$, ou si l'équation proposée était $a = x + y\varphi(x) + z\lambda(x)$, le terme général deviendrait

$$\frac{(-1)^{k+i} d^{\;+i-1} (\varphi^k \lambda \, \psi')}{(1.2.3\ldots k)(1.2.3\ldots i)\, da^{\;\iota-1}} \cdot y^k z^i.$$

99. Etant donné la fonction $\psi(x)$, si on propose de la développer suivant les puissances d'une autre fonction de x désignée par u, il faudra faire

$$\psi(x) = T^\circ + T'u + T''\frac{u^2}{2} + T'''\frac{u^3}{2.3} + \text{etc.},$$

et on aura en général $T^{(n)} = \frac{d^n \psi(x)}{du^n}$, la différence n^{ime} étant prise en supposant du constant, et faisant ensuite dans le résultat $u = 0$. A l'égard du premier coefficient T°, si on suppose que l'équation $u = 0$ donne $x = a$, on aura $T^\circ = \psi\; a)$.

En supposant le problème possible, toute la difficulté se réduit à calculer les coefficiens successifs $\frac{d\psi}{d}$, $\frac{dd\psi}{du^2}$, etc. Ce calcul peut devenir prolixe dans beaucoup de cas, c'est pourquoi il importe de faire voir comment on peut changer en général le coefficient $\frac{d^n X}{du^n}$, en un autre qui suppose constante une autre différentielle dz. Mais pour cela il faut supposer que z et u s'évanouissent à la fois lorsque $x = a$, et qu'en même temps le rapport $\frac{z}{u}$ n'est ni nul ni infini. Dans cette hypothèse, voici deux lemmes qui conduiront au résultat que nous cherchons.

100. LEMME I. *Les quantités* z *et* u *étant des fonctions de* x *qui s'évanouissent toutes deux lorsque* x = a, *et qui sont telles que dans le même cas leur rapport est égal à une quantité finie, je dis*

qu'on a en général,

$$(9)\qquad \frac{d^n u^r \left(\frac{z}{u}\right)^n}{dz^n} = n.n-1.n-2\ldots(n-r+1).\frac{d^{n-r}\left(\frac{z}{u}\right)^{n-r}}{dz^{n-r}},$$

pourvu qu'après les différentiations on fasse $z = 0$.

En effet, soit $\frac{z}{u} = p$ et $p^{n-r} = A^\circ + A'z + A''z^2 \ldots + A^k z^k + \text{etc.}$, on aura

$$u^r \left(\frac{z}{u}\right)^n = z^r \left(A^\circ + A'z + A''z^2 \ldots\ldots + A^k z^k + \text{etc.}\right);$$

un terme quelconque de cette suite $A^k z^{k+r}$ aura pour différence n^{ieme} divisée par dz^n, le produit $(k+r)(k+r-1)\ldots(k+r-n+1)A^k z^{k+r-n}$. Cette quantité sera nulle pour tous les termes où $k+r$ est $< n$; elle sera nulle aussi pour tous les termes où $k+r$ est $> n$, puisque la supposition de $z = 0$ rend ceux-ci nuls. Donc le seul terme auquel il faut avoir égard est celui où $k+r = n$, et on aura

$$\frac{d^n u^r \left(\frac{z}{u}\right)^n}{dz^n} = n.n-1.n-2\ldots\ldots 1.A^{(n-r)};$$

mettant au lieu de $A^{(n-r)}$ sa valeur $\frac{d^{n-r}p^{n-r}}{1.2.3\ldots n-r}$, il viendra

$$\frac{d^n u^r \left(\frac{z}{u}\right)^n}{dz^n} = n.n-1.n-2\ldots\ldots(n-r+1).\frac{d^{n-r}p^{n-r}}{dz^{n-r}}.$$

101. LEMME II. *Les mêmes choses étant posées, je dis que la quantité* $\frac{d^{n-1}(u^r d.p^n)}{dz^n}$ *sera égale à* $\frac{d^n(u^r p^n)}{dz^n}$, *en faisant* $z = 0$ *dans le résultat.*

En effet on a $\frac{u^r d(p^n)}{dz} = nu^r p^{n-1}.\frac{dp}{dz} = \frac{n}{n-r}z^r.\frac{d(p^{n-r})}{dz}$ $= \frac{n}{n-r}z^r(A' + 2A''z + 3A'''z^2\ldots\ldots + kA^k z^{k-1} + \text{etc.})$. Le terme général de cette suite est $\frac{nk}{n-r}A^k z^{k+r-1}$; or tant que $r+k$ sera plus petit que $n-1$, la différence $(n-1)^{ieme}$ de cette quantité sera nulle ; lorsque $r+k$ sera plus grand que $n-1$, cette différence sera encore nulle, parce qu'elle sera affectée du facteur z et qu'on devra faire $z=0$; donc il faut considérer le seul terme où $r+k=n$; ce terme est $\frac{nk}{n-r}A^{n-r}z^{n-1}$ ou simplement $nA^{n-r}z^{n-1}$, et sa différence du degré $n-1$, divisée par dz^{n-1}, donnera $n.n-1.n-2\ldots 1.A^{n-r}$; donc on aura

$$(10)\qquad \frac{d^{i-1}(u^r dp^n)}{dz^n}=1.2.3\ldots n.A^{n-r}=\frac{d^n(u^r p^n)}{dz^n};$$

cependant cette formule n'a lieu qu'autant que n est $>r$; car si on avait $r=n$ ou $r>n$, le premier membre se réduirait à zéro.

Cela est manifeste lorsque r est $>n$, parce que les puissances de z, dans les différens termes de $\frac{d^{n-1}(u^r dp^n)}{dz^i}$, ne s'abaissent pas au-dessous de z^{r-n+1}, et par conséquent s'évanouissent lorsqu'on fait $z=0$.

Lorsque $r=n$, on a $\frac{u^r\,dp^n}{dz}=nz^n.\frac{dp}{pdz}$; soit alors $\log p = L^\circ + L'z + L''z^2 +$ etc., on aura $\frac{dp}{pdz}=L'+2L''z+3L'''z^2+$ etc.; donc

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(u^r.\frac{dp^n}{dz}\right)=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(nL'z^n+2nL''z^{n+1}+3nL'''z^{n+2}+\text{etc.})=0.$$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante.

102. *Soit* X *une fonction quelconque de* x, *je dis qu'on aura*

$$(11)\qquad \frac{d^nX}{du^n}=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(\frac{z}{u}\right)^n\frac{dX}{dz}\right],$$

la différence constante étant du *dans le premier membre, et* dz *dans le second.*

En effet, soit $X=T^\circ+T'u+T''.\frac{u^2}{1.2}+T'''.\frac{u^3}{1.2.3}+$ etc., et soit proposé de trouver la valeur de $\frac{d^nXp^n}{dz^n}$; cette quantité étant développée devient

$$T^\circ\frac{d^np^n}{dz^n}+T'\frac{d^n(up^n)}{dz^n}+\frac{T''}{1.2}.\frac{d^n(u^2p^n)}{dz^n}+\text{etc.}$$

Mais

Mais on a en général $\frac{d^n(u^r p^n)}{dz^n} = n.n-1\ldots\ldots n-r+1.\frac{d^{n-r}p^{n-r}}{dz^{n-r}}$;
donc

$$\frac{d^n(\mathrm{X}p^n)}{dz^n} = \mathrm{T}^\circ\frac{d^np^n}{dz^n} + \frac{n}{1}\mathrm{T}'\frac{d^{n-1}p^{n-1}}{dz^{n-1}} + \frac{n.n-1}{1.2}\mathrm{T}''\frac{d^{n-2}p^{n-2}}{dz^{n-2}} + \text{etc.},$$

expression dont le dernier terme est $\mathrm{T}^{(n)}$, et l'avant-dernier $n\mathrm{T}^{(n-1)}\frac{dp}{dz}$.
On trouvera semblablement

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{X}dp^n}{dz^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^n}\left(\mathrm{T}^\circ dp^n + \frac{\mathrm{T}'}{1}udp^n + \frac{\mathrm{T}''}{1.2}u^2dp^n + \text{etc.}\right).$$

Substituant dans le second membre les valeurs que donne la formule

$$\frac{d^{n-1}(u^r dp^n)}{dz^n} = \frac{d^n(u^r p^n)}{dz^n} = n.n-1\ldots\ldots n-r+1.\frac{d^{n-r}p^{n-r}}{dz^{n-r}},$$

il viendra

$$\frac{d^{n-1}(\mathrm{X}dp^n)}{dz^n} = \mathrm{T}^\circ\frac{d^np^n}{dz^n} + \frac{n}{1}\mathrm{T}'\frac{d^{n-1}p^{n-1}}{dz^{n-1}} + \frac{n.n-1}{1.2}\mathrm{T}''\frac{d^{n-2}p^{n-2}}{dz^{n-2}}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\mathrm{T}'''\frac{d^{n-3}p^{n-3}}{dz^{n-3}}\ldots\ldots + \frac{n}{1}\mathrm{T}^{(n-1)}\frac{dp}{dz},$$

le dernier terme est ici $\frac{n}{1}\mathrm{T}^{(n-1)}\frac{dp}{dz}$, parce qu'on a $\frac{d^{n-1}(u^n dp^n)}{dz^n} = 0$.

De ces deux formules on tire

$$\frac{d^n(\mathrm{X}p^n)}{dz^n} - \frac{d^{n-1}(\mathrm{X}dp^n)}{dz^n} = \mathrm{T}^{(n)} = \frac{d^n\mathrm{X}}{du^n};$$

mais le premier membre se réduit à $\frac{d^{n-1}(p^n d\mathrm{X})}{dz^n}$; donc on a

$$\frac{d^n\mathrm{X}}{du^n} = \frac{d^{n-1}(p^n d\mathrm{X})}{dz^n},$$

c'est le théorème qu'il s'agissait de démontrer. Voici maintenant quelques corollaires qui s'en déduisent.

103. Si l'on fait $z = x - a$ et $u = \frac{x-a}{\varphi(x)}$, on aura $p = \varphi(x)$, $dz = dx$, ce qui donnera $\frac{d^n\mathrm{X}}{du^n} = \frac{d^{n-1}(\varphi^n\mathrm{X}')}{dx^{n-1}}$; et comme il faut faire $z = 0$ ou $x = a$ dans le second membre, on considérera φ

et X' comme des fonctions de a, et on aura

$$\frac{d^n X}{du^n} = \frac{d^{n-1}(\varphi^n X')}{da^{n-1}},$$

ce qui s'accorde avec la formule de Lagrange, dans le cas où l'on veut développer X suivant les puissances de u d'après l'équation $x - a = u\varphi(x)$.

104. Soit $X = \psi(x)$, $u = \varphi(x) - \varphi(a)$, $z = x - a$, on aura

$$(12) \qquad \psi(x) = \psi(a) + \frac{T'}{1}(\varphi x - \varphi a) + \frac{T''}{1.2}(\varphi x - \varphi a)^2 + \frac{T'''}{1.2.3}(\varphi x - \varphi a)^3 + \text{etc.},$$

et l'expression générale du coefficient $T^{(n)}$ sera, en faisant $\frac{d\psi x}{dx} = \psi' x$,

$$T^{(n)} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(\frac{\varphi x - \varphi a}{x - a}\right)^{-n} \psi' x\right],$$

formule où il faudra faire $x = a$ après les différentiations.

105. Si dans ces dernières formules on fait $\varphi(a) = 0$, on aura

$$(13) \qquad \psi(x) = \psi + T'\varphi x + \frac{T''}{2}\varphi^2 x + \frac{T'''}{2.3}\varphi^3 x + \text{etc.},$$

et le terme général $T^{(n)} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)\psi' x\right]$: c'est le développement de la fonction $\psi(x)$ suivant les puissances d'une autre fonction φx, et on voit qu'il y a autant de développemens que l'équation $\varphi(a) = 0$ a de racines.

Soit, par exemple, $\psi(x) = b^x$ et $\varphi(x) = xc^x$, l'équation $xc^x = 0$ n'a qu'une racine réelle $x = 0$; ainsi on devra faire $a = 0$ et $T^{(n)} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(c^{-nx} b^x \log b) = \log b . \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(\log b - n \log c)\, b^x c^{-nx}$ $= lb(lb - nlc)^{n-1} b^x c^{-nx}$; faisant dans cette expression $x = 0$, elle donne $T^{(n)} = lb(lb - nlc)^{n-1}$; donc

$$b^x = 1 + lb . xc^x + lb(lb - 2lc)\frac{x^2 c^{2x}}{2} + lb(lb - 3lc)^2 \frac{x^3 c^{3x}}{2.3} + \text{etc.}$$

Les formules que nous venons de démontrer sont dues à M. Burmann, professeur à Manheim. *Voyez* le tom. II des Mémoires de l'Institut, pag. 14 et 15.

§ VIII. *Formules pour sommer un nombre donné de termes consécutifs dans le développement de* $(1+a)^n$.

106. Considérons d'abord la suite

$$1+na+\frac{n.n-1}{1.2}a^2+\frac{n.n-1.n-3}{1.2.3}a^3\ldots+\frac{n.n-1\ldots n-k+2}{1.2\ldots k-1}a^{k-1},$$

formée par les k premiers termes du développement de $(1+a)^n$, et supposons que $\varphi(k)$ représente la somme de ces termes, il est évident qu'on aura

$$\varphi(k+1)-\varphi(k)=\frac{n.n-1.n-2\ldots n-k+1}{1.2.3\ldots\ldots k}a^k.$$

Considérons pareillement l'intégrale

$$\mathrm{T}(k)=\int x^{k-1}dx(1+x)^{-n-1},$$

prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, et soit $\mathrm{A}(k)$ la valeur de cette même intégrale prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, valeur qui est, comme on sait

$$\mathrm{A}(k)=\frac{1.2.3\ldots k-1}{n.n-1.n-2\ldots n-k+1}=\frac{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

La quantité $x^k(1+x)^{-n}$ a pour différentielle

$$kx^{k-1}dx(1+x)^{-n-1}-(n-k)x^kdx(1+x)^{-n-1},$$

laquelle étant intégrée depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, donne

$$a^k(1+a)^{-n}=k\mathrm{T}(k)-(n-k)\mathrm{T}(k+1).$$

Faisant dans cette formule $a=\infty$ et supposant $k<n$, on en déduira

$$0=k\mathrm{A}(k)-(n-k)\mathrm{A}(k+1).$$

Au moyen de ces deux équations, on trouve

$$\frac{\mathrm{T}(k)}{\mathrm{A}(k)}-\frac{\mathrm{T}(k+1)}{\mathrm{A}(k+1)}=\frac{a^k(1+a)^{-n}}{k\mathrm{A}(k)}=\frac{n.n-1\ldots\ldots n-k+1}{1.2\ldots k}a^k(1+a)^{-n},$$

et par conséquent,

$$\varphi(k+1)-\varphi(k)=(1+a)^n\left[\frac{T(k)}{A(k)}-\frac{T(k+1)}{A(k+1)}\right].$$

Cette équation aux différences finies a pour intégrale

$$\varphi(k)+(1+a)^n\frac{T(k)}{A(k)}=\text{const.}=\varphi(1)+(1+a)^n\frac{T(1)}{A(1)};$$

mais $\varphi(1)=1$ et $T(1)=\int dx(1+x)^{-n-1}=\frac{1-(1+a)^{-n}}{n}$; de $T(1)$ résulte, en faisant $a=\infty$, $A(1)=\frac{1}{n}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, le second membre se réduit à $(1+a)^n$. On a donc la somme cherchée

$$(1)\qquad \varphi(k)=(1+a)^n-\frac{(1+a)^n}{A(k)}\int x^{k-1}dx(1+x)^{-n-1},\qquad \begin{cases}x=0\\x=a\end{cases}$$

d'où l'on voit que cette somme dépend de l'intégrale $\int x^{k-1}dx(1+x)^{-n-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, et de la quantité $A(k)$ qui est la même intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et dont l'expression en fonctions Γ est généralement $A(k)=\frac{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}$.

107. Par de semblables calculs on trouvera qu'en faisant

$$\psi(k)=1+na+\frac{n.n+1}{1.2}a^2+\ldots+\frac{n.n+1.n+2\ldots\ldots n+k-1}{1.2.3\ldots\ldots k-1}a^{k-1},$$

on a

$$(2)\qquad \psi(k)=(1-a)^{-n}-\frac{(1-a)^{-n}}{B(k)}\int x^{k-1}dx(1-x)^{n-1},\qquad \begin{cases}x=0\\x=a\end{cases}$$

la quantité $B(k)$ désignant l'intégrale $\int x^{k-1}dx(1-x)^{n-1}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, laquelle a pour valeur :

$$B(k)=\frac{\Gamma k\,\Gamma n}{\Gamma(k+n)}.$$

108. Si dans l'équation (1) on met $n+k-1$ à la place de n, et qu'on change a en b, on aura

$$1+(n+k-1)b+\frac{(n+k-1)(n+k-2)}{1.2}b^2\ldots+\frac{n+k-1.n+k-2\ldots n+1}{1.2\ldots.k-1}b^{k-1}$$

$$=(1+b)^{n+k-1}-(1+b)^{n+k-1}.\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma n\,\Gamma k}\int x^{k-1}dx(1+x)^{-n-k}.\qquad \begin{cases}x=0\\x=b\end{cases}$$

Dans cette intégrale, faisant $x = \frac{z}{1-z}$, et ensuite $b = \frac{a}{1-a}$, on aura $\int x^{k-1}dx(1+x)^{-n-k} = \int z^{k-1}dz(1-z)^{n-1}$, cette dernière intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = a$. En même temps on aura $1 + b = (1-a)^{-1}$ et $(1+b)^{n+k-1} = (1-a)^{-n-k+1}$. Comparant donc l'équation précédente avec l'équation (2) qui contient la même intégrale, on en déduira ce rapport remarquable :

$$(3)\quad \frac{1+(n+k-1)b+\frac{n+k-1.n+k-2}{1.2}b^2+\ldots+\frac{n+k-1.n+k-2\ldots n+1}{1.2\ldots k-1}b^{k-1}}{1+na+\frac{n.n+1}{2}a^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n.n+1\ldots n+k-2}{1.2\ldots k-1}a^{k-1}} = (1+b)^{k-1};$$

c'est-à-dire qu'en faisant $a = \frac{b}{1+b}$ ou $b = \frac{a}{1-a}$, la somme des k premiers termes du développement de $(1+b)^{n+k-1}$, est égale à la somme d'un pareil nombre de termes du développement de $(1-a)^{-n}$, multipliée par $(1+b)^{k-1}$.

Cette formule est susceptible d'en produire plusieurs autres en changeant soit le signe de n, soit le signe de a.

109. Reprenons l'équation

$$\varphi(k) = 1 + na + \frac{n.n-1}{2}a^2 + \ldots\ldots + \frac{n.n-1\ldots n-k+2}{1.2\ldots k-1}a^{k-1};$$

si à la place de k on met $k+m$, et qu'on prenne la différence des deux fonctions, on aura

$$\varphi(k+m) - \varphi(k) = \frac{n.n-1\ldots n-k+1}{1.2\ldots\ldots k}a^k + \frac{n.n-1\ldots n-k}{1.2\ldots k+1}a^{k+1} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{n.n-1\ldots\ldots n-k-m+2}{1.2\ldots\ldots k+m-1}a^{k+m-1};$$

substituant la valeur de φ donnée par l'équation (1), on trouve pour la somme de la série précédente

$$\frac{(1+a)^n\Gamma(n+1)}{\Gamma k\,\Gamma(n-k+1)}\int x^{k-1}dx(1+x)^{-n-1} - \frac{(1+a)^n\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+m)\Gamma(n-k-m+1)}\int x^{k+m-1}dx(1+x)^{-n-1},$$

ces intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$.

Cette formule donne la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs, pris dans le développement de $(1+a)^n$.

110. Si on suppose n entier, et qu'on fasse $k+m=n+1-k$; alors la quantité $\varphi(n-k+1)-\varphi(k)$ aura pour expression

$$\frac{(1+a)^n \Gamma(n+1)}{\Gamma k \, \Gamma(n-k+1)} \int \frac{(x^{k-1}-x^{n-k})\,dx}{(1+x)^{n+1}}; \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases}$$

c'est la somme des termes qui occupent le milieu du binome développé $(1+a)^n$, depuis le terme $N^k a^k$ jusqu'au terme $N^k a^{n-k}$ inclusivement.

On peut toujours connaître, par la méthode exposée dans la IIIe Partie, les intégrales définies comprises dans ces formules, avec tel degré d'approximation qu'on voudra; et pour faciliter les calculs, on pourra toujours supposer $a<1$.

Remarquons encore que si on fait $x=\frac{z}{1-z}$, l'intégrale $\int \frac{x^{k-1}-x^{n-k}}{(1+x)^{n+1}}\,dx$ se change en celle-ci :

$$\int [z^{k-1}dz\,(1-z)^{n-k}-z^{n-k}dz\,(1-z)^{k-1}], \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=\frac{a}{a+1} \end{cases}$$

laquelle est plus simple, parce qu'elle est prise entre des limites plus rapprochées.

L'utilité de ces formules se fait particulièrement sentir lorsque n et k sont de grands nombres; et c'est un cas qui se présente assez fréquemment dans l'analyse des hasards.

§ IX. *Méthodes pour développer en séries convergentes l'arc dont la tangente est donnée par une fonction rationnelle des sinus et cosinus d'un autre arc indéfini.*

111. Lagrange a traité cet objet d'analyse dans les Mémoires de Berlin, ann. 1776; mais les exemples choisis par cet auteur pourraient faire croire que les développemens ne peuvent être obtenus en séries convergentes, que dans certaines hypothèses sur les grandeurs relatives des coefficiens. Nous avons donc jugé qu'il ne serait pas inutile de démontrer généralement que cette sorte de résolution peut toujours avoir lieu, quels que soient les coefficiens de la

fonction donnée. Nous ferons voir d'ailleurs qu'on peut déduire de ces développemens, quelques théorèmes assez remarquables sur les intégrales définies.

Exemple I. Soit $\operatorname{tang} y = \frac{m \sin x}{\cos x + a}$, a étant < 1. D'après cette équation, on voit que y augmente indéfiniment avec x, et que ces deux variables coïncideront entièrement lorsqu'on aura $x = 0$, π, 2π, 3π, etc.; d'où il suit qu'on doit avoir en général $y = x + \theta$, θ étant une quantité périodique : c'est ce que le calcul suivant mettra en évidence.

Au moyen des exponentielles imaginaires, l'équation donnée peut s'exprimer ainsi :

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}} = \frac{m\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} + 2a},$$

et on en tire

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{(1+m)\, e^{x\sqrt{-1}} + (1-m)\, e^{-x\sqrt{-1}} + 2a}{(1+m)\, e^{-x\sqrt{-1}} + (1-m)\, e^{x\sqrt{-1}} + 2a}.$$

Je décompose le numérateur en deux facteurs de la forme $Ae^{x\sqrt{-1}} + B$, $A'e^{-x\sqrt{-1}} + B'$; et pour cela faisant $k = -a + \sqrt{(a^2 + m^2 - 1)}$, $f = \frac{k}{m-1}$, $g = \frac{k}{m+1}$, j'aurai

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 + fe^{x\sqrt{-1}}}{1 + fe^{-x\sqrt{-1}}} \cdot \frac{1 - ge^{-x\sqrt{-1}}}{1 - ge^{x\sqrt{-1}}}.$$

Mais puisqu'on suppose $a < 1$, il s'ensuit que $\frac{1}{f}$ et g sont tous deux plus petits que l'unité ; donnant donc à cette équation la forme

$$e^{2y\sqrt{-1}} = e^{2x\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{f} e^{-x\sqrt{-1}}}{1 + \frac{1}{f} e^{x\sqrt{-1}}} \cdot \frac{1 - ge^{-x\sqrt{-1}}}{1 - ge^{x\sqrt{-1}}},$$

et prenant les logarithmes de chaque membre, on aura, après avoir divisé par $2\sqrt{-1}$,

$$(1)\quad y = x + \left(g - \tfrac{1}{f}\right)\sin x + \tfrac{1}{2}\left(g^2 + \tfrac{1}{f^2}\right)\sin 2x + \tfrac{1}{3}\left(g^3 - \tfrac{1}{f^3}\right)\sin 3x + \text{etc.},$$

série convergente et qui aura lieu quand même a serait negatif, pourvu qu'on ait $a < 1$.

112. Il faudra donner à cette formule une autre forme lorsqu'on aura $a^2 + m^2 < 1$, parce qu'alors k deviendra imaginaire, ainsi que f et g. Dans ce cas, soit $n = \sqrt{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)}$ et $\cos 6 = \frac{a}{\sqrt{(1-m^2)}}$, on aura $\frac{1}{f} = n(\cos 6 + \sqrt{-1}\sin 6)$, $g = -n(\cos 6 - \sqrt{-1}\sin 6)$, et la formule (1) deviendra

$$(2) \quad y = x - 2n\cos 6 \sin x + \tfrac{2}{2} n^2 \cos 2 6 \sin 2x - \tfrac{2}{3} n^3 \cos 3 6 \sin 3x + \text{etc.},$$

série toujours convergente; car m peut toujours être regardé comme positif, puisque si on avait à résoudre l'équation $\tang y = -\frac{m \sin x}{\cos x + a}$, on lui donnerait la forme $\tang(\pi - y) = \frac{m \sin x}{\cos x + a}$.

Lorsque $a = 0$, les formules (1) et (2) donnent également pour l'équation $\tang y = m \tang x$, cette solution :

$$y = x + \frac{1-m}{1+m}\sin 2x + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \sin 4x + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^3 \sin 6x + \text{etc.},$$

laquelle s'accorde avec la formule connue de Lagrange et de Lambert.

113. *Exemple II.* Soit l'équation $\tang y = \frac{m \sin x}{\cos x + a}$, où l'on suppose $a > 1$.

Ce cas est essentiellement différent de celui de l'exemple I, puisqu'on voit que $\tang y$ ne saurait devenir infini, et qu'ainsi la valeur de y est toujours renfermée entre des limites données.

Au moyen des exponentielles imaginaires, l'équation proposée donne

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{(1+m)\, e^{x\sqrt{-1}} + (1-m)\, e^{-x\sqrt{-1}} + 2a}{(1+m)\, e^{-x\sqrt{-1}} + (1-m)\, e^{x\sqrt{-1}} + 2a}.$$

Soit $k = -a + \sqrt{(a^2 + m^2 - 1)}$, $\frac{k}{m-1} = f$, $\frac{k}{m+1} = g$, les quantités f et g seront toujours plus petites que l'unité, et on pourra mettre

mettre l'équation précédente sous la forme

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 + fe^{x\sqrt{-1}}}{1 + fe^{-x\sqrt{-1}}} \cdot \frac{1 - ge^{-x\sqrt{-1}}}{1 - ge^{x\sqrt{-1}}}.$$

Prenant les logarithmes de chaque membre et divisant de part et d'autre par $2\sqrt{-1}$, il viendra

$$(3) \qquad y = (g + f)\sin x + \tfrac{1}{2}(g^2 - f^2)\sin 2x + \tfrac{1}{3}(g^3 + f^3)\sin 3x + \text{etc.}$$

Si l'on met $\pi - x$ au lieu de x, on aura pour la solution de l'équation $\operatorname{tang} y = \frac{m \sin x}{a - \cos x}$, cette formule

$$(4) \qquad y = (f + g)\sin x + \tfrac{1}{2}(f^2 - g^2)\sin 2x + \tfrac{1}{3}(f^3 + g^3)\sin 3x + \text{etc.}$$

114. *Exemple III.* Soit proposée l'équation $\operatorname{tang} y = a + b \operatorname{tang} x$, on en déduira

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{(1 + b + a\sqrt{-1})\,e^{x\sqrt{-1}} + (1 - b + a\sqrt{-1})\,e^{-x\sqrt{-1}}}{(1 + b - a\sqrt{-1})\,e^{-x\sqrt{-1}} + (1 - b - a\sqrt{-1})\,e^{x\sqrt{-1}}}.$$

Soient μ et λ deux angles déterminés par les valeurs $\operatorname{tang} \mu = \frac{a}{1 + b}$, $\operatorname{tang}(\lambda + \mu) = \frac{a}{1 - b}$; soit de plus $f = \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)}$, on aura

$$\frac{1 + b + a\sqrt{-1}}{1 + b - a\sqrt{-1}} = \cos 2\mu + \sqrt{-1}\sin 2\mu = e^{2\mu\sqrt{-1}},$$

$$\frac{1 - b + a\sqrt{-1}}{1 + b + a\sqrt{-1}} = f(\cos\lambda + \sqrt{-1}\sin\lambda),$$

$$\frac{1 - b - a\sqrt{-1}}{1 + b - a\sqrt{-1}} = f(\cos\lambda - \sqrt{-1}\sin\lambda),$$

donc

$$e^{2y\sqrt{-1}} = e^{(2x + 2\mu)\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 + f(\cos\lambda + \sqrt{-1}\sin\lambda)\,e^{-2x\sqrt{-1}}}{1 + f(\cos\lambda - \sqrt{-1}\sin\lambda)\,e^{2x\sqrt{-1}}}.$$

Prenant les logarithmes, on a la formule

$$(5) \qquad y = x + \mu - f\sin(2x - \lambda) + \tfrac{1}{2}f^2\sin(4x - 2\lambda) - \tfrac{1}{3}f^3\sin(6x - 3\lambda) + \text{etc.}$$

Cette série sera convergente tant que f sera < 1, ou tant que b sera positif; car on a $f^2 = \frac{a^2 + (1 - b)^2}{a^2 + (1 + b)^2}$.

Si b était négatif, il faudrait développer autrement les deux membres de l'équation précédente ; mais il est plus simple de faire y et a négatifs dans l'équation proposée, afin de conserver b positif et $f < 1$. Par ce moyen, la valeur de y tirée de l'équation $\tang y = a - b \tang x$, sera

$$(6) \qquad y = \mu - x + f \sin(2x + \lambda) - \tfrac{1}{2} f^2 \sin(4x + 2\lambda) + \tfrac{1}{3} f^3 \sin(6x + 3\lambda) - \text{etc.}$$

115. *Exemple IV.* La formule plus générale $\tang y = \frac{a + b \tang x}{1 + c \tang x}$ se ramène à celle de l'exemple précédent ; car en prenant une indéterminée m, on a

$$\tang(y + m) = \frac{a + b \tang x + (1 + c \tang x) \tang m}{1 + c \tang x - (a + b \tang x) \tang m}.$$

Soit donc $\tang m = \frac{c}{b}$, et on aura l'équation

$$\tang(y + m) = \frac{ab + c}{b - ac} + \frac{b^2 + c^2}{b - ac} \tang x,$$

qui se résoudra par la formule (5).

116. *Exemple V.* Soit proposée l'équation $\tang y = a \sin x + b$, laquelle est aussi générale que $\tang y = a \sin x + b + c \cos x$, puisque les deux termes $a \sin x + c \cos x$ peuvent se réduire à un seul terme de la forme $a' \sin(x + \alpha)$. Il est clair que dans ce cas y ne doit pas passer une certaine limite, et qu'ainsi l'arc indéfini x n'entre pas dans la valeur de y. On aura d'abord

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 + b\sqrt{-1} + \frac{1}{2} a (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{1 - b\sqrt{-1} + \frac{1}{2} a (e^{-x\sqrt{-1}} - e^{x\sqrt{-1}})}.$$

Il faudra ensuite chercher les deux facteurs du numérateur ; pour cela, soit

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 + a^2 + b^2 - \sqrt{[(1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2]}}{2b^2};$$

cette valeur sera positive et plus petite que l'unité, quels que soient a et b ; car elle donne

$$\cos^2 \varphi = \frac{\sqrt{[(1 + a^2 - b^2)^2 + 4b^2]} - (1 + a^2 - b^2)}{2b^2};$$

l'angle φ est donc réel et on peut le supposer $< \frac{1}{2}\pi$. Soit de plus $f = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ et $\operatorname{tang}\mu = b\cos\varphi$, f sera < 1, et la valeur de $e^{2y\sqrt{-1}}$ se décomposera ainsi :

$$e^{2y\sqrt{-1}} = e^{2\mu\sqrt{-1}} \cdot \frac{1+fe^{x\sqrt{-1}}(\cos\mu-\sqrt{-1}\sin\mu)}{1+fe^{-2x\sqrt{-1}}(\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu)} \cdot \frac{1-fe^{-x\sqrt{-1}}(\cos\mu-\sqrt{-1}\sin\mu)}{1-fe^{x\sqrt{-1}}(\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu)};$$

prenant les logarithmes et réduisant, on aura

$$(7)\quad \begin{aligned} y = \mu + 2f\cos\mu\sin x + \tfrac{2}{3}f^3\cos 3\mu\sin 3x + \tfrac{2}{5}f^5\cos 5\mu\sin 5x + \text{etc.} \\ + f^2\sin 2\mu\cos 2x + \tfrac{1}{2}f^4\sin 4\mu\cos 4x + \tfrac{1}{3}f^6\sin 6\mu\cos 6x + \text{etc.} \end{aligned}$$

117. *Exemple VI.* Soit proposée l'équation $\operatorname{tang} y = a\operatorname{tang}^2 x$, où l'on voit que y ne peut augmenter indéfiniment avec x, et qu'il doit être compris entre les limites o et $\frac{1}{2}\pi$.

On peut traiter ce cas directement, mais il suffira de le ramener au cas précédent. Pour cela, soit $a = \operatorname{tang}\alpha$, on aura

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - y\right) = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2x\right).$$

Cette équation est semblable à celle de l'exemple précédent ; c'est pourquoi faisant

$$f = \cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{(2\sin\alpha\cos\alpha)},$$
$$\cos\mu = \sqrt{(2\sin\alpha\cos\alpha)},$$

on aura

$$(8)\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\pi - \alpha - y = \mu + 2f\cos\mu\cos 2x - \tfrac{2}{3}f^3\cos 3\mu\cos 6x + \tfrac{2}{5}f^5\cos 5\mu\cos 10x - \text{etc.} \\ - f^2\sin 2\mu\cos 4x + \tfrac{1}{2}f^4\sin 4\mu\cos 8x - \tfrac{1}{3}f^6\sin 6\mu\cos 12x + \text{etc.} \end{aligned}$$

118. *Exemple VII.* Soit $\operatorname{tang} y = \dfrac{a + b\operatorname{tang} x + c\operatorname{tang}^2 x}{a' + b'\operatorname{tang} x + c'\operatorname{tang}^2 x}$, on aura d'abord

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{a' + a\sqrt{-1} + (b' + b\sqrt{-1})\operatorname{tang} x + (c' + c\sqrt{-1})\operatorname{tang}^2 x}{(a' - a\sqrt{-1}) + (b' - b\sqrt{-1})\operatorname{tang} x + (c' - c\sqrt{-1})\operatorname{tang}^2 x};$$

ensuite si on multiplie les deux termes de la fraction par $(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^2$, et qu'on substitue pour tang x sa valeur en exponentielles imaginaires, la valeur de $e^{2y\sqrt{-1}}$ deviendra de cette forme

$$e^{2y\sqrt{-1}}=\frac{(f+g\sqrt{-1})\,e^{2x\sqrt{-1}}+h+k\sqrt{-1}+(m+n\sqrt{-1})\,e^{-2x\sqrt{-1}}}{(f-g\sqrt{-1})\,e^{-2x\sqrt{-1}}+h-k\sqrt{-1}+(m-n\sqrt{-1})\,e^{2x\sqrt{-1}}},$$

où le dénominateur se déduit du numérateur en changeant dans celui-ci le signe de $\sqrt{-1}$.

Maintenant il s'agit de trouver les facteurs des deux termes de cette fraction, ce qui n'exige que la résolution d'une équation du 2ᵉ degré, en regardant $e^{2x\sqrt{-1}}$ ou $e^{-2x\sqrt{-1}}$ comme l'inconnue; d'ailleurs les facteurs du numérateur étant connus, on aura ceux du dénominateur, en changeant simplement le signe de $\sqrt{-1}$. On trouvera donc un résultat de cette forme

$$e^{2y\sqrt{-1}}=\frac{\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha}\cdot\frac{1+pe^{2x\sqrt{-1}}(\cos\mu-\sqrt{-1}\sin\mu)}{1+pe^{-2x\sqrt{-1}}(\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu)}\cdot\frac{1-qe^{-2x\sqrt{-1}}(\cos\nu-\sqrt{-1}\sin\nu)}{1-qe^{2x\sqrt{-1}}(\cos\nu+\sqrt{-1}\sin\nu)}.$$

Il ne s'agit plus que de prendre les logarithmes de ces facteurs et d'en former des suites convergentes. Or si p est plus petit que l'unité, on aura

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+pe^{2x\sqrt{-1}}(\cos\mu-\sqrt{-1}\sin\mu)}{1+pe^{-2x\sqrt{-1}}(\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu)}=p\sin(2x-\mu)-\tfrac{1}{2}p^2\sin(4x-2\mu)+\tfrac{1}{3}p^3\sin(6x-3\mu)-\text{etc.}$$

Si p est plus grand que l'unité, le facteur $\frac{1+pe^{2x\sqrt{-1}}(\cos\mu-\sqrt{-1}\sin\mu)}{1+pe^{-2x\sqrt{-1}}(\cos\mu+\sqrt{-1}\sin\mu)}$ devra être mis sous la forme

$$e^{(4x-2\mu)\sqrt{-1}}\cdot\frac{1+\frac{1}{p}e^{-(2x-\mu)\sqrt{-1}}}{1+\frac{1}{p}e^{(2x-\mu)\sqrt{-1}}},$$

et son logarithme divisé par $2\sqrt{-1}$, donnera la suite

$$2x-\mu-\frac{1}{p}\sin(2x-\mu)+\frac{1}{2p^2}\sin(4x-2\mu)-\frac{1}{3p^3}\sin(6x-3\mu)+\text{etc.}$$

Il en sera de même de l'autre facteur. Ainsi, dans tous les cas, la valeur de y sera composée de deux suites semblables aux précédentes.

119. Elle en contiendrait trois, si le terme $\tang^3 x$ se trouvait dans la valeur de $\tang y$, et ainsi de suite suivant les puissances de $\tang x$.

Dans le cas de $\tang^3 x$, il faut remarquer que la valeur de $e^{2y\sqrt{-1}}$ pourrait toujours être mise sous la forme

$$\frac{(a'+a\sqrt{-1})e^{3x\sqrt{-1}}+(b'+b\sqrt{-1})e^{x\sqrt{-1}}+(c'+c\sqrt{-1})e^{-x\sqrt{-1}}+(d'+d\sqrt{-1})e^{-3x\sqrt{-1}}}{(a'-a\sqrt{-1})e^{-3x\sqrt{-1}}+(b'-b\sqrt{-1})e^{-x\sqrt{-1}}+(c'-c\sqrt{-1})e^{x\sqrt{-1}}+(d'-d\sqrt{-1})e^{3x\sqrt{-1}}},$$

quantité qui, à raison des trois facteurs de chacun de ses termes, peut s'écrire ainsi

$$e^{2\theta\sqrt{-1}}\cdot\frac{1+fe^{(2x+\lambda)\sqrt{-1}}}{1+fe^{-(2x+\lambda)\sqrt{-1}}}\cdot\frac{1+ge^{-(2x+\mu)\sqrt{-1}}}{1+ge^{(2x+\mu)\sqrt{-1}}}\cdot\frac{e^{x\sqrt{-1}}+he^{-(x+\nu)\sqrt{-1}}}{e^{-x\sqrt{-1}}+he^{(x+\nu)\sqrt{-1}}}.$$

Les deux premiers facteurs se développeront, en prenant leurs logarithmes, comme dans le cas précédent; quant au troisième facteur, si h est plus petit que l'unité, il se mettra sous la forme

$$e^{2x\sqrt{-1}}\cdot\frac{1+he^{-(2x+\nu)\sqrt{-1}}}{1+he^{(2x+\nu)\sqrt{-1}}};$$

et si h est plus grand que l'unité, il se mettra sous la forme

$$e^{-(2x+2\nu)\sqrt{-1}}\cdot\frac{1+\frac{1}{h}\,e^{(2x+\nu)\sqrt{-1}}}{1+\frac{1}{h}\,e^{-(2x+\nu)\sqrt{-1}}};$$

prenant ensuite les logarithmes on aura, dans les deux cas, des séries convergentes.

120. En général si on a $\tang y=\frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions rationnelles et entières de $\tang x$, la valeur de y pourra toujours être développée en un nombre k de séries de la forme

$$\begin{aligned}Ax+B\pm[f\sin\theta\sin(2x+\alpha)&+\tfrac{1}{2}f^2\sin 2\theta\sin(4x+2\alpha)\\&+\tfrac{1}{3}f^3\sin 3\theta\sin(6x+3\alpha)+\text{etc.}],\end{aligned}$$

k étant le plus haut exposant de $\tang x$ dans les fonctions P et Q. Si la valeur de $\tang y$ est donnée par une fonction rationnelle de sin x et cos x, on fera tang $\frac{1}{2}x = u$, et substituant les valeurs $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, on pourra supposer tang $y = \frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions rationnelles et entières de u ou de tang $\frac{1}{2}x$. Ainsi on obtiendra toujours le même résultat qu'on vient d'énoncer, avec la seule différence que $\frac{1}{2}x$ sera mis au lieu de x.

121. Les développemens qu'on peut effectuer suivant la méthode précédente, en fournissent plusieurs autres non moins remarquables, et qui peuvent être utiles dans la théorie des intégrales définies.

Soit, par exemple, l'équation tang $y = a \sin x + b$; d'où nous avons déduit

$$\begin{aligned} y = \mu &+ 2f \cos\mu \sin x + \tfrac{2}{3} f^3 \cos 3\mu \sin 3x + \text{etc.} \\ &+ f^2 \sin 2\mu \cos 2x + \tfrac{1}{2} f^4 \sin 4\mu \cos 4x + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si on prend de part et d'autre la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on aura, en égalant ces deux valeurs :

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{a\cos x}{1+(a\sin x+b)^2} = &\ 2f\cos\mu\cos x + 2f^3\cos 3\mu\cos 3x + 2f^5\cos 5\mu\cos 5x + \text{etc.} \\ &- 2f^2\sin 2\mu\sin 2x - 2f^4\sin 4\mu\sin 4x - 2f^6\sin 6\mu\sin 6x + \text{etc.} \end{aligned}$$

D'après cette formule, soit proposé de trouver l'intégrale

$$Z = \int \frac{a\,dx \cos x \cos(2k+1)x}{1+(a\sin x+b)^2},$$

prise depuis $x = 0$, $x = \pi$, et dans laquelle k représente un nombre entier quelconque. Il est visible que si on substitue à la place de $\frac{a\cos x}{1+(a\sin x+b)^2}$ sa valeur développée en série, tous les termes s'évanouiront par l'intégration, excepté le seul terme $\int dx \cos^2(2k+1)x \,.\, 2f^{2k+1}\cos(2k+1)\mu$, lequel se réduit, dans les limites données, à $\pi f^{2k+1}\cos(2k+1)\mu$. Donc on a

$$(10)\qquad \int \frac{a\,dx\cos x\cos(2k+1)x}{1+(a\sin x+b)^2} = \pi f^{2k+1}\cos(2k+1)\mu; \qquad \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x=\pi \end{matrix}\right.$$

on aurait, en vertu du même développement :

$$(11)\qquad \int \frac{a\,dx \cos x \sin 2kx}{1+(a\sin x+b)^2} = -\pi f^{2k} \sin 2k\mu. \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Voyez d'ailleurs l'exemple V pour la détermination des quantités f et μ.

§ X. *Théorèmes sur une espèce particulière de fonctions nées du développement de* $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

122. Les fonctions algébriques dont il s'agit sont celles dont j'ai fait connaître les propriétés dans mes Recherches sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes (*). Il m'a paru que ces fonctions méritaient de trouver place dans un ouvrage où je me suis proposé de réunir sous un même point de vue, les résultats les plus intéressans qu'offre la théorie des intégrales définies.

Si on développe suivant les puissances de z la quantité.... $Z = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, et qu'on appelle en général X^n (n étant un indice et non un exposant) le coefficient de z^n dans ce développement, de sorte qu'on ait

$$Z = 1 + X^1z + X^2z^2 + X^3z^3 + X^4z^4 + \text{etc.};$$

l'expression générale de X^n se trouvera de la manière suivante.

Par un premier développement on a

$$Z = 1 + \tfrac{1}{2}(2xz + z^2) + \frac{1.3}{2.4}(2xz - z^2)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}(2xz - z^2)^3 + \text{etc.};$$

or dans cette suite, les termes qui renferment z^n sont, à compter de la plus haute puissance,

$$\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots..2n}(2xz - z^2)^n + \frac{1.3.5\ldots.2n-3}{2.4.6\ldots.2n-2}(2xz - z^2)^{n-1} + \text{etc.};$$

de là il est facile de conclure

$$X^n = \frac{1.3.5\ldots.2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n}x^n - \frac{1.3\ldots..2n-3}{1.2\ldots\ldots n-2}\cdot\frac{x^{n-2}}{2} + \frac{1.3\ldots..2n-5}{1.2\ldots\ldots n-4}\cdot\frac{x^{n-4}}{2.4} - \text{etc.},$$

(*) Savans étrangers, tom. X, Mém. de l'Acad., ann. 1784 et 1789.

ou

$$(a)\quad \mathrm{X}^n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left(x^n - \frac{n.n-1}{2.2n-1}x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}x^{n-4} - \text{etc.}\right).$$

Faisant successivement $n=0, 1, 2, 3$, etc., on aura les valeurs suivantes dont la loi est facile à saisir, surtout si l'on considère séparément les termes de rang pair et les termes de rang impair.

$$\mathrm{X}^0 = 1,$$
$$\mathrm{X}^1 = x,$$
$$\mathrm{X}^2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$
$$\mathrm{X}^3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$
$$\mathrm{X}^4 = \frac{5.7}{2.4}x^4 - \frac{3.5}{2.4}2x^2 + \frac{1.3}{2.4},$$
$$\mathrm{X}^5 = \frac{7.9}{2.4}x^5 - \frac{5.7}{2.4}2x^3 + \frac{3.5}{2.4}x,$$
$$(b)\quad \mathrm{X}^6 = \frac{7.9.11}{2.4.6}x^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}3x^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}3x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6},$$
$$\mathrm{X}^7 = \frac{9.11.13}{2.4.6}x^7 - \frac{7.9.11}{2.4.6}3x^5 + \frac{5.7.9}{2.4.6}3x^3 + \frac{3.5.7}{2.4.6}x,$$
$$\mathrm{X}^8 = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}x^8 - \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}4x^6 + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}6x^4 - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}4x^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},$$
$$\mathrm{X}^9 = \frac{11.13.15.17}{2.4.6.8}x^9 - \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}4x^7 + \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}6x^5 - \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}4x^3 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}x,$$
etc.

Voici maintenant les différentes propriétés qu'offrent les fonctions X^n, dans lesquelles nous supposerons constamment $x < 1$.

123. Théorème I. « Lorsque $x=1$, on a généralement $\mathrm{X}^n = 1$; » depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, la fonction X^n est toujours plus petite » que l'unité. »

En effet, 1°. si dans la valeur de Z on fait $x=1$, on aura $\mathrm{Z} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.}$; donc $\mathrm{X}^n = 1$.

2°. Puisque x est supposé plus petit que l'unité, ou tout au plus égal à l'unité, on peut faire $x = \cos\varphi$. Soit donc $\alpha = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$ et $\text{6} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi$, on aura $\mathrm{Z} = (1-\alpha z)^{-\frac{1}{2}}(1-\text{6}z)^{-\frac{1}{2}}$, de de sorte que Z sera égal au produit des deux suites

$$1+\frac{1}{2}\alpha z+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2z^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3z^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\alpha^4z^4+\text{etc.},$$

$$1+\frac{1}{2}\beta z+\frac{1.3}{2.4}\beta^2z^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3z^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\beta^4z^4+\text{etc.};$$

or si on cherche, par exemple, le coefficient de z^4 dans ce produit, il est visible que ce coefficient sera

$$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\alpha^4+\beta^4)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\,\alpha^2\beta^2.$$

Mais on a $\alpha\beta=1$, $\alpha^2+\beta^2=2\cos 2\varphi$, $\alpha^4+\beta^4=2\cos 4\varphi$; donc

$$X^4=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot 2\cos 4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\varphi+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}.$$

On voit par cette expression que la plus grande valeur de X^4 a lieu lorsque $\varphi=0$ ou $x=1$; et dans ce cas, elle se réduit à l'unité: dans tout autre cas, la valeur de X^4 sera donc moindre que l'unité.

On trouvera un semblable résultat pour la valeur générale de X^n, qui sera toujours de la forme $A\cos n\varphi+B\cos(n-2)\varphi+C\cos(n-4)\varphi$ $+$ etc., A, B, C, etc. étant des coefficiens positifs.

Le même théorème s'applique aux valeurs négatives de x, comprises depuis $x=0$ jusqu'à $x=-1$, puisque ces valeurs sont toujours représentées par $\cos\varphi$, en faisant varier φ depuis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi=\pi$. D'ailleurs on voit immédiatement qu'en changeant le signe de x, la fonction X^n reste la même lorsque n est pair, et qu'elle change de signe, en conservant la même valeur, lorsque n est impair.

124. Théorème II. « Les indices m et n étant inégaux, l'intégrale » $\int X^mX^n dx$, prise depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, sera toujours » nulle; si ces indices sont égaux, on aura entre les mêmes » limites, $\int X^nX^n dx=\frac{2}{2n+1}$.

En effet, soit proposée l'intégrale

$$P = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-2rxz+r^2z^2)}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{2xz}{r}+\frac{z^2}{r^2}\right)}}. \qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

Si on fait $1 + r^2z^2 - 2rxz = y^2$, ou $x = \frac{1 + r^2z^2 - y^2}{2rz}$, on aura la transformée

$$P = -\frac{1}{z}\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 1 + r^2 + z^2 - r^2z^2)}},$$

d'où résulte l'intégrale indéfinie

$$P = C + \frac{1}{z}\log\left[-y + \sqrt{(y^2 - 1 + r^2 + z^2 - r^2z^2)}\right].$$

Les limites de x étant $x = -1$, $x = +1$, celles de y sont $y = 1 + rz$, $y = 1 - rz$; on aura donc l'intégrale cherchée

$$P = \frac{1}{z}\log\frac{r - z - 1 + rz}{r + z - 1 - rz} = \frac{1}{z}\log\frac{1+z}{1-z},$$

ou

$$P = 2 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{5}z^4 + \frac{2}{7}z^6 + \text{etc.},$$

quantité indépendante de r.

Cette intégrale est celle de la différentielle

$$dx\,(1 + zrX^1 + z^2r^2X^2 + z^3r^3X^3 + \text{etc.})\left(1 + \frac{z}{r}X^1 + \frac{z^2}{r^2}X^2 + \frac{z^3}{r^3}X^3 + \text{etc.}\right);$$

et puisque r disparaît entièrement dans le résultat, il faut qu'on ait généralement, m et n étant inégaux, $\int X^m X^n\,dx = 0$. On voit en même temps que m et n étant égaux, on aura $\int X^n X^n dx = \frac{2}{2n+1}$, conformément au théorème énoncé.

125. Lorsque m et n sont l'un pair, l'autre impair, le produit $X^m X^n$ est une fonction impaire de x; alors il est évident que l'intégrale $\int X^m X^n dx$, prise depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, doit être nulle. Mais si les nombres m et n sont tous deux pairs ou tous deux impairs, il n'est plus évident que cette intégrale doive s'évanouir, et la propriété énoncée dans le theorème, paraît très-digne de remarque par sa grande généralité.

Pour faire abstraction des cas évidens par eux-mêmes, on peut borner le théorème II à l'énoncé suivant.

« Quels que soient les nombres entiers n et k, pourvu que k » ne soit ni $=0$, ni $> \frac{1}{2} n$, l'intégrale $\int X^n X^{n-2k} dx$, prise entre les » limites $x=0$, $x=1$, sera nulle; si l'on a $k=0$, l'intégrale » $\int X^n X^n dx$, prise entre les mêmes limites, $= \frac{1}{2n+1}$.

126. Il suit de ce théorème que α, β, γ, etc. étant des coefficiens constans, on aura, dans les limites, $x=0$, $x=1$;

$$\int (\alpha X^{n-2} + \beta X^{n-4} + \gamma X^{n-6} + \text{etc.}) X^n dx = 0.$$

Mais le polynome $\alpha X^{n-2} + \beta X^{n-4} + \gamma X^{n-6} + \text{etc.}$, peut aussi être représenté par un polynome du même degré formé avec les puissances de x, tel que $\alpha' x^{n-2} + \beta' x^{n-4} + \gamma' x^{n-6} + \text{etc.}$

Donc, quelles que soient les constantes α', β', γ', etc., on aura aussi, entre les limites $x=0$, $x=1$,

$$\int (\alpha' x^{n-2} + \beta' x^{n-4} + \gamma' x^{n-6} + \text{etc.}) X^n dx = 0,$$

ce qui donne les équations

$$(c) \qquad \int x^{n-2} X^n dx = 0, \quad \int x^{n-4} X^n dx = 0, \quad \int x^{n-6} X^n dx = 0, \quad \text{etc.},$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'exposant de x soit réduit à 0 ou à 1, selon que n est pair ou impair.

127. Il est facile, d'après le théorème précédent, de trouver l'intégrale $\int X^n x^n dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; car si l'on fait $X^n = Ax^n - Bx^{n-2} + Cx^{n-4} - \text{etc.}$, on aura

$$\int X^n X^n dx = \int X^n dx \, (Ax^n - Bx^{n-2} + Cx^{n-4} - \text{etc.}) :$$

Le premier membre se réduit à $\frac{1}{2n+1}$; le second se réduit à $A \int x^n X^n dx$; d'ailleurs par la formule (a), on a $A = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n}$, donc

$$(d) \qquad \int x^n X^n dx = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.3.5\ldots 2n+1};$$

mais cette formule n'est que particulière, et on peut généralement déterminer l'intégrale $\int x^m X^n dx$ par la proposition suivante.

128. Théorème III. « Quel que soit le nombre m, entier ou » fractionnaire, pourvu que $1+m$ soit positif, ou seulement $2+m$ » si n est impair, l'intégrale $\int x^m X^n dx$, prise entre les limites $x=0$, » $x=1$, se déterminera généralement par l'une ou l'autre des » formules :

$$\int x^m X^{2k} dx = \frac{m.m-2.m-4 \ldots\ldots m-2k+2}{m+1.m+3.m+5 \ldots m+2k+1},$$

$$\int x^m X^{2k+1} dx = \frac{m-1.m-3.m-5 \ldots m-2k+1}{m+2.m+4.m+6 \ldots m+2k+2},$$

» ou seulement par la formule

$$(f) \qquad \int x^m X^n dx = \frac{m-n+2.m-n+4.m-n+6 \ldots m-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}{m+n+1.m+n-1.m+n-3 \ldots m+\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}},$$

» dans laquelle le signe supérieur aura lieu si n est pair, et le signe » inférieur si n est impair. »

Pour démontrer ces formules, il suffira de considérer des cas particuliers. Soit donc $n=6$; on pourra supposer $X^6 = Ax^6 - Bx^4 + Cx^2 - D$, et on aura dans les limites requises,

$$\int x^m X^6 dx = \frac{A}{m+7} - \frac{B}{m+5} + \frac{C}{m+3} - \frac{D}{m+1}.$$

Mais d'après les formules (c), on sait que cette intégrale doit s'évanouir dans les trois cas $m=0$, $m=2$, $m=4$; elle aura donc la forme

$$\frac{A'm(m-2)(m-4)}{m+1.m+3.m+5.m+7}.$$

Pour déterminer A' faisons $m=\infty$; l'intégrale $\frac{A}{m+7} - \frac{B}{m+5} + \frac{C}{m+3} - \frac{D}{m+1}$ deviendra $\frac{1}{m}(A-B+C-D)$, ou simplement $\frac{1}{m}$, puisque $A-B+C-D$ est la valeur de la fonction X^6 lorsque $x=1$: donc on a $A'=1$; donc

$$\int x^m X^6 dx = \frac{m.m-2.m-4}{m+1.m+3.m+5.m+7}:$$

Il est visible que la même démonstration est applicable à toute autre valeur de n.

Si dans la formule générale on fait $m=n$, on aura, lorsque n est pair,

$$\int x^n X^n dx = \frac{n.n-2.n-4\ldots.2}{n+1.n+3.n+5\ldots.2n+1},$$

et lorsque n est impair,

$$\int x^n X^n dx = \frac{n-1.n-3.n-5\ldots\ldots.2}{n+2.n+4.n+6\ldots.2n+1}.$$

Ces deux cas sont compris dans la formule

$$\int x^n X^n dx = \frac{1.2.3\ldots\ldots.n}{1.3.5\ldots 2n+1},$$

ainsi que nous l'avons déjà trouvé dans l'article précédent.

129. Si on veut exprimer la puissance x^n par le moyen des fonctions X^n, X^{n-2}, X^{n-4}, etc., on y parviendra aisément de la manière suivante. Soit en général

$$x^n = aX^n + bX^{n-2} + cX^{n-4} + \text{etc.};$$

si on multiplie chaque membre par $X^n dx$, et qu'on intègre de part et d'autre depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on aura, en vertu du théorème II, $\int x^n X^n dx = a\int X^n X^n dx$; or le premier membre $=\frac{1.2.3\ldots\ldots.n}{1.3.5\ldots.2n+1}$, et le second $=\frac{a}{2n+1}$; donc

$$a = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.3.5\ldots 2n-1} = \frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots n-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}{2n-1.2n-3\ldots n+\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}}.$$

On aura de même, en multipliant par $X^{n-2}dx$ la valeur de x^n et intégrant, $\int x^n X^{n-2}dx = b\int X^{n-2}X^{n-2}dx = \frac{b}{2n-3}$. Mais le premier membre $= \frac{4.6.8\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}{2n-1.2n-3.2n-5\ldots\ldots n+\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}}$; donc $b=\frac{2n-3}{2}a$: on trouvera de même, en multipliant par $X^{n-4}dx$, $c=\frac{2n-1.2n-7}{2.4}a$, et ainsi de suite. La loi de ces différens termes est facile à saisir, et on trouvera en général qu'en faisant $A=\frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}{2n+1.2n-1.2n-3\ldots n+\frac{3}{2}\mp\frac{1}{2}}$, on a

$$x^n = A\Big[(2n+1)X^n + \frac{2n+1}{2}(2n-3)X^{n-2} + \frac{2n+1.2n-1}{2.4}(2n-7)X^{n-4}$$

$$(g) \qquad + \frac{2n+1.2n-1.2n-3}{2.4.6}(2n-11)X^{n-6} + \text{etc.}\Big];$$

130. Théorème IV. « La fonction X^{2k} est en général décompo- » sable en k facteurs de la forme $x^2-\alpha^2$, x^2-6^2, $x^2-\gamma^2$, etc., » α, 6, γ, etc. étant des racines réelles, inégales et plus petites » que l'unité; la fonction X^{2k+1} est composée de k facteurs de même » forme, et en outre du facteur x. »

En effet, prenons pour exemple la fonction X^8; puisque l'intégrale $\int X^8 dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, est nulle, il faut que la fonction X^8 change de signe, au moins une fois, dans cet intervalle. Il y aura donc une valeur $x=\alpha$ qui rendra $X^8=0$, et cette racine sera moindre que l'unité. Soit $X^8=(x^2-\alpha^2)P$, on aura par l'équation (c), $\int(x^2-\alpha^2)X^8 dx=0$ ou $\int(x^2-\alpha^2)^2 P dx=0$. Puisque cette intégrale est nulle, il faut que la fonction P change de signe, au moins une fois, dans l'intervalle de $x=0$ à $x=1$. Soit 6 la valeur de x qui rend $P=0$, on pourra supposer $P=(x^2-6^2)Q$, ce qui donnera $X^8=(x^2-\alpha^2)(x^2-6^2)Q$. Mais par l'équation (c) on a encore $\int(x^2-\alpha^2)(x^2-6^2)X^8 dx=0$, ou $\int(x^2-\alpha^2)^2(x^2-6^2)^2 Q dx=0$; donc la fonction Q doit encore s'évanouir depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Soit γ la valeur de x qui rend Q nulle; on pourra faire $Q=(x^2-\gamma^2)R$, ce qui donnera $X^8=(x^2-\alpha^2)(x^2-6^2)(x^2-\gamma^2)R$. Enfin on aura encore par l'équation (c), $\int(x^2-\alpha^2)(x^2-6^2)(x^2-\gamma^2)X^8 dx=0$, ou $\int(x^2-\alpha^2)^2 (x^2-6^2)^2(x^2-\gamma^2)^2 R dx=0$. Donc la fonction R doit s'évanouir dans l'intervalle de $x=0$ à $x=1$. Soit δ la valeur correspondante de x, et on aura $R=(x^2-\delta^2)A$, A étant constante, puisque X^8 est un polynome du huitième degré. Donc enfin ce polynome se décompose en quatre facteurs de la forme $x^2-\alpha^2$, de sorte qu'on a

$$X^8=A(x^2-\alpha^2)(x^2-6^2)(x^2-\gamma^2)(x^2-\delta^2),$$

α, 6, γ, δ étant des racines plus petites que l'unité. Quant au coefficient A, il est égal à celui de x^8 dans X^8, c'est-à-dire qu'on a $A=\frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}$.

Je dis de plus que les racines α, 6, γ, δ sont inégales entr'elles; car si on avait, par exemple, $\alpha=6$, ce qui donnerait $X^8=A(x^2-\alpha^2)^2(x^2-\gamma^2)(x^2-\delta^2)$, il faudrait, d'après l'équation (c), qu'on eût $\int (x^2 - \gamma^2)(x^2 - \delta^2) X^8 dx = 0$, ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \gamma^2)^2 (x^2 - \delta^2)^2 dx = 0$, ce qui est impossible.

La même démonstration aura lieu pour toute autre fonction X^n; il faudra seulement, lorsque n sera impair, joindre le facteur x aux facteurs $x^2 - \alpha^2$, $(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$, etc. employés dans la démonstration précédente.

131. La valeur de X^n donnée par la formule (a), prend les deux formes suivantes, selon que n est pair ou impair:

$$(h)\quad \begin{cases} X^{2k} = \dfrac{2k+1.2k+3\ldots 4k-1}{2.4.6\ldots.2k}\left(x^{2k} - \dfrac{k}{1}\cdot\dfrac{2k-1}{4k-1}x^{2k-2} + \dfrac{k.k-1}{1.2}\cdot\dfrac{2k-1.2k-3}{4k-1.4k-3}x^{2k-4} - \text{etc.}\right) \\ X^{2k+1} = \dfrac{2k+3.2k+5\ldots 4k+1}{2.4.6\ldots.2k}\left(x^{2k+1} - \dfrac{k}{1}\cdot\dfrac{2k+1}{4k+1}x^{2k+1} + \dfrac{k.k-1}{1.2}\cdot\dfrac{2k+1.2k-1}{4k+1.4k+3}x^{2k-3} - \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Soit $x^2 = y$, les polynomes compris dans ces expressions, étant désignés, l'un par Y, l'autre par xY', on aura

$$(i)\quad \begin{cases} Y = y^k - \dfrac{k}{1}\cdot\dfrac{2k-1}{4k-1}y^{k-1} + \dfrac{k.k-1}{1.2}\cdot\dfrac{2k-1.2k-3}{4k-1.4k-3}y^{k-2} - \dfrac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\dfrac{2k-1.2k-3.2k-5}{4k-1.4k-3.4k-5}y^{k-3} + \text{etc.} \\ Y' = y^k - \dfrac{k}{1}\cdot\dfrac{2k+1}{4k+1}y^{k-1} + \dfrac{k.k-1}{1.2}\cdot\dfrac{2k+1.2k-1}{4k+1.4k-1}y^{k-2} - \dfrac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\dfrac{2k+1.2k-1.2k-3}{4k+1.4k-1.4k-3}y^{k-3} + \text{etc.} \end{cases}$$

Or il résulte du théorème de l'article précédent, que les équations $Y = 0$, $Y' = 0$ auront toujours un nombre k de racines réelles, inégales, positives et plus petites que l'unité : c'est ce qu'il serait peut-être difficile de démontrer par la seule considération de la loi suivant laquelle les polynomes Y et Y' sont formés.

132. Théorème V. « L'intégrale $\int \dfrac{X^{2k} dx}{(1 + ax^2)^{k+\frac{3}{2}}}$, prise depuis » $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est égale à $\dfrac{(-a)^k}{(2k+1)(1+a)^{k+\frac{1}{2}}}$. »

Pour trouver l'expression générale de cette intégrale que je désigne par V^k, considérons l'intégrale suivante que nous supposerons prise entre les mêmes limites

$$W = \int \frac{dx}{(1+ax^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2xz + z^2)}}\right].$$

Si l'on suppose $z = \frac{p}{\sqrt{(1+ax^2)}}$, la valeur de W pourra se développer en série de cette manière :

$$W = \int \frac{dx}{(1+ax^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{p^2X^2}{1+ax^2} + \frac{p^4X^4}{(1+ax^2)^2} + \text{etc.}\right);$$

de sorte qu'on aura

$$W = V^0 + p^2V^1 + p^4V^2 + p^6V^3 + \text{etc.}$$

Ainsi pour déterminer les quantités V^0, V^1, V^2, etc., il ne s'agit que d'avoir la valeur de l'intégrale W qu'on développera ensuite suivant les puissances de la constante p.

Pour cela soit $\frac{x}{\sqrt{(1+ax^2)}} = y$, ou $x = \frac{y}{\sqrt{(1-ay^2)}}$, on aura la transformée

$$W = \int \left[\frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(1+p^2-2py-ap^2y^2)}} + \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(1+p^2+2py-ap^2y^2)}}\right]. \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{(1+a)}} \end{cases}$$

Soit $1 + apy = u$, et ensuite $u = \sqrt{(1+a+ap^2)}.\cos\varphi$, on aura $\int \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(1+p^2-2py-ap^2y^2)}} = -\frac{\varphi}{2p\sqrt{a}}$; donc si on appelle φ^1 et φ^0 les limites de φ, l'intégrale précédente sera $= \frac{\varphi^0 - \varphi^1}{2p\sqrt{a}}$. Mais on a dans les deux limites

$$\cos\varphi^0 = \frac{1}{\sqrt{(1+a+ap^2)}}, \quad \cos\varphi^1 = \frac{1+pa(1+a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1+a+ap^2)}};$$

d'où l'on déduit

$$\text{tang}\,\varphi^0 = \sqrt{a}.\sqrt{(1+p^2)}, \quad \text{tang}\,\varphi^1 = \frac{\sqrt{a} - \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{(1+a)}}}{1 + \frac{pa}{\sqrt{(1+a)}}};$$

or par la valeur de tang φ^1, on voit que si on fait tang $\alpha = \sqrt{a}$, et tang $\beta = \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{(1+a)}}$, on aura $\varphi^1 = \alpha - \beta$; par conséquent l'intégrale

$$\int \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(1+p^2-2py-ap^2y^2)}} = \frac{1}{2p\sqrt{a}}(\varphi^0 + \beta - \alpha).$$

Changeant

Changeant le signe de p, on aura de même

$$\int\left(\frac{\frac{1}{2}\,dy}{\sqrt{(1+p^2+2py-ap^2y^2)}}\right)=-\frac{1}{2p\sqrt{a}}(\varphi^\circ-\mathcal{C}-\alpha).$$

Donc l'intégrale cherchée $W=\frac{\mathcal{C}}{p\sqrt{a}}$; substituant l'expression de l'arc $\mathcal{C}$ en fonction de sa tangente, on aura

$$W=\frac{1}{\sqrt{(1+a)}}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{ap^2}{1+a}+\frac{1}{5}\cdot\frac{a^2p^4}{(1+a)^2}-\text{etc.}\right).$$

Comparant cette valeur avec celle que nous avons déjà exprimée par les intégrales V^n, on aura

$$V^k=\frac{(-a)^k}{(2k+1)(1+a)^{k+\frac{1}{2}}},$$

conformément au théorème qu'on voulait démontrer.

Au reste ce théorème n'est remarquable que par la simplicité du résultat; car si au lieu de X^{2k} on prend un polynome quelconque P de la forme $Ax^{2k}+Bx^{2k-2}+Cx^{2k-4}+$ etc., l'intégrale $\int\frac{P\,dx}{(1+ax^2)^{k+\frac{1}{2}}}$ pourra toujours se réduire à la forme $\int Y\,dy$, où Y sera de même un polynome de la forme $A'y^{2k}+B'y^{2k-2}+$ etc.; il suffit pour cela de faire $y=\frac{x}{\sqrt{(1+ax^2)}}$ ou $x=\frac{y}{\sqrt{(1-ay^2)}}$: ainsi cette intégrale, prise entre des limites quelconques, sera toujours une quantité algébrique.

133. Considérons de nouveau la fonction $Z=(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; si on la différentie successivement par rapport à x et par rapport à z, et qu'on fasse pour abréger, $1-2xz+z^2=D^2$, on aura

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{z}{D^3}\quad,\quad\frac{ddZ}{dx^2}=\frac{3z^2}{D^3},$$

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{x-z}{D^3},\quad\frac{ddZ}{dz^2}=-\frac{1}{D^3}+\frac{3(x-z)^2}{D^5};$$

de là résulte

$$(1-x^2)\frac{ddZ}{dx^2}+z^2\frac{ddZ}{dz^2}=\frac{2z^2}{D^3},$$

$$2x\frac{dZ}{dx}-2z\frac{dZ}{dz}=\frac{2z^2}{D^3};$$

donc la fonction Z satisfait à l'équation aux différences partielles :

$$(1-x^2)\frac{ddZ}{dx^2}-2x\frac{dZ}{dx}+z^2\frac{ddZ}{dz^2}+2z\frac{dZ}{dz}=0,$$

que l'on peut mettre sous cette forme

$$(k)\qquad \frac{d.(1-x^2)dZ}{dx^2}+\frac{d.z\,dZ}{dz^2}=0.$$

Si on substitue dans cette équation, au lieu de Z, sa valeur développée

$$Z=1+zX^1+z^2X^2+z^3X^3\ldots\ldots+z^nX^n+\text{etc.},$$

le coefficient de z^n, que nous désignons par X^n, satisfera en général à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d.(1-x^2)dX^n}{dx^2}+n(n+1)X^n=0,$$

ou

$$(l)\qquad (1-x^2)\frac{ddX^n}{dx^2}-2x.\frac{dX^n}{dx}+n(n+1)X^n=0:$$

c'est ce qu'on pourrait vérifier immédiatement par la valeur générale de X^n que donne l'équation (a).

134. L'équation précédente donne, par des différentiations réitérées

$$(1-x^2)\frac{d^3X^n}{dx^3}-4x\frac{d^2X^n}{dx^2}+(n-1)(n+2)\frac{dX^n}{dx}=0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^4X^n}{dx^4}-6x\frac{d^3X^n}{dx^3}+(n-2)(n+3)\frac{d^2X^n}{dx^2}=0;$$

et en général on a entre trois coefficiens consécutifs de la fonction X^n, cette équation,

$$(1-x^2)\frac{d^mX^n}{dx^m}-2(m-1)x\frac{d^{m-1}X^n}{dx^{m-1}}+(n-m+2)(n+m-1)\frac{d^{m-2}X^n}{dx^{m-2}}=0,$$

laquelle peut se mettre sous cette forme :

$$(m)\qquad \frac{d(1-x^2)^r d^rX^n}{dx^{r+1}}+(n+r)(n-r+1)(1-x^2)^{r-1}\frac{d^{r-1}X^n}{dx^{r-1}}=0.$$

135. Théorème VI. « Les indices m et n étant inégaux, l'in-
» tégrale $\int\frac{d^rX^m}{dx^r}.\frac{d^rX^n}{dx^r}(1-x^2)^r dx$, prise entre les limites $x=-1$,
« $x=+1$, sera toujours nulle ; si ces indices sont égaux, on

» aura dans les mêmes limites

$$» \int \frac{d^rX^n}{dx^r} \cdot \frac{d^rX^n}{dx^r} (1-x^2)^r dx = \frac{2}{2n+1} (n+r)(n+r-1)\ldots(n-r+1) »$$

En effet soit $P = (1 - x^2)^r \frac{d^rX^n}{d^rx^n}$, l'intégration par parties donnera

$$\int P \cdot \frac{d^rX^m}{dx^r} dx = P \cdot \frac{d^{r-1}X^m}{dx^{r-1}} - \int \frac{dP}{dx} \cdot \frac{d^{r-1}X^m}{dx^{r-1}} dx.$$

Dans cette expression, la quantité hors du signe étant affectée du facteur $(1-x^2)^r$, s'évanouit aux deux limites de l'intégrale ; de plus, en vertu de l'équation (m), on a

$$\frac{dP}{dx} = -(n+r)(n-r+1)(1-x^2)^{r-1} \frac{d^{r-1}X^n}{dx^{r-1}};$$

donc en remettant la valeur de P,

$$\int \frac{d^rX^m}{dx^r} \cdot \frac{d^rX^n}{dx^r} (1-x^2)^r dx = (n+r)(n-r+1) \int \frac{d^{r-1}X^m}{dx^{r-1}} \cdot \frac{d^{r-1}X^n}{dx^{r-1}} (1-x^2)^{r-1} dx.$$

Faisant successivement $r = 1, 2, 3$, etc., on aura les équations

$$\int \frac{dX^m}{dx} \cdot \frac{dX^n}{dx} (1-x^2)\, dx = n(n+1) \int X^m X^n dx,$$

$$\int \frac{ddX^m}{dx^2} \cdot \frac{ddX^n}{dx^2} (1-x^2)^2 dx = (n-1)(n+2) \int \frac{dX^m}{dx} \cdot \frac{dX^n}{dx} (1-x^2)\, dx,$$

$$\int \frac{d^3X^m}{dx^3} \cdot \frac{d^3X^n}{dx^3} (1-x^2)^3 dx = (n-2)(n+3) \int \frac{ddX^m}{dx^2} \cdot \frac{ddX^n}{dx^2} (1-x^2)^2 dx,$$

etc.

Donc, 1°. si m et n sont inégaux, auquel cas $\int X^m X^n dx = 0$, il s'ensuit qu'on aura en général $\int \frac{d^rX^m}{dx^r} \cdot \frac{d^rX^n}{dx^r} (1-x^2)^r dx = 0$.

2°. Si $m = n$, auquel cas $\int X^m X^n dx = \frac{2}{2n+1}$, on aura successivement

$$\int \frac{dX^n}{dx} \cdot \frac{dX^n}{dx} (1-x^2)\, dx = n.n+1.\frac{2}{2n+1},$$

$$\int \frac{ddX^n}{dx^2} \cdot \frac{ddX^n}{dx^2} (1-x^2)^2 dx = n-1.n.n+1.n+2.\frac{2}{2n+1},$$

et en général,

$$(n) \qquad \int \frac{d^rX^n}{dx^r} \cdot \frac{d^rX^n}{dx^r} (1-x^2)^r dx = \frac{2}{2n+1}.n+r.n+r-1.n+r-2\ldots\ldots n-r+1.$$

136. On peut faire sur le théorème VI, la même observation qui a été faite sur le théorème II. Lorsque $m-n$ est impair, ou lorsque l'un des nombres m et n est pair et l'autre impair, les coefficiens $\frac{d^rX^m}{dx^r}$, $\frac{d^rX^n}{dx^r}$ sont des fonctions de x, l'une paire, l'autre impaire; donc le produit $\frac{d^rX^m}{dx^r}\cdot\frac{d^rX^n}{dx^r}(1-x^2)^r$ est une fonction impaire de x; or Q désignant une fonction impaire quelconque de x, l'intégrale $\int Qdx$, prise depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, est nulle. Ainsi lorsque $m-n$ est impair, le théorème n'offre qu'un résultat évident par lui-même; mais lorsque $m-n$ est pair, ce théorème cesse d'être évident; alors le produit $\frac{d^rX^m}{dx^r}\cdot\frac{d^rX^n}{dx^r}(1-x^2)^r$ est une fonction paire de x; or une telle fonction étant désignée par P, l'intégrale $\int Pdx$, prise depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, sera double de la même intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=+1$; donc en écartant du théorème les cas qui sont évidens par eux-mêmes, on pourra l'énoncer ainsi :

« Les indices m et n étant inégaux, l'intégrale $\int\frac{d^rX^m}{dx^r}\cdot\frac{d^rX^n}{dx^r}(1-x^2)^r dx$, » prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, sera toujours nulle. Si ces » indices sont égaux, on aura dans les mêmes limites,

$$\int\frac{d^rX^m}{dx^r}\cdot\frac{d^rX^n}{dx^r}(1-x^2)^r dx=\frac{1}{2n+1}\cdot(n+r)(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n-r+1).$$

137. Théorème VII. « Si P est une fonction rationnelle et » entière de x, de dimension moindre que $n-r$, l'intégrale » $\int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}Pdx$, prise entre les limites $x=-1$, $x=+1$, » sera nulle. »

En effet, si on différentie la quantité $V=(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}P$, et qu'on mette au lieu de $\frac{d(1-x^2)^r d^rX^n}{dx^{r+1}}$ sa valeur donnée par l'équation (m), on aura

$$dV=(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^{r+1}}\cdot\frac{dP}{dx}dx-(n+r)(n-r+1)(1-x^2)^{r-1}\frac{d^{r-1}X^n}{dx^{r-1}}Pdx;$$

intégrant de part et d'autre depuis $x=-1$ jusqu'à $x=+1$, et observant que dans ces limites $V=0$; mettant ensuite $r+1$ à la place de r, on aura

$$(n-r)(n+r+1)\int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}Pdx=\int(1-x^2)^{r+1}\frac{d^{r+1}X^n}{dx^{r+1}}\cdot\frac{dP}{dx}dx.$$

On aura semblablement, en mettant $\frac{dP}{dx}$ au lieu de P, et $r+1$ au lieu de r,

$$(n-r-1)(n+r+2)\int(1-x^2)^{r+1}\frac{d^{r+1}X^n}{dx^{r+1}}\cdot\frac{dP}{dx}dx=\int(1-x^2)^{r+2}\frac{d^rX^n}{dx^{r+2}}\cdot\frac{ddP}{dx^2}dx$$

On peut continuer ainsi indéfiniment, et on parviendra à la formule générale

$$(p)\qquad \int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}Pdx=\frac{1}{A}\int(1-x^2)^{r+i}\frac{d^{r+i}X^n}{dx^{r+i}}\cdot\frac{d^iP}{dx^i}dx,\qquad \begin{cases}x=-1\\x=+1\end{cases}$$

dans laquelle on suppose $n>r+i$, et

$$A=(n-r.n-r-1.n-r-2\ldots n-r-i+1)\,(n+r+1.n+r+2\ldots n+r+i).$$

Maintenant soit i la plus haute dimension de x dans P, laquelle, par hypothèse, satisfait à la condition $n>r+i$, le coefficient $\frac{d^iP}{dx^i}$ sera constant; mais par le théorème VI on a, en faisant $m=0$, $\int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}dx=0$, équation qui a encore lieu en mettant $r+i$ à la place de r; donc si le polynome P est d'une dimension $i<r-n$, l'équation (p) donnera

$$(q)\qquad \int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}Pdx=0,\qquad \begin{cases}x=-1\\x=+1\end{cases}$$

La fonction $\frac{d^rX^n}{dx^r}$ étant paire ou impaire comme le nombre $n-r$, si les fonctions P et $\frac{d^rX^n}{dx^r}$ sont l'une paire, l'autre impaire, l'équation (q) est évidente; mais si ces deux fonctions sont toutes deux paires ou toutes deux impaires, alors l'équation (q) cesse d'être évidente, et elle a lieu également pour les limites $x=0$, $x=1$; donc P' étant une fonction de x paire ou impaire, mais de même espèce que la fonction $\frac{d^rX^n}{dx^r}$, on aura la formule

$$(r)\qquad \int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}P'dx=0.\qquad \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

138. Si la dimension la plus élevée de x dans P égale ou surpasse $n-r$, soit $r+i=n$, alors on aura $\frac{d^{r+i}X^n}{dx^{r+i}}=\frac{d^nX^n}{dx^n}=1.3.5\ldots 2n-1$; et l'équation (p) donnera, en substituant la valeur de A et réduisant,

$$(s)\qquad \int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}\mathrm{P}dx=\frac{n-r+1\,.\,n-r+2\ldots n+r}{2.4.6\ldots 2n}\int(1-x^2)^n\frac{d^{n-r}\mathrm{P}}{dx^{n-r}}dx.$$

Soit, par exemple, $\mathrm{P}=ax^{n-r}+bx^{n-r-1}+cx^{n-r-2}+\text{etc.}$, on aura $\frac{d^{n-r}\mathrm{P}}{dx^{n-r}}=1.2.3\ldots\ldots n-r.a$, et $\int dx\,(1-x^2)^n=2.\frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots\ldots 2n+1}$; donc entre les limites $x=-1$, $x=+1$, on a

$$(t)\qquad \int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}\mathrm{P}dx=\frac{1.2.3\ldots\ldots n+r}{3.5.7\ldots 2n+1}.2a.$$

Si l'on a simplement $\mathrm{P}=ax^{n-r}+cx^{n-r-2}+ex^{n-r-4}+\text{etc.}$, ensorte que les fonctions P et $\frac{d^rX^n}{dx^r}$ soient toutes deux paires ou toutes deux impaires, la formule précédente aura également lieu pour les limites $x=0$, $x=1$, pourvu qu'on prenne la moitié du second membre; alors on aura

$$(u)\qquad \int(1-x^2)^r\frac{d^rX^n}{dx^r}\mathrm{P}dx=\frac{1.2.3\ldots\ldots n+r}{3.5.7\ldots 2n+1}.a.\qquad \left\{\begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}\right.$$

139. Les fonctions X^n offrent encore une autre propriété fort remarquable. Si l'on fait $x=\cos\omega\cos\psi+\sin\omega\sin\psi\cos\theta$, et qu'on prenne l'intégrale $\int X^n d\theta$ depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\pi$, on aura successivement

$$\begin{aligned}
\int X^1 d\theta &= \pi\cos\omega\cos\psi,\\
\int X^2 d\theta &= \pi\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\omega-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\psi-\tfrac{1}{2}\right),\\
\int X^3 d\theta &= \pi\left(\tfrac{5}{2}\cos^3\omega-\tfrac{3}{2}\cos\omega\right)\left(\tfrac{5}{2}\cos^3\psi-\tfrac{3}{2}\cos\psi\right),\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

En général si on fait $\cos\omega=p$, $\cos\psi=q$, et qu'on désigne par P^n la même fonction de p que X^n est de x, et par Q^n une fonction semblable de q, on aura généralement,

$$(x)\qquad \int X^n d\theta=\pi\mathrm{P}^n\mathrm{Q}^n.\qquad \left\{\begin{matrix}\theta=0\\ \theta=\pi\end{matrix}\right.$$

Cette belle propriété, très-utile dans la théorie de l'attraction, se vérifie facilement dans les premiers termes que nous venons de rapporter; elle sera d'ailleurs démontrée avec toute la généralité nécessaire dans le chapitre suivant.

§ XI. *D'une autre espèce de fonctions plus générales, et tirées de la même source.*

140. Soit $V = (r^2 - 2yrz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$; si dans cette fonction nous regardons y et r comme seules variables, nous aurons d'abord, en vertu de l'équation (k) du § précédent;

$$(a') \qquad \frac{d(1-y^2)\,dV}{dy^2} + \frac{d(r^2dV)}{dr^2}.$$

y est une variable qu'on suppose comprise entre les limites $+1$ et -1; elle peut par conséquent être assimilée au cosinus d'un arc qui varie depuis zéro jusqu'à la demi-circonférence. Supposons que cet arc soit le troisième côté d'un triangle sphérique dont ω et ψ sont deux côtés et θ l'angle compris, on aura

$$y = \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos\theta.$$

Cela posé, si dans la valeur de y on considère ψ et θ comme seules variables, et qu'on fasse $\cos\psi = x$, les différences partielles premières et secondes de la fonction V donneront les résultats suivans.

1°. D'après la relation $\cos\psi = x$, on a, quel que soit V,

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{dV}{dx},$$

$$\frac{d.}{dx}(1-x^2)\frac{dV}{dx} = \frac{ddV}{d\psi^2} + \frac{\cos\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{dV}{d\psi}.$$

2°. En comparant les différentielles prises par rapport à ψ, avec les différentielles prises par rapport à y, on a les équations:

$$\frac{dV}{d\psi} = \frac{dV}{dy}(\cos\psi\sin\omega\cos\theta - \sin\psi\cos\omega),$$

$$\frac{ddV}{d\psi^2} = \frac{ddV}{dy^2}(\cos\psi\sin\omega\cos\theta - \sin\psi\cos\omega)^2 - y\frac{dV}{dy}.$$

3°. Enfin les différentielles prises par rapport à θ, déduites des différentielles prises par rapport à y, donnent semblablement

$$\frac{dV}{d\theta} = -\sin\psi \sin\omega \sin\theta . \frac{dV}{dy},$$

$$\frac{ddV}{d\theta^2} = \sin^2\psi \sin^2\omega \sin^2\theta . \frac{ddV}{dy^2} - \sin\psi \sin\omega \cos\theta . \frac{dV}{dy}.$$

Au moyen de ces équations, il est aisé de trouver que la quantité $\frac{d(1-x^2)dV}{dx^2} + \frac{1}{\sin^2\psi} . \frac{ddV}{d\theta^2}$, se réduit à $(1-y^2)\frac{ddV}{dy^2} - 2y . \frac{dV}{dy}$, ou $\frac{d(1-y^2)dV}{dy^2}$; et comme en vertu de l'équation (a'), cette dernière quantité $= -\frac{d(r^2dV)}{dr^2}$, on aura l'équation suivante, où V est considérée comme fonction des trois variables x, θ et r,

$$(b') \qquad \frac{d(1-x^2)dV}{dx^2} + \frac{1}{1-x^2} . \frac{ddV}{d\theta^2} + \frac{d.r^2dV}{dr^2} = 0.$$

Cette équation ne change pas en mettant $\theta - \varphi$ à la place de θ, et regardant φ comme constante; ainsi nous pourrons la regarder comme exprimant une propriété générale de la fonction V, dans laquelle on a fait $y = \cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \cos(\theta - \varphi)$ et $\cos\psi = x$.

Il restera dans cette hypothèse, trois quantités considérées comme constantes dans la fonction V, savoir z, ω et φ.

141. Maintenant si dans l'équation (b') on substitue au lieu de V, sa valeur développée $\frac{1}{r} + \frac{z}{r^2} Y^1 + \frac{z^2}{r^3} Y^2 + \frac{z^3}{r^4} Y^3 +$ etc., Y^m étant la même fonction de y que X^m est de x, suivant les dénominations du § précédent, on trouvera que chacun des coefficiens Y^1, Y^2, Y^3, etc. est assujéti à une condition particulière, et que l'expression générale de cette condition est

$$(c') \qquad \frac{d(1-x^2)dY^m}{dx^2} + \frac{1}{1-xx} . \frac{ddY^m}{d\theta^2} + m(m+1)Y^m = 0.$$

Mais puisqu'on a $y = \cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \cos(\theta - \varphi)$, et que

que Y^m est un polynome de la forme $Ay^m + By^{m-2} + Cy^{m-4} +$ etc., il est clair qu'on peut supposer

$$Y^m = L^{m,0} + L^{m,1}\cos(\theta - \varphi) + L^{m,2}\cos(2\theta - 2\varphi) \ldots + L^{m,m}\cos(m\theta - m\varphi).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), on trouvera que le coefficient $L^{m,k}$ doit satisfaire à cette équation aux différences ordinaires :

$$(d') \qquad \frac{d(1-xx)\,dL^{m,k}}{dx^2} - \frac{k^2}{1-xx}L^{m,k} + m(m+1)L^{m,k} = 0.$$

142. Pour prendre une idée exacte de la fonction Y^m ainsi développée, il est bon de jeter un coup d'œil sur le tableau suivant, qui contient les premières valeurs de cette fonction :

$$Y^1 = \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos(\varphi - \theta),$$

$$Y^2 = \left(\tfrac{3}{2}\cos^2\omega - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\psi - \tfrac{1}{2}\right) + 3\cos\omega\cos\psi\sin\omega\sin\psi\cos(\varphi - \theta)$$
$$+ \frac{3}{4}\sin^2\omega\sin^2\psi\cos(2\varphi - 2\theta),$$

$$Y^3 = \left(\tfrac{5}{2}\cos^3\omega - \tfrac{3}{2}\cos\omega\right)\left(\tfrac{5}{2}\cos^3\psi - \tfrac{3}{2}\cos\psi\right)$$
$$+ \frac{3}{8}(5\cos^2\omega - 1)(5\cos^2\psi - 1)\sin\omega\sin\psi\cos(\varphi - \theta)$$
$$+ \frac{15}{4}\cos\omega\cos\psi\sin^2\omega\sin^2\psi\cos(2\varphi - 2\theta)$$
$$+ \frac{5}{8}\sin^3\omega\sin^3\psi\cos(3\varphi - 3\theta),$$

$$Y^4 = \left(\tfrac{5.7}{2.4}\cos^4\omega - \tfrac{3.5}{2.4}2\cos^2\omega + \tfrac{1.3}{2.4}\right)\left(\tfrac{5.7}{2.4}\cos^4\psi - \tfrac{3.5}{2.4}2\cos^2\psi + \tfrac{1.3}{2.4}\right),$$
$$+ \text{etc.}$$

Ce qu'il y a de plus remarquable dans ce tableau, c'est que chaque terme contient deux facteurs semblables, l'un fonction de ω, l'autre fonction de ψ ; propriété très-intéressante et que nous allons démontrer d'une manière générale.

Il est visible que le coefficient $L^{m,k}$, en général, sera de la forme

$$L^{m,k} = (1-xx)^{\frac{k}{2}}(a'x^{m-k} + b'x^{m-k-2} + c'x^{m-k-4} + \text{etc.}).$$

34

Or si on substitue cette valeur dans l'équation (d'), on trouvera que les coefficiens b', c', etc. se déterminent par le moyen du premier a', de la manière suivante :

$$b' = -\frac{m-k.m-k-1}{2(2m-1)}a', \quad c' = -\frac{m-k-2.m-k-3}{4(2m-3)}b', \quad \text{etc.}$$

Désignons donc par $F^k(x)$ ou F^k la fonction

$$F^k(x) = (1-xx)^{\frac{k}{2}}\left(x^{m-k} - \frac{m-k.m-k-1}{2(2m-1)}x^{m-k-2} \right.$$
$$\left. + \frac{m-k.m-k-1.m-k-2.m-k-3}{2.4(2m-1)(2m-3)}x^{m-k-4} - \text{etc.}\right),$$

et nous aurons $L^{m,k} = a'F^k(x)$, a' étant une constante. Mais comme ω et ψ entrent de la même manière dans y, et par conséquent aussi dans Y^m et dans $L^{m,k}$, on peut échanger entr'elles les quantités ω et ψ, sans changer la valeur de Y^m, ni celle de $L^{m,k}$; d'où il suit que si le coefficient $Z^{m,k}$ est divisible par $F^k(x)$, il doit l'être aussi par $F^k(p)$ en faisant $\cos\omega = p$. Donc on aura $L^{m,k} = a''F^k(x).F^k(p)$, a'' étant un coefficient numérique qui ne dépendra plus que des indices m et k. Ainsi il est démontré que chaque terme du développement de Y^m se partage réellement en deux facteurs dont l'un est fonction de x, et l'autre une semblable fonction de p.

143. Soit $F^k(x) = (1-xx)^{\frac{k}{2}}G^k(x)$, la fonction $G^k(x)$ sera toujours rationnelle et entière, et il est aisé de voir qu'on a généralement $G^{k+1}(x) = \frac{1}{m-k}\cdot\frac{dG^k(x)}{dx}$. Mais lorsque $k=0$,

$$G^0(x) = F^0(x) = x^m - \frac{m.m-1}{2(2m-1)}x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.4(2m-1)(2m-3)}x^{m-4} - \text{etc.};$$

d'où l'on voit que la fonction $F^0(x)$ a un rapport très-simple avec la fonction X^m, et que d'après l'équation (a) du paragraphe précédent, on a

$$X^m = \frac{1.3.5\ldots.2n-1}{1.2.3\ldots\ldots.n}F^0(x).$$

Au moyen de la fonction $F^0(x)$ ou F^0, on aura successivement, par la différentiation,

$$F^1(x) = \frac{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{m} \cdot \frac{dF^\circ}{dx},$$

$$F^2(x) = \frac{(1-xx)^{\frac{2}{2}}}{m.m-1} \cdot \frac{ddF^\circ}{dx^2},$$

$$F^3(x) = \frac{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{m.m-1.m-2} \cdot \frac{d^3F^\circ}{dx^3},$$

et en général,

$$F^k(x) = \frac{(1-xx)^{\frac{k}{2}}}{m.m-1\ldots\ldots m-k+1} \cdot \frac{d^kF^\circ}{dx^k}.$$

144. Il ne reste plus qu'à déterminer la constante a'', pour que la valeur $L^{m,k} = a''F^k(x).F^k(p)$ soit entièrement connue. On peut pour cela se servir d'un cas particulier; si on fait $\omega = \frac{1}{2}\pi$, l'inspection des valeurs de Y^1, Y^2, etc. suffit pour s'assurer que les termes alternatifs disparaissent, et qu'il reste seulement ceux dans lesquels $m+k$ est pair. On aura dans ce cas, $y = \sin\psi \cos(\theta - \varphi)$; faisons de plus x ou $\cos\psi$ infini, ce qui est possible analytiquement, $\sin\psi$ sera pareillement infini et se réduira à $(-x^2)^{\frac{1}{2}}$; donc la valeur de Y^m deviendra $\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{1.2.3\ldots\ldots m}(-x^2)^{\frac{m}{2}}\cos^m(\theta-\varphi)$; mais d'après la formule connue,

$$2^{m-1}\cos^m(\theta-\varphi) = \cos m(\theta-\varphi) + m\cos(m-2)(\theta-\varphi) + \frac{m.m-1}{1.2}\cos(m-4)(\theta-\varphi) + \text{etc.};$$

le coefficient de $\cos k(\theta-\varphi)$ dans la valeur développée de $\cos^m(\theta-\varphi)$, est donc

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\frac{1}{2}(m+k)+1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}(m-k)} \cdot \frac{1}{2^{m-1}},$$

quantité qui devra être réduite à moitié lorsque $k = 0$. On aura donc avec cette seule exception,

$$L^{m,k} = \frac{1.3.5\ldots 2m-1}{1.2.3\ldots\ldots m} \cdot \frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}(m+k)+1}{1.2.3\ldots\ldots\frac{1}{2}(m-k)} \cdot \frac{(-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}.$$

D'un autre côté, $L^{m,k} = a'' F^k(o) F^k(x)$; or en faisant $x = o$, et supposant toujours $m + k$ pair, on trouve

$$F^k(o) = \frac{1.2.3\ldots m-k}{2.4.6\ldots m-k} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m-k}{2}}}{2m-1.2m-3\ldots m+k+1}.$$

D'un autre côté, en faisant $x = \infty$, on a $F^k(x) = (-1)^{\frac{k}{2}} x^m$; donc

$$L^{m,k} = a'' . \frac{1.2.3\ldots m-k}{2.4.6\ldots m-k} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} x^m}{2m-1.2m-3\ldots\ldots m+k+1}.$$

Egalant ces deux valeurs de $L^{m,k}$, il en résulte le coefficient cherché

$$a'' = 2 . \frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots m+k} \cdot \frac{2m-1.2m-3\ldots m+k+1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m-k},$$

et cette valeur devra être réduite à moitié lorsque $k = o$, ce qui donne alors

$$a'' = \left(\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}\right)^2:$$

ces formules n'ont lieu, comme nous l'avons déjà dit, que lorsque $m + k$ est pair.

145. Pour avoir la valeur de a'' lorsque $m + k$ est impair, j'observe que si on prend le coefficient différentiel $\frac{dY^m}{d\omega}$, et qu'on fasse dans cette fonction $\cos \omega = o$, tous les termes où $m + k$ est pair disparaîtront, et il ne restera que les termes où $m + k$ est impair. Faisant ensuite $x = \infty$, et comparant les deux valeurs de $\frac{dL^{m,k}}{dp}$, il en résultera

$$a'' = 2 . \frac{1.3.5\ldots\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots m-k-1} \cdot \frac{2m-1.2m-3\ldots m+k+2}{1.2.3\ldots\ldots m-k}.$$

Les deux valeurs de a'' paraissent donc de forme différente, selon que $m + k$ est pair ou impair; mais en les examinant avec plus d'attention, on trouve qu'elles peuvent être représentées par une seule et même formule, savoir :

$$a'' = 2 . \left(\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{1.2.3\ldots\ldots m}\right)^2 \cdot \frac{m.m-1\ldots m-k+1}{m+1.m+2\ldots m+k}.$$

Lorsque $k = 0$, il faudra prendre la moitié seulement de cette valeur, ce qui donnera

$$a'' = \left(\frac{1.3.5\ldots.2m-1}{1.2.3\ldots\ldots.m}\right)^2.$$

146. On voit maintenant que la valeur complette de Y^m peut se développer ainsi :

$$\begin{aligned} Y^m = \left(\frac{1.3.5\ldots.2m-1}{1.2.3\ldots\ldots m}\right)^2 \Big(& F^0pF^0x + \frac{m}{m+1}.2F^1pF^1x\cos(\theta-\varphi) \\ & + \frac{m.m-1}{m+1.m+2}.2F^2pF^2x\cos(2\theta-2\varphi) \\ & + \frac{m.m-1.m-2}{m+1.m+2.m+3}.2F^3pF^3x\cos(3\theta-3\varphi)+\text{etc.}\Big); \end{aligned}$$

Mais nous avons déjà observé qu'on a

$$X^m = \frac{1.3.5\ldots 2m-1}{1.2.3\ldots\ldots m}F^0x, \quad F^1x = \frac{(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{m}.\frac{dF^0x}{dx},$$

$$F^2x = \frac{1-xx}{m.m-1}.\frac{d^2F^0x}{dx^2}, \qquad F^3x = \frac{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{m.m-1.m-2}.\frac{d^3F^0x}{dx^3}, \text{ etc.};$$

désignant donc par P^m la même fonction de p ou $\cos\omega$, que X^m est de x ou $\cos\psi$, on aura généralement

$$(f')\qquad \begin{aligned} Y^m = P^mX^m & + \frac{2\sin\omega\sin\psi\cos(\theta-\varphi)}{m.m+1}.\frac{dP^m}{dp}.\frac{dX^m}{dx} \\ & + \frac{2\sin^2\omega\sin^2\psi\cos(2\theta-2\varphi)}{m-1.m.m+1.m+2}.\frac{ddP^m}{dp^2}.\frac{ddX^m}{dx^2} \\ & + \frac{2\sin^3\omega\sin^3\psi\cos(3\theta-3\varphi)}{m-2.m-1.m.m+1.m+2.m+3}.\frac{d^3P^m}{dp^3}.\frac{d^3X^m}{dx^3} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

147. Maintenant si on fait $\varphi = 0$, ce qui suppose $y = \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos\theta$, et qu'on veuille avoir l'intégrale $\int Y^m d\theta$, prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, il est visible que la formule précédente donnera immédiatement

$$(g')\qquad \int Y^m d\theta = \pi P^m X^m : \qquad \left\{\begin{matrix}\theta = 0\\ \theta = \pi\end{matrix}\right.$$

c'est le théorème très-remarquable dont on a fait mention dans l'art. 138, et qui se trouve ainsi démontré très-simplement et dans toute sa généralité.

Si on ne faisait pas $\varphi = 0$, et qu'on eût plus généralement $y = \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos(\theta - \varphi)$, alors l'intégrale devrait être rapportée aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, et on aurait

$$(h') \qquad \int Y^m d\theta = 2\pi P^m X^m. \qquad \left\{\begin{matrix}\theta = 0\\ \theta = 2\pi\end{matrix}\right.$$

Mais cette formule n'est que particulière, et on peut généralement trouver l'intégrale $\int Y^m d\theta \cos(k\theta - k\varphi)$, prise entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$; cette intégrale se déduit immédiatement de la formule (f') qui donne

$$(i') \qquad \begin{aligned}&\int Y^m d\theta \cos(k\theta - k\varphi)\\ &= 2\pi \cdot \frac{\sin^k\omega \sin^k\psi}{m+k.m+k-1.m+k-2\ldots m-k+1} \cdot \frac{d^kP^m}{dp^m} \cdot \frac{d^kX^m}{dx^m};\end{aligned} \qquad \left\{\begin{matrix}\theta = 0\\ \theta = 2\pi\end{matrix}\right.$$

si k était $> m$, il est visible que cette intégrale serait nulle.

Lorsque $\varphi = 0$, l'intégrale $\int Y^m d\theta \cos k\theta$ peut être prise simplement entre les limites $\theta = 0$, $\theta = \pi$, et alors on aura la moitié du résultat précédent; ce qui donnerait une formule générale dont la formule (g') est un cas particulier.

148. Non-seulement la valeur de Y^m donnée par l'équation (f') satisfait à l'équation différentielle (c'); mais il résulte de l'équation (d') que chaque terme de cette valeur, tel que $L^{m,k}\cos(k\theta - k\varphi)$ satisfait séparément à l'équation (c'). On peut donc, avec des coefficiens constans quelconques, former une fonction beaucoup plus générale que Y^m, et qui satisfera toujours à l'équation (c'). Cette fonction que je représente par Υ^m pour la distinguer de Y^m, sera

$$(k') \qquad \begin{aligned}\Upsilon^m = aX^m &+ (b'\cos\theta + c'\sin\theta)\frac{dX^m}{dx}\sin\psi + (b''\cos 2\theta + c''\sin 2\theta)\frac{ddX^m}{dx^2}\sin^2\psi\\ &+ (b'''\cos 3\theta + c'''\sin 3\theta)\frac{d^3X^m}{dx^3}\sin^3\psi + \text{etc.}\end{aligned}$$

Considérons une autre fonction Z^n formée suivant la même loi, de sorte qu'on ait

$$Z^n = \alpha X^n + (\beta' \cos\theta + \gamma' \sin\theta)\frac{dX^n}{dx}\sin\psi$$
$$+ (\beta'' \cos 2\theta + \gamma'' \sin 2\theta)\frac{ddX^n}{dx^2}\sin^2\psi$$
$$+ (\beta''' \cos 2\theta + \gamma''' \sin 3\theta)\frac{d^3X^n}{dx^3}\sin^3\psi$$
$$+ \text{etc.}$$

Nous allons démontrer que si les indices m et n sont inégaux, on a en général $\int \Upsilon^m Z^n d\theta dx = 0$, cette double intégrale étant prise entre les limites 0 et 2π pour θ, -1 et $+1$ pour x.

D'abord il est visible que l'intégration par rapport à θ, peut être effectuée immédiatement, et ce premier résultat étant obtenu, il ne restera plus à trouver que l'intégrale

$$\int 2\pi dx \Big(a\alpha X^m X^n + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{dX^m}{dx}\cdot\frac{dX^n}{dx}(1-x^2)(b'\beta' + c'\gamma')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddX^m}{dx^2}\cdot\frac{ddX^n}{dx^2}(1-x^2)^2(b''\beta'' + c''\gamma'') + \text{etc.}\Big),$$

laquelle doit être prise entre les limites $x = -1$, $x = +1$. Mais d'après les théorèmes des articles 124 et 134, les différens termes de cette dernière intégrale sont nuls lorsque les indices m et n sont inégaux. Donc on a, dans cette hypothèse,

$$(l') \qquad \int \Upsilon^m Z^n d\theta dx = 0. \qquad \begin{cases}\theta = 0\\ \theta = 2\pi\end{cases} \quad \begin{cases}x = -1\\ x = +1\end{cases}$$

Si l'on a $m = n$, alors en appliquant les formules que donnent pour ce cas les articles 124 et 134, on aura dans les mêmes limites :

$$\int \Upsilon^n Z^n dx d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}\big[a\alpha + \tfrac{1}{2}n(n+1)(b'\beta' + c'\gamma')$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n-1)n(n+1)(n+2).(b''\beta'' + c''\gamma'')$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(b'''\beta''' + c'''\gamma''') + \text{etc}\big]$$

Cette intégrale dépend, comme on voit, des termes semblables qui se trouvent dans Υ^n et Z^n; elle serait nulle si aucun des termes de Υ^n n'avait son semblable dans Z^n.

149. Supposons $Z^n = Y^n$, ce qui donnera $\alpha = P^n$, $\beta = \frac{dP^n}{dp}\cdot\frac{2\sin\omega\cos\phi}{n.n+1}$,

$\gamma = \frac{d\mathrm{P}^n}{dp} \cdot \frac{2 \sin \omega \sin \phi}{n . n+1}$, $\mathcal{C}' = \frac{dd\mathrm{P}^n}{dp^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \omega \cos 2\phi}{n-1 . n . n+1 . n+2}$, etc.; en substituant les valeurs de ces coefficiens dans la formule (m'), on aura

$$\int \Upsilon^n \mathrm{Y}^n d\theta dx = \frac{4\pi}{2n+1}\Big(a\mathrm{P}^n + \frac{d\mathrm{P}^n}{dp} \sin \omega\ (b' \cos \phi + c' \sin \phi) \\ + \frac{dd\mathrm{P}^n}{dp^2} \sin^2\omega\, (b'' \cos 2\phi + c'' \sin 2\phi) + \text{etc.}\Big).$$

Mais la quantité renfermée en parenthèses n'est autre chose que la fonction Υ^n, dans laquelle on aurait mis p à la place de x et ϕ à la place de θ; cette fonction qui avant le changement pouvait s'indiquer par $\Upsilon^n(\psi, \theta)$, sera après le changement, $\Upsilon^n(\omega, \phi)$. Ainsi nous aurons cette formule très-simple et très-remarquable,

$$(n') \qquad \int \Upsilon^n \mathrm{Y}^n d\theta dx = \frac{4\pi}{2n+1} \Upsilon^n(\omega, \phi). \qquad \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = 2\pi \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

150. Soit encore $\Upsilon^n = \mathrm{Y}^n$, il sera aisé de voir ce que devient $\Upsilon^n(\omega, \phi)$; car Y^n est une fonction de y : or si dans la valeur $y = \cos \omega \cos \psi + \sin \omega \sin \psi \cos(\theta - \phi)$, on fait $\psi = \omega$ et $\theta = \phi$, on aura $y = 1$; donc aussi Y^n et $\Upsilon^n(\omega, \phi) = 1$. Ainsi on aura la formule

$$(p') \qquad \int \mathrm{Y}^n \mathrm{Y}^n d\theta dx = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Pour faire voir comment on peut parvenir à cette formule par une autre route, proposons-nous d'intégrer entre les limites données la quantité $y^{2n} d\theta\, dx$. Il faut d'abord développer la puissance $y^{2n} = (\cos \omega \cos \psi + \sin \omega \sin \psi \cos(\theta - \phi'))^{2n}$, et intégrer les différens termes par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, ce qui donnera

$$\int y^{2n} d\theta = 2\pi\Big(\cos^{2n}\omega \cos^{2n}\psi + \frac{2n . 2n-1}{1 . 2} \cos^{2n-2}\omega \cos^{2n-2}\psi \sin^2\omega \sin^2\psi . \frac{1}{2} \\ + \frac{2n . 2n-1 . 2n-2 . 2n-3}{1 . 2 . 3 . 4} \cos^{2n-4}\omega \cos^{2n-4}\psi \sin^4\omega \sin^4\psi . \frac{1 . 3}{2 . 4} + \text{etc.}\Big)$$

Il faut ensuite multiplier par dx et intégrer depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$; or en substituant les valeurs $\cos^2\psi = x^2$, $\sin^2\psi = 1 - x^2$, on on a dans les limites assignées :

$$\int x^{2n}dx = \frac{2}{2n+1};$$

$$\int x^{2n-2}(1-x^2)\,dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2}{2n-1},$$

$$\int x^{2n-4}(1-x^2)^2dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2.4}{2n-1.2n-3},$$

$$\int x^{2n-6}(1-x^2)^3dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2.4.6}{2n-1.2n-3.2n-5}, \text{ etc.};$$

donc

$$\int y^{2n}d\theta dx = \frac{4\pi}{2n+1}\Big(\cos^{2n}\omega + \frac{2n.2n-1}{1.2}.\frac{1}{2}.\frac{2\cos^{2n-2}\omega\sin^2\omega}{2n-1}$$
$$+\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}.\frac{1.3}{2.4}.\frac{2.4\cos^{2n-4}\omega\sin^4\omega}{2n-1.2n-3} + \text{etc.}\Big);$$

le second membre se réduit à $\frac{4\pi}{2n+1}(\cos^2\omega+\sin^2\omega)^n$, ou simplement $\frac{4\pi}{2n+1}$; donc on a

$$\int y^{2n}d\theta dx = \frac{4\pi}{2n+1};$$

et ce résultat peut se mettre sous la forme

$$\int y^{2n}d\theta dx = 2\pi\int y^{2n}dy,$$

l'intégrale par rapport à y devant être prise depuis $y=-1$ jusqu'à $y=+1$. On aurait également pour une puissance impaire de y, $\int y^{2n+1}d\theta dx = 2\pi\int y^{2n+1}dy$, car alors l'un et l'autre membre est zéro. Soit donc P un polynome quelconque en y, on aura généralement $\int Pd\theta dx = 2\pi\int Pdy$; il suit de là que $\int Y^nY^nd\theta dx = 2\pi\int Y^nY^ndy = \frac{4\pi}{2n+1}$, ce qui s'accorde avec la formule (p').

151. Si l'on avait à évaluer, entre les mêmes limites que ci-dessus, la double intégrale $\int QY^nd\theta dx$, dans laquelle Q est une fonction entière et rationnelle de $\cos\psi$, $\sin\psi\cos\theta$, $\sin\psi\sin\theta$; il faudrait préalablement réduire Q à la forme $Y^0+Y^1+Y^2+$etc., et c'est ce qu'on pourrait toujours obtenir au moyen des coefficiens indéterminés, puisque la forme générale de la fonction Y^m est connue.

§ XII. *Du développement de la puissance* $(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n}$, n *étant un nombre fractionnaire.*

152. On peut toujours supposer $a < 1$, car si on avait $a > 1$, on ferait $a = \frac{1}{\alpha}$, et la quantité $(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n}$ se changerait en $\alpha^{2n}(1+\alpha^2-2\alpha\cos\varphi)^{-n}$, où l'on a $\alpha < 1$.

Cela posé, on a vu dans la III^e Partie, pag. 372 et suiv., que si on fait $1+a^2-2a\cos\varphi = D$, et qu'on suppose

$$D^{-n} = P_0 + 2P_1\cos\varphi + 2P_2\cos 2\varphi + 2P_3\cos 3\varphi + \text{etc.},$$

la valeur du coefficient général $P(\lambda)$ pourra être exprimée par une intégrale définie, de cette manière :

$$(1) \qquad P(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}. \qquad \begin{cases}\varphi = 0\\ \varphi = \pi\end{cases}$$

On a trouvé de plus que ce même coefficient peut s'exprimer par la formule

$$(2) \qquad \begin{aligned} P(\lambda) = {} & \frac{n.n+1.n+2\ldots.n+\lambda-1}{1.2.3\ldots.\lambda}\cdot\frac{a^\lambda}{(1-a^2)^{n-1}}\Big(1+\frac{1-n}{1}\cdot\frac{\lambda+1-n}{\lambda+1}+\ldots.. \\ & +\frac{1-n.2-n}{1.2}\cdot\frac{\lambda+1-n.\lambda+2-n}{\lambda+1.\lambda+2}\,a^4 \\ & +\frac{1-n.2-n.3-n}{1.2.3}\cdot\frac{\lambda+1-n.\lambda+2-n.\lambda+3-n}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}\,a^6+\text{etc.}\Big). \end{aligned}$$

Cette suite se termine d'elle-même lorsque n est un nombre entier, et nous verrons ci-après qu'on peut la mettre sous une forme telle qu'elle se termine encore lorsque n est un nombre entier négatif; ainsi le développement de D^{-n} n'est sujet à aucune difficulté lorsque n est un nombre entier positif ou négatif. Il n'en est pas de même lorsque n est, comme nous le supposons, un nombre fractionnaire; alors la suite qui exprime la valeur de $P(\lambda)$, s'étend à l'infini, et on ne peut plus déterminer que par approximation les coefficiens successifs P_0, P_1, P_2, etc. qui deviennent dans ce cas des transcendantes d'une nature particulière. Nous allons rechercher les propriétés de ces transcendantes, afin de simplifier, autant qu'il est possible, les calculs nécessaires pour leur détermination.

153. Si on change le signe de n dans la formule du n° 63, p. 375, III^e Partie, on aura une autre valeur du coefficient général $P(\lambda)$, laquelle est

$$P(\lambda) = \frac{n.n+1\ldots.n+\lambda-1}{1.2.\ldots\lambda}a^\lambda\left(1+\frac{n}{1}.\frac{n+\lambda}{\lambda+1}a^2+\frac{n.n+1}{1.2}.\frac{n+\lambda.n+\lambda+1}{\lambda+1.\lambda+2}a^4+\right.$$

(3)

$$\left.+\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}.\frac{n+\lambda.n+\lambda+1.n+\lambda+2}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}.a^6+\text{etc}\right).$$

Cette formule renferme une suite moins convergente que celle de la formule (2), mais elle jouit de quelques avantages particuliers; elle fait voir, par exemple, que n étant positif, les coefficiens différentiels successifs $\frac{dP(\lambda)}{da}$, $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, $\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}$, etc. seront tous positifs.

154. Soit $V = \frac{\sin\lambda\varphi}{D^{n-1}}$, on aura en différentiant cette équation,

$$dV = \frac{\lambda d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^{n-1}} - \frac{2a(n-1)\sin\varphi}{D^n}.d\varphi\sin\lambda\varphi,$$

et en réduisant au même dénominateur,

$$dV = (1+a^2)\lambda.\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n} - (\lambda+n-1)a.\frac{d\varphi\cos(\lambda-1)\varphi}{D^n}$$
$$-(\lambda-n+1)a.\frac{d\varphi\cos(\lambda+1)\varphi}{D^n};$$

intégrant de part et d'autre depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, et observant que dans ces deux limites V s'évanouit, on aura d'après l'équation (1),

$$(4)\quad (\lambda+1-n)P(\lambda+1)-\left(\frac{1+a^2}{a}\right)\lambda P(\lambda)+(\lambda-1+n)P(\lambda-1)=0.$$

Cette équation donne la loi générale qui lie entr'eux trois termes consécutifs quelconques de la suite P_0, P_1, P_2, etc.; elle fait voir qu'il suffit de connaître deux termes de cette suite pour déterminer tous les autres; mais il y a des précautions à prendre, suivant les différens cas, pour que l'erreur qui peut exister sur les deux termes connus, ne se multiplie pas dans le calcul des autres termes, de manière à rendre bientôt les résultats entièrement défectueux.

155. Si on fait $P(\lambda) = \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+\lambda-1}}{1.2\ldots\lambda}\, a^\lambda . A(\lambda)$, et qu'on substitue cette valeur dans l'équation (4), on aura

$$(5) \qquad \left(1+\frac{n-n^2}{\lambda(\lambda+1)}\right) a^2 A(\lambda+1) - (1+a^2)\, A(\lambda) + A(\lambda-1) = 0.$$

Cette équation exprime pareillement la loi qui règne entre trois termes consécutifs de la suite A_0, A_1, A_2, A_3, etc. En supposant cette suite connue, le développement de D^{-n} serait donné par la formule

$$D^{-n} = A_0 + 2a.\frac{n}{1} A_1 \cos\varphi + 2a^2.\frac{n.\overline{n+1}}{1.2} A_2 \cos 2\varphi + 2a^3.\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} A_3 \cos 3\varphi + \text{etc.}$$

Lorsque λ est très-grand, l'équation (5) donne à très-peu près

$$A(\lambda+1) = \frac{1+a^2}{a^2} A(\lambda) - \frac{1}{a^2} A(\lambda-1);$$

d'où l'on peut conclure que la série A_0, A_1, A_2, etc. doit se confondre dans les termes éloignés avec une série récurrente dont l'échelle de relation est $\frac{1+a^2}{a^2}$, $-\frac{1}{a^2}$; celle-ci aurait pour terme général $\alpha + \mathcal{E}\left(\frac{1}{a^2}\right)^\lambda$, α et $\mathcal{E}$ étant des coefficiens constans. Ainsi lorsque λ est très-grand, on doit avoir aussi $A(\lambda) = \alpha + \mathcal{E}\left(\frac{1}{a^2}\right)^\lambda$. Mais comme, d'après l'équation (2), la valeur de $A(\lambda)$ ne doit contenir aucune puissance négative de a, il s'ensuit qu'on a $\mathcal{E} = 0$. et qu'ainsi λ étant très-grand, on aura $A(\lambda) = \alpha$, ou $A(\lambda)$ égal à une constante. Cette constante se détermine en faisant λ infini dans la valeur générale de $A(\lambda)$ donnée par l'équation (3), laquelle est

$$(6) \qquad A(\lambda) = 1 + \frac{n}{1}.\frac{n+\lambda}{\lambda+1} a^2 + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}.\frac{\overline{n+\lambda}.\overline{n+\lambda+1}}{\overline{\lambda+1}.\overline{\lambda+2}} a^4 + \text{etc.},$$

et on a par cette supposition $A(\lambda) = (1-a^2)^{-n}$. Mais ce résultat n'est que le premier terme d'une série propre à exprimer la valeur générale de $A(\lambda)$, lorsque λ est très-grand. Voici comment on parvient à cette série.

156. Faisons pour abréger, $\lambda+1=\lambda'$, $\lambda+2=\lambda''$, etc., et supposons

$$A(\lambda)=\alpha\left(1+\frac{c'}{\lambda'}+\frac{c''}{\lambda'\lambda''}+\frac{c'''}{\lambda'\lambda''\lambda'''}+\text{etc.}\right),$$

c', c'', c''', etc. étant des coefficiens indépendans de λ; cette valeur donne

$$A(\lambda)-A(\lambda+1)=\alpha\left(\frac{c'}{\lambda'\lambda''}+\frac{2c''}{\lambda'\lambda''\lambda'''}+\frac{3c'''}{\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{IV}}}+\text{etc.}\right),$$

$$A(\lambda+1)-A(\lambda+2)=\alpha\left(\frac{c'}{\lambda''\lambda'''}+\frac{2c''}{\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{IV}}}+\frac{3c'''}{\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{IV}}\lambda^{\text{V}}}+\text{etc.}\right);$$

multipliant le second membre de la dernière équation par λ', et observant que $\lambda'=\lambda'''-2=\lambda^{\text{IV}}-3=\lambda^{\text{V}}-4$, etc., on aura, après avoir divisé par λ',

$$A(\lambda+1)-A(\lambda+2)=\alpha\left(\frac{c'}{\lambda'\lambda''}+\frac{2(c''-c')}{\lambda'\lambda''\lambda'''}+\frac{3(c'''-2c'')}{\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{IV}}}+\frac{4(c^{\text{IV}}-3c''')}{\lambda'\lambda''\lambda'''\lambda^{\text{IV}}\lambda^{\text{V}}}+\text{etc}\right)$$

Maintenant si on met l'équation (5) sous cette forme :

$$0=A(\lambda)-A(\lambda+1)-a^2[A(\lambda+1)-A(\lambda+2)]+\frac{n-n^2}{\lambda'\lambda''}a^2A(\lambda+2),$$

et qu'on substitue les valeurs précédentes, on aura une équation qui devant être identique, donnera les équations de condition

$$\begin{aligned}(1-a^2)\,c' &= (n^2-n)\,a^2,\\ 2\,(1-a^2)\,c'' &= (n^2-n-2)\,a^2c',\\ 3\,(1-a^2)\,c''' &= (n^2-n-2.3)\,a^2c'',\\ 4\,(1-a^2)\,c^{\text{IV}} &= (n^2-n-3.4)\,a^2c''',\\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les valeurs des coefficiens

$$\begin{aligned}c' &= \frac{n.\overline{n-1}}{1}\cdot\frac{a^2}{1-a^2},\\ c'' &= \frac{\overline{n+1}.\overline{n-2}}{2}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\,c',\\ c''' &= \frac{\overline{n+2}.\overline{n-3}}{3}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}\,c'',\\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

donc on a la formule générale

$$(7)\qquad A(\lambda)=(1-a^2)^{-n}\Big[1+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{\lambda+1}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{n-1.n-2}{1.2}\cdot\frac{n.n+1}{\lambda+1.\lambda+2}\cdot\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2+\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\cdot\frac{n.n+1.n+2}{\lambda+1.\lambda+2.\lambda+3}\cdot\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^3+\text{etc.}\Big].$$

Cette suite a l'avantage de se terminer d'elle-même, toutes les fois que n est un entier positif ou négatif; mais si n est fractionnaire, comme nous le supposons, elle s'étendra à l'infini et ne sera convergente dans toute son étendue et pour toute valeur de λ, que lorsqu'on aura $a^2 < 1-a^2$ ou $a^2 < \frac{1}{2}$.

157. Dans tous les cas, si λ est fort grand, on aura une valeur tres-approchée de $A(\lambda)$ par les premiers termes de la série, qui décroîtront alors d'une manière rapide. Dans cette hypothèse, si on prend le logarithme de $A(\lambda)$, et qu'en négligeant les termes qui ont pour diviseurs λ^3, λ^4, etc., on réunisse deux termes tels que $\frac{p}{\lambda}+\frac{pq}{\lambda^2}$ en un seul $\frac{p}{\lambda-q}$, on aura

$$\log A(\lambda)=-n\log(1-a^2)+\frac{(n^2-n)\,a^2}{(1-a^2)\lambda+1}.$$

D'un autre côté la valeur de $P(\lambda)$ peut en général se mettre sous la forme

$$P(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma n\,\Gamma(\lambda+1)}\,a^\lambda A(\lambda);$$

et puisque λ est supposé très-grand, on a par la formule de la page 63,

$$\log\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)}=(n-1)\log\lambda+\frac{n^2-n}{2\lambda}+\frac{(n^2-n)(1-2n)}{12\lambda^2};$$

donc on aura

$$(8)\qquad \log P(\lambda)=\left\{\begin{array}{l}\lambda\log a+(n-1)\log\lambda-n\log(1-a^2)-\log\Gamma n\\ +\dfrac{n^2-n}{2\lambda+\frac{2n-1}{3}}+\dfrac{(n^2-n)\,a^2}{\lambda(1-a^2)+1},\end{array}\right.$$

valeur qui doit être exacte aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{\lambda^3}$, et dans laquelle il faudra multiplier les deux termes algébriques par 0,43429, etc., si on veut que les logarithmes de cette équation soient considérés comme logarithmes vulgaires.

On peut donc, à l'aide de cette formule, connaître d'une manière aussi prompte que facile, un terme éloigné quelconque dans la suite P_0, P_1, P_2, etc. Si par exemple on fait $\lambda = 100$, $a = \frac{9}{10}$, $n = \frac{1}{2}$, on trouvera $\log P(100) = 8.6430984$ et $P(100) = 0.04396412$; c'est la valeur très-approchée du 101[me] terme de la suite dont il s'agit.

158. Revenons au calcul effectif des coefficiens P_0, P_1, P_2, etc. Lorsque a sera assez petit, on pourra se servir des formules (2) ou (3) indifféremment, pour calculer les coefficiens successifs qui seront donnés alors par des séries convergentes ; mais il suffira de calculer directement par ces séries les termes alternatifs P_0, P_2, P_4, P_6, etc., et on en déduira les intermédiaires P_1, P_3, P_5, etc., au moyen de l'équation (4) qui donne en général :

$$P(\lambda) = \frac{a}{1+a^2}\left[\left(1+\frac{1-n}{\lambda}\right)P(\lambda+1) + \left(1+\frac{n-1}{\lambda}\right)P(\lambda-1)\right]:$$

cette équation est d'un usage également sûr, soit que a soit très-petit, soit qu'il diffère très-peu de l'unité.

Si on se bornait à calculer les deux premiers termes P_0, P_1 par les séries qui les représentent, et qu'ensuite on se servît de ces deux premiers termes pour calculer les suivans par l'équation (4), les erreurs se multiplieraient dans ces diverses opérations, avec d'autant plus de rapidité, que a serait plus petit. En effet, les erreurs absolues sur P_2, P_3, P_4, etc. pourraient croître suivant la progression $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a}$, etc.; et comme ces termes eux-mêmes décroissent à peu près suivant la progression a, a^2, a^3, etc., l'erreur relative pourrait augmenter d'un terme au suivant, à peu près dans le rapport de 1 à $\frac{1}{a^2}$, erreur qui ne tarderait pas à produire des résultats entièrement défectueux.

Lorsque a sera très-près de l'unité, les séries comprises dans les formules (2) et (3) seront très-peu convergentes, et il faudra en calculer un grand nombre de termes pour avoir, avec un degré d'approximation suffisant, les deux premiers coefficiens P_0, P_1; mais dans ce cas, on pourra se servir de l'équation (4) pour calculer les coefficiens suivans P_2, P_3, P_4, etc., et il ne sera pas à craindre que l'erreur augmente notablement d'un terme au suivant.

159. Au reste on peut éviter les longueurs du calcul par séries, en déterminant les deux coefficiens P_0, P_1 par les quadratures qui représentent les intégrales $\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}$, $\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{D^n}$, prises depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\pi$. Mais dans le cas où a est peu différent de l'unité, la quantité D devient très-petite lorsque φ est très-petit; ainsi l'ordonnée de la courbe qu'il faut quarrer, serait très-grande vers l'origine des abscisses. Pour obvier à cet inconvénient, nous observerons que l'intégrale $\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}$ peut en général être déterminée par l'intégrale $\int D^{n-1}d\varphi\cos\lambda\varphi$, puisqu'on a (pag. 376, III^e Partie)

$$\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}=\frac{n.n+1.n+2\ldots.n+\lambda-1}{1-n.2-n.3-n\ldots.\lambda-n}(1-a^2)^{1-2n}\int D^{n-1}d\varphi\cos\lambda\varphi.$$

Soit donc $\int D^{n-1}d\varphi\cos\lambda\varphi=\pi M(\lambda)$, et on aura

$$P(\lambda)=\frac{n.n+1.n+2\ldots..n+\lambda-1}{\lambda-n.\lambda-n-1.\lambda-n-2\ldots.1-n}\cdot\frac{M(\lambda)}{(1-a^2)^{2n-1}}.$$

Ainsi tout se réduit à trouver la quantité $M(\lambda)$ pour les deux valeurs $\lambda=0$, $\lambda=1$, et on aura les deux coefficiens cherchés :

$$P_0=\frac{M_0}{(1-a^2)^{2n-1}},\quad P_1=-\frac{n}{n-1}\cdot\frac{M_1}{(1-a^2)^{2n-1}}.$$

Or quelque petit que soit $1-a$, on pourra toujours trouver par les quadratures, des valeurs aussi approchées qu'on voudra de M_0 et M_1; mais pour faciliter les calculs, il sera bon de supposer $n>1$, afin que l'ordonnée $D^{n-1}\cos\lambda\varphi$ de la courbe à quarrer, reste très-petite lorsque $\varphi=0$, ce qui n'arriverait pas si n était <1. Cette condition au reste est facile à remplir dans tous les cas; car on verra bientôt que le développement de D^{-n} peut toujours

jours se déduire, par un calcul très-simple, du développement de D^{-n-1}.

160. Il y a encore une autre manière de calculer les coefficiens $P(\lambda)$, laquelle a l'avantage de réussir également lorsque a est très-petit et lorsqu'il est très-près de l'unité. Supposons qu'on veuille prolonger la suite P_0, P_1, P_2, etc. jusqu'au terme $P_{(m)}$; on calculera directement les valeurs de $A(m-1)$ et $A(m)$, par l'une ou l'autre des formules

$$A(\lambda)=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n+\lambda}{\lambda+1}a^2+\frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{n+\lambda.n+\lambda+1}{\lambda+1.\lambda+2}a^4+\text{etc.},$$

(9)

$$A(\lambda)=(1-a^2)^{1-2n}\left(1+\frac{1-n}{1}\cdot\frac{\lambda+1-n}{\lambda+1}a^2+\frac{1-n.2-n}{1.2}\cdot\frac{\lambda+1-n.\lambda+2-n}{\lambda+1.\lambda+2}a^4+\text{etc.}\right).$$

Ces deux termes étant connus, on en déduira tous les précédens, depuis $A(m-2)$, $A(m-3)$...... jusqu'à A_0, au moyen de la formule (5) qui donne

$$A(\lambda-1)=A(\lambda)+a^2[A(\lambda)-A(\lambda+1)]+\frac{n^2-n}{\lambda^2(\lambda+1)}a^2A(\lambda+1).$$

Il ne restera plus qu'à substituer ces valeurs dans la formule

$$D^{-n}=A_0+2a.\frac{n}{1}A_1\cos\varphi+2a^2.\frac{n.n+1}{1.2}A_2\cos 2\varphi$$
$$+2a^3.\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}A_3\cos 3\varphi+\text{etc.},$$

et on aura le développement cherché de D^{-n}.

Dans cette méthode, les quantités A_0, A_1, A_2, etc. sont évaluées avec un degré presqu'égal d'exactitude, parce que la formule dont on fait usage ne permet pas que l'erreur augmente beaucoup en calculant les premiers termes par les deux derniers. Il arrivera donc que les coefficiens successifs P_0, P_1, P_2, etc. seront déterminés de plus en plus exactement à mesure que la série se prolonge plus loin; car les erreurs absolues étant les mêmes à peu près sur les coefficiens $A(\lambda)$, elles seront atténuées progressivement dans le rapport de 1 à a, sur les coefficiens $P(\lambda)$.

161. Ayant représenté le développement de D^{-n} par la formule

$$D^{-n} = P_0 + 2P_1 \cos\varphi + 2P_2 \cos 2\varphi + 2P_3 \cos 3\varphi + \text{etc.},$$

supposons qu'on ait semblablement

$$D^{-n-1} = Q_0 + 2Q_1 \cos\varphi + 2Q_2 \cos 2\varphi + 2Q_3 \cos 3\varphi + \text{etc.},$$

$Q(\lambda)$ étant la même fonction de $n+1$ que $P(\lambda)$ est de n. Nous allons faire voir que ces deux suites se déduisent aisément l'une de l'autre.

En effet, si on différentie la quantité $V = \frac{\sin\lambda\varphi}{D^n}$, on aura

$$dV = \lambda . \frac{d\varphi \cos\lambda\varphi}{D^n} + na . \frac{d\varphi \cos(\lambda+1)\varphi}{D^{n+1}} - na . \frac{d\varphi \cos(\lambda-1)\varphi}{D^{n+1}};$$

intégrant de part et d'autre depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \pi$, et observant que dans ces limites V s'évanouit, il viendra, d'après l'équation (1),

$$0 = \lambda P(\lambda) + na\,[Q(\lambda+1) - Q(\lambda-1)],$$

ce qui donne

$$P(\lambda) = \frac{na}{\lambda}[Q(\lambda-1) - Q(\lambda+1)]: \tag{10}$$

ainsi on a successivement

$$P_1 = na(Q_0 - Q_2),$$
$$P_2 = \frac{na}{2}(Q_1 - Q_3),$$
$$P_3 = \frac{na}{3}(Q_2 - Q_4),$$
$$\text{etc.}$$

A l'égard du premier terme P_0, il n'est point déterminé par cette formule; mais comme on a $D^{-n} = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)\,D^{-n-1}$, si on multiplie la suite $Q_0 + 2Q_1 \cos\varphi + \text{etc.}$ par $1 + a^2 - 2a\cos\varphi$, et qu'on réduise les produits de cosinus en cosinus linéaires, on trouvera que le terme indépendant de φ est $(1+a^2)\,Q_0 - 2aQ_1$, et qu'ainsi on a

$$P_0 = (1 + a^2)\,Q_0 - 2aQ^1. \tag{11}$$

Ces formules offrent, comme on voit, un moyen très-facile de déduire les coefficiens P_0, P_1, P_2, etc. qui répondent à l'exposant n, des coefficiens supposés connus Q_0, Q_1, Q_2, etc. qui répondent à l'exposant $n+1$.

162. Réciproquement si on veut déduire les coefficiens $Q(\lambda)$ qui répondent à l'exposant $n+1$, des coefficiens $P(\lambda)$ qui répondent à l'exposant n, il faudra d'abord déterminer Q_0 et Q_1 au moyen des trois équations

$$P_0 = (1+a^2)\,Q_0 - 2aQ_1,$$
$$P_1 = na\,(Q_0 - Q_2),$$
$$(1-n)\,Q_2 = \frac{1+a^2}{a}\,Q_1 - (1+n)\,Q_0.$$

Ces équations donnent

$$(1-a^2)^2Q_0 = (1+a^2)P_0 + \frac{n-1}{n}\,2aP_1,$$
$$(1-a^2)^2Q_1 = \qquad 2aP_0 + \frac{n-1}{n}\,(1+a^2)P_1,$$

ou plus simplement encore

$$(12)\qquad \begin{aligned} Q_0 + Q_1 &= \frac{P_0 + \frac{n-1}{n}P_1}{(1-a)^2} \\ Q_0 - Q_1 &= \frac{P_0 - \frac{n-1}{n}P_1}{(1+a)^2} \end{aligned}$$

Connaissant Q_0 et Q_1, on calculera les termes suivans Q_2, Q_3, etc., au moyen de l'équation (4), dans laquelle il faudra changer n en $n+1$ et $P(\lambda)$ en $Q(\lambda)$, ce qui donnera

$$(13)\qquad (\lambda-n)\,Q(\lambda+1) = \frac{1+a^2}{a}\,\lambda Q(\lambda) - (\lambda+n)Q(\lambda-1).$$

163. Mais on peut pour le même objet contruire des formules plus commodes et qui serviront à calculer immédiatement les coefficiens $Q(\lambda)$, $Q(\lambda+1)$, par le moyen des coefficiens correspondans $P(\lambda)$, $P(\lambda+1)$, $P(\lambda-1)$.

Pour cela je tire de l'équation (10),

$$\lambda P(\lambda) = na[Q(\lambda-1) - Q(\lambda+1)],$$
$$(\lambda+1)P(\lambda+1) = na[Q(\lambda) - Q(\lambda+2)].$$

D'ailleurs l'équation (13) donne

$$(\lambda - n)\, Q(\lambda+1) = \frac{1+a^2}{a}\lambda Q(\lambda) - (\lambda+n)Q(\lambda-1),$$

$$(\lambda+1-n)Q(\lambda+2) = \frac{1+a^2}{a}(\lambda+1)Q(\lambda+1) - (\lambda+1+n)Q(\lambda).$$

De là résultent deux valeurs de $Q(\lambda)$ exprimées, l'une par les deux termes $P(\ )$, $P(\lambda+1)$, l'autre par les deux termes $P(\lambda-1)$, $P(\ )$; ces valeurs sont

$$(14)\qquad \begin{aligned} Q(\lambda) &= \frac{(\lambda+n)(1+a^2)P(\lambda) - (\lambda+1-n)2aP(\lambda+1)}{n(1-a^2)^2},\\ Q(\lambda) &= \frac{(\lambda+n-1)2aP(\lambda-1) - (\lambda-n)(1+a^2)P(\lambda)}{n(1-a^2)^2}. \end{aligned}$$

La combinaison de ces deux formules en donne une troisième plus commode dans la pratique, savoir :

$$(15)\quad Q(\lambda) = \frac{a}{n(1-a^2)^2}\left[\left(\lambda + \frac{n(n-1)}{\lambda} + 2n - 1\right)P(\lambda-1) - \left(\lambda + \frac{n(n-1)}{\lambda} - 2n + 1\right)P(\lambda+1)\right].$$

Dans le cas de $n = \frac{1}{2}$, cette formule se simplifie et donne ce résultat remarquable,

$$(16)\qquad Q(\lambda) = \frac{a}{(1-a^2)^2}\left(2\lambda - \frac{1}{2\lambda}\right)[P(\lambda-1) - P(\lambda+1)].$$

164. Nous observerons que les équations (14) peuvent se mettre sous la forme suivante, plus commode pour le calcul numérique,

$$(17)\qquad \begin{aligned} Q(\lambda) + Q(\lambda+1) &= \frac{(\lambda+n)P(\lambda) - (\lambda+1-n)P(\lambda+1)}{n(1-a)^2},\\ Q(\lambda) - Q(\lambda+1) &= \frac{(\lambda+n)P(\lambda) + (\lambda+1-n)P(\lambda+1)}{n(1+a)^2}. \end{aligned}$$

Dans le cas de $n = \frac{1}{2}$, ces formules se simplifient encore et deviennent

$$(18)\qquad \begin{aligned} Q(\lambda) + Q(\lambda+1) &= \frac{2\lambda+1}{(1-a)^2}[P(\lambda) - P(\lambda+1)],\\ Q(\lambda) - Q(\lambda+1) &= \frac{2\lambda+1}{(1+a)^2}[P(\lambda) + P(\lambda+1)]. \end{aligned}$$

Le cas de $n = \frac{1}{2}$ qui donne lieu à diverses simplifications, est celui qui s'applique spécialement au calcul des perturbations des planètes; il est susceptible d'être résolu complètement par les fonctions elliptiques.

165. En effet, si l'on suppose $\varphi = \pi - 2\psi$ et $c^2 = \frac{4a}{(1+a)^2}$, on aura $D = (1+a)^2(1-c^2\sin^2\psi)$, et les valeurs de P_0 et P_1, données par la formule (1), seront

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\pi}\int\frac{2d\psi}{(1+a)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}, \\ P_1 &= -\frac{1}{\pi}\int\frac{2d\psi\cos 2\psi}{(1+a)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}; \end{aligned} \qquad \begin{cases}\psi = 0 \\ \psi = \frac{1}{2}\pi\end{cases}$$

or, par les formules de la première Partie, on trouve

$$(19) \qquad \begin{aligned} P_0 &= \frac{2F^1c}{(1+a)}, \\ P_1 &= \frac{(1+a^2)F^1c - (1+a)^2E^1c}{\pi a(1+a)}. \end{aligned}$$

Les fonctions complètes F^1c, E^1c sont rapportées au module c; mais il conviendra de les exprimer par des fonctions semblables rapportées au module $c^\circ = a$, puisqu'on a $c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$. Or par les formules de la page 88, première Partie, on a

$$\begin{aligned} F^1c &= (1+c^\circ)F^1c^\circ = (1+a)F^1a, \\ E^1c &= (1+b)E^1c^\circ - bF^1c = \frac{2}{1+a}E^1a - (1-a)F^1a, \end{aligned}$$

valeurs qui, étant substituées dans les formules (19), donnent plus simplement

$$(20) \qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{2}P_0 &= F^1a, \\ \frac{\pi}{2}P_1 &= \frac{1}{a}(F^1a - E^1a). \end{aligned}$$

166. Nous rappellerons ici que pour calculer les quantités F^1a, E^1a, il faut d'abord former la suite décroissante a, a°, $a^{\circ\circ}$, $a^{\circ\circ\circ}$, etc., par la même loi que la suite des modules c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc. Faisant

ensuite

$$K = \frac{2\sqrt{a^\circ}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}{a^\circ} \cdot \frac{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}{a^{\circ\circ}} \text{ . etc.},$$

$$H = K\left(\frac{a^\circ}{2} + \frac{a^\circ a^{\circ\circ}}{4} + \frac{a^\circ a^{\circ\circ} a^{\circ\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right),$$

on aura, suivant les formules démontrées dans la première Partie,

$$F^1 a = \frac{\pi}{2} K,$$

$$E^1 a = \frac{\pi}{2} K\left(1 - \tfrac{1}{2} a^2\right) - \frac{\pi}{2} H \cdot \tfrac{1}{2} a^2.$$

De là résultent ces valeurs très-simples des deux premiers coefficiens P_0, P_1,

$$P_0 = K,$$

$$P_1 = \frac{a}{2}(K + H);$$

ensuite par l'équation (4) on trouve le troisième coefficient

$$P_2 = \tfrac{2}{3} a P_1 + \tfrac{1}{3} H.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (12) et (13), on en déduira les valeurs suivantes des trois premiers coefficiens Q_0, Q_1, Q_2, nécessaires au développement de $D^{-\frac{3}{2}}$,

$$Q_0 = \frac{K - a^2 H}{(1 - a^2)^2},$$

$$Q_2 = Q_0 - K - H,$$

$$Q_1 = \frac{\frac{1}{2} Q_2 + \frac{3}{2} Q_0}{a + \frac{1}{a}}.$$

Ces formules sont disposées de manière à rendre le calcul numérique des premiers coefficiens aussi facile qu'il est possible. Nous en donnerons bientôt des exemples.

Les valeurs précédentes supposent que la différence $1 - a$ n'est pas très-petite, et dans cette hypothèse on n'aura jamais à calculer qu'un petit nombre de termes de la suite a, a°, $a^{\circ\circ}$, etc., pour parvenir à des résultats aussi approchés qu'on voudra. S'il arrivait que $1-a$ fût très-petit, on ferait usage des formules (19), où $1-c$ est encore beaucoup plus petit que $1-a$, et on substituerait dans ces formules les valeurs de F^1c et E^1c, calculées suivant les méthodes que prescrit pour ce cas la théorie des fonctions elliptiques.

167. Nous avons fait voir quels sont les procédés les plus simples pour calculer les divers coefficiens $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, qui servent à développer les deux puissances consécutives D^{-n}, D^{-n-1}. Si on avait à développer un plus grand nombre de puissances successives, telles que D^{-m}, D^{-m-1}, D^{-m-2}, D^{-m-3}, on commencerait par la puissance la plus élevée, et faisant $n=m+3$, on calculerait les coefficiens successifs P_0, P_1, P_2, etc., qui répondent à cette valeur de n.

Connaissant le développement de D^{-n}, il faudra en déduire successivement celui des puissances précédentes D^{-n+1}, D^{-n+2}, etc. Pour cela il faut observer que si on a égard à la variabilité de n, la fonction $P(\lambda)$ devient une fonction de deux variables et devra être désignée par $P(\lambda, n)$. Or les coefficiens $P(\lambda, n-1)$ se déduisent des coefficiens $P(\lambda, n)$ au moyen de la formule (10), qui peut être exprimée ainsi :

$$(21) \qquad P(\lambda, n-1) = \frac{(n-1)a}{\lambda}[P(\lambda-1, n) - P(\lambda+1, n)].$$

Cette formule ne ferait pas connaître la valeur de $P(0, n-1)$; on y supplée par l'équation (11), qui donne

$$(22) \qquad P(0, n-1) = (1+a^2)P(0, n) - 2aP(1, n).$$

Au moyen de ces deux formules on déterminera les coefficiens $P(\lambda, n-1)$, en supposant connus les coefficiens $P(\lambda, n)$; on calculera de même les coefficiens $P(\lambda, n-2)$, par le moyen des coefficiens $P(\lambda, n-1)$, et ainsi en rétrogradant, jusqu'à ce qu'on ait les coefficiens de toutes les puissances de D dont on demande le développement.

Nous proposons de commencer par la puissance la plus haute, parce que les puissances inférieures se déduisent avec facilité des supérieures, au moyen des formules (21) et (22).

168. On pourra aussi, si on le juge à propos, suivre une marche

inverse, c'est-à-dire calculer les coefficiens $P(\lambda, n+1)$ par le moyen des coefficiens $P(\lambda, n)$ supposés connus. C'est ce qu'on exécutera par les formules (17), qui peuvent être mises sous cette forme :

$$(23)\qquad \begin{aligned} P(\lambda, n+1)+P(\lambda+1, n+1) &= \frac{(\lambda+n)P(\lambda, n)-(\lambda+1-n)P(\lambda+1, n)}{n(1-a)^2}, \\ P(\lambda, n+1)-P(\lambda+1, n+1) &= \frac{(\lambda+n)P(\lambda, n)+(\lambda+1-n)P(\lambda+1, n)}{n(1+a)^2}. \end{aligned}$$

Il est visible que les mêmes formules serviront à déduire les coefficiens $P(\lambda, n+2)$ des coefficiens $P(\lambda, n+1)$; ainsi le développement connu de D^{-n} fera connaître le développement des puissances successives D^{-n}, D^{-n-1}, D^{-n-2}, etc.

169. On a vu que deux transcendantes connues dans la suite P_0, P_1, P_2, etc., suffisent pour déterminer toutes les autres représentées par $P(\lambda)$ ou $P(\lambda, n)$, et par conséquent pour avoir le développement complet de D^{-n}. Ces deux mêmes transcendantes suffiront donc aussi pour déterminer tous les coefficiens représentés par $P(\lambda, n\pm k)$, et par conséquent pour avoir le développement de la puissance $D^{-n\pm k}$, k étant un entier quelconque.

De plus, si l'on compare entr'elles les deux valeurs de $A(\lambda)$ ou $A(\lambda, n)$, données par les formules (9), on trouvera immédiatement

$$A(\lambda, n) = (1-a^2)^{1-2n} A(\lambda, 1-n);$$

d'où résulte la formule

$$(24)\qquad \frac{P(\lambda, n)}{P(\lambda, 1-n)} = \frac{n . n+1 . n+2 \ldots . n+\lambda-1}{1-n . 2-n . 3-n \ldots . \lambda-n}(1-a^2)^{1-2n},$$

laquelle revient à l'équation générale de la page 376, III^e Partie. En vertu de ce théorème, on connaîtra toujours exactement le rapport des deux fonctions $P(\lambda, n)$, $P(\lambda, 1-n)$; de sorte que l'une peut être déterminée par l'autre. Ainsi le développement de D^{-1+n} peut être déduit immédiatement du développement de D^{-n}, et réciproquement.

Donc les deux transcendantes qui suffisent pour déterminer en général les diverses valeurs du coefficient $P(\lambda, n)$, suffiront aussi pour

pour déterminer toutes les valeurs du coefficient $P(\lambda, 1-n)$, et par conséquent encore toutes celles du coefficient $P(\lambda, \pm k-n)$, k étant un nombre entier quelconque.

Combinant ce résultat avec celui qu'on a déjà trouvé, on voit que les deux transcendantes qui servent à former le développement complet de D^{-n}, suffisent en même temps à former le développement tant de la puissance $D^{-n\pm k}$ que de la puissance $D^{n\pm k}$, k étant un entier quelconque.

Voici maintenant quelques exemples qui serviront à faire voir plus clairement l'usage de nos formules.

170. *Exemple I.* Soit $a=\frac{1}{10}$, et soit proposé de développer les deux puissances $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$; le tableau suivant donne les valeurs des coefficiens successifs, jusqu'à ce qu'ils deviennent trop petits pour entrer dans le 10^{me} ordre de décimales.

λ	$P(\lambda, \frac{1}{2})$.	$P(\lambda, \frac{3}{2})$.
0	1.00251 41609 100	1.02285 64089 598
1	0.05018 86804 878	0.15285 40606 972
2	0.00376 57283 143	0.01908 27992 044
3	31 38764 871	222 49281 242
4	2 74676 494	25 02099 791
5	24722 960	2 75161 704
6	2266 407	29803 823
7	210 461	3192 836
8	19 732	339 203
9	1 864	35 758
10		3 759

Les termes de la seconde colonne ont été calculés par la formule (2), en faisant $n=\frac{3}{2}$, et donnant à λ les valeurs paires 0, 2, 4, 6, 8, 10; on en a déduit les termes intermédiaires par la formule de l'art. 158.

La seconde colonne étant ainsi formée, on s'en est servi pour calculer la première au moyen des formules (21) et (22). On connaît donc par ce petit tableau, le développement des deux puissances consécutives $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$, pour le cas de $a=\frac{1}{10}$; de manière que l'erreur de la série ne pourra jamais s'élever à une unité décimale du dixième ordre.

171. *Exemple II.* Soit $a=\frac{1}{2}$, et soit proposé de développer les deux puissances $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$.

On pourrait exécuter les calculs comme dans l'exemple précédent, parce que les suites tirées de la formule (2) seraient encore suffisamment convergentes; mais si on veut obtenir des résultats exacts jusqu'à la douzième décimale environ, on y parviendra plus promptement par les formules de l'art. 166.

En prenant pour module $a=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, la théorie des fonctions elliptiques donne les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} K &= 1.07318\ 20071\ 494, \\ H &= 0.03855\ 03887\ 041; \end{aligned}$$

de là on déduit, par les formules de l'article cité,

$P(0,\frac{1}{2}) = 1.07318\ 20071\ 494$	$P(0,\frac{3}{2}) = 1.89074\ 56177\ 307$
$P(1,\frac{1}{2}) = 0.27793\ 30989\ 634$	$P(1,\frac{3}{2}) = 1.29025\ 00150\ 137$
$P(2,\frac{1}{2}) = 0.10549\ 44958\ 892$	$P(2,\frac{3}{2}) = 0.77901\ 32218\ 770$

On continuera le calcul des quantités $P(\lambda,\frac{3}{2})$ par la formule

$$(2\lambda-1)\,P(\lambda+1,\tfrac{3}{2}) = 5\lambda P(\lambda,\tfrac{3}{2}) - (2\lambda+1)\,P(\lambda-1,\tfrac{3}{2}),$$

et on en déduira les valeurs de $P(\lambda,\frac{1}{2})$ par la formule (21), ce qui donnera les séries de ces coefficiens, comme on les voit dans le tableau suivant.

λ	$P(\lambda, \frac{1}{2})$.	$P(\lambda, \frac{3}{2})$.
0	1.07318 20071 494	1.89074 56177 305
1	0.27793 30989 634	1.29025 00150 137
2	0.10549 44958 892	0.77901 32218 770
3	0.04422 91324 002	0.44629 40479 008
4	0.01942 35009 368	0.24826 36330 744
5	0.00876 28991 039	0.13551 80329 115
6	0.00402 37244 696	0.07300 56509 967
7	0.00187 07572 266	0.03894 86456 410
8	0.00087 78723 217	0.02062 44486 525
9	0.00041 49137 923	0.01085 67313 472
10	0.00019 72258 518	0.00568 75521 305
11	0.00009 41871 684	0.00296 76972 755
12		0.00154 33167 215

172. On peut vérifier ces résultats en calculant les derniers termes $P(11, \frac{1}{2})$, $P(12, \frac{3}{2})$ par la formule (2), ou encore mieux par la valeur de $P(\lambda)$ que fournit l'équation (7), savoir :

$$P(\lambda) = \frac{n.n+1\ldots n+\lambda-1}{1.2\ldots\lambda} \cdot \frac{a^\lambda}{(1-a^2)^n}\Big(1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{\lambda+1} \cdot \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{n-1.n-2}{1.2} \cdot \frac{n.n+1}{\lambda+1.\lambda+2} \cdot \frac{a^4}{(1-a^2)^2} + \text{etc}\Big). \tag{25}$$

On trouvera de cette manière, en poussant l'approximation jusqu'à la treizième décimale,

$$P(11, \tfrac{1}{2}) = 0.00009\ 41871\ 680,$$
$$P(12, \tfrac{3}{2}) = 0.00154\ 33167\ 407.$$

L'erreur des résultats précédens ne se fait donc remarquer que dans le 11^me^ ordre de décimales sur $P(12, \frac{3}{2})$, et dans le 13^me^ seulement sur $P(11, \frac{1}{2})$. Elle pourrait être plus considérable, sans qu'il y eût une erreur d'une unité sur la dernière décimale des valeurs de P_0, P_1, P_2, d'où l'on a déduit toutes les suivantes P_3, P_4, etc., parce que la formule (4) qui sert à faire ces calculs, a l'inconvénient, comme nous l'avons déjà remarqué, de faire croître les erreurs absolues suivant une progression à peu près géométrique dont la raison est au moins $\frac{1}{a}$; d'où il suit qu'après un nombre de termes peu considérable, les résultats deviendraient entièrement défectueux. C'est au reste ce qu'on éviterait en suivant la route indiquée art. 160, mais les calculs seraient plus longs.

En jetant un coup d'œil sur le tableau précédent, on voit que les deux séries tendent de plus en plus à se confondre avec une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$ ou a. On prévoit dès-lors de quelle grandeur à peu près seraient des termes beaucoup plus éloignés, tels que $P(21, \frac{1}{2})$, $P(22, \frac{1}{2})$; ces termes se trouveront directement, et avec une approximation assez grande, par la formule (8) qui donne

$$P(21, \tfrac{1}{2}) = 0.00000\ 00671\ 35,$$
$$P(22, \tfrac{3}{2}) = 0.00000\ 141203.$$

On voit de cette manière jusqu'où il faut prolonger les deux suites, pour que les termes deviennent plus petits qu'une limite donnée.

173. *Exemple III.* Soit $a = 0.7233323$, et soit proposé de développer jusqu'à neuf ou dix termes les puissances $D^{-\frac{1}{2}}$, $D^{-\frac{3}{2}}$.

On calculera d'abord, par la théorie des fonctions elliptiques, les modules décroissans a, a°, $a^{\circ\circ}$, etc., et leurs complémens b, b°, $b^{\circ\circ}$, etc.; ce qui donnera les logarithmes suivans :

a......	9.85933 78587 0774	b......	9.83916 37438 4132
a°.....	9.26264 53174 3980	b°.....	9.99259 66675 9680
$a^{\circ\circ}$....	7.93060 24235 4992	$b^{\circ\circ}$....	9.99998 42237 9754
$a^{\circ\circ\circ}$....	5.25916 06318 3109	$b^{\circ\circ\circ}$....	9.99999 99999 2837
$a^{\circ\circ\circ\circ}$...	$\bar{7}$.92323 06436 2327	$b^{\circ\circ\circ\circ}$...	0.00000 00000 0000

On voit que, quoique a soit assez près de l'unité, il ne faut cependant prolonger la suite des modules que jusqu'au quatrième terme, pour avoir les quantités cherchées K et H approchées jusqu'à la quatorzième décimale.

Calculant en effet ces quantités par les formules $K = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \cdot b^{\circ} b^{\circ\circ} b^{\circ\circ\circ}\right)}$, $H = K\left(\frac{a^{\circ}}{2} + \frac{a^{\circ} a^{\circ\circ}}{4} + \frac{a^{\circ} a^{\circ\circ} a^{\circ\circ\circ}}{8}\right)$, on aura

$$\begin{aligned} \log K &= 0.07670\ 85737\ 4070, \\ K &= 1.19318\ 71668\ 9482, \\ H &= 0.10969\ 09424\ 8484. \end{aligned}$$

En partant de ces valeurs, et suivant la même marche que dans l'exemple précédent, nous avons formé le tableau suivant qui contient les valeurs des coefficiens calculés avec dix décimales, jusqu'au neuvième ou dixième terme.

λ	$P(\lambda, \frac{1}{2})$.	$P(\lambda, \frac{3}{2})$.
0	1.19318 71669	4.99626 29528
1	0.47120 69097	4.43583 71725
2	0.26378 97663	3.69338 48434
3	0.16167 14479	2.97708 98367
4	0.10339 42358	2.35232 94425
5	0.06779 32599	1.83355 74847
6	0.04518 70701	1.41509 40952
7	0.03047 27436	1.08390 91672
8	0.02073 00563	0.82529 82154
9		0.62536 34889

Le peu de convergence de ces séries exigerait qu'elles fussent poussées très-loin, pour que les coefficiens devinssent négligeables. On on jugera par la formule (8) qui, étant appliquée au cas de $\lambda = 50$, donne

$$\begin{aligned} P(50, \tfrac{1}{2}) &= 0.00000\ 00105\ 733, \\ P(50, \tfrac{3}{2}) &= 0.00000\ 11659\ 555. \end{aligned}$$

174. Puisque la théorie des fonctions elliptiques peut faciliter beaucoup la détermination des coefficiens $P(\lambda, \frac{1}{2})$ et $P(\lambda, \frac{3}{2})$, dans le cas où a est très-peu différent de l'unité, il importe d'examiner avec soin les conséquences ultérieures qu'on pourrait déduire de cette théorie.

Soit donc proposé la quantité $D^{\frac{1}{2}} = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$; je fais $\varphi = 2\psi - \pi$, $c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, et j'ai $D^{\frac{1}{2}} = (1+a)(1 - c^2 \sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}$, ou $D^{\frac{1}{2}} = (1+a)\,\Delta$, en faisant $\Delta = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}$.

Du module c qui a pour complément $b = \sqrt{(1-c^2)}$, on déduit le module suivant c° par la formule $c^\circ = \frac{1-b}{1+b}$, laquelle donne dans ce cas $c^\circ = a$, et son complément $b^\circ = \sqrt{(1-a^2)}$. Si ensuite on prend une nouvelle amplitude ψ° qui satisfasse à l'équation trigonométrique $\tang(\psi^\circ - \psi) = b \tang \psi$, ou qui soit donnée par la suite

$$\psi^\circ = 2\psi - a\sin 2\psi + \tfrac{1}{2}a^2\sin 4\psi - \tfrac{1}{3}a^3 \sin 6\psi + \text{etc.},$$

on aura la transformée suivante, où Δ° représente $\sqrt{(1 - c^{\circ 2}\sin^2\psi^\circ)}$,

$$\Delta = \frac{c^\circ\cos\psi^\circ + \Delta^\circ}{1+c^\circ};$$

de là on tire, en observant que $c^\circ = a$,

$$(26)\qquad \begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} &= \Delta^\circ + a\cos\psi^\circ, \\ D^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta^\circ - a\cos\psi^\circ}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Mais si on fait $a^\circ = \frac{1-\sqrt{(1-a^2)}}{1+\sqrt{(1-a)}}$, $D^\circ = 1 + a^{\circ 2} - 2a^\circ\cos\varphi^\circ$, $\varphi^\circ = 2\psi^\circ - \pi$, on aura semblablement $(D^\circ)^{\frac{1}{2}} = (1+a^\circ)\,\Delta^\circ$, ou $\Delta^\circ = \frac{\sqrt{D^\circ}}{1+a^\circ}$; donc $D^{-\frac{1}{2}}$ ou

$$(27)\qquad (1+a^2-2a\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1+a^{\circ 2}-2a^\circ\cos\varphi^\circ)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{a^\circ}.\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ}{(1-a)(1+a^\circ)}.$$

175. La relation directe entre φ° et φ, par laquelle on obtient

cette transformation, est contenue dans l'équation

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^\circ\right) = b \cot \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Mais pour qu'il n'y ait pas lieu à ambiguité, quand on veut déterminer φ° par le moyen de φ, il faut imaginer que l'arc φ augmente indéfiniment depuis la valeur zéro jusqu'à tant de circonférences qu'on voudra. Cela posé, l'arc φ° devra satisfaire à l'équation $\sin\left(\varphi + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi^\circ\right) = a \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi^\circ\right)$; d'où l'on voit qu'en désignant par θ le plus petit des arcs qui ont a pour sinus, la quantité $\varphi + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\varphi^\circ$ sera toujours renfermée entre les limites $+\theta$ et $-\theta$, de sorte qu'on pourra supposer $\varphi^\circ = 2\varphi + \pi + \theta \sin A$, A étant un angle qui varie avec φ; c'est aussi ce qui résulte de la série

$$\tfrac{1}{2}\varphi^\circ = \tfrac{1}{2}\pi + \varphi + a \sin\varphi + \tfrac{1}{2}a^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}a^3 \sin 3\varphi + \text{etc.}$$

Maintenant comme a° sera toujours plus petit que a, puisqu'on a $a^\circ = \frac{1-\sqrt{(1-a^2)}}{1+\sqrt{(1-a^2)}}$, la fonction $(D^\circ)^{\frac{1}{2}}$ se développera en une suite

$$L_0 + 2L_1 \cos\varphi^\circ + 2L_2 \cos 2\varphi^\circ + 2L_3 \cos 3\varphi^\circ + \text{etc.},$$

dans laquelle le coefficient $L(k)$ est en général la valeur de la fonction $P(k, n)$, lorsqu'on fait $n = -\tfrac{1}{2}$ et qu'on met a° au lieu de a.

Dans le cas de l'exemple III, on a $a^\circ = 0.18308$; ainsi la suite L_0, L_1, L_2, etc. doit être fort convergente; on trouve en effet le terme $L_{10} = 0.00000\,00007\,733$.

Cette suite étant trouvée, le développement de $D^{-\frac{1}{2}}$, ordonné suivant les cosinus des multiples de φ°, sera

$$(28)\quad D^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1-a^2)(1+a^\circ)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} L_0 + 2L_1 \cos\varphi^\circ + 2L_2 \cos 2\varphi^\circ + 2L_3 \cos 3\varphi^\circ + \text{etc.} \\ + 2\sqrt{a^\circ} . \sin \tfrac{1}{2}\varphi^\circ \end{array} \right\}$$

On pourrait, pour plus de symétrie, mettre au lieu du terme $2\sqrt{a^\circ} . \sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ$, sa valeur

$$\frac{4\sqrt{a^\circ}}{\pi}\left(1 - \frac{2\cos\varphi^\circ}{1.3} - \frac{2\cos 2\varphi^\circ}{3.5} - \frac{2\cos 3\varphi^\circ}{5.7} - \text{etc.}\right);$$

mais cette suite n'étant pas suffisamment convergente, il vaut mieux ne rien changer à la formule.

176. Si on voulait avoir le développement de $D^{-\frac{3}{2}}$, on le déduirait aisément de l'équation $(1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = \Delta^\circ - a\cos\psi^\circ$, qui, étant élevée au cube, donne

$$(1-a^2)^3 D^{-\frac{3}{2}} = \Delta^\circ(\Delta^{\circ 2} + 3a^2\cos^2\psi^\circ) - a\cos\psi^\circ(3\Delta^{\circ 2} + a^2\cos^2\psi^\circ).$$

Mais on a $\Delta^{\circ 2} = 1 - a^2 + a^2\cos^2\psi^\circ$, d'où

$$\Delta^\circ(\Delta^{\circ 2} + 3a^2\cos^2\psi^\circ) = 3\Delta^{\circ 3} - 3(1-a^2)\Delta^\circ,$$
$$a\cos\psi^\circ(3\Delta^{\circ 2} + a^2\cos^2\psi^\circ) = a^3\cos 3\psi^\circ + 3a\cos\psi^\circ;$$

donc

$$(1-a^2)^3 D^{-\frac{3}{2}} = 4\Delta^{\circ 3} - 3(1-a^2)\Delta^\circ + 3a\cos\psi^\circ + a^3\cos 3\psi^\circ.$$

Substituant les valeurs $\Delta^\circ = \frac{(D^\circ)^{\frac{1}{2}}}{1+a^\circ}$, $\psi^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi^\circ$, il vient enfin,

$$(1-a^2)^3 D^{-\frac{3}{2}} = \frac{4(D^\circ)^{\frac{3}{2}}}{(1+a^\circ)^3} - \frac{3(1-a^2(D^\circ)^{\frac{1}{2}}}{1+a^\circ} - 3a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ + a^3\sin\tfrac{3}{2}\varphi^\circ.$$

Or on a déjà fait $(D^\circ)^{\frac{1}{2}} = L_0 + 2L_1\cos\varphi^\circ + 2L_2\cos 2\varphi^\circ + 2L_3\cos 3\varphi^\circ + \text{etc.}$; supposons qu'on ait semblablement

$$(D^\circ)^{\frac{3}{2}} = M_0 + 2M_1\cos\varphi^\circ + 2M_2\cos 2\varphi^\circ + 2M_3\cos 3\varphi^\circ + \text{etc.},$$

on pourra déterminer les coefficiens M_0, M_1, M_2, etc. d'après les formules (8) qui donnent :

$$M_0 = (1 + a^{\circ 2})L_0 - 2a^\circ L_1,$$
$$M_1 = -\tfrac{3}{2}a^\circ(L_0 - L_2),$$
$$M_2 = -\tfrac{3}{4}a^\circ(L_1 - L_3),$$
$$M_3 = -\tfrac{3}{6}a^\circ(L_2 - L_4),$$
etc.

On connaîtra donc le développement de $D^{-\frac{3}{2}}$ par l'équation

$(1-a^2)^3$

$$(1-a^2)^3 D^{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{(1+a^\circ)^3}(M_0+2M_1\cos\varphi^\circ+2M_2\cos 2\varphi^\circ+2M_3\cos 3\varphi^\circ+\text{etc})$$

$$(29) \qquad -\frac{3(1-a^2)}{1+a^\circ}(L_0+2L_1\cos\varphi^\circ+2L_2\cos 2\varphi^\circ+2L_3\cos 3\varphi^\circ+\text{etc.})$$

$$-3a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ+a^3\sin\tfrac{3}{2}\varphi^\circ\,,$$

et ces séries exprimées par l'angle φ°, seront en général beaucoup plus convergentes que celles qui sont exprimées immédiatement par l'angle φ.

177. On pourrait ultérieurement réduire le développement de $D^{-\frac{1}{2}}$ à celui de $(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}}$, dans lequel les coefficiens décroîtraient encore plus rapidement, puisque $a^{\circ\circ}$ est beaucoup plus petit que a°, et il serait facile de continuer à volonté ces réductions. On a en effet les équations successives.

$$(1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ + \frac{a}{2\sqrt{a^\circ}}(D^\circ)^{\frac{1}{2}},$$

$$(D^\circ)^{\frac{1}{2}} = -a^\circ\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} + \frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}},$$

$$(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}} = -a^{\circ\circ}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ\circ} + \frac{a^{\circ\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}(D^{\circ\circ\circ})^{\frac{1}{2}},$$

etc.

d'où résultent ces valeurs de $(1-a^2)D^{-\frac{1}{2}}$,

$$(1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ - \frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} + \frac{a}{2\sqrt{a^\circ}}\cdot\frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}(D^{\circ\circ})^{\frac{1}{2}},$$

$$(1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ - \frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} - \frac{a\sqrt{a^\circ a^{\circ\circ}}}{4}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ\circ}$$
$$+\frac{a}{2\sqrt{a^\circ}}\cdot\frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}\cdot\frac{a^{\circ\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}(D^{\circ\circ\circ})^{\frac{1}{2}}$$

etc.

Mais à cause du décroissement très-rapide de la suite a, a°, $a^{\circ\circ}$, $a^{\circ\circ\circ}$, etc., les quantités D°, $D^{\circ\circ}$, $D^{\circ\circ\circ}$, etc. tendront non moins rapidement vers leur limite qui est l'unité; et à ce terme, le produit $\frac{a}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{a^\circ}{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}\cdot\frac{a^{\circ\circ}}{2\sqrt{a^{\circ\circ\circ}}}$.etc. sera ce que nous avons désigné par $\frac{1}{K}$, donc on aura généralement,

$$(30) \quad (1-a^2)D^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{K} + a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^\circ - \frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ} - \frac{a\sqrt{a^\circ a^{\circ\circ}}}{4}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{\circ\circ\circ} - \text{etc.}$$

Cette formule a beaucoup d'analogie avec celle qui donne la valeur d'un arc d'ellipse; elle forme une suite très-convergente dont il suffira toujours de prendre un petit nombre de termes, et au moyen de laquelle on exprimera en quelque sorte rationnellement, la quantité irrationnelle $(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}$. Mais ce développement a l'inconvénient d'être formé avec des variables φ°, $\varphi^{\circ\circ}$, etc., toutes différentes les unes des autres, et par cette raison, la formule est plus curieuse qu'utile. Il n'en est pas de même lorsqu'on s'en tient à la première transformation, et il est permis de croire que l'expression que nous avons donnée de $D^{-\frac{1}{2}}$ en fonction de l'amplitude φ°, pourrait s'appliquer utilement dans quelques cas difficiles de la théorie des perturbations des planètes.

178. Si l'on fait $\varphi=0$, il en résulte $\varphi^\circ=\pi$, $\varphi^{\circ\circ}=3\pi$, $\varphi^{\circ\circ\circ}=7\pi$, etc., et l'équation (30) donne

$$1+a=\frac{1}{K}+a+\frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}+\frac{a\sqrt{a^\circ a^{\circ\circ}}}{4}+\frac{a\sqrt{a^{\circ\circ}a^\circ a^{\circ\circ\circ}}}{8}+\text{etc.}$$

Ainsi on a en général cette valeur de $\frac{1}{K}$:

$$\frac{1}{K}=1-\frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}-\frac{a\sqrt{(a^\circ a^{\circ\circ})}}{4}-\frac{a\sqrt{(a^\circ a^{\circ\circ}a^{\circ\circ\circ})}}{8}-\text{etc.}$$

Cette formule qui résulterait également de la supposition $\varphi=\pi$, peut se déduire facilement des formules déjà connues; en effet on a $a=\frac{2\sqrt{a^\circ}}{1+a^\circ}$, $a^\circ=\frac{2\sqrt{a^{\circ\circ}}}{1+a^{\circ\circ}}$, etc.; ainsi les différens termes de la suite précédente peuvent s'exprimer comme il suit :

$$\frac{a\sqrt{a^\circ}}{2}=\frac{a^\circ}{1+a^\circ},\ \frac{a\sqrt{(a^\circ a^{\circ\circ})}}{4}=\frac{a^{\circ\circ}}{1+a^\circ.1+a^{\circ\circ}},\ \frac{a\sqrt{(a^\circ a^{\circ\circ}a^{\circ\circ\circ})}}{8}=\frac{a^{\circ\circ\circ}}{1+a^\circ.1+a^{\circ\circ}.1+a^{\circ\circ\circ}},\text{etc.}$$

On aura donc

$$\frac{1}{K}=1-\frac{a^\circ}{1+a^\circ}-\frac{a^{\circ\circ}}{1+a^\circ.1+a^{\circ\circ}}-\frac{a^{\circ\circ\circ}}{1+a^\circ.1+a^{\circ\circ}.1+a^{\circ\circ\circ}}-\text{etc.}$$

Cette série, selon qu'on l'arrête au 2me terme, au 3me, au 4me, etc., donne successivement les résultats :

$$\frac{1}{1+a^\circ},\quad \frac{1}{1+a^\circ.1+a^{\circ\circ}},\quad \frac{1}{1+a^\circ.1+a^{\circ\circ}.1+a^{\circ\circ\circ}},\quad \text{etc.}$$

Ainsi on aura en général $K = (1 + a^\circ)(1 + a^{\circ\circ})(1 + a^{\circ\circ\circ})$, etc., ce qui est la valeur connue de cette quantité.

179. Proposons-nous maintenant de trouver les coefficiens différentiels de la fonction $P(\lambda)$, pris par rapport à a.

Puisqu'on a en général $P(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int \frac{dx \cos \lambda\varphi}{D^n}$, si on différentie cette équation par rapport à a, on aura

$$\frac{dP(\lambda)}{da} = -\frac{2n}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos \lambda\varphi}{D^{n+1}}(a - \cos\varphi),$$

ou

$$\frac{dP(\lambda)}{da} = \frac{n}{\pi}\int\left(\frac{d\varphi \cos(\lambda-1)\varphi}{D^{n+1}} + \frac{d\varphi \cos(\lambda+1)\varphi}{D^{n+1}} - \frac{2ad\varphi \cos\lambda\varphi}{D^{n+1}}\right).$$

Appelons comme ci-dessus $Q(\lambda)$ ce que devient la fonction $P(\lambda)$ lorsque n se change en $n+1$, nous aurons

$$(31) \qquad \frac{dP(\lambda)}{da} = n\,[Q(\lambda-1) + Q(\lambda+1) - 2aQ(\lambda)].$$

Ainsi en supposant connus les coefficiens Q_0, Q_1, Q_2, etc. qui appartiennent au développement de D^{-n-1}, on connaîtra les valeurs successives du coefficient différentiel $\frac{dP(\lambda)}{da}$; il n'y a pas même lieu à excepter le cas de $\lambda = 0$, parce qu'alors on a $Q(-1) = Q_1$, et qu'ainsi la formule (31) donne

$$\frac{dP_0}{da} = n\,(2Q_1 - 2aQ_0).$$

180. Si l'on veut déterminer les coefficiens différentiels $\frac{dP(\lambda)}{da}$, sans supposer la connaissance des coefficiens $P(\lambda, n+1)$ qui répondent à l'exposant $n+1$, et que nous avons désignés par $Q(\lambda)$, voici commeut on pourra y parvenir.

L'équation (10) étant mise sous cette forme

$$\frac{\lambda}{n}P(\lambda) = a\,[Q(\lambda-1) - Q(\lambda+1)],$$

si on la différentie par rapport à a, on aura

$$\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{dP(\lambda)}{da} = Q(\lambda-1) - Q(\ \ +1) + a\left[\frac{dQ(\lambda-1)}{da} - \frac{dQ(\lambda+1)}{da}\right];$$

substituant au lieu de $\frac{dP(\lambda)}{da}$, sa valeur donnée par l'équation (31), on trouve

$$\frac{dQ(\lambda-1)}{da}-\frac{dQ(\lambda+1)}{da}=\frac{(\lambda-1)Q(\lambda-1)+(\lambda+1)Q(\lambda+1)}{a}-2\lambda Q(\lambda).$$

Puisque n n'entre pas dans cette équation, on peut mettre $P(\lambda)$ au lieu de $Q(\lambda)$, et on aura également cette formule générale :

$$(32)\quad \frac{dP(\lambda-1)}{da}-\frac{dP(\lambda+1)}{da}=\frac{(\lambda-1)P(\lambda-1)+(\lambda+1)P(\lambda+1)}{a}-2\lambda P(\lambda).$$

Elle donne successivement

$$\frac{dP_0}{da}-\frac{dP_2}{da}=\frac{1}{a}(2P_2)-2P_1,$$
$$\frac{dP_1}{da}-\frac{dP_3}{da}=\frac{1}{a}(P_1+3P_3)-4P_2,$$
$$\frac{dP_2}{da}-\frac{dP_4}{da}=\frac{1}{a}(2P_2+4P_4)-6P_3,$$
etc.;

d'où l'on voit que pour calculer les coefficiens différentiels successifs $\frac{dP_0}{da}, \frac{dP_1}{da}, \frac{dP_2}{da}, \frac{dP_3}{da}$, etc., il suffit de connaître les deux premiers $\frac{dP_0}{da}, \frac{dP_1}{da}$.

181. On a pour cet effet les deux équations

$$\frac{dP_0}{da}=n(2Q_1-2aQ_0),$$
$$\frac{dP_1}{da}=n(Q_0+Q_2-2aQ_1),$$

dans lesquelles il faut substituer les valeurs de Q_0, Q_1, Q_2, exprimées en P_0 et P_1, d'après les équations du n° 162; cette substitution donne

$$\frac{dP_0}{da}=\frac{2n}{1-a^2}\left(P_1+aP_0-\frac{1}{n}P_1\right),$$
$$\frac{dP_1}{da}=\frac{2n}{1-a^2}\left(P_0+aP_1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1+a^2}{2a}P_1\right)$$

Mais on peut mettre ces équations sous la forme suivante, plus commode pour le calcul numérique,

$$(33)\qquad \begin{aligned} \frac{dP_0}{da}+\frac{dP_1}{da}&=\frac{1}{1-a}\left[(2n-1)P_1+2nP_0-\frac{1}{a}P_1\right],\\ \frac{dP_0}{da}-\frac{dP_1}{da}&=\frac{1}{1+a}\left[(2n-1)P_1-2nP_0+\frac{1}{a}P_1\right].\end{aligned}$$

Ces formules se simplifient encore dans le cas de $n=\frac{1}{2}$, et donnent

$$(34)\qquad \frac{dP_0}{da}=\frac{aP_0-P_1}{1-a^2},\qquad \frac{dP_1}{da}=\frac{1}{a}\cdot\frac{dP_0}{da};$$

C'est aussi ce qu'on trouverait immédiatement par la différentiation des équations (20), en observant qu'on a $\frac{dF^1}{da}=\frac{E^1-(1-a^2)F^1}{a(1-a^2)}$, $\frac{dE^1}{da}=-\frac{1}{a}(F^1-E^1)$.

182. Si on veut avoir la valeur générale du coefficient différentiel $\frac{dP(\lambda)}{da}$, exprimée par les fonctions P seulement, on la déduira aisément des équations (31) et (14); mais voici un moyen d'y parvenir qui nous fournira en même temps de nouvelles formules.

Nous avons déjà trouvé $\pi\frac{dP(\lambda)}{da}=-2n\int\frac{(a-\cos\varphi)\,d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^{n+1}}$; on a semblablement $\pi\frac{dP(\lambda+1)}{da}=-2n\int\frac{(a-\cos\varphi)\,d\varphi\cos(\lambda+1)\varphi}{D^{n+1}}$; de là résulte

$$\frac{dP(\lambda+1)}{da}-a\frac{dP(\lambda)}{da}=\frac{2n}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^{n+1}}\left[(a-\cos\varphi)^2\cos\lambda\varphi+(a-\cos\varphi)\sin\varphi\sin\lambda\varphi\right].$$

Le second membre se réduit à

$$\frac{2n}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}+\frac{2n}{\pi}\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{D^{n+1}}\left[a\sin\lambda\varphi-\sin(\lambda+1)\varphi\right],$$

et au moyen de l'intégration par parties, il se réduit ultérieurement à

$$\frac{\sin(\lambda+1)\varphi-a\sin\lambda\varphi}{\pi D^n}+\frac{2n+\lambda}{\pi}\int\frac{d\varphi\cos\lambda\varphi}{D^n}-\left(\frac{\lambda+1}{a\pi}\right)\int\frac{d\varphi\cos(\lambda+1)\varphi}{D^n}.$$

La partie hors du signe est nulle dans les deux limites de l'intégrale, et l'autre partie $=(2n+\lambda)P(\lambda)-\left(\frac{\lambda+1}{a}\right)P(\lambda+1)$; donc on aura la formule

$$(35)\qquad \frac{dP(\lambda+1)}{da}-a\frac{dP(\lambda)}{da}=(2n+\lambda)P(\lambda)-\left(\frac{\lambda+1}{a}\right)P(\lambda+1).$$

Si on change le signe de λ et qu'on observe que la formule

$P(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos\lambda\varphi}{D^n}$ donne $P(-\lambda) = P(\lambda)$, on aura semblablement

$$(36)\qquad \frac{dP(\lambda-1)}{da} - a\frac{dP(\lambda)}{da} = (2n-\lambda)P(\lambda) + \frac{\lambda-1}{a}P(\lambda-1).$$

Ces deux équations donnent par leur différence la formule (32); mais pour en déduire la valeur du coefficient cherché $\frac{dP(\lambda)}{da}$, il faut encore recourir à l'équation (4), dont la différentielle est

$$(\lambda-1+n)\frac{dP(\lambda-1)}{da} + (\lambda+1-n)\frac{dP(\lambda+1)}{da} - \left(\frac{1}{a}+a\right)\lambda\frac{dP(\lambda)}{da} + \left(\frac{1}{a^2}-1\right)\lambda P(\lambda) = 0;$$

et par la combinaison de ces trois équations, on aura

$$(37)\quad (1-a^2)\frac{dP(\lambda)}{da} = (\lambda-1+n)P(\lambda-1) - (\lambda+1-n)P(\lambda+1) + 2naP(\lambda).$$

D'où l'on voit que le coefficient différentiel $\frac{dP(\lambda)}{da}$ se détermine assez simplement par les trois termes consécutifs $P(\lambda-1)$, $P(\lambda)$, $P(\lambda+1)$; il pourrait se déterminer par deux seulement de ces termes, en éliminant le troisième à l'aide de l'équation (4); mais la formule qui en résulterait serait moins simple que la précédente.

183. Au moyen de l'équation (37) on pourrait trouver la valeur du coefficient différentiel $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, exprimée par les fonctions $P(\lambda)$; mais cette expression serait fort compliquée, et la complication augmenterait encore dans la valeur des coefficiens différentiels des ordres supérieurs. Pour éviter cet inconvénient, on pourra former successivement les coefficiens différentiels de chaque ordre, à compter des deux premiers termes où l'on a $\lambda=0$ et $\lambda=1$, par la méthode suivante, analogue à celle que nous avons suivie pour les coefficiens différentiels du premier ordre, dans les art. 180 et 181.

De l'équation (32) on tire, par la différentiation,

$$(38)\quad \frac{ddP(\lambda-1)}{da^2} - \frac{ddP(\lambda+1)}{da^2} = \frac{1}{a}\left[(\lambda-2)\frac{dP(\lambda-1)}{da} + (\lambda+2)\frac{dP(\lambda+1)}{da} - 2\lambda P(\lambda)\right] - 2\lambda\frac{dP(\lambda)}{da};$$

ainsi on connaîtra les valeurs successives de $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$, si on connaît les deux premiers termes $\frac{ddP_0}{da^2}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$.

Or par la différentiation des équations (33) on a ces deux formules :

$$(39). \quad \begin{cases} (1-a)\left(\frac{ddP_0}{da^2}+\frac{ddP_1}{da^2}\right)=2n\left(\frac{dP_1}{da}+\frac{dP_0}{da}-\frac{P_0}{a}\right)+\frac{2P_1}{a^2}, \\ (1+a)\left(\frac{ddP_0}{da^2}-\frac{ddP_1}{da^2}\right)=2n\left(\frac{dP_1}{da}-\frac{dP_0}{da}+\frac{P_0}{a}\right)-\frac{2P_1}{a^2}; \end{cases}$$

ainsi on voit que les termes $\frac{ddP_0}{da^2}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$ se déterminent par des quantités connues, puisqu'on est censé avoir formé la suite des coefficiens différentiels du premier ordre, avant de passer à ceux du second ordre.

184. On peut encore simplifier cette détermination et celle des coefficiens différentiels des ordres supérieurs, par les considérations suivantes. On tire d'abord des équations (39)

$$\frac{ddP_0}{da^2}-a\,\frac{ddP_1}{da^2}=2n\,\frac{dP_1}{da};$$

$$\frac{ddP_1}{da^2}-a\,\frac{ddP_0}{da^2}=2n\left(\frac{dP_0}{da}-\frac{P_0}{a}\right)+\frac{2P_1}{a^2},$$

d'un autre côté, les équations (33) donnent

$$\frac{dP_0}{da}-a\frac{dP_1}{da}=(2n-1)P_1,$$

$$\frac{dP_1}{da}-a\frac{dP_0}{da}=2nP_0-\frac{P_1}{a};$$

combinant entr'elles ces quatre équations, on en déduira les deux équations différentielles suivantes, pour déterminer séparément les fonctions P_0 et P_1

$$(40) \quad \begin{cases} (a-a^3)\frac{ddP_0}{da^2}+[1-(4n+1)a^2]\frac{dP_0}{da}-4n^2aP_0=0, \\ (a^2-a^4)\frac{ddP_1}{da^2}+[a-(4n+1)a^3]\frac{dP_1}{da}-[1+(4n^2-1)a^2]P_1=0. \end{cases}$$

De là on voit que le coefficient du second ordre $\frac{ddP_0}{da^2}$ se déterminera directement par le moyen des deux quantités $\frac{dP_0}{da}$ et P_0, et que le coefficient $\frac{ddP_1}{da^2}$ se déterminera de même par le moyen de $\frac{dP_1}{da}$ et P_1.

185. Les mêmes équations feront connaître, par des différentiations répétées, les coefficiens différentiels des ordres ultérieurs. Ainsi l'équation relative à la fonction P_1 donne successivement :

$$\begin{aligned}
&(a-a^3)\frac{d^3P_1}{da^3}+[3-(4n+5)a^2]\frac{d^2P_1}{da^2}-(4n^2+12n+2)a\frac{dP_1}{da}-(8n^2-2)P_1=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^4P_1}{da^4}+[4-(4n+8)a^2]\frac{d^3P_1}{da^3}-(4n+20n+12)a\frac{d^2P_1}{da^2}-(12n^2+12n)\frac{dP_1}{da}=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^5P_1}{da^5}+[5-(4n+11)a^2]\frac{d^4P_1}{da^4}-(4n^2+28n+28)a\frac{d^3P_1}{da^3}-(16n^2+32n+12)\frac{d^2P_1}{da^2}=0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\tag{41}$$

Ces équations dont il serait facile de trouver l'expression générale, font voir que la série des coefficiens différentiels $\frac{dP_1}{da}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$, $\frac{d^3P_1}{da^3}$, etc. peut être prolongée aussi loin qu'on voudra, et que chacun d'eux se déterminera toujours par les trois précédens.

186. Connaissant les coefficiens différentiels de la fonction P_1, on pourra en déduire ceux de P_0 par les équations successives

$$\begin{aligned}
\frac{dP_0}{da}&=a\frac{dP_1}{da}+(2n-1)P_1,\\
\frac{ddP_0}{da^2}&=a\frac{ddP_1}{da^2}+2n\frac{dP_1}{da},\\
\frac{d^3P_0}{da^3}&=a\frac{d^3P_1}{da^3}+(2n+1)\frac{d^2P_1}{da^2},\\
\frac{d^4P_0}{da^4}&=a\frac{d^4P_1}{da^4}+(2n+2)\frac{d^3P_1}{da^3},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}\tag{42}$$

équations dont la loi est manifeste.

On peut aussi déterminer directement ces coefficiens, à compter du second ordre, par les équations successives

$$\begin{aligned}
&(a-a^3)\frac{ddP^0}{da^2}+[1-(4n+1)a^2]\frac{dP_0}{da}-4n^2aP_0=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^3P_0}{da^3}+[2-(4n+4)a^2]\frac{d^2P_0}{da^2}-(4n^2+8n+2)a\frac{dP_0}{da}-4n^2P_0=0,\\
&(a-a^3)\frac{d^4P_0}{da^4}+[3-(4n+7)a^2]\frac{d^3P_0}{da^3}-(4n^2+16n+10)a\frac{d^2P_0}{da^2}-(8n^2+8n+2)\frac{dP_0}{da}=0\\
&(a-a^3)\frac{d^5P_0}{da^5}+[4-(4n+10)a^2]\frac{d^4P_0}{da^4}-(4n^2+24n+24)a\frac{d^3P_0}{da^3}-(12n^2+24n+12)\frac{d^2P_0}{da^2}=0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\tag{43}$$

187.

187. Connaissant les deux premiers termes du second ordre $\frac{ddP_0}{da^2}$, $\frac{ddP_1}{da^2}$, on calculera les suivans par l'équation déjà trouvée

$$\frac{ddP(\lambda-1)}{da^2}-\frac{ddP(\lambda+1)}{da^2}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-2)\frac{dP(\lambda-1)}{da}+(\lambda+2)\frac{dP(\lambda+1)}{da}-2\lambda P(\lambda)\right]-2\lambda\frac{dP(\lambda)}{da}$$

Cette équation étant différentiée successivement, donnera les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{d^3P(\lambda-1)}{da^3}-\frac{d^3P(\lambda+1)}{da^3}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-3)\frac{d^2P(\lambda-1)}{da^2}+(\lambda+3)\frac{d^2P(\lambda+1)}{da^2}-4\lambda\frac{dP(\lambda)}{da}\right]-2\lambda\frac{ddP(\lambda)}{da^2},\\
(44)\quad&\frac{d^4P(\lambda-1)}{da^4}-\frac{d^4P(\lambda+1)}{da^4}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-4)\frac{d^3P(\lambda-1)}{da^3}+(\lambda+4)\frac{d^3P(\lambda+1)}{da^3}-6\frac{d^2P(\lambda)}{da^2}\right]-2\lambda\frac{d^3P(\lambda)}{da^3},\\
&\frac{d^5P(\lambda-1)}{da^5}-\frac{d^5P(\lambda+1)}{da^5}=\frac{1}{a}\left[(\lambda-5)\frac{d^4P(\lambda-1)}{da^4}+(\lambda+5)\frac{d^4P(\lambda+1)}{da^4}-8\lambda\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}\right]-2\lambda\frac{d^4P(\lambda)}{da^4},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Par les équations (41), (42), (43), on connaît pour un ordre quelconque k, les deux premiers coefficiens différentiels $\frac{d^kP_0}{da^k}$, $\frac{d^kP_1}{da^k}$; on pourra donc, par les équations précédentes, continuer indéfiniment le calcul des autres coefficiens différentiels du même ordre k.

Toutes ces formules sont disposées de manière que les quantités a et $1-a^2$ entrent comme diviseurs au moindre degré possible ; elles seront sujettes à quelques inconvéniens, lorsque a sera très-petit et lorsqu'il sera très-près de l'unité ; dans le dernier cas, les valeurs du coefficient $\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}$ deviennent de plus en plus grandes à mesure que k augmente ; mais les formules précédentes donneront toujours à peu près le même degré d'exactitude relative sur la valeur des quantités qu'on cherche ; c'est-à-dire que le nombre de figures exactes par lesquelles elles sont exprimées, sera toujours à peu près le même.

188. Lorsque a est très-petit, on peut éviter tout à fait l'emploi des équations précédentes, et déterminer directement les valeurs des quantités $P(\lambda)$ et de leurs coefficiens différentiels de divers ordres, par le moyen de la formule

$$P(\lambda)=\frac{n.n+1\ldots n+\lambda-1}{1.2\ldots\ldots\lambda}\left(a^\lambda+\frac{n}{1}.\frac{\lambda+n}{\lambda+1}a^{\lambda+2}+\frac{n.n+1}{1.2}.\frac{\lambda+n.\lambda+n+1}{\lambda+1.\lambda+2}a^{\lambda+4}+\text{etc.}\right).$$

En effet, si pour une valeur donnée de λ, on calcule les différens termes de cette suite, que nous désignerons par Ca^λ, $C'a^{\lambda+2}$, etc., ensorte qu'on ait

$$P(\lambda) = Ca^\lambda + C'a^{\lambda+2} + C''a^{\lambda+4} + C'''a^{\lambda+6} \text{ etc.};$$

les coefficiens différentiels successifs de $P(\lambda)$ se détermineront immédiatement par les formules

$$\frac{dP(\lambda)}{da} = \lambda Ca^{\lambda-1} + (\lambda+2)C'a^{\lambda+1} + (\lambda+4)C''a^{\lambda+3} + (\lambda+6)C'''a^{\lambda+5} + \text{etc.},$$

(45) $$\frac{ddP(\lambda)}{da^2} = \lambda.\lambda-1.Ca^{\lambda-2} + \lambda+2.\lambda+1.C'a^\lambda + \lambda+4.\lambda+3.C''a^{\lambda+2} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3P(\lambda)}{da^3} = \lambda.\lambda-1.\lambda-2.Ca^{\lambda-3} + \lambda+2.\lambda+1.\lambda C'a^{\lambda-1} + \lambda+4.\lambda+3.\lambda+2.C''a^{\lambda+1} + \text{etc.}$$

etc.,

et on voit que les calculs seront faciles à cause de la convergence des séries, et de l'emploi répété des mêmes coefficiens C, C′, C″, etc.

189. Nous remarquerons que les calculs sont susceptibles de quelque simplification, si, ayant à calculer les coefficiens différentiels de la fonction $P(\lambda)$ qui répond à l'exposant n, on connaît déjà les valeurs de la fonction $Q(\lambda)$ qui répond à l'exposant $n+1$. En effet, d'après la formule (31), on aura successivement

$$\frac{dP_0}{da} = n(2Q_1 - 2aQ_0),$$

$$\frac{dP_1}{da} = n(Q_0 + Q_2 - 2aQ_1),$$

$$\frac{dP_2}{da} = n(Q_1 + Q_3 - 2aQ_2),$$

etc.

Pour avoir une expression semblable des coefficiens différentiels du second ordre, je différentie l'équation (31), et j'en tire

$$\frac{ddP(\lambda)}{da^2} = n.\left[\frac{dQ(\lambda-1)}{da} + \frac{dQ(\lambda+1)}{da} - 2a\frac{dQ(\lambda)}{da} - 2Q(\lambda)\right].$$

J'observe ensuite que si on met $n+1$ à la place de n, et Q à la place de P dans les équations (35) et (36), on aura, en ajoutant ces équations,

$$\frac{dQ(\lambda-1)}{da} + \frac{dQ(\lambda+1)}{da} - 2a\frac{dQ(\lambda)}{da} = 4(n+1)Q(\lambda) + \frac{\lambda-1}{a}Q(\lambda-1) - \frac{\lambda+1}{a}Q(\lambda+1);$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura la formule

$$(46)\qquad \frac{ddP(\lambda)}{da^2} = 2n(2n+1)Q(\lambda) + \frac{n}{a}[(\lambda-1)Q(\lambda-1)-(\lambda+1)Q(\lambda+1)].$$

Ainsi on voit qu'au moyen des fonctions $Q(\lambda)$ ou $P(\lambda, n+1)$, on pourra déterminer les coefficiens différentiels du premier ordre $\frac{dP(\lambda)}{da}$ par la formule (31), et les coefficiens différentiels du second ordre $\frac{d^2P(\lambda)}{da^2}$ par la formule (46).

190. Dans le cas de $n=\frac{1}{2}$, les deux formules (31) et (46) donnent

$$(47)\qquad \begin{aligned} \frac{dP(\lambda)}{da} &= \tfrac{1}{2}[Q(\lambda-1)+Q(\lambda+1)] - aQ(\lambda), \\ \frac{ddP(\lambda)}{da^2} &= 2Q(\lambda) + \frac{(\lambda-1)Q(\lambda-1)-(\lambda+1)Q(\lambda+1)}{2a}. \end{aligned}$$

Voici l'application de ces formules au cas de l'exemple III, dans lequel on a déjà calculé les premières valeurs de $Q(\lambda)$, désignées par $P(\lambda, \frac{3}{2})$.

λ	$\frac{dP(\lambda,\frac{1}{2})}{da}$	$\frac{ddP(\lambda,\frac{1}{2})}{da^2}$	$\frac{d^3P(\lambda,\frac{1}{2})}{da^3}$
0	0.82187 87994	3.86002 33582	28.27722 297
1	1.13623 95937	3.76560 50553	28.68116 475
2	1.03491 89510	4.27932 65397	29.10017 317
3	0.86944 19041	4.55610 29643	30.95666 423
4	0.70380 77947	4.54116 70062	33.19201 233
5	0.55744 04163	4.30219 87330	34.92111 159
6	0.43515 00594	3.92264 82209	
7	0.33616 96444		

La troisième colonne a été calculée par les formules des art. 185, 186 et 187.

191. On voit par le tableau précédent, que a étant peu différent de l'unité, les coefficiens différentiels successifs $\frac{dP(\lambda)}{da}$, $\frac{ddP(\lambda)}{da^2}$

$\frac{d^3P(\lambda)}{da^3}$, etc. augmentent, d'une manière fort rapide, d'un terme au suivant. Cependant dans le même ordre k, les divers coefficiens $\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}$ ne peuvent passer un *maximum* après lequel ils décroissent continuellement, et finissent par être aussi petits qu'on voudra.

On pourrait trouver une valeur assez approchée de $\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}$, lorsque λ est très-grand. Pour cela il faudrait faire usage de la formule (7) qui donne

$$P(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma n\Gamma(\lambda+1)}\left[\frac{a^\lambda}{(1-a^2)^n}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{\lambda+1}\cdot\frac{a^{\lambda+2}}{(1-a^2)^{n+1}}+\frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2}\cdot\frac{n\,.\,n+1}{\lambda+1\,.\,\lambda+2}\cdot\frac{a^{\lambda+4}}{(1-a^2)^{n+2}}+\text{etc.}\right]. \tag{48}$$

Soit donc $\frac{d^ka^\mu(1-a^2)^{-\nu}}{da^k}=F(\mu,\nu)$, $F(\mu,\nu)$ désignant une fonction connue de a et des exposans μ et ν; on aura en général :

$$\frac{d^kP(\lambda)}{da^k}=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma n\Gamma(\lambda+1)}\cdot\left[F(\lambda,n)+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n}{\lambda+1}\cdot F(\lambda+2,n+1)+\frac{n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2}\cdot\frac{n\,.\,n+1}{\lambda+1\,.\,\lambda+2}\cdot F(\lambda+4,n+2)+\text{etc.}\right] \tag{49}$$

Lorsque λ est très-grand, comme nous le supposons, cette suite est assez convergente dans ses premiers termes, pour qu'on puisse négliger les termes suivans ; la question est donc réduite à trouver la fonction F pour un ordre donné k, ce qui n'aura aucune difficulté tant que k sera d'un petit nombre d'unités.

192. Il ne sera pas inutile de présenter sous un même point de vue, les principales propriétés de la fonction $P(\lambda, n)$, que nous avons démontrées dans ce chapitre.

I. Cette fonction est purement algébrique lorsque n est un nombre entier positif ou négatif. Dans tout autre cas, les fonctions $P(\lambda, n)$ forment un genre particulier de transcendantes, qui a de l'analogie avec les fonctions elliptiques complettes de la première et de la seconde espèce, et qui se réduit à ces fonctions lorsque $2n$ est un nombre impair.

II. Si on considère les valeurs de $P(\lambda, n)$, qui répondent tant aux différentes valeurs du nombre entier λ, qu'à toutes les valeurs de n qui ne diffèrent entr'elles que d'un nombre entier, toutes ces valeurs peuvent se déterminer par le moyen de deux transcendantes seulement, pour lesquelles on peut choisir deux termes consécutifs, tels que $P(k, n)$, $P(k+1, n)$ ou $P(k,n)$, $P(k, n+1)$.

III. Il en est de même des coefficiens différentiels $\frac{dP(\lambda, n)}{da}$; $\frac{d^2P(\lambda, n)}{da^2}$; $\frac{d^3P(\lambda, n)}{da^3}$, etc. à l'infini, lesquels peuvent, dans les mêmes cas, être déterminés entièrement par les deux mêmes transcendantes. Cette propriété que les fonctions $P(\lambda, n)$ partagent avec les fonctions elliptiques complettes F^1c, E^1c, n'a pas lieu dans un grand nombre de transcendantes, et notamment dans les fonctions $\log \Gamma a$, dont les coefficiens différentiels successifs offrent des transcendantes différentes de la fonction principale.

IV. Les deux mêmes transcendantes qui déterminent les diverses valeurs de la fonction $P(\lambda, n \pm k)$, λ et k étant des entiers quelconques, peuvent aussi servir à déterminer la fonction $P(\lambda, 1-n\pm k)$, ou simplement $P(\lambda, \pm k - n)$.

Ainsi, en général, les deux transcendantes par lesquelles on peut effectuer le développement de D^{-n}, serviront aussi à effectuer le développement d'un terme quelconque des deux suites

$$\ldots\ldots D^{-n+3},\ D^{-n+2},\ D^{-n+1},\ D^{-n}\ ,\ D^{-n-1},\ D^{-n-2},\ D^{-n-3}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots D^{n+2}\ ,\ D^{n+1}\ ,\ D^{n}\ \ ,\ D^{-1+n},\ D^{-2+n},\ D^{-3+n},\ D^{-4+n}\ldots\ldots$$

V. Quel que soit l'exposant n, pourvu qu'il soit positif, la valeur du coefficient différentiel d'un ordre quelconque $\frac{d^kP(\lambda, n)}{da^k}$ sera toujours positive.

VI. La plus simple des transcendantes désignées par $P(\lambda, n)$, est $P(0, n)$; si on la désigne par $\psi(n)$ ou ψ, sa valeur sera donnée par l'une ou l'autre des deux formules suivantes :

$$(50)\quad \begin{cases} \psi(n)=1+\left(\frac{n}{1}\right)^2a^2+\left(\frac{n.n+1}{1.2}\right)^2a^4+\left(\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\right)^2a^6+\text{etc.}, \\ \psi(n)=(1-a^2)^{1-2n}\left[1+\left(\frac{n-1}{1}\right)^2a^2+\left(\frac{n-1.n-2}{1.2}\right)^2a^4+\left(\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\right)^2a^6+\text{etc}\right]. \end{cases}$$

VII. Il résulte de la deuxième propriété qu'au moyen des deux fonctions consécutives $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, on pourra en général exprimer exactement la transcendante $P(\lambda, n)$, et plus généralement la transcendante $P(\lambda, \pm n + k)$, k étant un entier quelconque. Il en sera de même des coefficiens différentiels de cette transcendante.

193. Puisque la fonction $P(0, n)$ ou $\psi(n)$ est la plus simple des transcendantes désignées en général par $P(\lambda, n)$, et qu'elle sert à exprimer ces transcendantes, nous examinerons succinctement les propriétés qui leur sont particulières.

On déduit immédiatement des équations (50),

$$\psi(n) = (1 - a^2)^{1-2n} \psi(1 - n); \tag{51}$$

d'où il suit que les fonctions $\psi(n)$, $\psi(1 - n)$, qui se servent en quelque sorte de complément, peuvent être déterminées l'une par l'autre.

En faisant n négatif dans cette équation, ou en mettant $-n$ à la place de n, on a l'équation

$$\psi(-n) = (1 - a^2)^{1+2n} \psi(1 + n); \tag{52}$$

d'où il suit que toute fonction $\psi(-n)$ dont la variable est négative, peut se changer immédiatement en une autre dont la variable est positive.

On peut réciproquement changer toute fonction $\psi(n)$ dont la variable est positive, en une autre dont la variable soit négative, pourvu qu'on ait $n > 1$; cela résulte immédiatement de l'équation (51).

Lorsque n est < 1, la réduction ne peut plus avoir lieu, parce qu'alors n et $1 - n$ sont tous deux positifs. Ainsi la formule (51) donnerait, par exemple, $\psi(\frac{1}{3}) = (1 - a^2)^{\frac{1}{3}} \psi(\frac{2}{3})$, $\psi(\frac{1}{4}) = (1 - a^2)^{\frac{1}{2}} \psi(\frac{3}{4})$, ce qui ne se rapporte qu'aux fonctions supplémentaires.

194. Lorsque a sera très-près de l'unité, on ne pourra que très-difficilement déterminer, avec un certain degré d'approximation, la fonction ψ par les suites (50); dans ce cas, on ne peut mieux faire que de chercher la valeur de $\psi(n)$ par les quadratures. On a d'abord $\psi(n) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\varphi}{D^n}$; mais cette valeur n'est bonne à employer que lorsque n est négatif, parce que D étant très-petit pour les premières valeurs de φ, l'ordonnée $\frac{1}{D^n}$ de la courbe à quarrer serait très-grande, si n était positif.

Au moyen des quadratures, on trouvera donc très-aisément la valeur de $\psi(-m)$, en employant la formule $\psi(-m) = \frac{1}{\pi} \int \mathrm{D}^m d\varphi$, et cherchant la valeur de l'aire pour les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$.

Et puisqu'on a $\psi(m+1) = (1-a^2)^{-1-2m} \psi(-m)$, il s'ensuit qu'on aura, par le même moyen, la valeur de la fonction $\psi(n)$ pour toute valeur positive de n, pourvu qu'on ait $n > 1$.

Il reste donc à voir ce que l'on doit faire lorsque n est positif et < 1.

195. Si on fait $\mathrm{V} = \frac{\sin\varphi}{\mathrm{D}^{n+1}}$, et qu'on différentie chaque membre par rapport à φ, on aura, après quelques réductions,

$$2ad\mathrm{V} = (1+n)(1-a^2)^2 \frac{d\varphi}{\mathrm{D}^{n+2}} - (1+2n)(1+a^2)\frac{d\varphi}{\mathrm{D}^{n+1}} + n\frac{d\varphi}{\mathrm{D}^n};$$

intégrant de part et d'autre dans les limites fixées, et observant que dans ces limites V s'évanouit, on aura la formule

$$(53) \quad 0 = n\psi(n) - (1+2n)(1+a^2)\psi(n+1) + (1+n)(1-a^2)^2\psi(n+2).$$

Cette formule, au reste, serait facile à déduire de celles qui ont été trouvées ci-dessus pour les fonctions P (λ, n); mais nous avons préféré de la démontrer directement.

196. Au moyen de la formule précédente, toute fonction $\psi(n)$, dans laquelle n est plus petit que l'unité, pourra s'exprimer par les deux fonctions $\psi(n+1)$, $\psi(n+2)$, dans lesquelles la variable est plus grande que l'unité; celles-ci se déterminent facilement par les quadratures, ainsi qu'on l'a fait voir dans l'article précédent : le cas de n positif et < 1 se résoudra donc de même par les quadratures.

On aura, par exemple, d'après la formule (53),

$$\psi\left(\tfrac{1}{3}\right) = 5(1+a^2)\psi\left(\tfrac{4}{3}\right) - 4(1-a^2)^2\psi\left(\tfrac{7}{3}\right);$$

d'un autre côté par la formule (51), on a

$$\psi\left(\tfrac{4}{3}\right) = (1-a^2)^{-\frac{5}{3}}\psi\left(-\tfrac{1}{3}\right), \qquad \psi\left(\tfrac{7}{3}\right) = (1-a^2)^{-\frac{11}{3}}\psi\left(-\tfrac{4}{3}\right).$$

donc

$$(1-a^2)^{\frac{5}{3}}\psi\left(\tfrac{1}{3}\right) = 5(1+a^2)\psi\left(-\tfrac{1}{3}\right) - 4\psi\left(-\tfrac{4}{3}\right);$$

et par conséquent $\psi\left(\tfrac{1}{3}\right)$ se détermine au moyen de la formule

$$(1-a^2)^{\frac{5}{3}}\psi\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{5(1+a^2)}{\pi}\int D^{\frac{1}{3}}d\varphi-\frac{4}{\pi}\int D^{\frac{4}{3}}d\varphi.$$

197. Connaissant les fonctions $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, $\psi(n+2)$, etc., au moyen de deux d'entr'elles, on pourra de même déterminer les valeurs de leurs coefficiens différentiels successifs, pris par rapport à a.

En effet, de l'équation $\psi(n)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}$, on déduit $\frac{d\psi(n)}{da}$ $=-\frac{2n}{\pi}\int(a-\cos\varphi)\frac{d\varphi}{D^{n+1}}$. Substituant la valeur $a-\cos\varphi=\frac{D+a^2-1}{2a}$; il viendra $\frac{d\psi(n)}{da}=\frac{n}{a\pi}\int\frac{d\varphi}{D^n}-\frac{n(1-a^2)}{a\pi}\int\frac{d\varphi}{D^{n+1}}$, ce qui donne la formule

$$(54)\qquad a\frac{d\psi(n)}{da}=n\psi(n)-n(1-a^2)\psi(n+1).$$

Il est visible que par cette formule on pourrait obtenir la valeur du coefficient différentiel $\frac{dd\psi(n)}{da^2}$, exprimée par les fonctions $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, $\psi(n+2)$, ou seulement par les fonctions $\psi(n)$, $\psi(n+1)$, puisque $\psi(n+2)$ peut être éliminé au moyen de l'équation (53) : on aurait de même l'expression des coefficiens différentiels des ordres plus élevés. Mais on peut plus directement parvenir au même but par le moyen des équations (43), où la fonction désignée par P_0 n'est autre chose que $\psi(n)$ ou ψ. En vertu de ces équations on a d'abord

$$(55)\qquad (a-a^3)\frac{dd\psi}{da^2}+(1-a^2-4na^2)\frac{d\psi}{da}-4n^2a\psi=0;$$

d'où il suit que le coefficient différentiel du second ordre $\frac{dd\psi}{da^2}$, se détermine directement par le moyen de ψ et de $\frac{d\psi}{da}$, et qu'ainsi il peut être exprimé par les deux fonctions $\psi(n)$ et $\psi(n+1)$. On voit ensuite par les mêmes équations, qu'à compter de $\frac{d^3\psi}{da^3}$, un terme quelconque de la suite ψ, $\frac{d\psi}{da}$, $\frac{dd\psi}{da^2}$, $\frac{d^3\psi}{da^3}$, $\frac{d^4\psi}{da^4}$, etc. se déduira des trois précédens, suivant une loi dont il serait facile de donner l'expression générale.

FIN DE LA V^e PARTIE.

EXERCICES
DE CALCUL INTÉGRAL.

SIXIÈME PARTIE.

La théorie des Fonctions elliptiques étant l'objet principal de cet ouvrage, nous avons pensé que pour faire sentir davantage l'utilité de cette théorie, il serait bon d'en montrer l'application à quelques-uns des problèmes les plus intéressans de la Mécanique. Nous avons choisi, dans cette vue, le mouvement de rotation d'un corps solide qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, et le mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes : ces deux problèmes sont l'objet des sections I et II de la sixième partie.

Les solutions de ces problèmes sont connues depuis long-temps. Nous les avons exposées à notre manière, en nous rapprochant, pour la première, de la méthode donnée par d'Alembert, dans le tom. IV de ses Opuscules, et pour la seconde, des méthodes données par Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, ann. 1760, et dans le tom. XI des *Novi Com. Petrop.* Par ces méthodes, comme par celles de tous les autres géomètres qui ont traité les mêmes questions, on parvient à réduire la solution aux quadratures. C'était un grand pas dans la carrière de la science, et un beau titre de gloire pour ceux qui, les premiers, ont su obtenir ces réductions; mais le développement ultérieur de la solution, l'énumération et la division des différens cas, la réduction des formules au dernier terme de simplicité dont elles sont susceptibles, enfin la possibilité de déterminer, avec tout le degré d'exactitude qu'on peut desirer, la position du corps et toutes les circonstances du mouvement au

40

bout d'un temps quelconque, sont autant de choses que la simple réduction aux quadratures ne donne point, ou ne donne que d'une manière imparfaite, attendu que les formules, qui s'adaptent assez facilement à la première révolution, n'offrent plus rien de déterminé, lorsqu'il s'agit d'embrasser, dans un même calcul, un temps quelconque et un nombre indéfini de révolutions. Nous espérons qu'à cet égard les développemens que nous avons donnés ne laisseront rien à desirer, et qu'ils mettront dans tout leur jour les avantages nombreux qu'on peut retirer, en pareil cas, de l'usage des fonctions elliptiques.

On remarquera sans doute que la seconde section, qui traite du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, est fort étendue. Cependant nous n'avons considéré, outre les cas généraux, que quelques-uns des cas particuliers que le problème renferme, lorsque la courbe décrite est située dans un même plan, et nous n'avons indiqué que très-sommairement les points principaux de la solution, lorsque la courbe décrite est à double courbure; d'ailleurs nous avons toujours supposé que la courbe ne s'étend pas à l'infini, afin de ne considérer que des mouvemens permanens. On voit par là que cette matière aurait été susceptible d'une beaucoup plus grande extension; mais dans le cadre étroit où nous l'avons renfermée, nous osons croire que les géomètres trouveront quelques résultats dignes de leur attention, peut-être même des vues nouvelles pour traiter le fameux problème des trois corps, dans d'autres hypothèses que celles qui servent de base aux méthodes ordinaires d'approximation. La seconde section est terminée par la détermination du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes; problème qui offre encore une assez belle application de la théorie des fonctions elliptiques.

Enfin, la troisième section est une continuation des recherches variées dont on a vu des exemples dans les parties précédentes, et dont quelques-unes se rapportent encore à la théorie des Fonctions elliptiques.

PREMIÈRE SECTION.

Du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

1. Soit A le centre de gravité, ou plus généralement le point autour duquel le corps peut tourner librement dans tous les sens. Soient AB, AC, AD trois axes perpendiculaires entr'eux, dont la position soit invariable dans l'espace. Fig. 1.

Imaginons une surface sphérique décrite du centre A, laquelle soit rencontrée aux points B, C, D par ces trois axes; c'est à cette surface, considérée comme immobile dans l'espace, que nous rapporterons tous les mouvemens du corps ; et pour fixer les idées, nous donnerons le nom de *pôle* au point D, d'*équateur* au cercle BC, et de *méridien* à un grand cercle quelconque DX passant par le point D.

Supposons qu'au bout du temps t les trois axes principaux du corps soient représentés sur la sphère par les trois points L, M, N, formant le triangle LMN, dont les trois côtés et les trois angles sont de 90°. Il est évident que la position du corps sera déterminée à chaque instant, si l'on connaît celle des trois points L, M, N. Ainsi tout se réduit à déterminer, au bout du temps t, les arcs BX, LX, et l'angle DLM, en supposant toutefois que les axes AL et AM sont pris l'un et l'autre d'une manière déterminée parmi les trois axes principaux du corps ; de sorte que le choix de ces axes étant une fois fait d'après l'état initial du mouvement, les lettres L et M continuent d'être affectées aux mêmes axes.

2. Soit AP le rayon sur lequel est situé le centre d'une molécule quelconque du corps dM. Soient x, y, z les coordonnés rectangles de cette molécule, parallèles aux trois axes AB, AC, AD, et soit sa distance au centre $= r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$; si l'on mène les trois arcs BP, CP, DP, on aura $x = r \cos BP$, $y = r \cos CP$, $z = r \cos DP$.

De même si s, u, v sont les trois coordonnées de la même molécule, parallèles aux trois axes principaux AL, AM, AN, on aura $s = r\cos LP$, $u = r\cos MP$, $v = r\cos NP$.

Soit maintenant $BX = \varphi$, $LX = \theta$, $PL = p$ et l'angle $PLD = \Omega - \omega$, Ω étant la valeur de PLD lorsque $t = 0$, et ω désignant la quantité dont cet angle est diminué dans le temps t, par le mouvement de rotation du corps autour de l'axe AL, mouvement qui est supposé avoir lieu dans le sens BC.

D'après ces élémens, il faut calculer les valeurs des coordonnées x, y, z; pour cela, il faut considérer d'abord le triangle sphérique DLP, dans lequel on a les deux côtés $DL = 90° - \theta$, $LP = p$, et l'angle compris $PLD = \Omega - \omega$; on en déduira

$$\begin{aligned} \cos DP &= \sin\theta \cos p + \cos\theta \sin p \cos(\Omega - \omega), \\ \sin DP \sin LDP &= \sin p \sin(\Omega - \omega), \\ \sin DP \cos LDP &= \cos\theta \cos p - \sin\theta \sin p \cos(\Omega - \omega). \end{aligned}$$

Par le moyen de cos DP, on connaîtra $z = r\cos DP$. Pour avoir x, il faut connaître BP; or le triangle DBP donne

$$\cos BP = \sin DP \cos(\varphi + LDP):$$

de même par le triangle PDC, on aura

$$\cos CP = \sin DP \sin(\varphi + LDP).$$

Soit donc $r\cos p = s$ et $r\sin p = s'$, on aura les valeurs suivantes des coordonnées x, y, z:

$$\begin{aligned} x &= s\cos\varphi\cos\theta - s'\cos\varphi\sin\theta\cos(\Omega - \omega) - s'\sin\varphi\sin(\Omega - \omega), \\ y &= s\sin\varphi\cos\theta - s'\sin\varphi\sin\theta\cos(\Omega - \omega) + s'\cos\varphi\sin(\Omega - \omega), \\ z &= s\sin\theta + s'\cos\theta\cos(\Omega - \omega). \end{aligned}$$

3. Dans l'instant dt, qu'on suppose constant, le molécule dM acquiert les vîtesses $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$, $\frac{ddz}{dt}$, suivant les axes AB, AC, AD. Or, d'après les principes connus, les molécules animées de ces différentes vîtesses dirigées en sens contraires, doivent faire équilibre aux forces accélératrices. Donc si l'on appelle X, Y, Z les momens des forces accélératrices pour faire tourner le système autour des axes AB, AC, AD dans les sens CD, DB, BC, on aura les équations

différentielles du mouvement comme il suit :

$$\int (yddz - zddy)\, dM = Xdt^2,$$
$$\int (zddx - xddz)\, dM = Ydt^2,$$
$$\int (xddy - yddx)\, dM = Zdt^2.$$

Par la nature de ces équations, on voit que les différentielles ddx, ddy, ddz supposent s, s', Ω constantes, et qu'au contraire les signes d'intégration supposent ces quantités seules variables.

4. Il s'agit maintenant de substituer, dans ces équations, les valeurs de x, y, z, données n° 2; mais les propriétés connues des axes principaux serviront à abréger beaucoup le calcul.

D'abord la figure et la constitution du corps étant données, nous supposerons connues les intégrales suivantes :

$$\int s^2 dM = A, \quad \int u^2 dM = B, \quad \int v^2 dM = C,$$

au moyen desquelles les momens d'inertie du corps, considérés successivement par rapport aux axes AL, AM, AN, seront $B + C$, $A + C$, $A + B$.

Soit α la valeur de l'angle DLM au commencement du mouvement; comme on a en même temps $DLP = \Omega$, on aura l'angle $PLM = \Omega + \alpha$; d'où résulte $\cos PM = \sin p \cos(\Omega + \alpha)$ et $\cos PN = \sin p \sin(\Omega + \alpha)$. Mais on a $r \cos PM = u$ et $r \cos PN = v$; donc

$$u = s' \cos \Omega \cos \alpha - s' \sin \Omega \sin \alpha,$$
$$v = s' \sin \Omega \cos \alpha + s' \cos \Omega \sin \alpha.$$

Ces équations donnent réciproquement

$$s' \cos \Omega = u \cos \alpha + v \sin \alpha,$$
$$s' \sin \Omega = v \cos \alpha - u \sin \alpha;$$

et puisqu'on a, par la propriété des axes principaux, $\int su dM = 0$, $\int sv dM = 0$, $\int uv dM = 0$, il en résulte les intégrales

$$\int ss' \cos \Omega dM = 0, \quad \int ss' \sin \Omega dM = 0,$$
$$\int s's' \sin \Omega \cos \Omega dM = (C - B) \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$\int s's' \cos^2 \Omega dM = B \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha,$$
$$\int s's' \sin^2 \Omega dM = B \sin^2 \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

5. Si l'on exécute maintenant les substitutions indiquées, et qu'on fasse pour abréger,

$$P = \left[\frac{B+C}{2} - A + \frac{B-C}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right] d\varphi \sin\theta\cos\theta$$
$$+ \frac{B-C}{2} d\theta \sin\theta \sin(2\omega+2\alpha) + (B+C)\, d\omega \cos\theta,$$
$$Q = \left[\frac{B+C}{2} + A + \frac{B-C}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right] d\theta - \left(\frac{B-C}{2}\right) d\varphi \cos\theta \sin(2\omega+2\alpha),$$

les équations du mouvement deviendront

$$d\,(P\cos\varphi + Q\sin\varphi) = X dt^2,$$
$$d\,(P\sin\varphi - Q\cos\varphi) = Y dt^2,$$
$$d\left[(B+C)\left(d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta}\right) - P\cot\theta\right] = Z dt^2.$$

6. Ces équations se simplifient dans différentes hypothèses. Par exemple, si on a $B = C$, les valeurs de P et Q deviennent

$$P = (B - A)\, d\varphi \sin\theta\cos\theta + 2B d\omega \cos\theta,$$
$$Q = (B + A)\, d\theta,$$

et l'une des trois équations du mouvement peut être remplacée par la suivante :

$$2B d\,(d\varphi \sin\theta + d\omega) = (X\cos\varphi\cos\theta + Y\sin\varphi\cos\theta + Z\sin\theta)\, dt^2.$$

Le cas de $B = C$ a lieu lorsque les deux axes principaux AM, AN sont semblables entr'eux, de sorte que les momens d'inertie, par rapport à ces deux axes, sont égaux. Tous les solides de révolution homogènes et une infinité d'autres corps sont dans ce cas.

7. L'angle α disparaît du calcul dans le cas de $B = C$, parce que tous les axes perpendiculaires à AL peuvent être considérés alors comme des axes principaux. En général, on peut faire $\alpha = 0$ dans tous les cas, en prenant la directrice AD dans le plan où se trouvent les deux axes principaux AL, AM au commencement du mouvement. Mais comme la supposition de $\alpha = 0$ ne simplifie pas le calcul et ne fait disparaître aucun terme, il vaut mieux laisser α tel qu'il est, et se réserver la liberté de déterminer la directrice AD, de manière à faciliter les intégrations. On ne tardera pas à en voir un exemple.

Application de ces formules au cas où les forces accélératrices sont nulles.

8. Dans le cas où les forces accélératrices X, Y, Z sont nulles, les équations du n° 5 s'intègrent d'elles-mêmes, et on a les intégrales

$$P\cos\varphi + Q\sin\varphi = A'dt,$$
$$P\sin\varphi - Q\cos\varphi = B'dt,$$
$$(B+C)\left(d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta}\right) - P\cot\theta = C'dt.$$

Or, on peut toujours prendre la directrice AD telle que les constantes A' et B' soient nulles; alors on aura $P=0$, $Q=0$ et $d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta} = Kdt$, K étant une nouvelle constante; de sorte que les équations du mouvement seront

$$[n' - \cos(2\omega + 2\alpha)]\, d\varphi \sin\theta\cos\theta - d\theta\sin\theta\sin(2\omega+2\alpha) + (n+n')\, d\omega\cos\theta = 0,$$
$$[n - \cos(2\omega+2\alpha)]\, d\theta + d\varphi\cos\theta\sin(2\omega+2\alpha) = 0,$$
$$d\varphi + \frac{d\omega}{\sin\theta} = Kdt,$$

où l'on a fait, pour abréger, $n = \frac{C+B+2A}{C-B}$, $n' = \frac{C+B-2A}{C-B}$.

9. Avant d'aller plus loin, il faut faire voir comment, d'après l'état initial du mouvement, on peut déterminer la directrice AD, de manière que les constantes A' et B' soient nulles, ainsi que le supposent ces dernières équations.

Au commencement du mouvement, où l'on a $t=0$, $\omega=0$, $\varphi=0$, soit AI l'axe de rotation primitif autour duquel le corps tourne avec la vîtesse angulaire W dans le sens Ll, et soit la distance $LI = \varepsilon$. On peut supposer $\varepsilon < 90°$, parce que si ε était plus grand que 90°, on prendrait, au lieu de L, l'autre extrémité du même axe AL. Fig. 2.

Soit en même temps M l'extrémité de l'axe principal AM, dont le moment est $A+C$: nous supposerons que l'angle ILM est adjacent à l'angle DLl, déterminé par la direction du mouvement; c'est-à-dire que ces deux angles sont formés de différens côtés de l'arc LI;

d'ailleurs l'angle ILM, qui est un angle donné et que nous supposerons $= L$, peut être plus petit ou plus grand que 90°.

L'arc LM étant donné de position par l'angle L, l'arc LN, où se trouve situé le troisième axe principal AN, dont le moment est A+B, sera également déterminé en prenant, du même côté que Ll par rapport à ML, l'angle $MLN = 90°$.

10. Cela posé, soit γ la valeur initiale de θ, on aura $DL = \frac{1}{2}\pi - \gamma$. D'ailleurs on a supposé, au commencement du mouvement, l'angle $DLM = \alpha$; ainsi, pour connaître la position du point D, il s'agit de déterminer les quantités α et γ par la condition que les constantes A' et B' soient nulles, ou qu'on ait au commencement du mouvement $P = 0$, $Q = 0$.

Ll étant l'arc décrit dans le premier instant par le point L, on a $Ll = Wdt \sin \varepsilon$; du point l menant lm perpendiculaire sur DL, on aura $Lm = Wdt \sin \varepsilon \sin (L - \alpha)$ et $ml = Wdt \sin \varepsilon \cos (L - \alpha)$. Pendant que le point L parcourt l'arc Ll par son mouvement de rotation autour de I, le point D, en tant qu'il désigne l'extrémité d'un axe AD fixe dans le corps, parcourt l'arc $Dd = Wdt \sin DI$ perpendiculaire à DI; d'où il suit que le corps tourne autour de l'axe mobile d'une quantité $DLd = \frac{Wdt \sin DI \cos IDL}{\sin DL}$; c'est la valeur initiale de $d\omega$. D'ailleurs Lm est la valeur initiale de $-d\theta$, et l'angle LDl ou $\frac{lm}{\sin Dl}$ est celle de $d\varphi$; donc on a, au commencement du mouvement,

$$\frac{d\theta}{dt} = W \sin \varepsilon \sin (L - \alpha),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{W \sin \varepsilon}{\cos \gamma} \cos (L - \alpha),$$

$$\frac{d\omega}{dt} = W \left(\frac{\cos \gamma \cos \varepsilon - \sin \gamma \sin \varepsilon \cos (L - \alpha)}{\cos \gamma}\right).$$

Substituant ces valeurs dans les équations $P = 0$, $Q = 0$, et faisant en même temps $\omega = 0$, $\theta = \gamma$, on aura

$$\begin{aligned} 0 = {} & (n' - \cos 2\alpha) \sin \gamma \sin \varepsilon \cos (L - \alpha) + \sin \gamma \sin \varepsilon \sin 2\alpha \sin (L - \alpha) \\ & + (n + n') \cos \gamma \cos \varepsilon - (n + n') \sin \gamma \sin \varepsilon \cos (L - \alpha), \end{aligned}$$

$$0 = (n - \cos 2\alpha) \sin \varepsilon \sin (L - \alpha) - \sin \varepsilon \sin 2\alpha \cos (L - \alpha).$$

La

La seconde se réduit à $n \sin(L-\alpha) = \sin(L+\alpha)$; d'où l'on tire

$$\tang \alpha = \frac{n-1}{n+1} \tang L = \frac{A+B}{A+C} \tang L;$$

et substituant cette valeur dans l'autre, il en résulte

$$\cot \gamma = \frac{C+A}{C+B} \cdot \frac{\cos L}{\cos \alpha} \tang \varepsilon = \frac{A+B}{C+B} \cdot \frac{\sin L}{\sin \alpha} \tang \varepsilon.$$

On voit que la détermination du point D par la tangente de l'arc DL, et celle de l'angle MLD, ne laissent aucune ambiguité, et qu'ainsi on est assuré de satisfaire, d'une manière générale, à la condition que les constantes A' et B' soient nulles, ce qui simplifiera beaucoup la solution du problème.

Les données qui ont lieu au commencement du mouvement font connaître en même temps la constante K, dont la valeur est

$$K = \frac{W \cos \varepsilon}{\sin \gamma}.$$

11. Nous remarquerons qu'on peut déterminer la position du point D relativement aux axes principaux AL, AM, AN, par des formules plus élégantes, et qui feront découvrir une belle propriété de la directrice AD.

Ayant fait $IL = \varepsilon$, on fera semblablement $IM = \varepsilon'$, $IN = \varepsilon''$; soit de plus $DL = p = \frac{1}{2}\pi - \gamma$, $DM = p'$, $DN = p''$. Dans le triangle LIM, où le côté LM est de 90°, on a $\cos ILM = \frac{\cos IM}{\sin IL}$; donc $\cos L = \frac{\cos \varepsilon'}{\sin \varepsilon}$; de même dans le triangle ILN, on aura $\sin L = \frac{\cos \varepsilon''}{\sin \varepsilon}$. Les triangles DLM, DLN, qui ont un côté de 90°, donneront semblablement $\cos \alpha = \frac{\cos p'}{\sin p}$ et $\sin \alpha = \frac{\cos p''}{\sin p}$; donc

$$\tang \alpha = \frac{\cos p''}{\cos p'} \quad \text{et} \quad \tang L = \frac{\cos \varepsilon''}{\cos \varepsilon'}.$$

Mais on a trouvé $\frac{\tang \alpha}{\tang L} = \frac{A+B}{A+C}$; donc

$$\frac{\cos p''}{\cos p'} = \frac{(A+B)\cos \varepsilon''}{(A+C)\cos \varepsilon'}.$$

Il est remarquable que la quantité $(A+C)\cos \varepsilon'$ représente le moment d'inertie de l'axe AM multiplié par le cosinus de la distance IM, de même que $(A+B)\cos\varepsilon''$ représente un semblable produit pour l'axe AN. D'après l'équation précédente, on peut présumer qu'il existe un semblable rapport entre $\cos p'$ et $\cos p$. En effet, si dans l'équation $\cot\gamma = \frac{A+C}{B+C}\cdot\frac{\cos L}{\cos\alpha}\operatorname{tang}\varepsilon$, on substitue les valeurs $\cot\gamma = \frac{\sin p}{\cos p}$, $\frac{\cos L}{\cos\alpha} = \frac{\cos\varepsilon'}{\cos p'}\cdot\frac{\sin p}{\sin\varepsilon}$, on aura, en réduisant,

$$\frac{\cos p'}{\cos p} = \frac{(A+C)\cos\varepsilon'}{(B+C)\cos\varepsilon},$$

ce qui est la propriété mentionnée.

Puisque les quantités $\cos p$, $\cos p'$, $\cos p''$ sont proportionnelles respectivement aux quantités $(B+C)\cos\varepsilon$, $(A+C)\cos\varepsilon'$, $(A+B)\cos\varepsilon''$; puisqu'on a d'ailleurs $\cos^2 p + \cos^2 p' + \cos^2 p'' = 1$, il s'ensuit que si l'on fait, pour abréger,

$$D = \sqrt{[(B+C)^2\cos^2\varepsilon + (A+C)^2\cos^2\varepsilon' + (A+B)^2\cos^2\varepsilon'']},$$

on aura

$$\cos p = \frac{(B+C)\cos\varepsilon}{D}, \quad \cos p' = \frac{(A+C)\cos\varepsilon'}{D}, \quad \cos p'' = \frac{(A+B)\cos\varepsilon''}{D}.$$

Ces trois cosinus déterminent la position du point D, et on voit que ce point sera le même, quel que soit celui des axes principaux qu'on prend pour AL, et auquel on rapporte le mouvement du corps; car l'échange qu'on peut faire entre deux des trois axes principaux, ou entre deux des trois lettres A, B, C, ne change en rien les trois distances p, p', p'', qui sont toujours les mêmes pour le même axe.

Ce théorème très-remarquable prouve qu'il y a toujours un point fixe D dans l'espace, tel qu'en rapportant à la directrice AD les mouvemens de rotation d'un corps de figure donnée, les constantes A′ et B′ sont nulles; il prouve de plus que ce point est le même, quel que soit celui des trois axes principaux auquel on rapporte les variables φ, ω, θ.

12. L'intégrale $\int \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}dM$, prise dans toute l'étendue du corps, représente la somme des forces vives du système; si l'on substitue les valeurs de dx, dy, dz, et qu'ensuite on effectue

l'intégration pour toutes les molécules du corps, cette quantité aura pour valeur

$$\left[\frac{2A+B+C}{2}+\frac{B-C}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right]\frac{d\theta^2}{dt^2}+(B+C)\left(\frac{d\omega}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\right)^2$$
$$+\left[\frac{2A+B+C}{2}+\frac{C-B}{2}\cos(2\omega+2\alpha)\right]\frac{d\varphi^2\cos^2\theta}{dt^2}$$
$$+(C-B)\frac{d\theta d\varphi}{dt^2}\cos\theta\sin(2\omega+2\alpha);$$

et d'après les équations du n° 8, elle se réduit à

$$(B+C)K^2\left[1+\frac{B^2\cos^2\alpha+C^2\sin^2\alpha-A^2}{(A+B)(A+C)}\cos^2\gamma\right].$$

Donc la somme des forces vives est constante, lorsque les forces accélératrices sont nulles.

Cette quantité peut se présenter sous une forme beaucoup plus simple. En effet, si l'on substitue les valeurs $\cos^2\alpha\cos^2\gamma=\cos^2 p'$, $\cos^2\gamma\sin^2\alpha=\cos^2 p''$, $\cos^2\gamma=\sin^2 p$, $K=\frac{W\cos\varepsilon}{\cos p}$, et qu'ensuite on substitue également les valeurs de $\cos p$, $\cos p'$, $\cos p''$, en $\cos\varepsilon$, $\cos\varepsilon'$, $\cos\varepsilon''$, on trouvera que la somme des forces vives se réduit à cette expression très-simple :

$$(B+C)W^2\cos^2\varepsilon+(A+C)W^2\cos^2\varepsilon'+(A+B)W^2\cos^2\varepsilon''.$$

On obtiendrait directement ce résultat en considérant que la vîtesse W autour de l'axe AI se décompose en trois vîtesses, $W\cos\varepsilon$, $W\cos\varepsilon'$, $W\cos\varepsilon''$, autour des axes AL, AM, AN.

Solution du cas particulier où l'on a B = C.

13. Alors l'axe AL, par rapport auquel on considère le mouvement, n'est point semblable aux deux autres, qui sont semblables entr'eux, et les équations générales deviennent

$$(B-A)\,d\varphi\sin\theta\cos\theta+2B\,d\omega\cos\theta=0,$$
$$(B+A)\,d\theta=0,$$
$$d\varphi+\frac{d\omega}{\sin\theta}=K\,dt.$$

On en tire $\theta=\text{const.}=\gamma$, $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{2B}{A+B}K$, et $\frac{d\omega}{dt}=\frac{A-B}{A+B}K\sin\gamma$.

D'ailleurs on a, dans le même cas, $\alpha = L$ et $\cot\gamma = \frac{A+B}{2B}\tang\varepsilon$; c'est-à-dire qu'il faut prendre le point D sur l'arc LI à la distance $LD = 90° - \gamma$, déterminée par l'équation précédente.

Fig. 5 et 6. Donc le mouvement du corps, après avoir été imprimé autour de l'axe AI dans le sens BC, se continue ainsi. L'axe principal AL reste toujours également incliné à la directrice AD, et tourne uniformément autour de cette directrice avec une vîtesse $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{W \sin IL}{\sin DL}$ dans le sens BC; pendant ce mouvement, les autres parties du corps tournent autour de l'axe mobile AL avec une vîtesse $\frac{d\omega}{dt} = \frac{W \sin DI}{\sin DL}$, dans le sens BC, si on a $A > B$, ou dans le sens CB, si $A < B$.

Développement des formules générales.

14. Revenons aux équations générales de l'art. 8. Si l'on élimine $d\varphi$ des deux premières, on aura

$$\left[\frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2} - \cos(2\omega+2\alpha)\right] d\theta \sin\theta - d\omega \cos\theta \sin(2\omega+2\alpha) = 0;$$

équation qui, étant multipliée par $\cos\theta$, a pour intégrale,

$$\cos^2\theta \left[\frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2} - \cos(2\omega+2\alpha)\right] = \text{const.}$$

Lorsque $t=0$, on a $\omega = 0$ et $\theta = \gamma$; donc si l'on fait, pour abréger, $m = \frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2}$, on aura

$$(1) \qquad \cos^2\theta = \frac{(m - \cos 2\alpha)\cos^2\gamma}{m - \cos(2\omega+2\alpha)}.$$

Cette équation établit d'une manière générale la correspondance entre l'angle θ, qui détermine la position de l'axe principal AL sur le méridien mobile DL, et l'angle ω, qui détermine la position du corps par rapport à l'axe AL. Il faut observer d'ailleurs que l'angle ω exprime la quantité dont l'angle DLM s'est accru pendant le temps t; de sorte qu'on a en général $DLM = \omega + \alpha$. Pour savoir quel est le signe de ω dans les premiers instans du mouvement, il faut reprendre la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ donnée dans l'art. 10, laquelle peut être mise sous cette forme

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{W\cos\varepsilon\,(C^2 - B^2)}{2(A+B)(A+C)}\,(\cos 2\alpha - m).$$

Ainsi les premières valeurs de ω auront le même signe que.... $(C^2 - B^2)(\cos 2\alpha - m)$.

Les deux autres équations du mouvement sont en général

$$(2)\qquad Kdt = \frac{n-m}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m}\cdot\frac{d\omega}{\sin\theta},$$

$$(3)\qquad d\varphi = Kdt - \frac{d\omega}{\sin\theta},$$

où l'on a $K = \frac{W\cos\varepsilon}{\sin\gamma}$ et $n - m = \frac{2(A+B)(A+C)}{C^2 - B^2}$.

15. Il s'agit maintenant d'intégrer, par les moyens ordinaires, les deux dernières formules auxquelles nous sommes parvenus; l'équation finie (1) servira en général à exprimer les deux variables ω et θ par le moyen d'une troisième ψ, qui croît continuellement avec le temps; l'équation (2) donnera la relation entre t et ψ; et enfin l'équation (3) fera connaître la valeur de φ en fonction de ψ, ce qui complétera la solution du problème.

Dans cette recherche, il faut surtout faire attention à la quantité constante $m = \frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$; car selon que cette quantité sera plus grande ou plus petite que l'unité, le corps aura différens mouvemens par rapport à son axe principal AL.

16. Nous avons déjà dit que les momens d'inertie par rapport aux axes principaux AL, AM, AN, sont respectivement $B + C$, $A + C$, $A + B$. Ces momens jouissent, comme on sait, de la propriété de *maximum* ou de *minimum*, relativement à tous les axes qui passent par le point A; et comme il n'y en a que deux qui puissent jouir de cette propriété d'une manière absolue, le troisième, qui n'est ni *maximum* ni *minimum*, sera relatif à un axe qu'on peut appeler l'*axe principal moyen*. Maintenant il est aisé de voir que la quantité $\frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$, abstraction faite de son signe, ne peut être plus petite que l'unité, que lorsque AL sera l'axe moyen; alors A sera

moyen entre B et C, et le moment $B+C$ sera moyen entre les momens $A+C$ et $A+B$.

Dans tout autre cas, la quantité $\frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2}$, positive ou négative, sera plus grande que l'unité, et l'axe AI sera l'un des axes extrêmes, savoir, l'axe du plus grand moment, si A est la plus petite des quantités A, B, C, et l'axe du plus petit moment, si A est la plus grande. Au reste, on voit que le problème sera résolu complètement, en considérant le seul cas où m est plus petit que l'unité, puisque AL étant un axe principal choisi à volonté, rien n'empêche de supposer que AL est l'axe moyen. Cependant, pour ne rien laisser à desirer sur cette matière, et pour appliquer les résultats des formules au mouvement des planètes qui ne paraissent pas tourner autour de leur axe moyen, nous considérerons aussi le cas où m est plus grand que l'unité.

Première solution, AL *étant l'axe moyen.*

17. AL étant l'axe moyen, il faut, comme nous l'avons déjà dit, que A soit moyen entre B et C, et qu'ainsi la quantité m, abstraction faite de son signe, soit plus petite que l'unité. Nous supposerons de plus, ce qui ne diminue en rien la généralité de la solution, que AM est l'axe du plus grand moment, c'est-à-dire qu'on a $C>B$; ainsi l'ordre de grandeur entre les quantités A, B, C, données par la figure et la constitution du corps, sera $C>A>B$.

Puisque m est <1, l'équation entre ω et θ, savoir,

$$\cos^2\theta = \frac{(\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma}{\cos(2\omega+2\alpha)-m},$$

fait voir que ω ne peut s'étendre depuis 0° jusqu'à 180°; car si cela était, il y aurait une valeur de ω qui rendrait le dénominateur $\cos(2\omega+2\alpha)-m$ nul, et $\cos\theta$ infini. Donc le corps ne peut faire que des oscillations plus ou moins grandes autour de son axe moyen. En même temps la valeur de θ sera comprise entre certaines limites, de sorte que l'axe AL ne pourra s'éloigner que jusqu'à un certain point de la directrice AD, et son mouvement, par rapport à cette directrice, sera une sorte de balancement ou de nutation dont il faut déterminer la quantité. Pour cela, nous distinguerons deux cas, selon que $\cos 2\alpha - m$ est positif ou négatif.

Premier cas : $\cos 2\alpha - m = p^2$.

18. Dans ce cas, on voit d'abord que $\cos(2\omega + 2\alpha) - m$ doit toujours être positive; car cette quantité, qui est positive lorsque $\omega = 0$, ne peut devenir négative sans passer par zéro, et alors $\cos^2\theta$ serait infini.

On a vu (n° 9) que l'angle α peut être plus petit ou plus grand que 90°, selon la position initiale de l'axe AM. Supposons d'abord $\alpha < 90°$, et soit pris un angle $\mu < 90°$, tel qu'on ait

$$\cos 2\mu = m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma\,;$$

cette valeur donne

$$\cos 2\alpha - \cos 2\mu = (\cos 2\alpha - m)\sin^2\gamma = p^2 \sin^2\gamma :$$

ainsi on aura $\mu > \alpha$. Cela posé, l'équation (1) donne

$$\sin^2\theta = \frac{\cos(2\omega + 2\alpha) - \cos 2\mu}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m} = \frac{2\sin(\omega + \alpha + \mu)\sin(\mu - \alpha - \omega)}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m}\,;$$

d'où l'on voit que ω positif a pour limite $+(\mu - \alpha)$, et que ω négatif a pour limite $-(\mu + \alpha)$. Donc l'étendue totale d'une oscillation est mesurée par l'arc $2\mu < 180°$.

19. Il convient, pour la facilité du calcul, de faire commencer le temps au milieu d'une oscillation, ce qui revient à faire $\alpha = 0$ dans nos formules. Soit alors $\theta = \beta$, et on aura les équations

$$\cos^2\theta = \frac{(1-m)\cos^2\beta}{\cos 2\omega - m}, \quad \sin^2\mu = \frac{1-m}{2}\sin^2\beta.$$

Le cas de $\alpha = 0$ suppose $L = 0$; d'ailleurs on a $A > B$; ainsi l'état initial du mouvement est représenté par la figure 3, où l'on a Fig. 3.
$L^\circ I^\circ = \varepsilon$, $\operatorname{tang} DL^\circ = \cot\beta = \frac{C+A}{C+B}\operatorname{tang}\varepsilon$, ce qui donne $DL^\circ > L^\circ I^\circ$; dans ce même cas, la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ (art. 14) étant positive, les premières valeurs de ω sont positives.

Nous savons d'ailleurs que les limites de ω sont $+\mu$ et $-\mu$; c'est pourquoi nous ferons

$$\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \mu \sin \psi,$$

ψ étant un angle qui est nul lorsque $t=0$, et qui croît indéfiniment avec le temps, comme le calcul le prouvera.

De l'équation précédente on déduit une valeur de $\cos 2\omega$, qui, étant substituée dans celle de $\sin^2\theta$, donne

$$\sin^2\theta = \frac{\sin^2 6 \cos^2 \mu \cos^2 \psi}{\cos^2\mu - (\sin^2 6 - \sin^2\mu)\sin^2\psi}.$$

Soit donc $c^2 = \frac{\sin^2 6 - \sin^2\mu}{\cos^2\mu} = \frac{1+m}{1-m}\operatorname{tang}^2\mu$, on aura $1 - c^2 = \frac{\cos^2 6}{\cos^2\mu}$; ainsi c est < 1, et on aura

$$\sin\theta = \frac{\sin 6 \cos\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}.$$

On donne le signe $+$ au second membre, parce qu'en faisant $\psi = 0$, on doit avoir $\theta = 6$.

20. Cela posé, la correspondance entre les quantités ω, θ et ψ, pendant les quatre premières demi-oscillations, sera telle qu'il suit:

$$\begin{array}{llllll}
\psi = & 0^\circ, & 90^\circ, & 180^\circ, & 270^\circ, & 360^\circ, \\
\omega = & 0, & \mu, & 0, & -\mu, & 0, \\
\theta = & 6, & 0, & -6, & 0, & 6.
\end{array}$$

Dans la première demi-oscillation, le point L parvient de L^0 en B ou L^1; en même temps l'arc LM parvient de la position initiale L^0M^0 à la position L^1M^1, qui fait avec le méridien l'angle $DBM^1 = \mu$. Dans la seconde demi-oscillation, le point L continue son mouvement de nutation de L^1 en L^2, où l'on a $\theta = -6$; en même temps l'arc LM revient de la position L^1M^1, dans laquelle il est le plus éloigné du méridien, à la position L^2M^2, dirigée dans le sens du méridien. Dans la troisième demi-oscillation, le point L revient de L^2 à L^3 ou B; en même temps l'arc LM s'écarte du méridien dans le sens opposé, et parvient de la position L^2M^2 à la position L^3M^3, qui fait avec le méridien l'angle $DBM^3 = \mu$. Enfin, dans la quatrième demi-oscillation, le point L revient de L^3 ou B à L^0, et l'arc LM revient de la position L^3M^3 à la position L^0M^0.

De

De sorte qu'au bout de deux oscillations, les choses sont rétablies dans le même état qu'au commencement du mouvement.

Ces mouvemens d'oscillation et de nutation, mesurés par les variables ω et θ, sont d'ailleurs indépendans du mouvement du méridien lui-même autour du point D, lequel est mesuré par l'angle φ.

21. Ces résultats supposent $\alpha < 90°$. Si l'on a $\alpha > 90°$, soit $\alpha = 180° - \alpha'$, on aura $\alpha' < 90°$. Par cette substitution, l'équation (1) sera la même que si l'on changeait simplement le signe de ω, et qu'on mît α' à la place de α. La valeur de μ étant déterminée semblablement, on aura $\mu > \alpha'$, et les limites de ω deviendront $-(\mu + \alpha')$, $+(\mu - \alpha')$; de sorte que l'étendue d'une oscillation sera toujours mesurée par l'arc 2μ; et si l'on fixe l'époque du mouvement au milieu d'une oscillation, cela revient à faire, dans la formule primitive, $\alpha' = 0$ ou $\alpha = 180°$, ce qui conduira toujours aux mêmes résultats que nous avons trouvés. En effet, on voit immédiatement que la valeur $\alpha = 180°$ amène l'axe AM sur le méridien DL, comme le fait la valeur $\alpha = 0$; avec cette différence, qu'au lieu du point M, on doit prendre l'autre extrémité du même axe principal, dont le moment a été supposé $A + C$.

Second cas : $m - \cos 2\alpha = p^2$.

22. Alors l'équation (1) prendra l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{(m - \cos 2\alpha)\cos^2\gamma}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)},$$

$$\sin^2\theta = \frac{m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma - \cos(2\omega + 2\alpha)}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)},$$

où l'on voit que $m - \cos(2\omega + 2\alpha)$ doit toujours être positif.

Supposons d'abord $\alpha < 90°$, et soit μ un angle $< 90°$, tel qu'on ait

$$\cos 2\mu = - m \sin^2\gamma - \cos 2\alpha \cos^2\gamma,$$

on aura $\cos(180° - 2\mu) - \cos 2\alpha = (m - \cos 2\alpha)\sin^2\gamma = p^2 \sin^2\gamma$; donc $\mu > 90° - \alpha$. Cela posé, pour que $\sin^2\theta$ soit positif, il faut que $\cos(180° - 2\mu) - \cos(2\omega + 2\alpha)$ ou $2\sin(90° - \mu + \omega + \alpha)$, $\sin(\omega + \alpha + \mu - 90°)$ soit positif. Donc ω positif a pour limite

$+(90^\circ+\mu-\alpha)$, et ω négatif a pour limite $-(\alpha+\mu-90^\circ)$; d'où il suit que l'étendue d'une oscillation est encore l'arc $2\mu < 180^\circ$.

23. Si l'on prend pour époque du mouvement le milieu d'une oscillation, ce qui revient à faire, dans nos formules, $\alpha = 90^\circ$, et qu'en même temps on fasse $\theta = \mathcal{C}$, les formules deviendront

$$\cos^2\theta = \frac{(1+m)\cos^2\mathcal{C}}{m+\cos 2\omega}, \quad \sin^2\mu = \frac{1+m}{2}\sin^2\mathcal{C}.$$

Fig. 4. Le cas de $\alpha = 90^\circ$ suppose $L = 90^\circ$; ainsi l'état initial du mouvement est représenté par la figure 4, où l'on a $L^\circ I^\circ = \varepsilon$, $\operatorname{tang} DL^\circ = \cot \mathcal{C} = \frac{A+B}{C+B} \operatorname{tang} \varepsilon$; et comme on a $A > C$, il s'ensuit que $DL^\circ < I^\circ L^\circ$. Dans ce cas, la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ ayant le même signe que $\cos 2\alpha - m$, est négative ; donc les premières valeurs de ω sont aussi négatives.

Puisque les limites de ω sont encore $-\mu$ et $+\mu$, et que les premières valeurs de ω sont négatives, nous supposerons

$$\operatorname{tang}\omega = -\operatorname{tang}\mu \sin\psi,$$

et il en résultera

$$\sin\theta = \frac{\sin\mathcal{C}\cos\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

en prenant, comme dans le premier cas, $c^2 = \frac{\sin^2\mathcal{C} - \sin^2\mu}{\cos^2\mu} = \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tang}^2\mu$.

24. Voici, d'après ces formules, la correspondance qui a lieu entre les trois variables ω, θ, ψ pendant les quatre premières demi-oscillations, au bout desquelles l'axe AL et la situation du corps, à l'égard de cet axe, sont rétablis comme ils étaient au commencement du mouvement :

$$\begin{array}{llllll}
\psi = & 0^\circ, & 90^\circ, & 180^\circ, & 270^\circ, & 360^\circ, \\
\omega = & 0, & -\mu, & 0, & \mu, & 0, \\
\theta = & \mathcal{C}, & 0, & -\mathcal{C}, & 0, & \mathcal{C}.
\end{array}$$

Au premier instant, l'arc LM est dans la situation $L^\circ M^\circ$, qui fait un angle droit avec le méridien DL ; c'est donc alors l'axe AN qui se trouve situé dans le méridien. Du reste, on explique, par la figure 4, la correspondance des mouvemens d'oscillation et de nutation, comme on l'a fait par la figure 3 dans le premier cas.

Si l'on avait $\alpha > 90°$, on ferait $\alpha = 180° - \alpha'$, et on parviendrait absolument aux mêmes conclusions.

25. Il résulte de l'analyse précédente, que le mouvement d'un corps, considéré relativement à son axe moyen, présente deux cas dont voici les caractères distinctifs.

Premier cas. Dans chaque oscillation il y a un instant où l'axe moyen AL, l'axe du plus grand moment AM, et l'axe de rotation instantané AI sont dans un même plan avec la directrice AD. Cet instant est le milieu d'une oscillation, époque où l'axe moyen est dans sa plus petite ou sa plus grande distance à l'égard de la directrice AD. Les formules données pour ce cas (art. 19), supposent que le temps commence à une de ces époques où le point L est le plus près de D. Fig. 3.

La distance IL étant connue au premier instant, et désignée par ε, on trouve la distance $DL = 90° - 6$, qui donne la position de la directrice AD par la formule

$$\operatorname{tang} DL = \cot 6 = \frac{A+C}{B+C} \operatorname{tang} \varepsilon;$$

ainsi on a toujours, dans ce cas, $DL > IL$.

Connaissant 6, qui détermine la nutation de l'axe moyen, on a la quantité μ, qui détermine l'étendue des oscillations par la formule $\sin^2\mu = \frac{1-m}{2} \sin^2 6$. Cette quantité μ est toujours plus petite que 6, et à plus forte raison plus petite que $90°$; et puisque $\frac{1-m}{2} = \frac{A^2-B^2}{C^2-B^2}$, il s'ensuit qu'on a aussi $\sin \mu < \sqrt{\left(\frac{A^2-B^2}{C^2-B^2}\right)}$. Dans ce premier cas, le troisième axe principal AN, qui a le plus petit moment $A+B$, ne peut jamais se trouver sur le méridien DL; car la plus petite valeur de l'angle DLN est $90° - \mu$, dans un sens ou dans l'autre.

Second cas. Si l'on change B en C, et réciproquement, tout ce qu'on a dit du premier cas s'applique au second. C'est donc alors l'axe du plus petit moment AN, qui, au milieu de chaque oscillation, Fig. 4.

se trouve dans un même méridien avec l'axe moyen AL et l'axe de rotation instantané AI. L'axe du plus grand moment AM est toujours à une distance du méridien DL, qui ne peut être moindre que $90° - \mu$.

Dans ce second cas, la distance DL se détermine par l'équation

$$\text{tang DL} = \cot 6 = \frac{A+B}{B+C} \text{tang } \varepsilon\,;$$

ainsi on a toujours $DL < IL$.

Au reste, ces deux cas se traitent analytiquement de la même manière, puisque la permutation des lettres B et C change m en $-m$, et qu'ainsi les formules trouvées pour le premier cas, s'appliquent également au second, comme on le verra ci-après.

Il ne reste plus à examiner que le cas où l'on aurait $m - \cos 2\alpha = 0$.

Troisième cas : $\cos 2\alpha - m = 0$.

26. Alors l'équation (1) donne $\omega = 0$; ainsi le corps n'a aucun mouvement autour de son axe moyen AL. Pour déterminer les deux autres variables θ et φ, il faut recourir aux équations (2) et (3) du n° 8, lesquelles donnent

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin 2\alpha}{n - \cos 2\alpha}\, d\varphi,$$
$$d\varphi = \mathrm{K}dt.$$

Il en résulte d'abord $\varphi = \mathrm{K}t$, ce qui prouve que le mouvement de l'axe moyen AL autour de la directrice AD est uniforme.

Ensuite si l'on fait $\frac{\mathrm{K}\sin 2\alpha}{n - \cos 2\alpha} = i$, on aura $\frac{d\theta}{\cos\theta} = -idt$; ce qui donne, en intégrant,

$$l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\theta) = l\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\gamma) - it,$$

ou

$$\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\theta) = e^{-it}\,\text{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\gamma).$$

En faisant $t = \infty$, on aura $\theta = 90°$ ou $\theta = -90°$, selon que i sera négatif ou positif; c'est-à-dire selon que α sera plus grand ou plus petit que $90°$. Alors l'axe moyen sera réuni avec la directrice AD, dans un sens ou dans l'autre, et le mouvement de rotation autour de ces axes réunis, continuera de se faire uniformément avec la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt} = K$.

Et quoique cette réunion des deux axes n'ait lieu rigoureusement qu'après un temps infini, cependant la rapidité avec laquelle croît ou décroît l'exponentielle e^{it}, permet de regarder ces axes comme sensiblement réunis après un temps assez court.

27. Voilà donc un nouveau cas très-remarquable où l'on peut déterminer exactement et d'une manière très-simple le mouvement d'un corps de figure quelconque : c'est lorsque la valeur initiale de l'angle ILM, que nous avons appelée L, est telle qu'on a $\cos 2\alpha = m = \frac{B^2 + C^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$. Cette valeur, combinée avec l'équation $\tang \alpha = \frac{A+B}{A+C} \tang L$, donne $\cos 2L = \frac{BC - A^2}{A(C-B)}$, ou $\tang^2 L = \frac{A-B}{A+B} \cdot \frac{C+A}{C-A}$. Ainsi, pourvu que l'axe de rotation primitif AI soit placé sur l'arc LI, déterminé par la valeur précédente de tang L, le cas dont il s'agit aura lieu : l'arc LI pourrait d'ailleurs être situé de l'autre côté de l'arc LM, ce qui donnerait toujours le même cas susceptible d'une solution très-simple.

28. Ayant développé l'équation (1), qui contient la loi générale des oscillations du corps autour de l'axe moyen, et de la nutation de cet axe, nous allons procéder à l'intégration des équations (2) et (3), qui feront connaître les variables ω, θ et φ au bout d'un temps quelconque t. Il suffira, pour cet objet, de considérer les formules de l'art. 19, puisqu'elles renferment celles du second cas.

Reprenons donc les formules

$$\tang \omega = \tang \mu \sin \psi, \quad \sin^2 \mu = \frac{1-m}{2} \sin^2 \zeta,$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \zeta \cos \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}, \quad c^2 = \frac{1+m}{1-m} \tang^2 \mu = 1 - \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \mu},$$

d'où l'on déduit

$$\cos 2\omega - m = \frac{(1-m)(1 - c^2 \sin^2 \psi)}{1 + \tang^2 \mu \sin^2 \psi},$$

$$\frac{d\omega}{\sin \theta} = \frac{\tang \mu}{\sin \zeta} \cdot \frac{d\psi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}{1 + \tang^2 \mu \sin^2 \psi}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), où il faut faire $\alpha = 0$, on aura

$$\mathrm{K}dt = \frac{n-m}{1-m} \cdot \frac{\tang \mu}{\sin \mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}};$$

d'ailleurs $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{W}\cos\varepsilon}{\sin \mathcal{C}}$ et $\frac{n-m}{1-m} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$; donc si on fait

$$i = \frac{\mathrm{W}\cos\varepsilon}{\tang \mu} \cdot \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{C}},$$

on aura

$$idt = \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

et en intégrant,

$$it = \mathrm{F}(c, \psi).$$

Ainsi étant donnée une valeur quelconque de l'angle ψ, on pourra trouver la valeur correspondante du temps t, et réciproquement.

29. Soit τ le temps d'une demi-oscillation, qui est aussi celui d'une demi-nutation, on aura $i\tau = \mathrm{F}^{\mathrm{I}}c$, et par conséquent ce temps pourra être déterminé avec toute la précision qu'on voudra, par le moyen de la fonction complète $\mathrm{F}^{\mathrm{I}}c$.

Lorsque le corps différera peu de la figure sphérique, la quantité i sera très-petite et τ très-grand; de sorte que les mouvemens d'oscillation et de nutation seront très-lents.

Soit ψ' la valeur de ψ qui répond à un temps quelconque $t' < \tau$; si l'on fait en général $t = 2k\tau \pm t'$, k étant un entier quelconque, on aura

$$\psi = 2k.\tfrac{1}{2}\pi \pm \psi'.$$

La constante τ étant une fois calculée avec toute la précision nécessaire, par la théorie des fonctions elliptiques, on déterminera exactement l'angle ψ pour toute valeur de t multiple de τ. On pourra même déterminer algébriquement cet angle pour une infinité d'autres valeurs de t, commensurables avec τ; car on sait que l'équation $\frac{t}{\tau}\mathrm{F}^{\mathrm{I}}c = \mathrm{F}(c, \psi)$ est résoluble algébriquement, toutes les fois que $\frac{t}{\tau}$ est rationnelle.

30. Dans tous les cas, on pourra, par l'équation $it = \mathrm{F}(c, \psi)$,

déterminer aussi exactement qu'on voudra l'angle ψ au bout d'un temps quelconque t; l'angle ψ étant connu, on connaîtra la distance $90° - \theta$ de l'arc AL à la directrice AD, et l'angle ω ou DLM qui fixe la situation du corps par rapport à l'axe AL, au moyen des formules

$$\tang \omega = \tang \mu \sin \psi, \quad \sin \theta = \frac{\sin \mathcal{C} \cos \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}},$$

où il faudra se rappeler que ω est toujours compris entre les limites μ et $-\mu$, de même que θ entre les limites $+\mathcal{C}$ et $-\mathcal{C}$.

31. Il ne reste plus qu'à déterminer l'angle φ, qui fera connaître, au bout d'un temps quelconque t, la position du méridien DL. Or si, après avoir fait $\alpha = 0$, on substitue dans l'équation (3) les valeurs

$$\frac{d\omega}{(\cos 2\omega - m)\sin \theta} = \frac{\tang \mu}{(1 - m)\sin \mathcal{C}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}},$$

$$n - \cos 2\omega = n + 1 - \frac{2}{1 + \tang^2 \mu \sin^2 \psi},$$

on aura

$$d\varphi = \frac{2 \tang \mu}{(1-m)\sin \mathcal{C}} \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} - \frac{d\psi}{(1+\tang^2\mu \sin^2\psi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} \right),$$

d'où l'on tire, en intégrant et observant que $\frac{2 \tang \mu}{(1-m)\sin \mathcal{C}} = \frac{\sin \mathcal{C}}{\sin \mu \cos \mu}$,

$$\varphi = \frac{\sin \mathcal{C}}{\sin \mu \cos \mu} \left[\frac{n+1}{2} F(\psi) - \Pi(\tang^2 \mu, \psi) \right].$$

Dans cette formule, $\Pi(\tang^2 \mu, \psi)$ désigne la fonction elliptique de troisième espèce, dont $\tang^2 \mu$ est le paramètre, c étant d'ailleurs le module commun aux deux fonctions F et Π.

32. La valeur de φ correspondante au temps d'une demi-oscillation, se trouvera en faisant $\psi = 90°$; si l'on désigne cette valeur par Φ, on aura

$$\Phi = \frac{\sin \mathcal{C}}{\sin \mu \cos \mu} \left[\frac{n+1}{2} F^1 - \Pi^1(\tang^2 \mu) \right].$$

La fonction complète $\Pi^1(\tang^2 \mu)$ pourra s'exprimer par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, au moyen de la formule du n° 96, première partie; mais pour cet objet, il sera bon de donner une autre forme à cette formule.

33. En suivant les dénominations de l'article cité, soit λ un angle tel que $\operatorname{tang}\lambda = \frac{\cot\theta}{c}$, ce qui donne $\sin\lambda = \frac{\cos\theta}{\Delta(b,\theta)}$ et $\cos\lambda = \frac{c\sin\theta}{\Delta(b,\theta)}$, on aura, par les propriétés connues,

$$F(b,\theta) + F(b,\lambda) = F^1 b,$$
$$E(b,\theta) + E(b,\lambda) = E^1 b + b^2 \sin\theta\sin\lambda.$$

Au moyen de ces équations, on éliminera $F(b,\theta)$ et $E(b,\theta)$ de la valeur de $\Pi^1(n,c)$; puis réduisant d'après l'équation des fonctions complémentaires, on aura la formule

$$\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(n,c) = F^1 c\left[\frac{c^2\operatorname{tang}\theta}{\Delta(b,\theta)} + E(b,\lambda) - F(b,\lambda)\right] + E^1 c F(b,\lambda),$$

dans laquelle $n = \cot^2\theta$.

34. Pour appliquer cette formule au cas proposé, il faudra faire $\theta = \frac{1}{2}\pi - \mu$, $b = \frac{\cos 6}{\cos\mu}$, ce qui donnera $\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\mu}{c} = \sqrt{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)}$ $= \sqrt{\left(\frac{A^2-B^2}{C^2-A^2}\right)}$, et on aura

$$\frac{\sin 6}{\sin\mu\cos\mu}\Pi^1(\operatorname{tang}^2\mu) = F^1 c(\sin 6\cot\mu - b^2\cos\mu\sin\lambda)$$
$$- F^1 c[F(b,\lambda) - E(b,\lambda)] + E^1 c F(b,\lambda).$$

J'observe maintenant que la quantité $\sin 6\cot\mu - b^2\cos\mu\sin\lambda$ se réduit d'abord à $\frac{\cos\mu}{\sin\lambda}(1 - b^2\sin^2\lambda) = \frac{\cos\mu}{\sin\lambda}(\cos^2\lambda + c^2\sin^2\lambda)$; et parce que $c^2 = \operatorname{tang}^2\mu\cot^2\lambda$, elle se réduit ultérieurement à $\frac{\cos^2\lambda}{\sin\lambda\cos\mu}$ $= \frac{C^2-A^2}{A^2-B^2}\cdot\frac{\operatorname{tang}\mu}{\sin 6}$; donc enfin on aura

$$\Phi = \left[\frac{(A+C).(A+B)}{C^2-B^2}\cdot\frac{\sin 6}{\sin\mu\cos\mu} - E(b,\lambda)\right]F^1 c + F(b,\lambda)(F^1 c - E^1 c).$$

Par cette formule, on peut déterminer aussi exactement qu'on voudra l'angle Φ que décrit l'axe moyen autour de la directrice AD, pendant la durée τ d'une demi-oscillation.

35. Cela posé, pour avoir la valeur de φ au bout d'un temps quelconque t, on fera, comme ci-dessus, $t = 2k\tau \pm t'$. On cherchera, par ce qui a été déjà dit, l'angle ψ', qui répond au temps $t' < \tau$; puis

puis calculant par la formule générale la valeur de φ qui correspond à l'angle ψ', et appelant cette valeur φ', on aura généralement

$$\varphi = 2\mathrm{K}\Phi \pm \varphi'.$$

Ainsi, au moyen de la seule constante Φ une fois calculée avec toute la précision nécessaire, on connaîtra exactement φ pour toute valeur de t multiple de τ : on pourra encore déterminer φ algébriquement, et par le moyen des arcs de cercle, si t est commensurable avec τ; dans tout autre cas, on déterminera φ par les formules d'approximation connues dans la théorie des fonctions elliptiques.

35. Nous observerons qu'il y a un moyen très-simple de trouver la valeur approchée de la fonction $\Pi(\tang^2\mu, \psi)$, lorsque l'amplitude ψ n'excède pas 15 ou 20°. En effet, on a en général,

$$\Pi(\psi) - \left(\frac{1+m}{2}\right)\mathrm{F}(\psi) = \frac{1-m}{2}\int\frac{d\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}{1+\tang^2\mu\sin^2\psi}.$$

Supposons que ψ soit assez petit pour qu'on puisse remplacer, dans le second membre, $\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}$ par $1-\frac{1}{2}c^2\sin^2\psi$, c'est-à-dire pour qu'on puisse négliger les quantités de l'ordre $\frac{1}{8}c^4\sin^4\psi$.

Alors si l'on prend un nouvel angle ζ tel que $\tang\zeta = \frac{\tang\psi}{\cos\mu}$, le second membre de l'équation précédente aura pour valeur $\frac{3-m}{4}\zeta\cos\mu - \left(\frac{1+m}{4}\right)\psi$, ce qui donnera

$$\Pi(\psi) = \frac{1+m}{2}\left[\mathrm{F}(\psi) - \tfrac{1}{2}\psi\right] + \frac{3-m}{4}\zeta\cos\mu.$$

Dans le même cas on pourrait faire $\mathrm{F}(\psi) = (1+\frac{1}{4}c^2)\psi - \frac{1}{8}c^2\sin 2\psi$.

Développement du cas particulier où l'on a $m = -1$.

36. Quoique ce cas suppose $\mathrm{C} = \mathrm{A}$, et retombe ainsi, à la notation près, dans celui qui a été traité n° 13, cependant le nouveau point de vue sous lequel nous envisageons ici le mouvement, et les intégrales exactes que nous obtiendrons, ne peuvent que répandre un nouveau jour sur cette matière.

Soit donc $m = -1$ ou $C = A$, on aura $\mu = \varepsilon$, $\cot \varepsilon = \frac{2A}{A+B} \operatorname{tang} \varepsilon$, $c = 0$, $i = \frac{A-B}{A+B} W \sin \varepsilon$, et les variables ω, θ, φ seront données par les équations

$$it = \psi, \qquad \operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\cos \mu},$$
$$\varphi = \frac{n+1}{2 \cos \mu} \psi - \zeta,$$
$$\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \mu \sin \psi,$$
$$\sin \theta = \sin \mu \cos \psi, \quad \cos \theta \cos \omega = \cos \mu.$$

Voici, d'après ces équations, comment on déterminera la position du corps au bout du temps t.

On connaît d'abord l'arc ψ par la valeur $\psi = it$, et l'arc ζ par l'équation $\operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\cos \mu}$, où il faut observer que $\zeta - \psi$ est toujours moindre que 90°. Par ces deux arcs on a la valeur de φ, qui détermine la position du méridien DL. On a ensuite les angles θ et ω par les équations $\sin \theta = \sin \mu \cos \psi$, $\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \mu \sin \psi$; la première fait connaître la distance $DL = 90° - \theta$, et la seconde donne, avec le signe convenable, l'angle DLM qui détermine la position de l'axe AM, et par conséquent celle de tout le corps par rapport à l'axe AL.

37. Cette solution doit revenir au même que celles qu'on déduirait du n° 13; mais comme elles paraissent très-différentes au premier coup d'œil, il sera bon d'en démontrer l'identité.

Fig. 5. Soit BL°I°DM° le méridien primitif où se trouvaient, lorsque $t = 0$, les axes AL, AM, et l'axe de rotation AI aux points marqués L°, M°, I°. Supposons qu'au bout du temps t, les axes AL, AM forment, avec la directrice AD, le triangle sphérique DLM; la position des points L et M sera déterminée par ce qui précède, au moyen des élémens $BX = \varphi$, $XL = \theta$, $DLM = \omega$, $LM = 90°$.

Dans le triangle DLM, où le côté LM est de 90°, on a $\cos DM = \cos DLM \sin DL = \cos \omega \cos \theta = \cos \mu$; donc $DM = \mu$. Donc l'axe principal AM (celui qui n'est point semblable aux deux autres) est toujours également incliné à la directrice AD.

Le même triangle donne $\sin \mathrm{MDL} = \frac{\mathrm{ML}}{\sin \mathrm{DM}} = \frac{\sin \omega}{\sin \mu}$; mais les formules $\tang \omega = \sin \psi \tang \mu$, $\tang \psi = \cos \mu \tang \zeta$ donnent $\sin \zeta = \frac{\sin \omega}{\sin \mu}$; donc l'angle ζ est égal à l'angle MDL, ou à son supplément MDx. Or, lorsque $t = 0$, le point M étant en M°, c'est le supplément MDx qui devient zéro; donc on a en général $\zeta = \mathrm{MD}x$.

Il suit de là que l'angle MDM°, parcouru par l'axe AM autour du pôle D dans le temps t, $= \varphi + \zeta$; de sorte qu'on aura

$$\mathrm{MDM^\circ} = \varphi + \zeta = \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{A-B}} \cdot \frac{\psi}{\cos \mu} = \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{A+B}} \cdot \frac{\mathrm{W}t \sin \varepsilon}{\cos \mu}.$$

Donc l'axe AM se meut uniformément autour du point D avec la vîtesse angulaire $\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{A+B}} \cdot \frac{\mathrm{W} \sin \varepsilon}{\cos \mu}$; et parce que $\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{A+B}} = \cot \beta \cot \varepsilon$ $= \cot \mu \cot \varepsilon$, cette vitesse peut aussi s'exprimer par $\frac{\mathrm{W} \cos \varepsilon}{\sin \mu}$.

Enfin, le même triangle DLM donne encore $\sin \mathrm{DML} =$ $\sin \mathrm{DL} \sin \mathrm{MDL} = \cos \theta \sin \zeta = \frac{\cos \mu}{\cos \omega} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \mu} = \frac{\tang \omega}{\tang \mu} = \sin \psi$; et puisque l'angle DML est zéro en même temps que ψ, on a $\mathrm{DML} = \psi$. Donc le corps tourne uniformément autour de l'axe mobile AM, dans le sens CB, avec une vîtesse angulaire $\frac{\psi}{t} = \frac{\mathrm{A-B}}{\mathrm{A+B}} \mathrm{W} \sin \varepsilon$.

Ces mouvemens sont précisément ceux que nous avons indiqués n° 13, pourvu qu'on échange entr'elles les lettres A et B, afin que la supposition actuelle $\mathrm{C} = \mathrm{A}$ revienne à celle du n° 13, $\mathrm{C} = \mathrm{B}$.

Application des formules au second cas du problème, art. 25.

38. Nous avons discuté fort au long le premier cas, qui est celui où l'axe du plus grand moment AM se trouve au milieu de chaque oscillation, dans le même plan avec l'axe moyen AL et la directrice AD. Venons maintenant au second cas, où l'axe du plus petit moment AN est celui qui se trouve périodiquement dans le même méridien que l'axe moyen AL, tandis que l'axe du plus grand moment reste

toujours éloigné de ce méridien à une distance qui n'est jamais moindre que $90° - \mu$.

Il suffit, pour la solution de ce second cas, d'échanger entr'elles les lettres B et C; et comme on suppose constamment $m = \frac{B^2 + C^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$, afin de conserver l'ordre de grandeur $C > A > B$, il faudra en même temps changer le signe de m. Par l'effet de cette permutation, la constante i deviendrait négative; ainsi il convient de changer le signe de ψ, ce qui change en même temps le signe de ω, comme l'exige la nature de la question (art. 23). Cela posé, voici les formules par lesquelles on déterminera la situation du corps et les vîtesses de ses différens mouvemens au bout d'un temps quelconque.

39. Connaissant $\mathcal{C}$ par l'équation $\cot \mathcal{C} = \frac{A+B}{B+C} \tang \varepsilon$, on trouvera l'angle $\mu < 90°$ par la formule $\sin^2 \mu = \frac{1+m}{2} \sin^2 \mathcal{C} = \frac{C^2 - A^2}{C^2 - B^2} \sin^2 \mathcal{C}$. Faisant ensuite

$$i = \frac{W \cos \varepsilon}{\tang \mu} \cdot \frac{C - A}{A + B},$$

on aura l'équation

$$it = F(c, \psi),$$

qui servira à déterminer t par ψ, ou réciproquement ψ par t. Soit τ le temps d'une demi-oscillation, on aura $\tau = \frac{1}{i} F^1 c$.

Connaissant τ avec toute l'exactitude nécessaire, on pourra supposer qu'un temps quelconque t, aussi grand qu'on voudra, soit représenté par la formule

$$t = 2k\tau \pm t',$$

k étant un entier, et t' un temps $< \tau$. Soit ψ' la valeur de ψ qui répond au temps t', ensorte qu'on ait $it' = F(c, \psi')$, on aura en général,

$$\psi = 2k.\tfrac{1}{2}\pi \pm \psi'.$$

ψ étant connu, on déterminera la distance $90° - \theta$ de l'axe moyen AL à la directrice, et l'angle ω que fait l'arc LN avec le méridien DL, par les formules suivantes:

$$\sin \theta = \frac{\sin \mathcal{C} \cos \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}, \quad \tang \omega = - \tang \mu \sin \psi,$$

où l'on a $c^2 = \frac{1-m}{1+m}\,\text{tang}^2\mu$. Ces formules détermineront toujours θ et ω sans ambiguité, parce qu'on sait que θ est compris entre les limites $+\,\epsilon$ et $-\,\epsilon$, de même que ω entre les limites $+\mu$ et $-\mu$; d'ailleurs il faut se rappeler que ω négatif suppose, comme dans la figure 2, l'angle DLN formé du même côté de DL que celui où se porte l'axe AL par son mouvement autour du point D, et que ω positif suppose l'angle DLN formé de l'autre côté de DL.

40. Il ne reste plus qu'à déterminer la position du méridien DL, ce qui se fera par l'arc $\text{BX} = \varphi$, dont la valeur est

$$\varphi = \frac{\sin\epsilon}{\sin\mu\cos\mu}\left[\frac{n-1}{2}\,\text{F}\,(c,\psi) + \Pi(\text{tang}^2\mu, c, \psi)\right],$$

en supposant toujours $n = \frac{\text{B}+\text{C}+2\text{A}}{\text{C}-\text{B}}$, et $\frac{n-1}{2} = \frac{\text{B}+\text{A}}{\text{C}-\text{B}}$.

Si l'on appelle Φ la valeur de φ correspondante à $\psi = 90°$, ou au temps d'une demi-oscillation, on aura

$$\Phi = \frac{\sin\epsilon}{\sin\mu\cos\mu}\left[\frac{n-1}{2}\,\text{F}^1c - \Pi^1(\text{tang}^2\mu, c)\right];$$

et en prenant un angle auxiliaire λ d'après l'équation $\text{tang}\,\lambda = \sqrt{\left(\frac{1+m}{1-m}\right)}$, on aura

$$\Phi = \left[\frac{(\text{A}+\text{C})\,(\text{A}+\text{B})}{\text{C}^2-\text{B}^2}\cdot\frac{\sin\epsilon}{\sin\mu\cos\mu} + \text{E}(b,\lambda)\right]\text{F}^1c$$
$$- \text{F}\,(b,\lambda).(\text{F}^1c - \text{E}^1c).$$

Soit, comme ci-dessus, $t = 2k\tau \pm t'$, on aura $\varphi = 2k\Phi \pm \varphi'$, φ' étant la valeur de φ qui correspond au temps t', ou à l'angle ψ' déjà déterminé.

Formules particulières pour le cas où l'axe de rotation primitif est très-près de l'axe du plus grand moment AM.

41. Alors il faudra supposer $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi - \delta$, δ étant une quantité très-petite, dont on pourra négliger les puissances supérieures au second ordre. Appliquant donc les formules du premier cas, on aura d'abord les valeurs suivantes :

$$\epsilon = \frac{\text{B}+\text{C}}{\text{A}+\text{C}}\delta,\quad \mu = \epsilon\sqrt{\left(\frac{1-m}{2}\right)} = \epsilon\sqrt{\left(\frac{\text{A}^2-\text{B}^2}{\text{C}^2-\text{B}^2}\right)},\quad c^2 = \frac{1+m}{1-m}\mu^2;$$

d'où il suit que la nutation de l'axe AL, et les oscillations du corps autour de cet axe, seront très-petites de l'ordre δ.

On aura ensuite

$$i = \frac{A-B}{A+C} \cdot \frac{W \sin \delta}{\operatorname{tang} \mu} = W \sqrt{\left(\frac{A-B}{A+B} \cdot \frac{C-B}{C+B}\right)} \cdot \left(1 - \frac{C(C+A)}{(C+B)(A+B)} \mu^2\right),$$

et l'équation $it = F(c, \psi) = \psi(1 + \frac{1}{4}c^2) - \frac{1}{8}c^2 \sin 2\psi$ donnera réciproquement

$$\psi = (1 - \tfrac{1}{4}c^2)\, it + \tfrac{1}{8}c^2 \sin 2it.$$

On en tire le temps d'une demi-oscillation

$$\tau = \frac{\frac{1}{2}\pi}{i}(1 + \tfrac{1}{4}c^2);$$

et ce temps étant une fois calculé jusqu'à la précision des quantités du second ordre, on aura en général

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau} + \frac{c^2}{8} \sin \frac{\pi t}{\tau}.$$

L'angle ψ étant connu pour un temps quelconque, on aura les valeurs de ω et θ, savoir:

$$\omega = \mu \sin \psi \quad \text{et} \quad \theta = \beta \cos \psi.$$

42. Enfin la valeur de φ, au bout du temps t, sera donnée par la formule

$$\varphi = Wt(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2) + \tfrac{1}{2}\beta\mu(\psi - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi),$$

où l'on pourra substituer la valeur $\psi = it$.

Soit Φ l'angle décrit par l'axe AL autour de la directrice, pendant le temps τ d'une demi-oscillation, on aura

$$\Phi = W\tau(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2) + \tfrac{1}{2}\beta\mu . i\tau,$$

ou, en substituant la valeur $\mu i = \frac{A-B}{A+C}\delta W$,

$$\Phi = W\tau(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\beta\delta) = W\tau\left(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 . \frac{A-B}{A+C}\right).$$

Ainsi l'axe AL tourne autour de la directrice AD avec une vîtesse très-peu différente de la vîtesse angulaire initiale W. Cela s'explique en observant que l'axe de rotation primitif AI est très-rapproché de la directrice AD, puisque la distance $DI = \delta - \beta = \frac{A-B}{A+C}\delta$;

quantité qui sera très-petite, même par rapport à δ, si l'on suppose le corps peu éloigné de la figure sphérique, ou A — B très-petit par rapport à A + C.

Au reste, on voit que dans le même cas, le temps d'une oscillation représenté par 2τ est très-grand, puisqu'en négligeant les quantités de l'ordre δ^2, on a

$$2\tau = \frac{\pi}{W}\sqrt{\left(\frac{A+B}{A-B}\cdot\frac{C+B}{C-B}\right)}.$$

Ayant déterminé la constante Φ avec toute la précision nécessaire, on pourra mettre la valeur générale de φ sous cette forme,

$$\varphi = \frac{t}{\tau}\Phi - \frac{1}{4}\,\mathit{6}\mu \sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Ainsi l'on voit qu'il ne s'en faut que d'une très-petite quantité $\frac{1}{4}\,\mathit{6}\mu \sin\frac{\pi t}{\tau}$, que le mouvement de l'axe AL autour de la directrice ne soit uniforme. Lorsque t sera un multiple de τ, on aura exactement $\varphi = \frac{t}{\tau}\,\Phi$.

Cas où le mouvement est le plus compliqué.

43. La valeur de c^2 étant exprimée directement par l'angle donné ε, on a

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{C-B}{C+B}\cdot\frac{C+A}{C-A}\,\tang^2\varepsilon.$$

De là on voit que c est d'autant plus près de l'unité, que l'axe de rotation initial est plus près de l'axe moyen, cas où la distance ε est très-petite sans être nulle. Comme on a d'ailleurs $C > A > B$, il en résulte $(C-B)(C+A) > (C+B)(C-A)$; ainsi, dans aucun autre cas, on ne peut avoir c très-peu différent de l'unité. Dans ce cas donc la nutation de l'axe moyen est de près de $180°$, et les oscillations autour de cet axe sont les plus grandes qu'il est possible. Ainsi le mouvement du corps sera d'autant plus irrégulier, que l'axe de rotation initial sera plus près de l'axe moyen.

Il n'en est pas de même lorsque l'axe de rotation initial est fort près de l'un des deux autres axes principaux. On a déjà vu, dans les art. 41 et 42, et on démontrera plus en détail dans la suite, qu'alors le mouvement du corps est presqu'uniforme, et que l'axe de rotation ne varie que très-peu.

Il y a cependant un cas (n° 27) où l'axe moyen s'approche continuellement de la directrice, et se confond sensiblement avec elle au bout d'un temps assez court; de sorte qu'après la réunion de ces deux axes, le mouvement devient uniforme. Ce cas seul excepté, et celui où l'axe de rotation initial serait précisément l'axe moyen, un corps ne peut tourner d'une manière sensiblement uniforme autour de son axe moyen. Si donc un corps paraît avoir un mouvement presqu'uniforme autour d'un axe sensiblement fixe, cet axe ne peut être son axe moyen. Les planètes, les comètes, et en général tous les corps sujets à quelque variation, ne tourneront jamais uniformément autour de leur axe moyen.

Seconde solution, AL *étant l'axe du plus grand moment.*

44. Quoique le problème soit résolu dans toute sa généralité, par les formules précédentes, qui supposent $m < 1$, il ne sera cependant pas inutile d'examiner aussi le cas de $m > 1$: les formules qu'on trouvera dans ce cas seront plus immédiatement applicables au mouvement de rotation des planètes. Mais pour ne pas entrer dans des détails superflus, nous supposerons qu'on a $C > B > A$; alors l'axe AL aura le plus grand moment d'inertie $B + C$; l'axe AM, dont le moment d'inertie est $A + C$, sera l'axe moyen, et l'axe AN aura le plus petit moment $A + B$. Dans cette supposition, la quantité $m = \frac{C^2 + B^2 - 2A^2}{C^2 - B^2}$ sera toujours positive et plus grande que l'unité. Cela posé, l'équation (1) donne

$$\sin^2\theta = \frac{m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma - \cos(2\omega + 2\alpha)}{m - \cos(2\omega + 2\alpha)},$$

et elle offre trois cas à distinguer.

Premier cas : $m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma < 1.$

45. Comme le dénominateur $m - \cos(2\omega + 2\alpha)$ est toujours positif,

positif, il faut que le numérateur soit positif aussi, ce qui exige que ω ne s'étende pas de 0° à 180°. Donc, dans ce cas, le corps ne peut faire que des oscillations autour de son axe principal AL.

Pour en déterminer l'étendue, on prendra un angle $\mu < 90°$, tel qu'on ait

$$\cos 2\mu = -m\sin^2\gamma - \cos 2\alpha \cos^2\gamma;$$

cette valeur donne $\cos(180° - 2\mu) - \cos 2\alpha = (m-1)\sin^2\gamma$, quantité positive; donc $\mu > 90° - \alpha$. Maintenant pour que $\sin^2\theta$ soit positif, il faut que $\cos 2\mu + \cos(2\omega + 2\alpha)$ ou $2\cos(\omega + \alpha + \mu)\cos(\omega + \alpha - \mu)$ soit négatif; donc ω positif a pour limite $+(90° - \alpha + \mu)$, et ω négatif a pour limite $-(\alpha + \mu - 90°)$; l'étendue de chaque oscillation est donc l'arc $2\mu < 180°$.

45. On peut prendre pour époque du mouvement, le milieu d'une oscillation, ce qui revient à faire $\alpha = 90°$. Soit alors $\theta = \beta$, et on aura les équations

$$\cos^2\theta = \frac{(m+1)\cos^2\beta}{m + \cos 2\omega}, \quad \sin^2\mu = \frac{1+m}{2}\sin^2\beta.$$

Ce cas suppose, comme on voit, $\sin\beta < \sqrt{\left(\frac{2}{1+m}\right)} < \sqrt{\left(\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}\right)}$; et puisqu'au commencement du mouvement on a $\alpha = 90° = L$, $\cot\beta = \frac{A+B}{C+B}\operatorname{tang}\varepsilon$, il faut qu'on ait aussi $\operatorname{tang}\varepsilon > \sqrt{\left(\frac{B-A}{B+A}\cdot\frac{C+B}{C-B}\right)}$: c'est le symptôme qui distingue ce premier cas des deux autres.

De l'équation précédente on déduit

$$\sin^2\theta = \frac{\sin^2\mu - \sin^2\omega}{\frac{1}{2}(m+1) - \sin\omega},$$

et réciproquement,

$$\sin^2\omega = \frac{m+1}{2}\cdot\frac{\sin^2\beta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Soit $\sin\theta = \sin\beta\cos\psi$, et $c^2 = \frac{m-1}{2}\operatorname{tang}^2\beta = 1 - \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\beta}$, on aura

$$\sin\omega = -\frac{\sin\mu\sin\psi}{\sqrt{(1 - \sin^2\beta\cos^2\psi)}}, \quad \cos\omega = \frac{\cos\beta\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}{\sqrt{(1 - \sin^2\beta\cos^2\psi)}}.$$

On a mis le signe $-$ à $\sin\omega$, parce qu'en faisant $t = 0$ et $\omega = 0$, la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ (n° 14) est négative.

D'après ces formules, la correspondance entre ω, θ et ψ dans les quatre premières demi-oscillations, est telle qu'on le voit ici :

$$\begin{array}{llllll} \psi = 0^\circ, & 90^\circ, & 180^\circ, & 270^\circ, & 360^\circ, \\ \theta = \beta, & 0, & -\beta, & 0, & \beta, \\ \omega = 0, & -\mu, & 0, & +\mu, & 0. \end{array}$$

46. Maintenant, si dans l'équation (2) du n° 14, on fait $\alpha = 90^\circ$, et qu'on substitue la valeur de $\frac{d\omega}{\sin\theta}$ tirée des formules précédentes, on aura

$$\mathrm{K}dt = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{\sin\mu}{\sin\beta\cos\beta} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

D'ailleurs on a $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{W}\cos\varepsilon}{\sin\beta}$, $\cot\beta = \frac{\mathrm{A+B}}{\mathrm{B+C}}\tang\varepsilon$, et $\frac{n-m}{m+1} = \frac{\mathrm{A+B}}{\mathrm{C-A}}$; donc si l'on fait

$$i = \frac{\mathrm{W}\cos\varepsilon\cos\beta}{\sin\mu} \cdot \frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{A+B}} = \mathrm{W}\sin\varepsilon\sqrt{\left(\frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{C+A}} \cdot \frac{\mathrm{C-B}}{\mathrm{C+B}}\right)},$$

on aura

$$idt = \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

et en intégrant,

$$it = \mathrm{F}(c, \psi).$$

Soit τ le temps d'une demi-oscillation ou celui d'une demi-nutation, on aura $\tau = \frac{1}{i}\mathrm{F}^1 c$; en général, si l'on fait $t = 2k\tau \pm t'$, k étant un entier, et $t' < \tau$, on aura

$$\psi = 2k.\tfrac{1}{2}\pi \pm \psi',$$

ψ' étant déterminé par l'équation $it' = \mathrm{F}(c, \psi')$.

Si $\frac{t'}{\tau}$ n'excède pas $\frac{1}{4}$, on aura d'une manière suffisamment approchée,

$$cit' = \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}c\psi'),$$

ce qui servira à déterminer fort simplement ψ' par le moyen de t', et réciproquement.

On pourra donc connaître, par ces formules, aussi exactement qu'on voudra, l'angle ψ qui répond à un temps t quelconque, et on voit que cet angle augmente proportionnellement au temps, toutes les fois que t est un multiple de τ.

L'angle ψ étant connu, on connaîtra, par les formules précédentes, les quantités ω et θ qui déterminent la position de l'axe principal AL par rapport à la directrice AD, et celle du corps par rapport à son axe principal.

47. Il ne reste donc plus qu'à trouver la valeur de φ, qui fixe la position du méridien DL dans l'espace. On a pour cet effet l'équation (3), savoir,

$$d\varphi = \mathrm{K}dt - \frac{d\omega}{\sin\theta},$$

qui devient

$$d\varphi = \frac{\sin\mu}{\sin\epsilon\cos\epsilon}\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} + \frac{d\psi}{(1+\mathrm{tang}^2\epsilon\sin^2\psi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}\right),$$

et dont l'intégrale est

$$\varphi = \frac{\sin\mu}{\sin\epsilon\cos\epsilon}\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\mathrm{F}(c,\psi) + \Pi(\mathrm{tang}^2\epsilon, c, \psi)\right].$$

Soit Φ la valeur de φ lorsque $\psi = 90°$, on aura

$$\Phi = \frac{\sin\mu}{\sin\epsilon\cos\epsilon}\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\mathrm{F}^1c + \Pi^1(\mathrm{tang}^2\epsilon, c)\right].$$

Pour avoir la valeur de $\Pi^1(\mathrm{tang}^2\epsilon, c)$, on observera que $c^2 = \frac{m-1}{2}\mathrm{tang}^2\epsilon$; ainsi en procédant comme dans l'art. 33, et faisant

$$\mathrm{tang}\,\lambda = \frac{1}{c}\mathrm{tang}\,\epsilon = \sqrt{\left(\frac{2}{m-1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{C}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2}\right)},$$

on aura

$$\frac{\sin\mu}{\sin\epsilon\cos\epsilon}\Pi^1(\mathrm{tang}^2\epsilon, c) = \left[\frac{c^2\cos\epsilon}{\sin\epsilon\sin\mu} + \mathrm{E}(b,\lambda)\right]\mathrm{F}^1c$$
$$- \mathrm{F}(b,\lambda).(\mathrm{F}^1c - \mathrm{E}^1c).$$

On connaîtra donc aussi exactement qu'on voudra la valeur de Φ. Faisant ensuite $t = 2k\tau \pm t'$, ou $\psi = 2k.\frac{1}{2}\pi \pm \psi'$, on aura

$$\varphi = 2k\Phi \pm \varphi',$$

φ' étant la valeur de φ correspondante à ψ'.

Second cas : $m \sin^2\gamma + \cos 2\alpha \cos^2\gamma > 1$.

48. Dans ce cas on voit par l'équation (1), que ω n'a plus de limites, et que le corps doit tourner sans cesse dans le même sens autour de son axe principal AL. Si l'on prend pour époque du mouvement l'instant d'une révolution où l'on a $\alpha = 90°$ et $\theta = \mathcal{C}$, l'équation (1) donnera

$$\cos^2\theta = \frac{(m+1)\cos^2\mathcal{C}}{m + \cos 2\omega}.$$

Ainsi on ne peut avoir $\theta = 0$; c'est-à-dire que l'axe AL qui fait, au commencement du mouvement, un angle aigu $90° - \mathcal{C}$ avec la directrice AD, ne pourra jamais faire un angle droit avec cette directrice. Soit $\mathcal{C}'$ la plus petite valeur de θ; cette valeur aura lieu lorsque $\cos 2\omega = -1$; ainsi on aura

$$\cos^2\mathcal{C}' = \frac{m+1}{m-1}\cos^2\mathcal{C}.$$

49. Ayant fait $\alpha = 90°$, les formules de l'état initial du mouvement donnent $\cot\mathcal{C} = \frac{A+B}{B+C}\tang\epsilon$, et par conséquent $DL^\circ < I^\circ L^\circ$;
Fig. 4. cet état est représenté par la fig. 4, où l'on voit qu'à cause de $\alpha = 90°$, il faut qu'on ait aussi $L = 90°$, et qu'ainsi l'axe AN du plus petit moment se trouve en N° sur le premier méridien DL°. On voit en même temps, par la formule du n° 14, que la première valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ est négative, et qu'ainsi ω est toujours négatif; c'est-à-dire que pendant que l'axe AL tourne autour du point D dans le sens BC, le corps tourne sans cesse autour de l'axe AL dans le sens opposé CB.

D'après cette observation, soit $\tang\omega = -h\tang\psi$, h étant une constante que nous déterminerons de manière à simplifier les formules; en faisant cette substitution on aura

$$\cos^2\theta = \frac{(m+1)\cos^2\mathcal{C}(\cos^2\psi + h^2\sin^2\psi)}{(m+1)\cos^2\psi + (m-1)h^2\sin^2\psi}.$$

Soit $h^2 = \frac{m+1}{m-1}$, ou $h = \frac{\cos\mathcal{C}'}{\cos\mathcal{C}}$, on aura

$$\cos^2\theta = \cos^2\mathcal{C}\cos^2\psi + \cos^2\mathcal{C}'\sin^2\psi;$$

et si l'on fait $c^2 = (h^2 - 1)\cot^2 \mathcal{G} = \frac{2}{m-1}\cot^2 \mathcal{G} = 1 - \frac{\sin^2 \mathcal{G}'}{\sin^2 \mathcal{G}}$, on aura aussi

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \mathcal{G}\,(1 - c^2 \sin^2 \psi).$$

Ces équations déterminent les valeurs de ω et de θ en fonctions de ψ; sur quoi il faut observer que θ est toujours compris entre les limites $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, mais que ω négatif croît continuellement avec ψ, ensorte que la différence $\psi + \omega$, déterminée par l'équation $\operatorname{tang}(\psi + \omega) = -\frac{(h-1)\sin 2\psi}{h+1-(h-1)\cos 2\psi}$, est toujours plus petite que 90°.

50. Il faut maintenant substituer dans l'équation (2) la valeur de ω tirée de l'équation $\operatorname{tang}\omega = -h\operatorname{tang}\psi$, et celle de $\sin\theta$ en fonction de ψ, ce qui donnera

$$\mathrm{K}dt = \frac{(n-m)h}{(m+1)\sin \mathcal{G}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}.$$

Or on a $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{W}\cos\varepsilon}{\sin \mathcal{G}}$ et $\frac{n-m}{m+1} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}$; soit donc

$$i = \mathrm{W}\cos\varepsilon . \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\sqrt{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)} = \mathrm{W}\cos\varepsilon\sqrt{\left(\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}+\mathrm{A}}\cdot\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}+\mathrm{A}}\right)},$$

et on aura en intégrant,

$$it = \mathrm{F}(c, \psi).$$

Si l'on fait $\psi = 90°$, t sera le temps d'une nutation dans laquelle θ passe de la valeur $\mathcal{G}$ à la valeur $\mathcal{G}'$, ou réciproquement; soit τ ce temps, on aura

$$\tau = \frac{1}{i}\mathrm{F}^1 c.$$

Lorsqu'il y aura peu de différence entre les quantités C, B, A, ce qui a lieu lorsque le corps est composé de couches peu éloignées de la figure sphérique, la quantité i sera très-petite, et le temps d'une nutation sera fort grand; c'est-à-dire que le mouvement de nutation sera très-lent.

Si $\frac{t}{\tau}$ est un nombre entier, on aura exactement $\psi = \frac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau}$, et par conséquent, $\omega = -\psi = -\frac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau}$. On voit par conséquent que le mouvement particulier du corps autour de son axe AL, dans le cas dont nous venons de parler, sera très-lent, puisqu'il ne décrit 90° que dans le temps τ, qui est celui d'une nutation; mais ce mouvement s'exécute toujours dans le même sens, c'est-à-dire en sens contraire au mouvement de l'axe AL autour du point D.

51. Il ne nous reste plus qu'à déterminer ce dernier mouvement mesuré par l'angle φ; or on a

$$d\varphi = \mathrm{K}dt - \frac{d\omega}{\sin\theta}, \quad \frac{d\omega}{\sin\theta} = -\frac{hd\psi\,(1-c^2\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}}{(\cos^2\psi + h^2\sin^2\psi)\sin6};$$

donc

$$d\varphi = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}} \cdot \frac{h}{\sin6} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} + \frac{h}{\sin6} \cdot \frac{d\psi\,(1-c^2\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}}{1+(h^2-1)\sin^2\psi},$$

et en intégrant,

$$\varphi = \frac{\cos6'}{\sin6\cos6}\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\,\mathrm{F}\,(c,\psi) + \Pi\,(c^2\tan g^2 6, c, \psi)\right].$$

Soit Φ la valeur de φ lorsque $\psi = 90°$, on aura

$$\Phi = \frac{\cos6'}{\sin6\cos6}\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\,\mathrm{F}^1 c + \Pi^1\,(c^2\tan g^2 6, c)\right].$$

Mais par la formule du n° 33, on trouve

$$\frac{\cos6'}{\sin6\cos6}\,\Pi^1\,(c^2\tan g^2 6, c) = \left[\frac{\cos6'\cos6}{\sin6} + \mathrm{E}(b,6)\right]\mathrm{F}^1 c$$
$$- \mathrm{F}\,(b,6).(\mathrm{F}^1 c - \mathrm{E}^1 c).$$

D'ailleurs la quantité $\frac{\cos6'}{\sin6\cos6} \cdot \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}} + \frac{\cos6'\cos6}{\sin6}$ se réduit à $\cos6'\cot(6+\varepsilon-\frac{1}{2}\pi)$; donc

$$\Phi = [\cos6'\cot(6+\varepsilon-\tfrac{1}{2}\pi) + \mathrm{E}\,(b,6)]\,\mathrm{F}^1 c$$
$$- \mathrm{F}\,(b,6)\,(\mathrm{F}^1 c - \mathrm{E}^1 c).$$

52. Si $\frac{t}{\tau}$ est un entier, on aura $\varphi = \frac{t}{\tau}\Phi$; on a en même temps, $\psi = \frac{1}{2}\pi.\frac{t}{\tau}$; ainsi la situation du corps sera déterminée exactement au bout d'un temps quelconque t, multiple du temps τ d'une nutation; on pourra déterminer exactement cette même situation

lorsque $\frac{t}{\tau}$ sera rationnelle, par les propriétés connues des fonctions elliptiques.

En général, soit $t=2k\tau \pm t'$, k étant un entier, et $t'<t$, on aura $\psi=2k.\frac{1}{2}\pi \pm \psi'$, et $\varphi=2k.\Phi \pm \varphi'$, ψ' étant la même fonction de t' que ψ est de t, et φ' la même fonction de ψ' que φ est de ψ.

Au reste, si $\frac{t'}{\tau}$ est une fraction plus petite que $\frac{1}{4}$, on aura, avec une exactitude suffisante,

$$cit' = l \operatorname{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}c\psi'\right);$$

ψ' étant connu, on en déduira

$$\varphi' = \frac{Wt'\cos\varepsilon}{\sin 6} + \frac{1}{\sin 6}\left[\tfrac{1}{2}h\cot^2 6\,\psi' - \left(1-\tfrac{1}{2}\cot^2 6\right)\omega'\right],$$

$$\operatorname{tang}\omega' = -h\operatorname{tang}\psi',$$

$$\sin^2\theta' = \sin^2 6\cos^2\psi' + \sin^2 6'\sin^2\psi',$$

ce qui détermine la position du corps au bout du temps t.

Du cas où l'axe de rotation initial est très-près de l'axe du plus grand moment AL.

53. Alors l'arc ε est très-petit; et si on rejette les puissances de ε supérieures à la seconde, les quantités 6 et $6'$, qui déterminent l'étendue de la nutation de l'axe AL, seront ainsi exprimées :

$$6 = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{A+B}{B+C}\right)\varepsilon,$$

$$6' = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{A+B}{B+C}\right)h\varepsilon;$$

de là on tire

$$6 - 6' = \frac{A+B}{B+C}(h-1)\varepsilon = \frac{C-B}{B-A}\cdot\frac{\varepsilon}{h+1}.$$

Si la différence $C-B$ est beaucoup plus petite que $B-A$, ainsi que cela doit avoir lieu dans le sphéroïde terrestre, h sera très-peu différent de l'unité, et on aura $6-6' = \frac{C-B}{B-A}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$; de sorte que l'arc de nutation $6-6'$ sera beaucoup plus petit que ε. Dans la même hypothèse, on aura

$$c^2 = 1 - \frac{\sin^2 6'}{\sin^2 6} = \frac{C-B}{C+B} \cdot \frac{B+A}{B-A} \varepsilon^2,$$

$$i = W\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) \sqrt{\left(\frac{C-A}{C+A} \cdot \frac{B-A}{B+A}\right)},$$

$$it = F(c, \psi) = \left(1 + \frac{c^2}{4}\right)\psi - \tfrac{1}{8} c^2 \sin 2\psi;$$

$$\psi = it\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) + \frac{c^2}{8} \sin 2it.$$

54. Désignons toujours par τ le temps d'une nutation, ou celui pendant lequel le corps fait un quart de révolution autour de son axe AL, on aura

$$\tau = \frac{\frac{1}{2}\pi}{W}\left(1 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) \sqrt{\left(\frac{C+A}{C-A} \cdot \frac{B+A}{B-A}\right)},$$

et l'expression de ψ pour un temps quelconque t deviendra

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi . \frac{t}{\tau} + \tfrac{1}{8} c^2 \sin \frac{\pi t}{\tau};$$

ψ étant connu, on aura θ par l'équation $\sin^2\theta = \sin^2 6 \cos^2\psi + \sin^2 6' \sin^2\psi$; et comme on peut négliger le carré de $6 - 6'$, on aura avec une exactitude suffisante,

$$\theta = 6 - (6 - 6') \sin^2\psi.$$

Quant à l'angle ω, il est donné exactement par l'équation $\tang \omega = -h \tang \psi$, ou d'une manière approchée par la valeur

$$\omega = -\psi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{C^2 - B^2}{B^2 - A^2}\right) \sin 2\psi,$$

si toutefois $C - B$ est très-petit par rapport à $B - A$.

55. Il ne reste plus qu'à déterminer φ. Pour cela, nous remarquerons que la formule du n° 51 peut se réduire à

$$d\varphi = K dt + \frac{h}{\sin 6} \cdot \frac{d\psi\left(1 + \frac{1}{2}c^2 \sin^2\psi\right)}{1 + (h^2 - 1)\sin^2\psi}.$$

Or, l'équation $\tang \omega = -h \tang \psi$ donne $d\omega = -\dfrac{h d\psi}{1 + (h^2 - 1)\sin^2\psi}$, et par conséquent, $(h^2 - 1)\int d\omega \sin^2\psi = -h\psi - \omega$; donc

$$\int \frac{h}{\sin 6} \cdot \frac{d\psi\left(1 + \frac{1}{2}c^2\sin^2\psi\right)}{1 + (h^2-1)\sin^2\psi} = \int -\frac{d\omega}{\sin 6}\left(1 + \tfrac{1}{2}c^2\sin^2\psi\right) = -\frac{\omega}{\sin 6} + \frac{\frac{1}{2}c^2}{h^2 - 1} \cdot \frac{h\psi + \omega}{\sin 6}.$$

Or

Or on a $c^2 = (h^2-1)\cot^2 \mathcal{C}$; donc $\frac{\frac{1}{2}c^2}{h^2-1}\cdot\frac{h\psi+\omega}{\sin \mathcal{C}} = \frac{\frac{1}{2}\cot^2\mathcal{C}}{\sin \mathcal{C}}(h\psi+\omega)$; d'ailleurs comme $\cos^2 \mathcal{C}$ est une quantité très-petite du second ordre, cette quantité se réduit à $\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C}\,(h\psi+\omega)$. On peut semblablement réduire $\frac{\omega}{\sin \mathcal{C}}$ à $\omega\,(1+\frac{1}{2}\cos^2 \mathcal{C})$; ainsi l'intégrale précédente devient $-\omega\,(1+\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C})+\frac{1}{2}\cos^2\mathcal{C}\,(h\psi+\omega), = -\omega+\frac{1}{2}h\psi\cos^2\mathcal{C}$, $= -\omega+\frac{1}{2}h\cos^2\mathcal{C}.it$; donc enfin on a

$$\varphi + \omega = (\mathrm{K} + \tfrac{1}{2}hi\cos^2\mathcal{C})\,t.$$

Ainsi l'angle $\varphi+\omega$ croît proportionnellement au temps, sans aucune inégalité sensible; d'ailleurs en substituant les valeurs de K et de i, on a

$$\mathrm{K}+\tfrac{1}{2}hi\cos^2\mathcal{C} = \mathrm{W}\cos\varepsilon\left(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\mathcal{C}.\frac{\mathrm{C+B}}{\mathrm{A+B}}\right) = \mathrm{W}\cos\varepsilon\left(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{\mathrm{A+B}}{\mathrm{B+C}}\right);$$

donc enfin,

$$\varphi + \omega = \mathrm{W}t\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{B+C}}\right),$$

ce qui fait voir que l'arc $\varphi+\omega$ est décrit par un mouvement uniforme, dont la vîtesse diffère très-peu de la vîtesse initiale W, puisqu'elle est $\mathrm{W}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{C+B}}\right)$.

Si l'on appelle Φ la valeur de φ lorsque $\psi = 90°$, ou pendant le temps d'une nutation, on aura

$$\Phi - \tfrac{1}{2}\pi = \mathrm{W}\tau\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{\mathrm{C-A}}{\mathrm{B+C}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\left(1+\tfrac{1}{4}c^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{\mathrm{B+A}}{\mathrm{B+C}}\right)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{C+A}}{\mathrm{C-A}}.\frac{\mathrm{B+A}}{\mathrm{B-A}}\right)}.$$

56. Voici comment, dans l'hypothèse précédente, on déterminera, Fig. 6. au bout du temps t, la position d'un point quelconque du corps situé au commencement du mouvement, sur le rayon AP° déterminé par les deux élémens $\mathrm{DL°P°} = \Omega$, $\mathrm{L°P°} = \mathrm{P}$.

Ayant fait l'arc $\mathrm{BX} = \varphi$, on aura d'abord la position du méridien DX; prenant ensuite $\mathrm{LX} = \theta = \mathcal{C} - (\mathcal{C}-\mathcal{C}')\sin^2\psi$, on aura la position de l'axe AL; enfin si l'on fait l'angle $\mathrm{DLP} = \Omega - \omega$, puis l'arc $\mathrm{LP} = \mathrm{P}$, on aura le lieu cherché du rayon AP.

45

Supposons, pour plus de simplicité, que $\frac{t}{\tau}$ soit un entier, on aura $\psi = \frac{1}{2}\pi.\frac{t}{\tau}$, $\omega = -\psi = -\frac{1}{2}\pi.\frac{t}{\tau}$, $\varphi = \text{W}'t - \omega$, en supposant $\text{W}' = \text{W}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2.\frac{\text{C}-\text{A}}{\text{C}+\text{B}}\right)$, $i = \frac{\text{W}\cos\varepsilon}{h}.\frac{\text{C}-\text{A}}{\text{A}+\text{B}}$, $\text{DL} = \frac{1}{2}\pi - 6 + (6 - 6')\sin^2\psi$ $= \frac{\text{A}+\text{B}}{\text{B}+\text{C}}\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{\text{C}^2 - \text{B}^2}{\text{C}^2 - \text{A}^2}\sin^2\psi\right)$. Connaissant DL, LP et l'angle $\text{DLP} = \Omega - \omega$, la résolution du triangle DLP donnera les formules suivantes pour déterminer l'angle $\text{BDP} = x$ et la distance $\text{DP} = y$.

Soit $f = \frac{\text{A}+\text{B}}{\text{B}+\text{C}}\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{\text{C}^2 - \text{B}^2}{\text{C}^2 - \text{A}^2}\sin^2\psi\right)$; si l'on néglige les quantités de l'ordre ε^2, on aura

$$\begin{aligned} \text{LDP} &= \pi - \Omega - \psi - f\cot\text{P}\sin(\Omega + \psi), \\ x &= \text{W}'t + \pi - \Omega - f\cot\text{P}\sin(\Omega + \psi), \\ y &= \text{P} - f\cos(\Omega + \psi). \end{aligned}$$

On voit que y varie depuis $\text{P} - f$ jusqu'à $\text{P} + f$, et que l'angle BDP ne croît pas tout-à-fait proportionnellement au temps, puisqu'il y a dans son expression une équation ou inégalité $f\cot p \sin(\Omega + \psi)$, dont l'argument est $\Omega + \psi$. Cette équation, qui ne peut monter qu'à la petite quantité $f \cot p$, dans un sens ou dans l'autre, et qui d'ailleurs ne peut que varier très-peu pendant une révolution autour de l'axe de rotation diurne, sera toujours insensible dans le mouvement de la Terre.

Troisième cas : $m\sin^2\gamma + \cos 2\alpha\cos^2\gamma = 1$.

Fig. 2. 57. Ce cas où l'on a $\sin^2\alpha = \frac{m-1}{2}\text{tang}^2\gamma$, revient à celui de l'art. 26, et n'exige aucun nouveau développement. En effet, la figure 2 représentant l'état des choses au commencement du mouvement, suppose $\text{DLM} = \alpha$, $\text{LD} = \frac{1}{2}\pi - \gamma$. Prolongeons l'arc LD à la distance $\text{DL}' = \pi - \text{DL}$, et soit $\text{DML}' = \alpha'$, $\text{DM} = \frac{1}{2}\pi - \gamma'$, afin que les quantités α' et γ' représentent, pour l'axe AM, des quantités analogues à α et γ pour l'axe AL. Dans le triangle sphé-

rique DLM, où le côté LM est de 90°, on aura

$$-\cos\alpha' = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma'}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\gamma'}{\cos\gamma};$$

donc

$$\cos^2\alpha' = \frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma'} = \frac{\sin^2\gamma}{1-\cos^2\gamma\cos^2\alpha} = \frac{\tan g^2\gamma}{\tan g^2\gamma+\sin^2\alpha} = \frac{2}{m+1},$$

et $\cos 2\alpha' = \frac{3-m}{m+1}$;

substituant la valeur $m = \frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2}$, il viendra

$$\cos 2\alpha' = \frac{C^2+A^2-2B^2}{C^2-A^2}:$$

c'est ce que devient l'équation $\cos 2\alpha = \frac{C^2+B^2-2A^2}{C^2-B^2}$, lorsqu'on échange entr'elles les lettres B et A, afin que l'axe AM désigne, dans le cas présent, le même axe que AL dans l'art. 27.

Recherche de l'axe de rotation et de la vîtesse angulaire à chaque instant.

58. Quoique le mouvement du corps soit déterminé par ce qui précède, d'une manière complète, cependant comme les trois mouvemens de rotation, continus ou alternatifs, que nous avons considérés, peuvent, pour chaque instant, se réduire à un seul mouvement de rotation autour d'un axe variable, il sera utile de déterminer la position de cet axe et la vîtesse angulaire à l'instant donné.

Supposons qu'au bout du temps t l'axe de rotation rencontre la sphère au point I, et que la vîtesse angulaire autour de cet axe, dans le sens BC, soit w. Faisons l'angle LDI $= \lambda$, et la distance DI $= \nu$, on trouvera comme au n° 10, Fig. 7.

$$\frac{d\theta}{dt} = -w\sin\lambda\sin\nu,$$
$$\frac{d\omega}{dt} = w\sin\nu\,.\,\frac{\cos\lambda}{\cos\theta},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = w(\cos\nu - \sin\nu\tan g\,\theta\cos\lambda).$$

Substituant ces valeurs dans les équations différentielles du n° 38, on aura les équations suivantes pour déterminer les trois quantités w, λ, ν, relatives à l'axe instantané de rotation :

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sin(2\omega + 2\alpha)}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m} \cdot \frac{1}{\sin\theta},$$

$$\operatorname{tang} \nu = \frac{(\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma}{n - m - (\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma} \cdot \frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos\lambda},$$

$$w = \frac{K}{\cos\nu}\left[1 + \left(\frac{m - \cos 2\alpha}{n - m}\right)\cos^2\gamma\right].$$

59. Par la théorie précédente on connaît, pour un temps donné, les quantités ω et θ; on connaîtra donc, par la première équation, la valeur de λ; par la seconde, celle de ν, et par la troisième, celle de la vîtesse angulaire w. Ainsi l'axe de rotation et la vîtesse angulaire sont déterminés à chaque instant.

La troisième équation offre ce théorème remarquable, que *la vîtesse angulaire est toujours réciproquement proportionnelle au cosinus de la distance de l'axe de rotation à la directrice.* Il s'ensuit que ce cosinus n'est jamais zéro, et qu'ainsi l'axe de rotation qui, au commencement du mouvement, fait un angle aigu avec la directrice, fera perpétuellement un angle aigu avec elle, et ne s'en écartera plus ou moins que par un mouvement de nutation qu'il est facile de déterminer.

Cette propriété, au reste, confirme ce que nous avons déjà dit, n° 11, sur l'invariabilité de la directrice, quel que soit celui des trois axes principaux dont on se sert pour déterminer le mouvement du corps.

Nous observerons enfin que les valeurs de λ, ν, w sont indépendantes de φ, et peuvent par conséquent se déterminer par les seules fonctions elliptiques de la première espèce.

60. Si du point I on mène l'arc IQ perpendiculaire au méridien mobile DX, la position du point I pourra être déterminée assez simplement par les coordonnées $DQ = x$, $QI = y$; or on a

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\nu\cos\lambda,\ \sin y = \sin\nu\sin\lambda,\ \cos y = \frac{\cos\nu}{\cos x},\ \operatorname{tang} y = \sin x \operatorname{tang}\lambda;$$

ainsi les valeurs de x et y seront données immédiatement par les équations

$$\operatorname{tang} x = f \operatorname{tang} \theta, \qquad f = \frac{(\cos 2\alpha - m)\cos^2\gamma}{n - m + (m - \cos 2\alpha)\cos^2\gamma},$$

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin x}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin(2\omega + 2\alpha)}{\cos(2\omega + 2\alpha) - m}.$$

Comme les valeurs de ω et de θ reviennent toujours les mêmes après deux nutations de l'axe AL, il s'ensuit que dans cet intervalle de temps, le point I, extrémité de l'axe de rotation, décrit, relativement au méridien mobile DL, une ovale, ou en général une courbe rentrante, et revient au point d'où il est parti. Nous examinerons plus particulièrement la figure de cette ovale dans les différens cas généraux qui ont été traités jusqu'ici.

61. Lorsque le mouvement de l'axe AL est tel que les valeurs de θ sont alternativement positives et négatives, la nutation de cet axe s'étendant depuis $\theta = \mathcal{C}$ jusqu'à $\theta = -\mathcal{C}$, alors on voit par l'équation $\operatorname{tang} x = f \operatorname{tang} \theta$, où f est un coefficient constant, que la valeur de x sera aussi alternativement positive et négative; de sorte que les limites de x seront $+a'$ et $-a'$. Dans le même cas, on verra que les limites de y sont $+b'$ et $-b'$; d'où il suit que le point I, considéré relativement au méridien mobile DL, décrira une espèce d'ellipse dont D est le centre, et qui aura deux diamètres, l'un $2a'$, dirigé suivant le méridien, l'autre $2b'$, perpendiculaire au méridien.

62. Considérons, par exemple, le premier des deux cas qui peuvent avoir lieu lorsque AL est l'axe moyen; alors on a (art. 19) $\alpha = 0$, $\gamma = \mathcal{C}$, $\sin^2\mu = \frac{1-m}{2}\sin^2\mathcal{C}$, ce qui donne

$$f = \frac{(1-m)\cos^2\mathcal{C}}{n - m - (1-m)\cos^2\mathcal{C}} = \frac{(A-B)\cos^2\mathcal{C}}{A + C - (A-B)\cos^2\mathcal{C}}.$$

Soit a' la valeur de x qui répond à $\theta = \mathcal{C}$, on aura

$$\operatorname{tang} a' = f \operatorname{tang} \mathcal{C} = \frac{(A-B)\sin\mathcal{C}\cos\mathcal{C}}{A + C - (A-B)\cos^2\mathcal{C}}.$$

Soit b' la valeur de y qui répond à $\theta = 0$, on aura

$$\operatorname{tang} b' = \frac{f \sin 2\mu}{\cos 2\mu - m} = \frac{f \operatorname{tang}^2 \mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu} = \frac{\operatorname{tang} a' \operatorname{tang}\mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu};$$

donc $\frac{\operatorname{tang} b'}{\operatorname{tang} a'} = \frac{\operatorname{tang}\mathcal{C}}{\operatorname{tang}\mu}$; or on a $\mu < \mathcal{C}$; donc $a' < b'$.

Fig. 8. Dans ce premier cas, l'axe de rotation AI, considéré toujours par rapport au méridien DL, comme si celui-ci était fixe, décrit, dans le sens $I^\circ I^1$ ou BC, un quart de son orbite, pendant le temps τ d'une demi-oscillation, ou pendant que l'axe AL passe de L° à L^1 ou B. Il continue son mouvement dans le même sens pendant les trois demi-oscillations suivantes; de sorte qu'après le temps 4τ, qui est celui de deux oscillations ou de deux nutations, l'axe a parcouru son orbite entière, et se retrouve au point I°, d'où il était parti.

Pendant ce mouvement, la vîtesse angulaire, qui est toujours comme $\frac{1}{\cos \nu}$, ne varie qu'entre les limites W et $\frac{W \cos a'}{\cos b'}$; la première a lieu aux points du méridien I°, I^2; la seconde aux points I^1, I^3, qui en sont les plus éloignés; d'ailleurs puisqu'on a $a' < b'$, on voit que la vîtesse hors du méridien est toujours plus grande que la vîtesse dans le méridien.

63. Dans le second cas du mouvement de l'axe moyen (art. 23), on a $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 6$, $\sin^2\mu = \frac{1+m}{2} \sin^2 6$, ce qui donne

$$\tang x = f \tang \theta, \quad f = -\frac{(C-A)\cos^2 6}{A+B+(C-A)\cos^2 6},$$

$$\tang y = \frac{\sin x}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin 2\omega}{m+\cos 2\omega} = -\frac{\sin x}{\sin \theta} \cdot \frac{C^2-B^2}{C^2-A^2} \cdot \frac{\tang \mu \sin \psi}{1-c^2 \sin^2 \psi}.$$

Dans ce cas, comme dans le précédent, on suppose $C > A > B$; ainsi f est négative, et par conséquent la première valeur de x, lorsque $t = 0$, est aussi négative : faisant alors $x = -a'$, on a $\tang a' = -f \tang 6 = \frac{(C-A)\sin 6 \cos 6}{A+B+(C-A)\cos^2 6}$. En effet, nous savions déjà, par l'état initial du mouvement, que le point D doit se trouver

Fig. 9. entre I° et L°. Ayant fait d'ailleurs $L^\circ I^\circ = \varepsilon$, $DL^\circ = \frac{1}{2}\pi - 6$, et ayant trouvé $\cot 6 = \frac{A+B}{B+C} \tang \varepsilon$, on a DI° ou $a' = \varepsilon - (\frac{1}{2}\pi - 6)$, et par conséquent $\tang a' = \frac{\tang \varepsilon - \cot 6}{1 + \tang \varepsilon \cot 6}$; ce qui, en substituant la valeur de $\tang \varepsilon$ en $\cot 6$, revient à la valeur précédente.

Les valeurs $x = -a'$, $y = 0$ répondent à $t = 0$ ou $\psi = 0$. Soit maintenant $t = \tau$ ou $\psi = 90^\circ$, on aura $\theta = 0$ et $x = 0$; ensuite faisant $y = b'$, on aura

$$\tang b' = -f.\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}\cdot\frac{\tang\mu}{1-c^2} = -f.\frac{C^2-B^2}{C^2-A^2}\cdot\frac{\tang\mu\cos^2\mu}{\cos^2 \mathit{6}} = -\frac{f\tang^2\mathit{6}}{\tang\mu},$$

ce qui donne encore $\frac{\tang b'}{\tang a'} = \frac{\tang\mathit{6}}{\tang\mu}$; et comme on a $\mathit{6} > \mu$, il s'ensuit $b' > a'$: de sorte que l'ovale décrite par le point I autour du centre D, a, comme dans le premier cas, son grand diamètre perpendiculaire au méridien.

Il résulte de ces formules, que l'axe de rotation passe de I° en I^1, c'est-à-dire décrit le quart de son orbite dans le temps τ d'une demi-oscillation : il continue ainsi dans les trois demi-oscillations suivantes, et son orbite entière est parcourue dans le temps 4τ, qui est celui de deux oscillations ou de deux nutations. Ce mouvement, qui a toujours lieu dans le même sens, c'est-à-dire dans le sens CB, se renouvelle de la même manière dans les périodes suivantes, et ainsi à l'infini.

On fera d'ailleurs la même remarque que dans l'art. précédent, sur la variation de la vîtesse angulaire. Elle est la plus petite $=$ W sur le méridien en I° et I^2, et la plus grande en I^1 et I^3, lorsque le point I est le plus éloigné du méridien, où sa valeur est $W\frac{\cos a'}{\cos b'}$.

Tels sont les mouvemens que l'axe de rotation AI exécute par rapport au méridien où se trouve l'axe moyen AL, dans les deux cas qui peuvent avoir lieu, selon que l'axe AM ou l'axe AN est au commencement du mouvement dans le même méridien que l'axe AL avec l'axe de rotation primitif AI°.

64. Si m est positif et plus grand que l'unité, ce qui a lieu, comme nous l'avons vu, dans l'hypothèse $C > B > A$, où AL est l'axe du plus grand moment, et AM l'axe moyen, il faut distinguer, comme ci-dessus, deux cas qui donnent lieu à des mouvemens très-différens.

Premier cas. Si la position initiale de l'axe de rotation est telle que le corps ne puisse faire que des oscillations autour de l'axe AL, alors on trouvera des résultats analogues aux précédens, mais avec des différences qui méritent d'être remarquées.

Il faudra, dans ce cas, faire $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = \mathit{6}$, $\sin^2\mu = \frac{m+1}{2}\sin^2\mathit{6}$, ce qui donnera

$$\operatorname{tang} x = f \operatorname{tang}\theta, \quad f = -\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})\cos^2\mathit{6}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+(\mathrm{C}-\mathrm{A})\cos^2\mathit{6}},$$

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sin x}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin 2\omega}{m+\cos 2\omega} = f\cdot\frac{\cos x}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin 2\omega}{m+\cos 2\omega}.$$

Mais par les formules du n° 45, on a

$$\frac{\sin 2\omega}{m+\cos 2\omega} = -\frac{2\sin\mu}{(m+1)\cos\mathit{6}}.\sin\psi\,\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)};$$

donc

$$\operatorname{tang} y = -\frac{2f\sin\mu}{(m+1)\cos\mathit{6}}\cdot\frac{\cos x}{\cos\theta}.\sin\psi\,\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}.$$

Au commencement du mouvement où $t=0$ et $\psi=0$, on aura $y=0$; et si l'on fait $x=-a'$, on aura

$$\operatorname{tang} a' = -f\operatorname{tang}\mathit{6} = \frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin\mathit{6}\cos\mathit{6}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}+(\mathrm{C}-\mathrm{A})\cos^2\mathit{6}},$$

ce qui s'accorde avec la valeur donnée immédiatement par l'état initial du mouvement $a' = \varepsilon - (\frac{1}{2}\pi - \mathit{6})$, où l'on a $\cot\mathit{6} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{B}+\mathrm{C}}\operatorname{tang}\varepsilon$.

Pour avoir la position de l'axe de rotation au bout du temps τ, qui est celui d'une demi-oscillation, on fera $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = 0$, ce qui donnera $x=0$; et si l'on fait $y=b'$, on aura

$$\operatorname{tang} b' = -\frac{f\sin\mu}{(m+1)\cos\mathit{6}}.\frac{\cos\mu}{\cos\mathit{6}} = -\frac{f\operatorname{tang}^2\mathit{6}}{\operatorname{tang}\mu};$$

d'où résulte encore $\frac{\operatorname{tang} b'}{\operatorname{tang} a'} = \frac{\operatorname{tang}\mathit{6}}{\operatorname{tang}\mu}$; mais comme dans ce cas $\mathit{6} < \mu$, il s'ensuit qu'on a $b' < a'$.

On voit par là que pendant le temps τ d'une demi-oscillation, Fig. 10. l'axe de rotation décrit un quart de son orbite en passant de I° en I¹; il continue ce mouvement dans le même sens pendant les trois autres demi-oscillations; de sorte que dans le temps 4τ, qui est celui de deux oscillations ou de deux nutations, l'axe de rotation parcourt son orbite entière, et les choses sont rétablies dans le même état qu'au commencement du mouvement.

L'ovale décrite par l'axe de rotation a pour centre le point D, comme

comme cela a lieu dans les mouvemens rapportés à l'axe moyen ; mais il y a cette différence dans le cas présent, que l'ovale est alongée dans le sens du méridien, puisqu'on a trouvé $b' < a'$, tandis que dans les deux cas qui sont relatifs à l'axe moyen, on a $b' > a'$.

Dans ce cas donc la plus grande vîtesse W aura lieu dans le méridien, lorsque l'axe de rotation répondra aux points I^0 et I^2, et la plus petite $\frac{W \cos a'}{\cos b'}$ aura lieu aux points I^1 et I^3, les plus éloignés du méridien.

65. *Second cas.* Si l'état initial du corps est tel qu'il doive tourner sans cesse autour de l'axe AL, cet axe ne peut plus s'éloigner de 90° de la directrice AD, et sa nutation est limitée depuis $\theta = 6$ jusqu'à $\theta = 6'$, valeurs entre lesquelles on a cette relation :

$$\cos^2 6' = \frac{m+1}{m-1} \cos^2 6 = \frac{C^2 - A^2}{B^2 - A^2} \cos^2 6;$$

de sorte que pour que ce second cas ait lieu, il faut qu'on ait $\cos 6 < \sqrt{\left(\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}\right)}$, ou $\sin 6 > \sqrt{\left(\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}\right)}$. Soit alors $c^2 = \frac{2}{m-1} \cot^2 6$, ou $c^2 = 1 - \frac{\sin^2 6'}{\sin^2 6}$, les équations qui servent à déterminer ω et θ par le moyen de la variable ψ, sont

$$\tang \omega = -h \tang \psi, \qquad h = \frac{\cos 6'}{\cos 6} = \sqrt{\left(\frac{m+1}{m-1}\right)},$$
$$\sin \theta = \sin 6 \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}.$$

Pour avoir maintenant les coordonnées x et y qui déterminent la position de l'axe de rotation à un instant quelconque, on fera, comme dans l'art. 49, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma = 6$, et les formules du n° 60, combinées avec les précédentes, donneront

$$\tang x = f \tang \theta, \qquad f = -\frac{(C - A)\cos^2 6}{A + B + (C - A)\cos^2 6},$$
$$\tang y = \frac{\sin x}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin 2\omega}{m + \cos 2\omega} = -\frac{2h \sin \psi \cos \psi}{m+1} \cdot \frac{\sin x}{\sin \theta}.$$

Comme θ est toujours positive, on voit que x est toujours négative, et qu'ainsi l'ovale décrite par l'axe de rotation est toute entière d'un même côté du pôle D; en quoi ce cas diffère de tous les précédens, où le point D était le centre de l'ovale décrite par l'axe de rotation.

Les limites de θ, savoir, $\theta = \mathit{6}$ et $\theta = \mathit{6}'$, ont lieu, la première lorsque $t = o$ et $\psi = o$, la seconde lorsque $t = \tau$ et $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Soient dans ces deux mêmes points, $x = -a'$ et $x = -a''$, les limites de x; on aura

$$\text{tang}\, a' = -f \,\text{tang}\, \mathit{6} \quad \text{et} \quad \text{tang}\, a'' = -f\, \text{tang}\, \mathit{6}';$$

on a $\mathit{6} > \mathit{6}'$, on aura donc aussi $a' > a''$. Dans ces deux points, $y = o$; d'ailleurs en faisant $\psi < \frac{1}{2}\pi$, on voit que tang y est positive. Donc, pendant le temps τ que l'axe AL emploie à parcourir son arc de nutation de L^o en L^1, l'axe de rotation parcourt la moitié de
Fig. 11. son ovale $I^o u I^1$ dans le sens CB.

Lorsque l'axe AL reviendra de L^1 à L^o, l'axe de rotation parcourra l'autre moitié de son ovale, et reviendra au point I^o en même temps que l'axe AL au point L^o, et ainsi à l'infini.

Ainsi, pendant que l'axe de rotation fait une révolution entière dans son orbite, l'axe du plus grand moment AL parcourt deux arcs de nutation qui le ramènent au point d'où il était parti, et le corps fait une demi-révolution autour de l'axe AL.

La vîtesse angulaire la plus grande sera W au point I^o, et la plus petite sera $\frac{W \cos a'}{\cos a''}$ au point I^1.

66. Si l'on suppose ε infiniment petit, comme dans l'art. 53, les points I^o et I^1, qui sont les extrémités du diamètre de l'ovale dans le sens du méridien, seront déterminés par les valeurs

$$a' = \frac{C - A}{B + C}\,\varepsilon,$$
$$a'' = a' \sqrt{\left(\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}\right)}.$$

Si l'on suppose C — B beaucoup plus petit que C — A, ensorte qu'on ait $C^2 - B^2 = \delta (C^2 - A^2)$, δ étant très-petit, on aura

$$\mathit{6} - \mathit{6}' \eqsim \tfrac{1}{2}\,\varepsilon . \frac{C - B}{B - A},$$

$$\text{et} \quad a' - a'' \eqsim \frac{C - A}{B + C} . \tfrac{1}{2}\delta\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon . \frac{C - B}{C + A};$$

donc $a' - a''$ est encore beaucoup plus petit que l'arc de nutation $6 - 6'$, puisqu'on a

$$a' - a'' = \frac{B - A}{C + A}(6 - 6');$$

$a' - a''$ est l'axe de l'ovale dirigée dans le sens du méridien. Pour avoir l'autre axe perpendiculaire au méridien, il faut chercher la valeur de y lorsque $\psi = 45°$, et on aura

$$y = \frac{C - B}{C + A} \cdot \tfrac{1}{2} \varepsilon.$$

Cette valeur de y est égale à $a' - a''$. Donc, dans l'ovale décrite par l'axe de rotation, l'axe perpendiculaire au méridien est double de l'axe dirigé dans le sens du méridien.

La vîtesse angulaire est la plus grande au point I°, où elle est égale à la vîtesse initiale W; elle est la plus petite au point I^{1}, où elle est $W \frac{\cos a'}{\cos a''} = W[1 - \frac{1}{2}(a'^2 - a''^2)]$, c'est-à-dire

$$W\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \frac{C - B}{C + B} \cdot \frac{C - A}{C + A}\right).$$

Mais la différence de ces deux vîtesses est un infiniment petit qu'on peut regarder comme fort au-dessous du second ordre.

Remarque sur le mouvement de l'axe de la Terre.

67. Comme il est infiniment probable que l'axe de rotation primitif de la Terre n'a pas coïncidé exactement avec un axe principal, ou du moins que ces deux axes se sont séparés par quelque variation arrivée à la surface ou dans l'intérieur du globe, il est à présumer que les inégalités qu'on vient de calculer ont lieu effectivement dans le mouvement de rotation de la Terre. Mais comme elles sont extrêmement peu sensibles, et que la quantité ε, beaucoup plus grande que a', ne peut monter tout au plus qu'à quelques secondes, ce n'est que par une longue suite d'observations très-délicates qu'on pourra s'assurer de leur existence.

Soit D le point fixe du ciel, très-voisin du pôle mobile autour duquel la Terre paraît tourner à peu près dans un jour, la distance Fig. 12.

de ces deux points étant tellement petite qu'elle ne pourra jamais devenir sensible par l'observation. Soit L l'extrémité de l'axe principal de la Terre, voisin du pôle, de manière que la distance DL, ou $\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$ n'est peut-être pas insensible; on peut au moins la regarder comme constante, et négliger la nutation $\mathcal{E}-\mathcal{E}'$. Soit P le zénith d'un lieu de la Terre qui ne soit pas fort près de L; soit la constante LP $= p$, et l'angle variable DLP $= \Omega - \omega$, on aura DP $= p - \frac{A+C}{B+C}\varepsilon \cos(\Omega-\omega)$. D'où il suit que la distance du zénith au pôle variera pour un lieu quelconque, depuis $p-\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$ jusqu'à $p+\frac{A+C}{B+C}\varepsilon$. Donc si, par des observations exactes de la hauteur du pôle, dégagées de la réfraction, de l'aberration et des nutations dues aux causes externes, on trouve que cette hauteur n'est pas constante, ce sera une preuve qu'il y a un mouvement naturel dans l'axe terrestre; mouvement dont la cause est dans la Terre même, et qui doit être distinguée de la nutation causée par l'action de la Lune et des planètes. C'est peut-être par ce mouvement qu'on pourrait expliquer la petite différence que des observateurs exacts ont trouvée entre l'obliquité de l'écliptique, déduite des solstices d'hiver, et l'obliquité déduite des solstices d'été.

On peut remarquer que depuis la plus grande jusqu'à la plus petite hauteur du pôle pour un lieu quelconque, la Terre fait une demi-révolution autour de son axe principal. Le nombre de jours écoulés dans cet intervalle est donc, d'après nos formules, $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{B+A}{B-A}\cdot\frac{C+A}{C-A}\right)}$, ou $\frac{1}{2}\cdot\frac{C+A}{C-A}$, si l'on admet, ce qui est fort vraisemblable, que C diffère beaucoup moins de B que de A. D'un autre côté, il paraît, par le phénomène de la précession des équinoxes, que la valeur de $\frac{C}{A}$ est comprise entre $\frac{302}{300}$ et $\frac{322}{320}$; donc le temps dont il s'agit est d'environ 150 ou 160 jours. Ces résultats auraient encore lieu, quand même on aurait exactement B $=$ C, ce qui est le cas de l'art. 13.

Remarque générale.

68. Quelles que soient la figure et la constitution intérieure d'un corps solide qui peut librement tourner dans tous les sens autour d'un point fixe, et qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, le mouvement de ce corps peut toujours être assimilé à celui d'un ellipsoïde homogène de même masse, dont les demi-axes principaux a', b', c', dirigés dans le même sens que les axes principaux du corps proposé, ont les mêmes momens d'inertie, et qui aurait reçu la même vîtesse initiale, dans le même sens et autour du même axe de rotation.

En effet, les seuls élémens qui, dans la théorie précédente, dépendent de la figure du corps et de la loi que suit la densité de ses différentes molécules, sont les quantités A, B, C, par lesquelles se forment les momens d'inertie du corps relativement aux trois axes principaux. Donc si ces quantités sont égales dans deux corps, et si l'impulsion primitive est la même, ces deux corps auront nécessairement la même position et les mêmes vîtesses au bout d'un temps quelconque.

DEUXIÈME SECTION.

Du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes.

69. Nous supposerons d'abord que la vîtesse initiale du corps est dirigée toute entière dans un plan qui passe par les deux centres fixes, et qu'ainsi le corps est assujéti à se mouvoir dans ce plan. Cela posé, nous suivrons l'analyse qu'Euler a donnée le premier de ce problème, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, ann. 1760. Nous donnerons ensuite les développemens que fournit la théorie des fonctions elliptiques pour en compléter la solution.

Analyse du problème.

Fig. 13. 70. Soient F et G les centres vers lesquels sont dirigées les deux forces attractives; soient A et B les intensités de ces forces, mesurées à l'unité de distance; M le lieu du corps au bout du temps t. Ayant abaissé MP perpendiculaire sur l'axe EFG, nous ferons

$$\mathrm{FG} = a,\ \mathrm{GP} = x,\ \mathrm{PM} = y,\ \mathrm{FM} = r,\ \mathrm{GM} = s,$$
$$\text{l'angle EFM} = \varphi,\quad \text{l'angle EGM} = \omega,$$

ce qui donnera

$$x - a = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = s\sin\omega,\ x = s\cos\omega.$$

Au point M le corps est sollicité par la force $\frac{\mathrm{A}}{r^2}$ dirigée suivant MF, et par la force $\frac{\mathrm{B}}{s^2}$ dirigée suivant MG; donc, en supposant dt constant, les équations différentielles du mouvement seront

$$\frac{ddx}{dt} = -\frac{\mathrm{A}(x-a)}{r^3} - \frac{\mathrm{B}x}{s^3},$$
$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{\mathrm{A}y}{r^3} - \frac{\mathrm{B}y}{s^3}.$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy; ajoutant les produits, et intégrant, on aura

$$\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2} = \frac{A}{r} + \frac{B}{s} + \frac{C}{a}, \tag{1}$$

équation qui, après avoir déterminé la constante C, donnera la vîtesse du corps en chaque point de son orbite. Il en résulte que si le corps passe deux fois par le même point, il aura la même vîtesse en ce point, mais avec une direction qui pourra être différente ou même opposée. On voit aussi que la vîtesse sera la même dans deux points de l'orbite qui seraient semblablement situés au-dessus et au-dessous de l'axe FG.

71. Pour obtenir une seconde intégrale, considérons les aires élémentaires

$$d\alpha = (x-a)\,dy - ydx = r^2 d\varphi,$$
$$d\beta = xdy - ydx = s^2 d\omega,$$

dont les différentielles sont

$$dd\alpha = (x-a)\,ddy - yddx,$$
$$dd\beta = xddy - yddx.$$

Si dans ces expressions on met pour ddx et ddy leurs valeurs données par les équations du mouvement, on aura

$$\frac{dd\alpha}{dt^2} = \frac{Bay}{s^3}, \quad \frac{dd\beta}{dt^2} = -\frac{Aay}{r^3},$$

donc

$$\frac{d\alpha dd\beta + d\beta dd\alpha}{dt^2} = \frac{aBy d\beta}{s^3} - \frac{aAy d\alpha}{r^3}.$$

Mais on a $yd\beta = s^3 d\omega \sin\omega$ et $yd\alpha = r^3 d\varphi \sin\varphi$; donc

$$\frac{d\alpha dd\beta + d\beta dd\alpha}{adt^2} = Bd\omega \sin\omega - Ad\varphi \sin\varphi.$$

Cette équation est intégrable immédiatement, et son intégrale est

$$\frac{d\alpha d\beta}{adt^2} = A\cos\varphi - B\cos\omega + C',$$

ou, en substituant les valeurs de $d\alpha$ et $d\beta$,

$$\frac{r^2 s^2 d\varphi d\omega}{adt^2} = A\cos\varphi - B\cos\omega + C'. \tag{2}$$

Au moyen de ces deux intégrales, le problème peut être réduit aux quadratures.

72. En effet, soient p et q deux nouvelles variables, telles qu'on ait $\tang \frac{1}{2}\omega = pq$, $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{q}{p}$, ce qui donnera

$$\sin\varphi = \frac{2pq}{p^2+q^2}, \quad \cos\varphi = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},$$
$$\sin\omega = \frac{2pq}{1+p^2q^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2};$$

dans le triangle FMG on aura

$$r = \frac{a\sin\omega}{\sin(\varphi-\omega)} = \frac{a(p^2+q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)} = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2},$$
$$s = \frac{a\sin\varphi}{\sin(\varphi-\omega)} = \frac{a(1+p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)} = \frac{a}{1-p^2} - \frac{aq^2}{1+q^2}.$$

Par ces valeurs on trouve

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 = \frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}\left(\frac{4a^2dp^2}{(1-p^2)^2} + \frac{4a^2dq^2}{(1+q^2)^2}\right),$$
$$r^2s^2d\varphi d\omega = \frac{4a^4(p^2+q^2)(1+p^2q^2)(p^2dq^2-q^2dp^2)}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4};$$

mais par les équations (1) et (2) on a

$$\frac{r^2s^2\,d\varphi d\omega}{dx^2+dy^2} = \frac{\frac{1}{2}a\,(\mathrm{A}\cos\varphi - \mathrm{B}\cos\omega + \mathrm{C}')}{\frac{\mathrm{A}}{r}+\frac{\mathrm{B}}{s}+\frac{\mathrm{C}}{a}}.$$

Donc si l'on exprime toutes ces quantités en fonctions de p et q, on aura, entre ces deux dernières variables, l'équation

$$\frac{p^2dq^2 - q^2dp^2}{(1+q^2)^2dp^2 + (1-p^2)^2dq^2} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}.\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} - \frac{1}{2}\mathrm{B}.\frac{1-p^2q^2}{1+p^2q^2} + \frac{1}{2}\mathrm{C}'}{\mathrm{A}.\frac{(1-p^2)(1+q^2)}{p^2+q^2} + \mathrm{B}.\frac{(1-p^2)(1+q^2)}{1+p^2q^2} + \mathrm{C}},$$

qui se réduit à

$$dp^2\left[(\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{2}\mathrm{B})(1-q^4) + \mathrm{C}q^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{C}'(1+q^2)^2\right]$$
$$= dq^2\left[(\tfrac{1}{2}\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\mathrm{B})(1-p^4) + \mathrm{C}p^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{C}'(1-p^2)^2\right].$$

Soit donc

$$\mathrm{P} = (\tfrac{1}{2}\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\mathrm{B})(1-p^4) + \mathrm{C}p^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{C}'(1-p^2)^2,$$
$$\mathrm{Q} = (\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{2}\mathrm{B})(1-q^4) + \mathrm{C}q^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{C}'(1+q^2)^2,$$

et

et on aura l'équation différentielle séparée

(3) $$\pm \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

laquelle suffit pour déterminer la courbe décrite. Quant au signe ambigu du premier membre, on verra bientôt comment il se détermine d'après l'état initial du mouvement.

73. Il reste à trouver la valeur de dt. Pour cela soit $M = \frac{Aa}{r} + \frac{Ba}{s} + C$ et $N = \frac{1}{2} A \cos \varphi - \frac{1}{2} B \cos \omega + \frac{1}{2} C'$, afin qu'on ait, comme dans l'article précédent,

$$\frac{p^2 dq^2 - q^2 dp^2}{(1+q^2)^2 dp^2 + (1-p^2)^2 dq^2} = \frac{N}{M}.$$

Cette équation, d'où l'on a déduit $Q dp^2 = P dq^2$, donne

$$P = Mp^2 - N(1-p^2)^2,$$
$$Q = Mq^2 + N(1+q^2)^2,$$
$$p^2 Q - q^2 P = N(p^2+q^2)(1+p^2q^2).$$

Soit $dp^2 = P dR^2$, on aura $dq^2 = Q dR^2$, et par conséquent,

$$p^2dq^2 - q^2dp^2 = (p^2Q - q^2P)\, dR^2 = N dR^2 (p^2+q^2)(1+p^2q^2).$$

Or on a par l'équation (2),

$$r^2s^2 d\varphi d\omega = 2aN dt^2 = \frac{4a^4 (p^2dq^2 - q^2dp^2)(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4};$$

donc

$$dt^2 = \frac{2a^3 dR^2 (p^2+q^2)^2 (1+p^2q^2)^2}{(1-p^2)^4(1+q^2)^4},$$

et par conséquent,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}\, dR = \frac{p^2 dR}{(1-p^2)^2} + \frac{q^2 dR}{(1+q^2)^2}.$$

Mais $dR = \pm \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$; donc on a enfin

(4) $$\frac{dt}{a\sqrt{(2a)}} = \pm \frac{p^2}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{\sqrt{P}} + \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}.$$

Cette formule, ainsi que la formule (3), est écrite dans la supposition que $\frac{dq}{dt}$ est positif, au moins dans les premiers instans du mouvement; car il faut que ses deux termes soient tous deux positifs, puisqu'ils résultent du produit de $d\mathrm{R}$, qu'on doit regarder comme positif par la somme des deux quarrés $\frac{p^2}{(1-p^2)^2}+\frac{q^2}{(1+q^2)^2}$.

On voit par ce résultat que la valeur de t, qui correspond à des valeurs données de p et q, dépend en général des fonctions elliptiques de la troisième espèce, lesquelles peuvent, dans beaucoup de cas, être réduites aux fonctions de la première et de la seconde espèce. D'ailleurs l'équation (3), qui ne dépend que des fonctions elliptiques de la première espèce, donne la relation entre p et q, nécessaire pour déterminer la courbe décrite.

Fig. 13. 74. Il faut maintenant déterminer les constantes C et C′. Pour cela nous supposerons que le mouvement commence en un point A de l'axe, situé sur le prolongement de FG du côté de F, et faisant $\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{GA}}=m^\circ$, on aura $\mathrm{FA}=\frac{am^\circ}{1-m^\circ}$, $\mathrm{GA}=\frac{a}{1-m^\circ}$. Cela posé, soit V la vîtesse initiale suivant la tangente AH, et soit l'angle $\mathrm{EAH}=\mu$; il faudra qu'on ait à la fois $t=0$, $\varphi=0$, $\omega=0$, $r=\frac{am^\circ}{1-m^\circ}$, $s=\frac{a}{1-m^\circ}$, $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=\mathrm{V}^2$, $\frac{rd\varphi}{dt}=\frac{sd\omega}{dt}=\mathrm{V}\sin\mu$; de plus, en vertu des valeurs de r et de s, on aura en même temps $p^2=m^\circ$ et $q=0$. Substituant donc toutes ces valeurs dans les équations (1) et (2), on en déduira

$$\mathrm{C}=\tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2-\left(\frac{\mathrm{A}}{m^\circ}+\mathrm{B}\right)(1-m^\circ),$$

$$\mathrm{C}'=\frac{am^\circ\mathrm{V}^2\sin^2\mu}{(1-m^\circ)^2}-\mathrm{A}+\mathrm{B},$$

et on remarquera que la supposition faite sur la situation du premier point A satisfait à la condition que $\frac{dq}{dt}$ soit positif.

75. Pour déterminer le signe ambigu des équations (3) et (4), j'observe qu'on a en général (art. 72) $r+s=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2}$, d'où il suit que l'équation $p^2=m^\circ$ appartient à l'ellipse dont A est le sommet,

F et G les deux foyers. Or, dans le temps dt, le corps décrit, suivant la tangente AH, l'espace $Ax = Vdt$, faisant avec l'axe un angle $EAH = \mu$, et on voit que le point x sera situé dans l'ellipse ou hors de l'ellipse, selon que $\cos\mu$ sera négatif ou positif; donc en général $\frac{dp}{dt}$ aura le même signe que $\cos\mu$; c'est-à-dire que dans les équations (3) et (4) on devra prendre $\frac{dp}{\sqrt{P}}$ avec le signe $+$ si $\cos\mu$ est positif, et avec le signe $-$ si $\cos\mu$ est négatif.

Pour savoir quel est le signe qui doit avoir lieu, lorsqu'on a $\cos\mu = 0$ ou $\mu = \frac{1}{2}\pi$, il faut observer qu'alors P aura pour facteur $p^2 - m^\circ$, de sorte qu'en faisant, pour abréger, $D = \frac{\frac{1}{2} m^\circ a V^2}{(1 - m^\circ)^2}$, on aura

$$P = (p^2 - m^\circ)\left[\frac{D - A}{m^\circ} - (D + B)\, p^2\right].$$

Soit, dans un temps très-petit θ, $p^2 = m^\circ(1 + \zeta)$, ζ étant une quantité très-petite de l'ordre θ, on aura $P = \zeta[D(1 - m^{\circ 2}) - A - Bm^{\circ 2}]$. Ainsi, en général, ζ sera du même signe que $D(1 - m^{\circ 2}) - A - Bm^{\circ 2}$; or, $\frac{dp}{dt}$ est aussi du même signe que $p^2 - m^\circ = m^\circ\zeta$; donc lorsqu'on a $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on devra, dans les équations (3) et (4), prendre $\frac{dp}{\sqrt{P}}$ avec le signe $+$, si $D > \frac{A + Bm^{\circ 2}}{1 - m^{\circ 2}}$ ou si $V^2 > \frac{A + Bm^{\circ 2}}{m^\circ f^\circ}$, et avec le signe $-$, si $V^2 < \frac{A + Bm^{\circ 2}}{m^\circ f^\circ}$: on suppose ici $f^\circ = \frac{1}{2} a . \frac{1 + m^\circ}{1 - m^\circ} = AC$, C étant le milieu de FG.

Si l'on a exactement $V^2 = \frac{A + Bm^{\circ 2}}{m^\circ f^\circ}$, on voit que la quantité $p^2 - m^\circ$ devra être zéro, au moins pendant quelques instans; mais il est facile de s'assurer qu'elle sera toujours zéro, et qu'ainsi la courbe décrite par le corps sera l'ellipse $p^2 = m^\circ$: c'est un cas que nous examinerons ci-après avec le détail nécessaire.

76. Avant d'aller plus loin, il sera bon de faire voir quelles sont les limites de la vîtesse initiale, pour que l'orbite s'étende ou ne s'étende pas à l'infini. Lorsque r et s sont infinis, le second membre

de l'équation (1) se réduit à $\frac{C}{a}$; ainsi pour que ce cas ait lieu, il faut que C soit positif. Or, quel que soit le point A où commence le mouvement, soit qu'on le prenne sur l'axe EFG ou hors de cet axe, si l'on appelle V la vitesse initiale, h et h' les distances AF, AG du point A aux deux centres F et G, on aura $\frac{C}{a} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{A}{h} - \frac{B}{h'}$; donc en général le corps s'éloignera à l'infini si l'on a $V^2 > \frac{2A}{h} + \frac{2B}{h'}$; au contraire, l'orbite sera renfermée dans un espace fini, si l'on a $V^2 < \frac{2A}{h} + \frac{2B}{h'}$: en cas d'égalité, le corps s'éloignera à l'infini.

Si l'on fait $B = 0$, on aura les conditions connues pour qu'un corps soumis à l'attraction de la force A décrive telle ou telle section conique. En effet, on sait que l'orbite sera une ellipse si $V^2 < \frac{2A}{h}$, une parabole si $V^2 = \frac{2A}{h}$, et une hyperbole si $V^2 > \frac{2A}{h}$.

77. Nous allons maintenant procéder au développement et à l'intégration des formules générales du problème; mais pour ne pas donner trop d'étendue à nos recherches, nous nous bornerons à considérer les cas où l'orbite est renfermée dans un espace fini. Ces cas, dont le symptôme vient d'être déterminé par la limite de la vitesse initiale, sont les seuls qui aient quelque rapport au mouvement des planètes et autres astres qui ont des retours périodiques. Nous supposerons donc en général que la valeur de p^2 ne surpasse pas une certaine limite m plus petite que l'unité; car dès qu'on a $p^2 = 1$, les valeurs des rayons vecteurs r et s deviennent infinies.

Cela posé, le polynome P ne pourra être que de l'une des deux formes

$$P = M(m - p^2)(p^2 - m'),$$
$$P = M(m - p^2)(p^2 + m').$$

Dans le premier système, p^2 sera toujours compris entre les limites m et m', où l'on suppose $m' < m$; dans le second, p^2 pourra avoir toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à m. Il s'agit donc de développer les formules générales dans ces deux systèmes, qui doivent comprendre tous les cas possibles.

Le premier système se développera sans difficulté dans la supposition que nous avons faite sur la situation du point A, où commence le mouvement; mais pour développer le second d'une manière complète, il conviendra de placer le point A entre les deux centres F et G, ce qui donnera une autre forme aux constantes C et C′; sans cette précaution, il pourrait y avoir des cas que les formules ne représenteraient pas, savoir, ceux où l'orbite ne coupe l'axe qu'entre les deux centres F et G.

78. Dans le premier système on aura d'abord à substituer les valeurs des constantes C et C′ de l'art. 74, dans l'expression du polynome P, savoir,

$$P = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}C' + (C + C')p^2 - (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C')p^4;$$

et pour que cette expression soit aussi représentée par $M(m - p^2)(p^2 - m')$, il faudra qu'on ait

$$mm' = \frac{\tfrac{1}{2}aV^2m^{\circ}\sin^2\mu - A(1 - m^{\circ})^2}{\tfrac{1}{2}aV^2m^{\circ}\sin^2\mu + B(1 - m^{\circ})^2},$$

$$m + m' = \frac{\tfrac{1}{2}aV^2(1 - 2m^{\circ}\cos^2\mu + m^{\circ 2}) - \left(\frac{A}{m^{\circ}} - Bm^{\circ}\right)(1 - m^{\circ})^2}{\tfrac{1}{2}aV^2m^{\circ}\sin^2\mu + B(1 - m^{\circ})^2},$$

$$M = \frac{\tfrac{1}{2}aV^2m^{\circ}\sin^2\mu}{(1 - m^{\circ})^2} + B = \frac{A + B}{1 - mm'}.$$

Ainsi les quantités m, m' et M, par lesquelles on exprime le polynome P dans le premier système, sont faciles à déduire des données immédiates du problème m°, V, μ.

79. De même puisqu'on a $Q = \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C' + (C + C')q^2 + (\tfrac{1}{2}C' - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)q^4$, on pourra donner au polynome Q la forme correspondante

$$Q = M - B + M(m + m')q^2 + (M - A)q^4,$$

d'où résulte

$$(1 - mm')Q = A + Bmm' + (A + B)(m + m')q^2 + (B + Amm')q^4.$$

Nous allons suspendre un moment la suite de ces calculs, pour nous occuper d'une remarque sur l'emploi des variables p et q, et de la considération de quelques cas particuliers.

Remarque sur l'emploi des variables p *et* q.

80. L'emploi des variables p et q, pour exprimer les deux rayons vecteurs r et s, et en général pour construire la courbe décrite par le mobile, exige quelques développemens qui pourront d'ailleurs être utiles dans d'autres recherches d'analyse.

Il résulte d'abord des valeurs de r et s, données dans l'art. 72, qu'on a

$$r+s=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2},\quad s-r=\frac{a(1-q^2)}{1+q^2}.$$

Donc, 1°. si p est constant, $r+s$ sera constant, et la courbe décrite sera une ellipse dont F et G sont les foyers, et le grand axe $AL=2f=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2}$.

Fig. 14. 2°. Si q est constant, $s-r$ sera constant; ce qui fait voir que la courbe décrite sera une hyperbole dont F et G sont les foyers. Mais alors le point A ne peut se trouver sur le prolongement de FG; il devra être situé entre les points F et G; et si l'on fait $\frac{FA}{AG}=m$, on aura, au point A, $q^2=m$, $p^2=0$, et $s-r=\frac{a(1-m)}{1+m}$: c'est la valeur de l'axe transverse $AL=2CA$.

81. Il suit de là que lorsqu'on veut déterminer un point de la trajectoire par des valeurs données de p^2 et q^2, savoir, $p^2=\alpha$, $q^2=\mathcal{C}$, on peut regarder ce point comme étant l'intersection de l'ellipse où $p^2=\alpha$ avec l'hyperbole où $q^2=\mathcal{C}$. Mais cette construction laisserait incertain si le point cherché est au-dessus de l'axe ou au-dessous. Pour éviter à cet égard toute ambiguïté, il convient de déterminer chaque point de la courbe par des coordonnées rectangles, telles

Fig. 13. que $GP=x$, $PM=y$, dont les valeurs sont

$$x=\frac{a(1-p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)},\quad y=\frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}.$$

82. Les points où la courbe rencontre son axe méritent une attention particulière : voici les symptômes par lesquels ils doivent être distingués suivant les différens cas.

1°. Si la courbe rencontre l'axe en un point B situé au-delà de G par rapport à F, on aura en ce point $r - s = a$, et par conséquent $q = \infty$; c'est le symptôme de ce premier cas. On aura en même temps $p^2 = \frac{r+s-a}{r+s+a} = \frac{GB}{FB}$; ainsi la valeur connue de p^2 sera égale au rapport $\frac{GB}{FB}$ qui détermine la position du point B. C'est ce qu'on trouverait directement, en considérant un point M infiniment près de B; car dans ce point on aura Fig. 15.

$$p^2 = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\omega}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\varphi} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{MFB}}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{MGB}} = \frac{\sin \text{MFB}}{\sin \text{MGB}} = \frac{\text{GM}}{\text{FM}} = \frac{\text{GB}}{\text{FB}}.$$

Si l'intersection avait lieu en G, on aurait toujours $q^2 = \infty$, mais en même temps $p^2 = 0$.

2°. Si l'intersection a lieu en un point I situé entre F et G, on aura dans ce point $r + s = a$, et par conséquent $p = 0$; c'est le symptôme de ce second cas : on aura en même temps... $q^2 = \frac{a+r-s}{a+s-r} = \frac{r}{s} = \frac{FI}{GI}$; ainsi la valeur connue de q^2 déterminera la position du point I. Fig. 16.

Si l'intersection avait lieu en G, on aurait, comme ci-dessus, $p = 0$, $q = \infty$; si elle a lieu en F, on aura à la fois $p = 0$, $q = 0$.

3°. Enfin si l'intersection a lieu en un point A situé sur le prolongement de FG, du côté de F, on aura en ce point $s - r = a$, ce qui donne $q = 0$ pour le symptôme de ce troisième cas. On aura en même temps $p^2 = \frac{r+s-a}{r+s+a} = \frac{r}{s} = \frac{FA}{GA}$: ainsi la valeur connue de p^2 déterminera la position du point A. Fig. 13.

83. On voit, par ces détails, que la quantité q, relative à l'hyperbole, peut avoir, suivant les différens cas, toutes les valeurs positives ou négatives, depuis zéro jusqu'à l'infini ; mais que la quantité p, relative à l'ellipse, est toujours comprise entre $+1$ et -1. Lorsque

$p^2 = 1$, on a $r+s=\infty$; et par conséquent le point M est infiniment éloigné. Dans ce cas, si l'on appelle θ l'angle que l'asymptote de la courbe fait avec l'axe GF, cet angle, qui est alors la valeur de ω, se déterminera par l'équation $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = pq$, ce qui s'accorde d'ailleurs avec la valeur $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\omega = \frac{2pq}{1-p^2q^2}$.

84. Il est important de remarquer que la description de la courbe serait quelquefois incomplète, si l'on n'attribuait à p et à q que des valeurs réelles; car il y a, dans certains cas, des branches qui ne sont représentées qu'en donnant à p et q des valeurs imaginaires. Ces cas se rencontrent dans le problème des deux centres d'attraction; c'est pourquoi il convient de donner d'avance l'explication de cette difficulté.

Fig. 17. Supposons que le point M, qui décrit la courbe, soit parvenu de A en G, où l'on a $q=\infty$ et $p=0$; s'il continue sa marche au-delà de G, les formules ne peuvent plus représenter la portion GM′ située au-dessous de l'axe, du moins en donnant à q et p des valeurs réelles.

Car puisqu'on a $s = \frac{a(1+p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)} = \frac{ap^2}{1-p^2} + \frac{a}{(1+q^2)(1-p^2)}$, on conçoit que s diminue de plus en plus à mesure que p devient plus petit et q plus grand. Enfin au point G, où l'on fait à la fois $p=0$ et $q=\infty$, on a $s=0$; mais passé ce point, comme la valeur $p^2=0$ ne peut être suivie d'une valeur $p^2>1$, il n'y a aucunes valeurs réelles de p et q qui rendent s négative, comme il le faudrait pour que les formules représentassent la portion de courbe GM′.

85. En effet, dans le cas où l'arc GM′ et l'arc GM sont situés du même côté de la tangente commune TGT′, les valeurs de ω et de φ varient infiniment peu du point G au point M′, que nous supposons infiniment près de G. On a au point G, $\varphi=\pi$, $\omega=\text{FGT}$, et au point M′, $\varphi=\pi+\text{GFM}'$, $\omega=\text{FGT}+\text{TGV}$, GV étant le prolongement de la corde M′G. Il faudrait donc que la valeur de s, qui ne peut plus être dirigée suivant GV, devînt négative pour répondre à sa véritable position GM′, directement opposée à GV. Or, on vient de voir que la valeur analytique de s ne peut devenir négative, tant que

que p et q sont réelles. Le calcul se refuse donc, dans ce cas, à représenter la branche GM′; car puisque s ne peut pas devenir négative, après avoir fait $\omega = \text{FGT}$ au point G, il faudrait tout d'un coup augmenter ω de $\pi + \text{T}'\text{GM}'$, pour passer du point G au point infiniment proche M′, ce qui ne s'accorde point avec la loi de continuité à laquelle doivent être assujéties les quantités algébriques.

86. Il en serait de même si la courbe avait un point d'inflexion en G, et qu'elle se continuât dans la branche GM″, située de l'autre côté de la tangente GT′. Le passage du point G au point M″ ne peut plus se faire en augmentant par degrés ω, même en admettant que s devînt négatif; car si l'on fait $\omega = \text{FGV}$, FGV différant infiniment peu de FGT, la droite GV, prolongée au-dessous de FG, ne rencontre pas la branche GM″. Ainsi il faut admettre que l'angle ω passera tout d'un coup de la valeur FGT qu'il a au point G, à la valeur $\text{FGT} + \pi - \text{T}'\text{GM}''$ qu'il a au point M″; supposition qui est encore contraire à la loi de continuité, et qui ne peut subsister en donnant à p et q des valeurs réelles.

87. Voici maintenant la seule manière de passer analytiquement de la branche MG à la branche inférieure GM′.

Soit $\text{FM}' = r'$, $\text{GM}' = s'$, $\text{HGM}' = \omega'$, $\text{HFM}' = \varphi'$, $\tang \frac{1}{2}\varphi' = p'q'$, $\tang \frac{1}{2}\omega' = \frac{q'}{p'}$, on trouvera, par les formules du n° 72, en accentuant les lettres, et changeant r en s,

$$r' + s' = \frac{a(1 + p'^2)}{1 - p'^2}, \quad r' - s' = \frac{a(1 - q'^2)}{1 + q'^2}.$$

Mais si l'on étend au cas présent les formules qui ont lieu pour la branche MG, il faudra changer r en r' et s en $-s'$, ce qui donnera

$$r' - s' = \frac{a(1 + p^2)}{1 - p^2}, \quad r' + s' = \frac{a(q^2 - 1)}{q^2 + 1}.$$

Ces valeurs ne peuvent avoir lieu, à moins de supposer que p^2 et q^2 ne deviennent tout à coup négatives en passant du point G aux points situés au-dessous de l'axe; et pour qu'il y ait identité entre les deux résultats, il faut supposer

$$p^2 = -q'^2 \quad \text{et} \quad q^2 = -\frac{1}{p'^2}.$$

D'ailleurs les premières valeurs de p' et q', au point G, sont $p' = 0$, $q' = 0$, ce qui s'accorde avec les valeurs de p et q en ce même point, savoir, $p = 0$, $q = \infty$.

Fig. 18. 88. Pour confirmer cette théorie par un exemple très-simple, soit FMG un arc de cercle plus petit que la demi-circonférence, et soit O le centre de ce cercle. Ayant fait $FC = CG = \frac{1}{2}a$, $CO = c$, $FO = k = \sqrt{(c^2 + \frac{1}{4}a^2)}$, $GP = x$, $PM = y$, on aura, suivant les formules générales,

$$x = \frac{a(1 - p^2q^2)}{(1 - p^2)(1 + q^2)}, \quad y = \frac{2apq}{(1 - p^2)(1 + q^2)};$$

d'ailleurs, par la nature du cercle, on a $(y + c)^2 + (\frac{1}{2}a - x)^2 = k^2$, ou $y^2 + 2cy + x^2 - ax = 0$. Soit M un point infiniment proche de G, ensorte que x et y soient infiniment petits et positifs; si l'on appelle θ l'angle que fait la tangente en G avec l'axe GC, on aura $\operatorname{tang}\theta = \frac{a}{2c}$, et $\frac{y}{x}$ aura pour limite $\operatorname{tang}\theta$. En effet, soit $x = a\delta$, δ étant infiniment petit, on aura, par l'équation du cercle, $y = \frac{a^2\delta}{2c}\left[1 - \delta\left(1 + \frac{a^1}{4c^2}\right)\right]$: mais $\frac{y}{x} = \frac{2pq}{1 - p^2q^2}$; donc

$$\frac{2pq}{1 - p^2q^2} = \frac{a}{2c}\left[1 - \delta\left(1 + \frac{a^2}{4c^2}\right)\right] = \operatorname{tang}\theta\left(1 - \frac{\delta}{\cos^2\theta}\right),$$

ce qui donne $pq = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta\left(1 - \frac{\delta}{\cos\theta}\right)$. Pour avoir séparément p et q, il faut combiner cette équation avec l'équation $\delta = \frac{1 - p^2q^2}{(1 - p^2)(1 + q^2)}$.

Cette dernière, où l'on voit que q^2 doit être de l'ordre $\frac{1}{\delta}$, donne

$$\delta = \frac{1 - p^2q^2}{q^2}\left(1 + \frac{p^2q^2 - 1}{q^2}\right);$$

on en tire $\frac{1 - p^2q^2}{q^4} = \delta(1 + \delta)$, et $\frac{1}{q^2} = \frac{\delta(1 + \delta)}{1 - p^2q^2}$; substituant la valeur de pq donnée par la première équation, on aura

$$\frac{1}{q^2} = \frac{\delta \cos\theta \cos^2\frac{1}{2}\theta\,(1+\delta)}{\cos^2\theta + 2\delta \sin^2\frac{1}{2}\theta},$$

$$p^2 = \frac{\delta \cos\theta \sin^2\frac{1}{2}\theta\,(1+\delta)}{\cos^2\theta + 2\delta \cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

Ces valeurs de p^2 et $\frac{1}{q^2}$ sont positives tant que δ est positif; elles sont nulles lorsque $\delta = 0$. Mais si on fait δ négatif, elles deviennent négatives, et par conséquent p et q sont imaginaires.

Au reste, ces valeurs s'accordent avec les formules de l'art. 87, lesquelles, en supposant p^2 et $\frac{1}{q^2}$ infiniment petits, donnent

$$r' - s' = a(1 + 2p^2), \quad r' + s' = a\left(1 - \frac{2}{q^2}\right);$$

et comme en changeant le signe de δ, on a $p^2 = -\frac{\delta \sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}$, $\frac{1}{q^2} = -\frac{\delta\cos^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta}$, il en résulte

$$r' - s' = a - \frac{2a\delta \sin^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta} = a - a\delta\left(\frac{k-c}{c}\right),$$

$$r' + s' = a + \frac{2a\delta\cos^2\frac{1}{2}\theta}{\cos\theta} = a + a\delta\left(\frac{k+c}{c}\right).$$

Ce sont en effet les vraies valeurs de $r' + s'$ et $r' - s'$ au point M′, en faisant $GP' = \delta$.

Du cas particulier où l'une des forces est nulle.

89. Soit $B = 0$; alors la distance FG devient arbitraire, ainsi que m°, et il n'y a de déterminé que la distance $AF = \frac{am^\circ}{1 - m^\circ}$, que nous nommerons h. Dans ce cas, on sait que la courbe décrite doit être une ellipse, ou plus généralement une section conique, dont F est l'un des foyers. Il faut donc voir comment ce résultat peut être déduit de nos formules, en les considérant dans leur plus grande généralité, et sans s'astreindre à l'hypothèse de l'art. 77. Fig. 13.

J'observe d'abord que comme la direction de l'axe FG est à volonté, on peut prendre, pour origine du mouvement, un point déterminé A, dans lequel AF sera perpendiculaire à la courbe. Ainsi, sans diminuer la généralité de la solution, on pourra supposer $\mu = \frac{1}{2}\pi$; et en mettant simplement m au lieu de m°, on aura (art. 74), $C = \frac{1}{2} a V^2 - \frac{A}{m}(1-m)$, $C' = \frac{amV^2}{(1-m)^2} - A$, valeurs où il reste deux indéterminées a et m; mais comme on a entr'elles la relation $am = h(1-m)$, on peut ne conserver que l'indéterminée m, ce qui donnera $C = (\frac{1}{2} hV^2 - A)\left(\frac{1-m}{m}\right)$, $C' = \frac{hV^2}{1-m} - A$. Soit $D = \frac{\frac{1}{2} hV^2}{1-m}$; les valeurs des polynomes P et Q (art. 72) pourront être mises sous cette forme

$$P = \left(\frac{D-A}{m} - Dp^2\right)(p^2 - m),$$
$$Q = \left(D + \frac{D-A}{m} q^2\right)(1 + mq^2),$$

et l'équation de la trajectoire sera, en faisant $D - A = mkD$,

$$\frac{\pm\, dp}{\sqrt{(p^2-m)} \cdot \sqrt{(k-p^2)}} = \frac{dq}{\sqrt{(1+mq^2)} \cdot \sqrt{(1+kq^2)}}.$$

Dans cette équation on peut rendre le second membre semblable au premier en faisant $mq^2 = \frac{z^2-m}{k-z^2}$, et on aura la transformée

$$\frac{dp}{\sqrt{[(p^2-m)(k-p^2)]}} = \frac{\mp\, dz}{\sqrt{[(z^2-m)(k-z^2)]}}.$$

90. L'intégrale complète de cette équation, comprenant la constante arbitraire c, est

$$mk(p^2 + z^2 - c) - cp^2z^2 = \mp\, 2pz\sqrt{[mk(m-c)(k-c)]};$$

et comme on doit avoir simultanément $p^2 = m$, $q = 0$, $z^2 = m$, on trouvera $c = 0$, et l'intégrale deviendra simplement $z = \mp\, p$, d'où résulte

$$mq^2 = \frac{p^2-m}{k-p^2}.$$

Soit $r + s = au$, $s - r = av$, on aura $u = \frac{1+p^2}{1-p^2}$, $v = \frac{1-q^2}{1+q^2}$, ce qui donne réciproquement $p^2 = \frac{u-1}{u+1}$, $q^2 = \frac{1-v}{1+v}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et faisant, pour abréger, $\alpha = \frac{mk + 2m + 1}{1 - mk}$, $\beta = \frac{mk - 2m + 1}{1 - mk}$, on aura $u - v = \alpha - \beta uv$, ou

$$2ar = \alpha a^2 - \beta (s^2 - r^2).$$

Soient $AP = x$, $PM = y$, on aura $r^2 = y^2 + (h - x)^2$, $s^2 - r^2 = a^2 + 2a(h - x)$; donc $r = \frac{1}{2} a (\alpha - \beta) - \beta (h - x)$. Cette équation, qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$y^2 = \frac{a^2}{4}(\alpha - \beta)^2 - a\beta (\alpha - \beta)(h - x) - (1 - \beta^2)(h - x)^2,$$

appartient en général à une section conique, dont A est un sommet et F un foyer; elle appartiendra en particulier à l'ellipse si l'on a $\beta^2 < 1$, à la parabole si $\beta^2 = 1$, et à l'hyperbole si $\beta^2 > 1$.

91. Dans le premier cas, comme le point G peut être pris à volonté, on pourra supposer que G est le second foyer de l'ellipse. Alors on aura $r + s = a + 2h = \frac{h}{m}(1 + m)$, ce qui donnera $p^2 = m$, et par suite $k = m$. Substituant cette valeur dans l'équation $D - A = mkD$, on en tire $D = \frac{A}{1 - m^2}$, et par conséquent $V^2 = \frac{2A}{h(1 + m)}$. C'est le quarré de la vîtesse nécessaire pour décrire l'ellipse dont le grand axe est $\frac{h}{m}(1 + m)$, et dans laquelle m représente le rapport $\frac{FA}{AG}$.

Si l'on a $m = 0$, le grand axe devient infini, et l'ellipse se change en parabole; ainsi la courbe décrite sera une parabole si l'on a $V^2 = \frac{2A}{h}$; elle serait une hyperbole si m était négatif, ou si l'on avait $V^2 > \frac{2A}{h}$.

92. Pour avoir le temps du mouvement dans le cas de l'orbite elliptique, il faut reprendre l'équation

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \left(\frac{p^2}{(1 - p^2)^2} + \frac{q^2}{(1 + q^2)^2}\right) \frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

et y substituer les valeurs $p^2 = m$, $Q = D(1 + mq^2)^2$, ce qui donnera

$$\frac{dt\sqrt{D}}{a\sqrt{(2a)}} = \left(\frac{m}{(1 - m)^2} + \frac{q^2}{(1 + q^2)^2}\right) \frac{dq}{1 + mq^2};$$

ou, en faisant le demi-grand axe $\frac{1}{2}a.\frac{1+m}{1-m}=f$,

$$\frac{dt\sqrt{A}}{4f\sqrt{f}}=\frac{1}{1+m}\cdot\frac{(m+q^2)\,dq}{(1+q^2)^2}.$$

Soit $q=\text{tang}\,\zeta$, et on aura l'intégrale

$$\frac{t\sqrt{A}}{2f\sqrt{f}}=\zeta-\left(\frac{1-m}{1+m}\right)\sin\zeta\cos\zeta\,;$$

faisant $\zeta=\frac{1}{2}\pi$, et doublant la valeur de t, on aura le temps d'une révolution, savoir,

$$T=\frac{2\pi f\sqrt{f}}{\sqrt{A}},$$

ce qui s'accorde avec les formules connues du mouvement elliptique.

Du cas particulier où l'on a $m=m'$, dans le premier système, art. 77.

93. Alors la valeur du polynome P se réduit à la forme

$$P=-M(p^2-m)^2.$$

Or, M est essentiellement positif, puisqu'on a $M=\frac{A+B}{1-m^2}$; de là on voit que l'équation (3) ne peut subsister, à moins qu'on n'ait dans toute l'étendue de la courbe décrite,

$$p^2-m=0\,;$$

cette courbe, dans laquelle $r+s$ est constant, sera donc une ellipse, dont F et G sont les deux foyers.

Cela posé, le point A, intersection de la courbe avec l'axe, ne peut être que le sommet de l'ellipse, et on aura, en ce point, $\mu=\frac{1}{2}\pi$, $m^\circ=m$, ce qui donnera $M=\frac{\frac{1}{2}maV^2}{(1-m)^2}+B=\frac{A+B}{1-m^2}$, et par conséquent $V^2=\frac{A+Bm^2}{\frac{1}{2}ma}\cdot\frac{1-m}{1+m}$; ou, en substituant la valeur $ma=h(1-m)$,

$$V^2=\frac{2A+2m^2B}{h(1+m)}\,;$$

donc avec une vîtesse initiale ainsi déterminée, le corps décrira la même ellipse qu'avec la vitesse $\sqrt{\left(\frac{2A}{h(1+m)}\right)}$, si la force A agissait seule, ou qu'avec la vîtesse $\sqrt{\left(\frac{2Bm^2}{h(1+m)}\right)}$, si la force A était nulle. On peut tirer de là un théorème assez remarquable.

« Soit A le sommet d'une ellipse dont F et G sont les deux foyers; » soit V' la vîtesse en A nécessaire pour que cette ellipse soit décrite » en vertu de la force A placée au foyer F; soit pareillement V'' la » vîtesse en A nécessaire pour que l'ellipse soit décrite en vertu de » la force B située à l'autre foyer G; si ces deux forces agissent » à la fois sur le mobile, et que sa vîtesse initiale V soit telle, qu'on » ait $V^2 = V'^2 + V''^2$, il décrira encore la même ellipse. »

94. Pour avoir le temps employé à parcourir un arc quelconque de cette ellipse, déterminé par la variable q, on observera que dans ce cas particulier, la valeur de Q se réduit à cette forme,

$$Q = \frac{A}{1-m^2}(1+mq^2)^2 + \frac{B}{1-m^2}(m+q^2)^2,$$

ce qui donnera la formule à intégrer

$$\frac{dt}{4f\sqrt{f}}(1+m) = \frac{(m+q^2)(1+mq^2)\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{[A+Bm^2+2(A+B)mq^2+(Am^2+B)q^4]}}.$$

Soit $R = \sqrt{[A(1+mq^2)^2 + B(m+q^2)^2]}$, on aura, par les réductions connues,

$$\frac{(1+m)(A+B)t}{2f\sqrt{f}} = -\frac{qR}{1+q^2} + 2m(A+B)\int\frac{dq}{R} + (Am^2+B)\int\frac{(1+q^2)dq}{R}$$
$$+ (A-B)(1-m^2)\int\frac{dq}{(1+q^2)R}.$$

On voit que la valeur de t ne contiendra pas de fonctions elliptiques de la troisième espèce, si l'on a $A = B$; c'est pourquoi nous nous bornerons à développer ce cas particulier.

95. Soit donc $A = B$, ce qui donne le quarré de la vîtesse initiale

$$V^2 = \frac{2A(1+m^2)}{h(1+m)} = \frac{A(1+m^2)}{mf};$$

on aura immédiatement

$$\frac{(1+m)\,dt\sqrt{A}}{4f\sqrt{f}} = \frac{(m+q^2)(1+mq^2)\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{[(1+m^2)(1+q^4)+4mq^2]}}.$$

Soit $q = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi$, $\cos\theta = \frac{2m}{1+m^2}$, $c = \sin\frac{1}{2}\theta$, $b = \cos\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{bdt\sqrt{2A}}{f\sqrt{f}} = \frac{d\psi(1-2c^2+c^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

dont l'intégrale est

$$t = \frac{f\sqrt{f}}{b\sqrt{2A}}[2b^2F(c,\psi) - E(c,\psi)].$$

Dans le mouvement que nous considérons, la vîtesse est la même aux deux extrémités du grand axe; elle est aussi la même aux deux extrémités du petit axe. En appelant celle-ci V′, on aura

$$V^2 = \frac{A(1+m^2)}{mf}, \quad V'^2 = \frac{2A}{f};$$

d'où il suit que la vîtesse va en diminuant de l'extrémité du grand axe à l'extrémité du petit.

Il est évident, d'ailleurs, que chaque quart d'ellipse est parcouru dans le même temps qui sera le quart du temps d'une révolution; de sorte qu'en appelant ce dernier temps T, on aura

$$T = \frac{4f^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{2A}}(2b^2F^1c - E^1c).$$

96. Les deux forces A et B sont égales; elles agissent aux deux foyers de l'ellipse. Si l'on voulait que la même courbe fût parcourue en vertu d'une seule force attractive 2A, placée dans l'un des foyers, le temps de la révolution serait, comme nous l'avons vu n° 92, $T' = \frac{4f^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2A}} \cdot \frac{\pi}{2}$; donc on a

$$T : T' :: 2bF^1c - \frac{1}{b}E^1c : \frac{\pi}{2}.$$

Pour savoir lequel de ces deux temps est le plus grand, j'observe qu'on a en général, $E = b^2F + \int\frac{c^2d\varphi\cos^2\varphi}{\Delta}$; donc

$$2bF^1c - \frac{1}{b}E^1c = bF^1c - \frac{c^2}{b}Z^1,$$

Z^1 étant l'intégrale $\int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\Delta}$, prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Mais

Mais $bF^{\prime}c$ représente l'intégrale $\int \frac{d\varphi \sqrt{(1-c^2)}}{\Delta}$, prise entre les mêmes limites; et puisque $1-c^2$ est plus petit que $1-c^2 \sin^2 \varphi$, cette intégrale est plus petite que $\int d\varphi$ ou $\frac{1}{2}\pi$: donc, à plus forte raison, $2bF^{\prime}c - \frac{1}{b}E^{\prime}c < \frac{1}{2}\pi$; donc on a $T < T'$. Ainsi la masse $2A$, partagée également dans les deux foyers, agit plus fortement que la même masse réunie dans un seul foyer, c'est-à-dire fait circuler le corps dans un moindre temps.

97. Pour juger de la différence numérique de ces temps dans un cas particulier, soit $c = \sin 30°$, on aura par la table des fonctions complètes,

$$lF^{\prime}c = 0.226793\ 259758,$$
$$lE^{\prime}c = 0.166566\ 925942,$$

ce qui donnera

$$\frac{T}{T'} = 0.780066\ 670223.$$

Ainsi les deux temps dont il s'agit seront à très-peu près dans le rapport de 78 à 100.

Au reste, les vîtesses aux extrémités du grand axe, ne sont pas les mêmes dans les deux cas, et leur différence sert à expliquer en grande partie la différence des résultats. Si l'on appelle V' et V'' les vîtesses aux absides supérieure et inférieure, dans le cas d'une seule force attractive $2A$, concentrée dans l'un des foyers, on aura

$$V'^2 = \frac{2Am}{f}, \quad V''^2 = \frac{2A}{fm};$$

et dans le cas des forces séparées, on a $V^2 = \frac{A(1+m')}{fm}$; donc $V^2 = \frac{1}{2}(V'^2 + V''^2)$, c'est-à-dire que V^2 tient le milieu juste entre V'^2 et V''^2. Quant à l'effet de ces vîtesses sur le temps périodique, il n'y a que le calcul qui puisse l'apprécier, et à cet égard il ne reste rien à desirer.

Solution d'une difficulté analytique.

98. Puisque l'ellipse satisfait dans un cas fort étendu où les forces attractives A et B sont situées respectivement dans les deux foyers

F et G, on peut partir de la courbe connue pour faire les substitutions dans les équations générales (1) et (2), afin d'en déduire les conditions nécessaires pour que ce mouvement puisse avoir lieu.

Ayant donc fait CA $=f$, CF $=$ CG $= g = \frac{1}{2}a$, $m=\frac{f-g}{f+g}$; soit de plus $n=\frac{2fg}{f^2+g^2}$, on aura par les propriétés de l'ellipse,

$$r=\frac{f^2-g^2}{f+g\cos\varphi}, \qquad s=\frac{f^2-g^2}{f-g\cos\omega}=\frac{(f^2+g^2)(1+n\cos\varphi)}{f+g\cos\varphi},$$

$$\cos\omega=\frac{n+\cos\varphi}{1+n\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega=\frac{1-n}{1+n}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi=m^2\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$p^2=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}=m, \qquad q^2=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi=m\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$d\omega=\frac{f^2-g^2}{f^2+g^2}\cdot\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi}, \quad rd\varphi=sd\omega=\frac{(f^2-g^2)\,d\varphi}{f+g\cos\varphi},$$

$$dr^2+r^2d\varphi^2=\frac{(f^2-g^2)^2(f^2+g^2)(1+n\cos\varphi)\,d\varphi^2}{(f+g\cos\varphi)^4}.$$

Ces valeurs, et celles des constantes C et C′ (art. 74), où l'on fera $\mu=\frac{1}{2}\pi$, et pour abréger, $D=\frac{f^2-g^2}{4g}V^2$, étant substituées dans les équations (1) et (2), on trouvera que ces deux équations conduisent également, et sans aucune condition, à cette valeur de dt,

$$dt\sqrt{\left(\frac{2g}{f^4-g^4}\right)}=\frac{(f^2-g^2)(1+n\cos\varphi)\,d\varphi}{(f+g\cos\varphi)^2\sqrt{N}},$$

dans laquelle

$$N=2D(1+n\cos\varphi)-A(1-\cos\varphi)(1+n\cos\varphi)+B(1-n)(1-\cos\varphi).$$

Ce résultat, qui n'impose aucune condition à la vîtesse initiale, a de quoi surprendre, ou doit même paraître fautif, puisque s'il y a une vîtesse initiale propre à faire décrire l'ellipse donnée, toute vîtesse plus grande ou plus petite fera nécessairement décrire une autre courbe.

99. Pour rendre raison de ce paradoxe, il faut considérer que les équations (1) et (2) ne sont pas linéaires par rapport aux différences $d\varphi$, $d\omega$, dt, et qu'un facteur qui est nul dans l'ellipse, a pu satisfaire à ces équations, sans qu'on soit en droit d'en conclure que ces deux équations se réduisent absolument à une seule.

Toute incertitude à cet égard disparaîtra, si l'on remonte aux équations différentielles du second ordre, et qu'on fasse les substitutions convenables dans ces équations. On devra obtenir ainsi la condition pour que l'ellipse soit décrite en vertu des deux forces d'attraction et de la vîtesse initiale V, dirigée perpendiculairement à la ligne des centres FG.

Faisant donc, comme au n° 70, $x = a + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, les équations différentielles du second ordre donneront immédiatement,

$$\frac{ddr - rd\varphi^2}{dt^2} = \frac{A}{r^2} - \frac{B\cos(\varphi - \omega)}{s^2},$$
$$\frac{rdd\varphi + 2drd\varphi}{dt^2} = \frac{B}{s^2}\sin(\varphi - \omega).$$

Ces équations servent en général à déterminer la courbe décrite et le lieu du corps au bout du temps t. Maintenant si cette courbe est l'ellipse qui a pour équation $r(f + g\cos\varphi) = f^2 - g^2$, on aura

$$(f+g\cos\varphi)\frac{ddr - rd\varphi^2}{dt^2} - g\sin\varphi\left(\frac{rdd\varphi + 2drd\varphi}{dt^2}\right) = fr\cdot\frac{dt^2}{d\varphi^2}.$$

Au moyen de ces trois équations et de la valeur de $\frac{dt^2}{d\varphi^2}$, tirée du résultat de l'article précédent, on trouve l'équation de condition

$$(f+g\cos\varphi)\frac{A}{r^2} + \frac{fB\cos(\varphi-\omega) + gB\cos\omega}{s^2} = \frac{(f+g\cos\varphi)^3 Nn}{(f^2-g^2)^2(1+n\cos\varphi)^2}.$$

Substituant les valeurs de r, s, $\cos\omega$, $\cos(\varphi - \omega)$ en fonctions de φ, on aura enfin,

$$Nn = A(1 + n\cos\varphi)^2 + B\left(\frac{f^2 - g^2}{f^2 + g^2}\right)^2.$$

Comparant cette valeur de N avec celle de l'article précédent, on trouve qu'elles sont identiques, si l'on a $2nD = A(1+n) + B(1-n)$, c'est-à-dire si la vîtesse initiale V est telle qu'on ait

$$V^2 = \frac{A(f+g)^2 + B(f-g)^2}{f(f^2-g^2)} = \frac{A + Bm^2}{fm},$$

ce qui s'accorde entièrement avec les résultats précédens.

Du cas particulier où B = — A.

100. Dans ce cas, la force placée au second foyer G est répulsive, et égale en intensité à la force attractive placée au foyer F. Pour que l'ellipse soit décrite en vertu de ces deux forces, il faut, d'après la formule précédente, qu'on ait

$$V^2 = \frac{4Ag}{f^2 - g^2} = \frac{A(1 - m^2)}{fm}.$$

Alors la vîtesse v en un point quelconque est donnée par l'équation (1), savoir,

$$v^2 = \frac{2A}{r} - \frac{2A}{s} + V^2 - \frac{2A}{f-g} + \frac{2A}{f+g}.$$

Mais on a, par hypothèse, $V^2 = \frac{4Ag}{f^2 - g^2} = \frac{2A}{f-g} - \frac{2A}{f+g}$; donc

$$v^2 = \frac{2A}{r} - \frac{2A}{s}.$$

On voit, par cette équation, que la vîtesse diminue de plus en plus, à mesure que le corps s'éloigne de l'extrémité du grand axe; elle sera nulle à l'extrémité du petit axe, où l'on a $r = s$. Ainsi, à partir de ce point, le corps reviendra sur ses pas, et décrira le quart d'ellipse dans le sens contraire. Arrivé au point A avec une vîtesse V, égale à la vîtesse initiale, mais dirigée en sens contraire, il continuera son mouvement sur l'ellipse, jusqu'à ce qu'il parvienne à l'autre extrémité du petit axe, où sa vîtesse sera nulle. Ainsi, dans le cas où les deux forces situées aux deux foyers sont égales, mais agissent en sens contraire, le mobile, en supposant sa vîtesse initiale telle que nous l'avons fixée, parcourra la demi-ellipse, d'une extrémité à l'autre du petit axe, par un mouvement analogue à celui d'un pendule qui oscillerait dans une demi-ellipse dont le grand axe serait vertical. Cet exemple d'un mouvement d'oscillation, que des forces accélératrices produisent sur un corps parfaitement libre, s'il n'est pas le premier que la mécanique ait offert jusqu'à présent, est au moins digne de remarque.

101. Pour trouver le temps du mouvement, il faut faire $B = - A$ dans la formule du n° 94, ce qui donnera

$$\frac{dt\sqrt{A}}{4f\sqrt{f}}(1+m)\sqrt{(1-m^2)} = \frac{(m+q^2)(1+mq^2)\,dq}{(1+q^2)^2\sqrt{(1-q^4)}}.$$

Soit $c^2 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{c \sin \psi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \psi)}}$, $\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \psi)} = \Delta$, on aura

$$\frac{dq}{\sqrt{(1-q^4)}} = \frac{cd\psi}{\Delta}, \quad \frac{m+q^2}{1+q^2} = 1+(1-m)\Delta^2, \quad \frac{1+mq^2}{1+q^2} = m+(1-m)\Delta^2;$$

donc le second membre de l'équation précédente étant nommé dV, on aura

$$dV = \frac{cd\psi}{\Delta}\left[m+(1-m)^2\Delta^2-(1-m)^2\Delta^4\right],$$

ce qui donne en intégrant,

$$V = cm\mathrm{F}(c,\psi) + c(1-m)^2\mathrm{E}(c,\psi) - c(1-m)^2 \int \Delta^3 d\psi.$$

Mais on a

$$\int \Delta^3 d\psi = \tfrac{1}{3} c^2 \Delta \sin\psi \cos\psi + \mathrm{E}(c,\psi) - \tfrac{1}{3} c^2 \mathrm{F}(c,\psi);$$

donc

$$V = \frac{c^3}{3}(1+4m+m^2)\mathrm{F}(c,\psi) - \frac{c^3}{3}(1-m)^2 \Delta \sin\psi \cos\psi.$$

Cette intégrale, qui ne comprend que la fonction de première espèce $\mathrm{F}(c,\psi)$, est la valeur de $\frac{t\sqrt{A}}{4g\sqrt{g}}(1+m)\sqrt{(1-m^2)}$; et en faisant $m = \frac{f-g}{f+g}$, on en déduit

$$t = \frac{\sqrt{(2g^3)}}{3\sqrt{A}}\left[\frac{3f^2-g^2}{2g^2}\mathrm{F}(c,\psi) - \Delta \sin\psi \cos\psi\right].$$

Si l'on fait $q = 1$, ou $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura le temps employé à parcourir le quart d'ellipse. Ainsi en appelant T le temps d'une oscillation, on aura

$$T = \frac{3f^2-g^2}{3\sqrt{(\frac{1}{2}Ag)}}\mathrm{F}^1 c.$$

Du cas particulier où l'on a $C + C' = 0$.

102. Dans ce cas, les polynomes P et Q se réduisent à deux

termes, savoir,

$$P = \alpha - \beta p^4,$$
$$Q = \gamma + \delta q^4.$$

Dans le premier, les coefficiens α et β sont toujours positifs; dans l'autre, les coefficiens γ et δ peuvent être tous deux positifs, ou l'un positif et l'autre négatif.

D'après ces valeurs, chaque membre de l'équation $\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$ pourra toujours se réduire à la forme $\frac{\alpha d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}}$, où l'on a $c^2 = \frac{1}{2}$; donc l'équation dont il s'agit peut être représentée en général par $k \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\zeta)}}$, et son intégrale sera

$$kF(c, \psi) = F(c, \zeta) + \text{const.},$$

ou simplement $kF(\psi) = F(\zeta) + \text{const.}$, le module commun à ces fonctions étant $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

On pourra toujours supposer que dans l'état initial du mouvement, l'une des variables ψ, ζ est nulle. Soit cette variable ζ, et soit en même temps $\psi = \varepsilon$, alors l'équation de la courbe sera

$$k(F\psi - F\varepsilon) = F\zeta;$$

et si l'on prend une nouvelle variable ξ, telle que $F\xi = F\psi - F\varepsilon$, on aura plus simplement $kF\xi = F\zeta$.

103. Telle est, sous la forme la plus simple, l'équation de la trajectoire, lorsque la vîtesse initiale satisfera à la condition $C + C' = 0$. Dans cette équation, k sera en général une fonction donnée des quantités A, B, a, et de celles qui sont relatives à l'état initial du corps; si l'on suppose que k est égale à une fraction rationnelle $\frac{i}{e}$, prise à volonté entre des limites convenables, cette condition établira, entre les données du problème, une relation au moyen de laquelle la courbe décrite par le corps sera une courbe algébrique, puisqu'il y a toujours une équation algébrique qui représente l'équation transcendante

$$iF\xi = eF\zeta.$$

Il y a donc une infinité de cas où la courbe décrite par un corps attiré vers deux centres fixes, est une courbe algébrique. Cette courbe sera nécessairement rentrante sur elle-même, lorsque la vîtesse initiale sera telle, que le corps ne peut s'éloigner à l'infini; alors il y aura une période composée d'une ou de plusieurs révolutions, laquelle se répétera à l'infini; de sorte qu'il suffira de calculer le mouvement du corps dans une de ces périodes, pour pouvoir assigner le lieu du corps et toutes les circonstances du mouvement au bout d'un temps quelconque.

Les courbes algébriques que nous venons d'indiquer, et qui seront déterminées d'une manière plus particulière dans l'examen que nous ferons des différens cas principaux du problème, sont les seules qu'Euler ait données dans les Mémoires de Berlin, ann. 1760. Mais nous ferons voir qu'il y a une infinité d'autres systèmes de courbes algébriques qui peuvent également satisfaire au problème; et cette multitude de solutions est une nouvelle preuve des avantages que peut procurer, dans les applications, la théorie des fonctions elliptiques.

Recherche des cas principaux contenus dans le premier système.

104. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des cas particuliers; nous allons maintenant procéder à l'intégration de l'équation (3). Pour cela, il faudra distinguer dans chacun des deux systèmes indiqués art. 77, les différens cas principaux qui peuvent y être renfermés, et qui donnent lieu à des résultats de forme différente.

En général, on sait que chaque membre de l'équation (3) peut être réduit à la forme $\frac{\alpha d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$; cette équation sera donc toujours de la forme

$$k.\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}},$$

et son intégrale sera, par conséquent,

$$k\mathrm{F}(c,\psi)=\mathrm{F}(\varkappa,\zeta)+\text{const.}$$

En supposant que le point A, origine du mouvement, est situé sur l'axe EFG, soit dans son prolongement du côté de F, soit entre les deux centres F et G, on pourra toujours faire ensorte qu'une des variables ψ, ζ soit nulle au point A; alors on devra supposer que $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ sont tous deux positifs, afin que les angles ψ et ζ croissent continuellement avec le temps : c'est sur ce principe que seront dirigées les transformations par lesquelles on obtient, dans les différens cas, l'équation de la courbe décrite

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) + \text{const.}$$

Cette équation, de même forme dans tous les cas, et facile à résoudre pour déterminer tant de points qu'on voudra de l'orbite, est remarquable surtout en ce que le coefficient k s'exprime toujours très-simplement par les deux modules c et $\varkappa$; d'où il suit que les cas les plus variés du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, sont toujours résolus par une équation finale, où il n'y a que deux constantes arbitraires pour représenter toutes les données du problème.

105. Dans le premier système que nous nous proposons maintenant de développer, le polynome P est de la forme

$$\mathrm{P} = \mathrm{M}\,(m - p^2)(p^2 - m'),$$

où l'on suppose m et m' positifs, et $m > m'$. La valeur de p^2 est donc toujours comprise entre les limites m et m'. Or, le lieu de tous les points où l'on a $p^2 = m$, est une ellipse décrite des foyers F et G, et dont le sommet E est placé à la distance $\mathrm{EF} = \frac{ma}{1-m}$; de même, le lieu de tous les points où l'on a $p^2 = m'$, est une ellipse décrite des mêmes foyers, et dont le sommet D est placé à la distance $\mathrm{FD} = \frac{m'a}{1-m'}$. Donc, dans tous les cas qui appartiennent au premier système, la courbe décrite par le mobile sera toujours comprise dans l'espace que laissent entr'eux les périmètres des deux ellipses que nous venons de déterminer; de sorte que les intersections de cette courbe avec l'axe ne pourront se faire que dans les parties de cet axe ED, KL comprises entre les deux ellipses.

106. Nous appellerons *absides supérieures*, les points de l'orbite

S', 2

S^1, S^2, S^3, etc., où l'on a $p^2 = m$, et *absides inférieures* les points I^1, I^2, I^3, etc., où l'on a $p^2 = m'$. La raison de cette dénomination est que la somme des rayons vecteurs $r + s$ est un *maximum* dans les premiers points, et un *minimum* dans les autres; mais il importe surtout de remarquer une propriété générale des absides, tant supérieures qu'inférieures, savoir, que dans ces points l'orbite est toujours tangente à l'ellipse terminatrice $p^2 = m$ ou $p^2 = m'$.

En effet, si l'orbite, qui a un point S commun avec l'ellipse supérieur $p^2 = m$, coupait cette ellipse, il y aurait des points de l'orbite qui appartiendraient à une ellipse plus grande, et pour lesquels, par conséquent, on aurait $p^2 > m$; ce qui ne peut avoir lieu, puisque m est la plus grande valeur de p^2. De même si l'orbite, qui a un point I commun avec l'ellipse inférieure $p^2 = m'$, entrait dans cette ellipse, il y aurait des points de l'orbite qui appartiendraient à une ellipse plus petite, et pour lesquels on aurait $p^2 < m'$; ce qui ne peut encore avoir lieu, puisque m' est la plus petite valeur de p^2.

Il ne peut y avoir d'exception à cette propriété générale, que dans le cas où l'orbite aurait un point de rebroussement qui aboutirait à l'une des ellipses terminatrices, ou bien dans le cas où la vitesse du corps serait zéro au point S; car alors il reviendrait sur ses pas, en suivant le même arc de courbe.

107. Pour procéder maintenant à l'intégration de l'équation (3), il faut transformer convenablement les deux membres. Et d'abord puisqu'on a $P = M(m - p^2)(p^2 - m')$, si l'on fait $c^2 = 1 - \frac{m'}{m}$ et $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2\psi)$, on aura la transformée

$$-\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{(mM)}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}.$$

On a ensuite, d'après les formules de l'art. 79,

$$(1 - mm')Q = A + Bmm' + (m + m')(A + B)q^2 + (Amm' + B)q^4;$$

mais il y a deux cas à distinguer, selon que les facteurs du second membre sont réels ou imaginaires.

108. *Premier cas.* Si ces facteurs sont imaginaires, ou si l'on a

$$\frac{m - m'}{1 - mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A + B},$$

on pourra supposer

$$Q = (M - B)(1 + 2\alpha\cos\theta . q^2 + \alpha^2 q^4),$$

α et θ étant déterminés par les équations

$$\alpha^2 = \frac{Amm' + B}{A + Bmm'}, \quad \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m + m')(A + B)}{\sqrt{(Amm' + B)} . \sqrt{(A + Bmm')}};$$

d'ailleurs on a, comme dans l'art. 78, $M = \frac{A+B}{1-mm'}$, $M - B = \frac{A+Bmm'}{1-mm'}$.

Cela posé, si l'on fait $x = \sin\frac{1}{2}\theta$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta$, on aura la transformée

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{2\sqrt{(M\alpha - B\alpha)}} . \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta)}}.$$

Soit enfin $k = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha(M-B)}{mM}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha(A+Bmm')}{m(A+B)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2m + 2m'}{m\cos\theta}\right)}$ $= \sqrt{\left(\frac{4 - 2c^2}{1 - 2x^2}\right)}$, et l'équation (3) deviendra

$$\mp k . \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta)}};$$

mais j'observe qu'on peut mettre $\pi - \psi$ à la place de ψ, sans changer la valeur supposée $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$; ainsi on peut supprimer le double signe de cette équation, et écrire simplement

$$k . \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2\sin^2\zeta)}},$$

ce qui donnera, en intégrant,

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta) + C''.$$

109. Il s'agit maintenant de déterminer la constante C″. Or, d'après l'état initial du mouvement, tel qu'il est supposé dans l'art. 74, on doit avoir au point A, $q = 0$ et $p^2 = m^\circ$. Faisant donc $\zeta = 0$ et $\psi = \varepsilon$, ce qui donnera $m^\circ = m(1 - c^2\sin^2\varepsilon)$, ou

$$\sin^2\varepsilon = \frac{m - m^\circ}{mc^2} = \frac{m - m^\circ}{m - m'},$$

on aura $C'' = -kF(c, \varepsilon)$; ainsi l'équation de la courbe sera

$$kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(x, \zeta).$$

Mais il importe de savoir si l'angle ε, déterminé par la valeur de

$\sin^2 \varepsilon$, est aigu ou obtus; car l'équation de la courbe ne serait plus la même si l'on mettait $\pi - \varepsilon$ à la place de ε.

Pour cela il faut, comme nous l'avons déjà dit, faire ensorte que les coefficiens $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ soient tous deux positifs au commencement du mouvement. Or on a, au point A, $\varphi = 0$, $\omega = 0$, $q = 0$, $p = \sqrt{m^\circ}$, $dr = Vdt \cos \mu$, $rd\varphi = Vdt \sin \mu$; d'un autre côté les équations $r = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2}$, $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{q}{p}$ étant différenciées, donnent au même point A où $q = 0$, $dr = \frac{2apdp}{(1-p^2)^2}$, $\frac{1}{2}d\varphi = \frac{dq}{p}$; donc $\frac{dq}{dt} = \frac{p}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{2r} V \sin \mu = \frac{(1-m^\circ)\sqrt{m^\circ}}{2am^\circ} V \sin \mu$; mais on a en général $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang \frac{1}{2}\zeta$, ce qui donne au point A, $\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{d\zeta}{dt}$; donc

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1-m^\circ}{2a} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^\circ}\right)} . V \sin \mu ;$$

cette valeur est toujours positive. Pour avoir celle de $\frac{d\psi}{dt}$, j'observe qu'on a $dr = Vdt \cos \mu = \frac{2apdp}{(1-p^2)^2}$; donc au point A, $\frac{dp}{dt} = \frac{(1-m^\circ)^2}{2a\sqrt{m^\circ}} . V \cos \mu$; d'ailleurs l'équation $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$ donne $pdp = -mc^2 \sin\psi \cos\psi d\psi$; donc au point A, où $\psi = \varepsilon$, on a

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\sqrt{m^\circ}}{mc^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon} \cdot \frac{dp}{dt} = -\frac{(1-m^\circ)^2 V \cos \mu}{2amc^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}.$$

De là on voit que pour rendre $\frac{d\psi}{dt}$ positif, il faut toujours prendre $\cos \varepsilon$ de signe contraire à $\cos \mu$, c'est-à-dire que les angles ε et μ seront toujours, l'un aigu, l'autre obtus.

Par cette condition, l'angle ε sera entièrement déterminé, et la courbe décrite par le mobile se construira au moyen de l'équation

$$kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(\varkappa, \zeta),$$

qu'il faudra combiner avec les équations $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang \frac{1}{2}\zeta$. On voit par ces dernières, que p restera toujours positive, mais que q prendra toutes les valeurs positives et négatives, depuis zéro jusqu'à l'infini. On déterminera d'ailleurs les coordonnées x et y par les formules de l'art. 81, où l'on voit que l'ordonnée y change de signe en même temps que la variable q.

110. L'équation qu'on vient de trouver pour la courbe décrite, peut en général se réduire à deux termes; car en faisant $F(\psi) - F(\varepsilon) = F(\xi)$, c étant le module commun à ces fonctions, on aura

$$kF(c, \xi) = F(x, \zeta);$$

mais alors il faudrait exprimer p en fonction de ξ. Or, d'après l'équation supposée, on a (n° 18, p. 1), en faisant $\sqrt{(1-c^2\sin^2\xi)} = \Delta(\xi)$ et $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varepsilon)} = \Delta(\varepsilon)$,

$$p = \sqrt{m}.\frac{\Delta\varepsilon\Delta\xi - c^2 \sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\xi\cos\xi}{1 - c^2\sin^2\varepsilon\sin^2\xi}.$$

Mais cette expression étant assez compliquée, il est préférable de laisser l'équation de la courbe dans sa forme à trois termes, laquelle, d'ailleurs, n'est pas moins facile à résoudre, lorsqu'il s'agit de déterminer ψ par le moyen de ζ, ou réciproquement.

Cette équation se simplifie d'elle-même dans les deux cas particuliers où le point A, origine du mouvement, est une abside supérieure ou inférieure.

111. Si le point A est une abside supérieure, ce point ne pourra être qu'un des sommets de l'ellipse $p^2 = m$; on aura par conséquent, dans ce point, $m^\circ = m$ et $\mu = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\varepsilon = 0$, et l'équation de la courbe sera simplement

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta).$$

Si le point A est une abside inférieure, ce point sera un sommet de l'ellipse $p^2 = m'$, et on aura $m^\circ = m'$; $\mu = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$. Dans ce cas, l'équation de la courbe contient encore trois termes, savoir, $kF(c, \psi) - kF^1c = F(x, \zeta)$; mais en faisant la même transformation que dans l'article précédent, et substituant dans la formule la valeur $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, on trouve $p = \frac{b\sqrt{m}}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\xi)}} = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\xi)}}$, $kF(c, \xi) = F(x, \zeta)$; et comme rien n'empêche de mettre ψ au lieu de ξ dans ce résultat, l'équation de la courbe sera toujours de la forme

$$kF(c, \psi) = F(\varkappa, \zeta);$$

mais on aura $p = \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta$.

112. *Second cas.* Si les facteurs du polynome Q sont réels, ou si l'on a

$$\frac{m - m'}{1 - mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A + B},$$

on pourra supposer

$$Q = (M - B)(1 + \alpha q^2)(1 + \alpha' q^2),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha + \alpha' = \frac{(m + m')(A + B)}{A + Bmm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{Amm' + B}{A + Bmm'}.$$

Soit $\alpha > \alpha'$, si l'on fait $\varkappa^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$, on aura la transformée

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha M - \alpha B)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}.$$

Soit enfin $k = \sqrt{\left(\frac{\alpha (M - B)}{\alpha M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 - c^2}{2 - \varkappa^2}\right)}$, et on aura l'équation de la courbe

$$kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(\varkappa, \zeta),$$

ε étant la valeur de ψ au point A, donnée par l'équation

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{m - m^0}{m - m'}.$$

On trouvera, comme ci-dessus, que l'angle ε est toujours de même espèce que $\pi - \mu$, ce qui achèvera de déterminer cet angle. Ensuite, pour construire la courbe, il faudra joindre à l'équation précédente les équations

$$p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi), \quad q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta.$$

113. Si le point A est une abside supérieure, on aura $\varepsilon = 0$, et l'équation de la courbe sera simplement

$$kF(c, \psi) = F(\varkappa, \zeta).$$

Si le point A est une abside inférieure, on aura $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$; alors l'équation de la courbe sera encore de la même forme, mais on aura $p^2 = \frac{m'}{1 - c^2 \sin^2 \psi}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$.

Les deux cas principaux que nous venons de développer sont les seuls qui soient compris dans le premier système. Nous allons donc passer à l'examen des cas qui appartiennent au second système; mais pour cet effet il faut, comme nous l'avons déjà dit, déterminer les constantes C et C′ dans l'hypothèse que le point A, origine du mouvement, est situé sur l'axe entre les deux centres des forces F et G.

Recherche des cas principaux contenus dans le second système.

114. On a déjà vu que, dans le second système, la valeur de P doit toujours être de la forme

$$P = M(m - p^2)(p^2 + m'),$$

dans laquelle m est positif et < 1, m' étant positif aussi, mais d'une grandeur non limitée.

Dans ce système, la valeur de p^2 varie entre les limites zéro et m; tous les points où $p^2 = m$ sont les absides supérieures S^1, S^2, S^3, etc., dans lesquelles l'orbite est tangente à l'ellipse terminatrice $p^2 = m$; tous les points où $p^2 = 0$ peuvent être regardés comme des absides inférieures I^1, I^2, I^3, etc., puisque la somme des rayons vecteurs $FI + IG$, égale à FG, est un *minimum;* ces points sont en même temps les intersections de la courbe avec l'axe entre les deux centres F et G.

Fig. 19. 115. Soit A le point de l'axe situé entre F et G, qu'on prend pour origine du mouvement; soit V la vîtesse initiale, et μ l'angle EAH que fait la direction de cette vîtesse avec l'axe : les angles μ, φ, ω sont ouverts d'un même côté; ils prennent naissance lorsque leurs côtés sont confondus avec la partie de l'axe dirigée dans le sens GFE.

Cela posé, on aura, au point A, les valeurs $t = 0$, $\varphi = \pi$, $\omega = 0$,

$p^2=0, q^2=m^\circ, r=\frac{am^\circ}{1+m^\circ}, s=\frac{a}{1+m^\circ}, \frac{rd\varphi}{dt}=-\mathrm{V}\sin\mu, \frac{sd\omega}{dt}=\mathrm{V}\sin\mu.$

Substituant ces valeurs dans les équations (1) et (2), afin de déterminer les constantes C et C′, on en déduira

$$\mathrm{C} = \tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2 - \left(\frac{\mathrm{A}}{m^\circ}+\mathrm{B}\right)(1+m^\circ),$$
$$\mathrm{C}' = \mathrm{A}+\mathrm{B} - \frac{a\mathrm{V}^2 m^\circ \sin^2\mu}{(1+m^\circ)^2}.$$

Mais puisqu'on a en général

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \tfrac{1}{2}\mathrm{B} + \tfrac{1}{2}\mathrm{C}' + (\mathrm{C}+\mathrm{C}')p^2 - (\tfrac{1}{2}\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}\mathrm{B} + \tfrac{1}{2}\mathrm{C}')p^4,$$

et que cette même quantité est représentée, dans le second système, par la formule

$$\mathrm{P} = \mathrm{M}\,[mm' + (m-m')p^2 - p^4],$$

on aura pour déterminer M, m, m', les équations

$$mm' = \frac{\tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2 m^\circ \sin^2\mu}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})(1+m^\circ)^2 - \tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2 m^\circ \sin^2\mu},$$
$$m-m' = \frac{\left(\tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2 - \frac{\mathrm{A}}{m^\circ} - \mathrm{B}m^\circ\right)(1+m^\circ)^2 - a\mathrm{V}^2 m^\circ \sin^2\mu}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})(1+m^\circ)^2 - \tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2 m^\circ \sin^2\mu},$$
$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{1+mm'} = \mathrm{A}+\mathrm{B} - \tfrac{1}{2}a\mathrm{V}^2.\frac{m^\circ\sin^2\mu}{(1+m^\circ)^2};$$

ensuite la valeur de Q sera donnée par la formule

$$(1+mm')\mathrm{Q} = \mathrm{A} - \mathrm{B}mm' + (\mathrm{A}+\mathrm{B})(m-m')q^2 + (\mathrm{B}-\mathrm{A}mm')q^4.$$

116. Procédons maintenant à l'intégration de l'équation (3), et soit d'abord $p=\sqrt{m}\cos\xi$, $c^2=\frac{m}{m+m'}$, on aura la transformée

$$\frac{dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} = -\frac{c}{\sqrt{(\mathrm{M}m)}}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\xi)}};$$

mais il convient d'obtenir un résultat positif, parce que la première valeur de p étant zéro, celle de $\frac{dp}{dt}$ doit être positive. Or, en faisant $\mathrm{F}^1c - \mathrm{F}(c,\xi) = \mathrm{F}(c,\psi)$, ou algébriquement $\tang\xi\,\tang\psi=\frac{1}{b}$, on aura $\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}} = -\frac{d\xi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\xi)}}$; et comme l'équation supposée donne $\cos\xi = \frac{b \sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}$, il s'ensuit que si l'on fait directement $p = \frac{c\sqrt{m'} \sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}$, on aura

$$\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{c}{\sqrt{(Mm)}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}}.$$

Cette valeur restera toujours la même dans tous les cas du second système; mais celle de $\frac{dq}{\sqrt{Q}}$ sera d'une forme différente, suivant les différens cas, c'est-à-dire suivant les différentes formes que peuvent prendre les facteurs dont le polynome Q est composé. Nous allons examiner successivement ces différens cas, mais nous nous bornerons toujours à ceux qui supposent les quantités A et B positives.

117. *Premier cas.* Supposons qu'on ait à la fois $A > Bmm'$ et $B > Amm'$, ensorte que mm' soit non-seulement moindre que l'unité, mais moindre que le plus petit des rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{A}{B}$. Soit de plus $(A + B)^2(m - m')^2 < 4(A - Bmm')(B - Amm')$, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m + m'}{1 + mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A + B}.$$

Ces conditions ayant lieu, on pourra faire

$$Q = (M - B)(1 + 2\alpha \cos\theta . q^2 + \alpha^2 q^4),$$

α et θ étant déterminés par les équations

$$\alpha^2 = \frac{B - Amm'}{A - Bmm'}, \quad \alpha \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m - m')(A + B)}{A - Bmm'}.$$

Cela posé, soit $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta$, $x = \sin\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{2\sqrt{(M\alpha - B\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2\zeta)}}.$$

Soit enfin

$$k = 2c\sqrt{\left(\frac{M\alpha - B\alpha}{Mm}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{m + m'} \cdot \frac{m - m'}{2\alpha \cos\theta}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4c^2 - 2}{1 - 2x^2}\right)},$$

l'équation (3) deviendra

$$k . \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2\zeta)}},$$

et

et son intégrale sera

$$kF(c,\psi) = F(x,\zeta) - F(x,\varepsilon),$$

ε étant la valeur de ζ lorsque $t=0$: alors on a $q=\sqrt{m^\circ}$; ainsi ε est donné par l'équation $\tang \frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{(\alpha m^\circ)}$.

118. Cherchons maintenant les valeurs de $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ lorsque $t=0$. Puisqu'on a $r=\frac{a}{1+p^2}-\frac{a}{1+q^2}$, $\tang \frac{1}{2}\omega = pq$, ces équations étant différenciées, donnent pour le point A où $p=0$ et $\omega=0$, $dr=\frac{2aqdq}{(1+q^2)^2}$, $\frac{1}{2}d\omega = qdp$; donc $\frac{dp}{dt}=\frac{1}{2q}\cdot\frac{d\omega}{dt}=\frac{1+m^\circ}{2a\sqrt{m^\circ}}.\mathrm{V}\sin\mu$. Cette valeur est positive; donc $\frac{d\psi}{dt}$, qui est du même signe que $\frac{dp}{dt}$, est aussi positif. Il reste à faire ensorte que $\frac{d\zeta}{dt}$ soit aussi positif.

Or, on a $dr=-\mathrm{V}dt\cos\mu=\frac{2aqdq}{(1+q^2)^2}$; donc $\frac{dq}{dt}=\frac{(1+m^\circ)^2}{2a\sqrt{m^\circ}}\mathrm{V}\cos(\pi-\mu)$; d'un autre côté, l'équation $q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$ donne $dq=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{d\zeta}{\cos^2\frac{1}{2}\zeta}$; donc au point A, on aura

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{(1+m^\circ)^2\sqrt{\alpha}}{a(1+\alpha m^\circ)\sqrt{m^\circ}}.\mathrm{V}\cos(\pi-\mu).$$

Ainsi la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$ ne sera positive que lorsque l'angle μ sera plus grand qu'un droit. Dans cette hypothèse, l'équation de l'article précédent est exacte, et il n'y a aucune ambiguité sur la valeur de l'angle ε déduit de l'équation $\tang\frac{1}{2}\varepsilon=\sqrt{(\alpha m^\circ)}$.

119. Mais si l'angle μ est moindre qu'un droit, alors le coefficient $\frac{d\zeta}{dt}$ deviendra négatif, et l'équation (3), dans laquelle nous avions négligé le double signe, devra être écrite ainsi,

$$\frac{kd\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=-\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}.$$

Pour la ramener à la forme ordinaire, nous prendrons une nouvelle variable ξ, telle que $\tang\xi\tang\zeta=\frac{1}{b}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ce qui donnera

$-\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}=\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}}$; alors q devra être exprimée en fonction de ξ, et on aura $q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\cos\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}+b\sin\xi}$. Par le moyen de cette valeur substituée directement dans la quantité $\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, on aurait trouvé $-\frac{dq}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{2\sqrt{(M\alpha-B\alpha)}}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}}$; ainsi l'équation (3), qui est alors $\frac{dp}{\sqrt{P}}=-\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, a pour transformée

$$\frac{kd\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}=\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\xi)}},$$

et son intégrale est

$$k\mathrm{F}(c,\psi)=\mathrm{F}(\varkappa,\xi)-\mathrm{F}(\varkappa,\varepsilon),$$

ε étant déterminé par l'équation $\sqrt{(\alpha m^\circ)}=\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varepsilon)}+b\sin\varepsilon}$; d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\varepsilon=\frac{1-\alpha m^\circ}{2b\sqrt{(\alpha m^\circ)}}.$$

120. Il résulte de cette analyse, que, dans tous les cas, l'équation de la courbe sera représentée par la même formule

$$k\mathrm{F}(c,\psi)=\mathrm{F}(\varkappa,\zeta)-\mathrm{F}(\varkappa,\varepsilon);$$

que, dans tous les cas, la valeur de p sera $p=\frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, mais que les formules qui donnent les valeurs de la variable q et de la constante ε, seront différentes, selon que l'angle μ qui détermine la direction de la vitesse initiale est plus grand ou plus petit qu'un angle droit.

Si l'on a $\mu>\frac{1}{2}\pi$, les formules dont il s'agit seront

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon=\sqrt{(\alpha m^\circ)},\quad q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta;$$

si l'on a $\mu<\frac{1}{2}\pi$, ces formules seront

$$\operatorname{tang}\varepsilon=\frac{1-\alpha m^\circ}{2b\sqrt{(\alpha m^\circ)}},\quad q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\cos\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}+b\sin\zeta}.$$

121. On pourra éviter la distinction de ces deux cas, et s'en

tenir au premier, qui est le plus simple, si l'on désigne constamment par F celui des deux centres où l'angle FAH, formé par la tangente AH avec l'axe du côté de F, est un angle obtus. Cette hypothèse ne diminue en rien la généralité de la solution, puisque d'ailleurs m°, qui représente le rapport $\frac{FA}{AG}$, peut avoir une valeur quelconque depuis zéro jusqu'à l'infini, et qu'il n'y a aucun avantage à supposer le point A plus près de F que de G, ce qui rendrait $m^\circ < 1$.

Pour éviter une subdivision inutile, nous choisirons de même, dans les autres cas généraux qui nous restent à examiner, le centre relativement auquel la solution se présente sous la forme la plus simple, lorsque cette solution sera susceptible de deux formes.

122. Nous pourrions passer sous silence le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, parce que ce cas particulier ne peut avoir lieu dans le cas général dont nous nous occupons. En effet, comme on aurait alors $\frac{dq}{dt} = 0$, il faudrait qu'on eût en même temps $Q = 0$, et qu'ainsi $q^2 - m^\circ$ fût facteur du polynome Q; ce qui n'a pas lieu, puisque les facteurs de Q sont imaginaires, excepté dans le seul cas de $\theta = 0$, où ils deviennent égaux et de la forme $1 + \alpha q^2$, non semblable à $q^2 - m^\circ$.

Au reste, si, dans la supposition de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on cherchait à vérifier la condition $(A+B)^2(m-m')^2 < 4(A-Bmm')(B-Amm')$, d'après les valeurs de mm' et $m-m'$, données art. 119, on trouverait que cette condition n'a pas lieu; car elle donnerait pour résultat,

$$\left[\tfrac{1}{2} a V^2 (1 - m^\circ) - \left(\frac{A}{m^\circ} + Bm^\circ\right)(1 + m^\circ)\right]^2 < 0.$$

Ainsi lorsqu'on a $\frac{m+m'}{1+mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, l'orbite ne coupera jamais l'axe à angles droits entre les deux centres F et G.

123. *Second cas.* Soit encore $A > Bmm'$ et $B > Amm'$, et supposons de plus qu'on ait

$$\frac{m+m'}{1+mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B};$$

ces conditions ayant lieu, les facteurs du polynome Q seront réels;

mais il y aura deux cas à distinguer, selon que $m - m'$ est positif ou négatif.

124. Soit, 1°. $m' < m$, on pourra faire

$$Q = (M - B)(1 + \alpha q^2)(1 + \alpha' q^2),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha + \alpha' = \frac{(m - m')(A + B)}{A - Bmm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{B - Amm'}{A - Bmm'}.$$

Soit $\alpha > \alpha'$; si l'on fait $x^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$, on aura $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(M\alpha - B\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \zeta)}}$. Soit ensuite

$$k = c\sqrt{\left(\frac{M\alpha - B\alpha}{Mm}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2c^2 - 1}{2 - x^2}\right)},$$

l'équation (3) deviendra $k \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \zeta)}}$, et son intégrale sera

$$kF(c, \psi) = F(x, \zeta) - F(x, \varepsilon),$$

ε étant la valeur de ζ au commencement du mouvement, valeur connue par l'équation

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \sqrt{(\alpha m^\circ)}.$$

Mais pour que l'équation générale, dans laquelle nous avons supprimé le signe ambigu, soit exacte, il faut que $\frac{d\zeta}{dt}$ soit positif. Or on a, au point A, comme dans l'art. 118, $\frac{dq}{dt} = \frac{(1 + m^\circ)^2}{2a\sqrt{m^\circ}} . V \cos(\pi - \mu)$. D'ailleurs l'équation $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \zeta$, donne au même point, $\frac{d\zeta}{dt} = \sqrt{\alpha} . \cos^2 \varepsilon . \frac{dq}{dt}$; donc $\frac{d\zeta}{dt}$ sera positif si $\cos(\pi - \mu)$ est positif, ou si l'on a $\mu > \frac{1}{2}\pi$.

Dans le cas contraire, il faudra transformer la variable ζ comme on l'a fait dans l'art. 119; mais on peut se dispenser de ce calcul, en choisissant, pour le centre F, celui des deux pour lequel l'angle μ est plus grand qu'un angle droit.

125. Soit, 2°. $m' > m$, les autres conditions étant les mêmes que dans l'art. 123, on pourra faire

$$Q = (M - A)(q^2 - \alpha)(q^2 - \alpha'),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha + \alpha' = \frac{(m' - m)(A + B)}{B - Amm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{A - Bmm'}{B - Amm'}.$$

Soit $\alpha > \alpha'$; si l'on fait $x^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin \zeta}$, on aura $-\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(M\alpha - A\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - x^2 \sin^2 \zeta)}}$. Soit donc $k = c\sqrt{\left(\frac{\alpha}{m} \cdot \frac{M - A}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1 - 2c^2}{1 + x^2}\right)}$, et l'équation (3) deviendra, en supprimant le signe ambigu et intégrant,

$$k\text{F}(c, \psi) = \text{F}(x, \zeta) - \text{F}(x, \varepsilon);$$

c'est l'équation de la courbe qu'il faudra combiner avec les équations

$$p = \frac{c\sqrt{m'} \sin \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}, \quad q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin \zeta}.$$

126. Pour déterminer la constante ε, on aura d'abord l'équation $\sin \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^\circ}\right)}$; mais cette équation laisse incertain si l'angle ε est aigu ou obtus. Il faut fixer cette incertitude en satisfaisant à la condition que $\frac{d\zeta}{dt}$ soit positif au commencement du mouvement.

Or on a, comme dans l'art. 118, $\frac{dq}{dt} = \frac{(1 + m^\circ)^2}{2a\sqrt{m^\circ}} \cdot \text{V} \cos(\pi - \mu)$; d'ailleurs l'équation $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin \zeta}$ donne au point A, $\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\sin^2 \varepsilon}{\sqrt{\alpha} \cdot \cos \varepsilon} \cdot \frac{dq}{dt}$, ou

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{(1 + m^\circ)^2}{2am^\circ} \cdot \text{V} \cos \mu \operatorname{tang} \varepsilon;$$

donc $\frac{d\zeta}{dt}$ sera toujours positif, si l'on prend ε de même espèce que μ. Cette condition, jointe à la valeur $\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{m^\circ}}$, détermine complètement l'angle ε, qui, dans ce cas comme dans tous les autres, est toujours moindre que deux angles droits.

Si l'angle μ est droit, c'est-à-dire si la tangente en A est perpendiculaire à l'axe, on aura aussi $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, et l'équation $\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{m^\circ}}$ donnera $\alpha = m^\circ$; alors Q aura pour facteur $q^2 - m^\circ$; c'est un cas dont nous avons déjà rencontré un exemple, art. 122.

Dans ce cas, l'équation de la courbe deviendra $k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) - \mathrm{F}^1\varkappa$, et on peut réduire le second membre à un seul terme, en faisant $\mathrm{F}(\varkappa, \zeta) - \mathrm{F}^1\varkappa = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta')$, ce qui donnera $\sin \zeta = \frac{\cos \zeta'}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta')}}$. Supprimant ensuite les accens dans le résultat, on voit que pour le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on aura les équations

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta), \quad p = \frac{c\sqrt{m'} . \sin \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}, \quad q = \sqrt{\alpha} . \frac{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}{\cos \zeta}.$$

127. *Troisième cas.* Supposons maintenant $\mathrm{A} < \mathrm{B}mm'$ et $\mathrm{B} > \mathrm{A}mm'$, ou, en d'autres termes, $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, et mm' tout-à-la-fois $> \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ et $< \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$; alors on devra faire

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{M} - \mathrm{A})(q^2 - \alpha)(q^2 + \alpha'),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives déterminées par les équations

$$\alpha - \alpha' = \frac{(m' - m)(\mathrm{A} + \mathrm{B})}{\mathrm{B} - \mathrm{A}mm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{\mathrm{B}mm' - \mathrm{A}}{\mathrm{B} - \mathrm{A}mm'}.$$

Soit $\varkappa^2 = \frac{\alpha'}{\alpha + \alpha'}$ et $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos \zeta}$, on aura $\frac{dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{(\mathrm{M}\alpha' - \mathrm{A}\alpha')}} . \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}$; soit enfin $k = \frac{c}{\varkappa}\sqrt{\left(\frac{\alpha'}{m} . \frac{\mathrm{M} - \mathrm{A}}{\mathrm{M}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1 - 2c^2}{1 - 2\varkappa^2}\right)}$, l'équation (3) deviendra, en substituant et intégrant,

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) - \mathrm{F}(\varkappa, \varepsilon):$$

c'est l'équation de la courbe qu'il faudra combiner avec les équations

$$p = \frac{c\sqrt{m'} . \sin \psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}}, \quad q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos \zeta}.$$

Quant à la valeur de ε, elle devra satisfaire à l'équation $\cos \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^\circ}\right)}$, où l'on voit que ε sera toujours $< \frac{1}{2}\pi$; mais il faut en outre que le coefficient $\frac{d\zeta}{dt}$ soit positif à l'origine du mouvement.

Or, l'équation $q\cos\zeta = \sqrt{\alpha}$ donne au point A, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dq}{dt}\cot\varepsilon$; substituant la valeur de $\frac{dq}{dt}$ de l'art. 118, il viendra

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{(1+m^\circ)^2}{2a\sqrt{m^\circ}} \mathrm{V} \cot\varepsilon \cos(\pi - \mu);$$

ainsi la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$ ne sera positive que lorsqu'on aura $\mu > \frac{1}{2}\pi$.

Si l'on a $\mu = \frac{1}{2}\pi$, il faudra, d'après l'équation précédente, qu'on ait $\varepsilon = 0$, et par conséquent $\alpha = m^\circ$; c'est aussi ce qu'on peut vérifier, d'après les équations de l'art. 115, en y faisant $\mu = \frac{1}{2}\pi$, et combinant ces équations avec celles qui, dans le cas présent, servent à déterminer α et α'.

Dans ce cas donc, l'équation de la courbe se simplifie et devient $k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$. On peut d'ailleurs s'assurer que la valeur de $\frac{d\zeta}{dt}$, qui reste indéterminée dans la formule précédente, devra être positive. En effet, puisqu'on a $\alpha = m^\circ$, la valeur de Q devient

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{M} - \mathrm{A})(q^2 - m^\circ)(q^2 + \alpha'),$$

d'où l'on voit que m° est la plus petite valeur de q; donc $\frac{dq}{dt}$ est positif, et par conséquent aussi $\frac{d\zeta}{dt}$.

128. Si l'angle μ est $< \frac{1}{2}\pi$, on ne pourra plus, comme dans les cas précédens, obtenir la solution en choisissant pour le centre F celui qui est placé du côté de l'angle $\mu > \frac{1}{2}\pi$; car l'échange qu'on ferait entre A et B, substituerait aux conditions $\mathrm{A} < \mathrm{B}mm'$, $\mathrm{B} > \mathrm{A}mm'$, des conditions différentes $\mathrm{B} < \mathrm{A}mm'$, $\mathrm{A} > \mathrm{B}mm'$, inconvénient qui ne s'est pas rencontré dans les cas précédens. Mais il y a un moyen très-simple de changer la variable ζ, pour laquelle $\frac{d\zeta}{dt}$ sera négatif, en une autre ζ', pour laquelle $\frac{d\zeta'}{dt}$ sera positif; il consiste, comme nous l'avons déjà vu, à faire $\mathrm{F}\zeta + \mathrm{F}\zeta' = \mathrm{F}'\varkappa$, $\varkappa$ étant le module commun, ce qui donnera $\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}} = -\frac{d\zeta'}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}$. Et comme

par cette supposition on a $\operatorname{tang}\zeta \operatorname{tang}\zeta' = \frac{1}{6}$, il en résulte......

$$\cos\zeta = \frac{6\sin\zeta'}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}, \text{ et } q = \frac{\sqrt{\alpha}}{6}.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}{\sin\zeta'} = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\varkappa}.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta')}}{\sin\zeta'}.$$

Soit d'ailleurs ε' la valeur de ζ' lorsque $t = 0$, ou lorsque $q^2 = m^0$, on aura $\cos\varepsilon' = \sqrt{\left(\frac{m^0 - \alpha}{m^0 + \alpha'}\right)}$.

Cela posé, on peut supprimer les accens qui affectent ζ' et ε', et la solution, pour le cas de $\mu < \frac{1}{2}\pi$, sera donnée par les formules

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) - \mathrm{F}(\varkappa, \varepsilon),$$

$$p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}, \quad q = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\varkappa}.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}, \quad \cos\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{m^0-\alpha}{m^0+\alpha'}\right)}.$$

129. Ici se termine l'examen que nous voulions faire des cas principaux du problème. Car si on avait à la fois $\mathrm{B} < \mathrm{A}mm'$ et $\mathrm{A} > \mathrm{B}mm'$, ce cas, qui suppose $\mathrm{A} > \mathrm{B}$, est entièrement semblable au troisième cas, où l'on a $\mathrm{A} < \mathrm{B}mm'$ et $\mathrm{B} > \mathrm{A}mm'$, qui suppose $\mathrm{B} > \mathrm{A}$. Ces deux cas se réduiront à un seul, en désignant constamment par F celui des deux centres où réside la moindre force. Enfin si l'on supposait pour dernière combinaison $\mathrm{A} < \mathrm{B}mm'$ et $\mathrm{B} < \mathrm{A}mm'$, ce qui rendrait négatifs le premier et le troisième terme du polynome Q, il faudrait qu'au moins le second terme fût positif, et qu'ainsi on eût $m' < m$; mais les conditions $\mathrm{A} < \mathrm{B}mm'$, $\mathrm{B} < \mathrm{A}mm'$, supposent $mm' > 1$, ou $m' > \frac{1}{m}$, ce qui ne peut s'accorder avec la condition $m' < m$. Ainsi ce cas ne peut avoir lieu.

130. Pour plus de clarté, nous joignons ici un tableau général qui contient le résultat de tous les calculs précédens. On y trouvera les formules qui servent à distinguer et à résoudre les différens cas principaux dans lesquels se divise le problème général du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes.

Tableau

Tableau général des cas principaux du Problème.

Nota. Dans les deux premiers cas, les valeurs de m et m' se déduisent des données immédiates du problème m°, V, μ, par les formules de l'art. 78; ces deux cas composent le premier système, dans lequel la courbe décrite ne peut jamais rencontrer son axe entre les centres F et G.

Dans les quatre autres cas, les valeurs de m et m' sont déduites des données m°, V, μ, par les formules de l'art. 115; ces cas composent le second système, dans lequel il y a toujours, entre les centres F et G, un ou plusieurs points d'intersection de la courbe avec l'axe; le point A, origine du mouvement, auquel se rapportent les données m°, V, μ, est un de ces points d'intersection.

Conditions et dénominations.		Équations de la courbe.
$m' < m, \quad c^2 = 1 - \frac{m'}{m},$ $\frac{m-m'}{1-mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A+B},$ $\alpha^2 = \frac{Amm'+B}{A+Bmm'}, \quad \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m+m')(A+B)}{\sqrt{(Amm'+B)}\cdot\sqrt{(A+Bmm')}}$ $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\theta, \qquad k = \sqrt{\left(\frac{4-2c^2}{1-2\varkappa^2}\right)},$ $\begin{cases}\sin^2\varepsilon = \frac{m-m^\circ}{m-m'},\\ \varepsilon \text{ de même espèce que } \pi-\mu.\end{cases}$	CAS I.	$kF(c,\psi) - kF(c,\varepsilon) = F(\varkappa,\zeta),$ $p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi),$ $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\tang\frac{1}{2}\zeta.$
Corollaire I. Si l'on a $m^\circ = m$,		$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta),\\ p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi),\\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\tang\frac{1}{2}\zeta.\end{cases}$
Corollaire II. Si l'on a $m^\circ = m'$,		$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta),\\ p^2 = \frac{m'}{1-c^2\sin^2\psi},\\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\tang\frac{1}{2}\zeta.\end{cases}$

Conditions et dénominations.	Équations de la courbe.
CAS II. $m' < m, \quad c^2 = 1 - \frac{m'}{m},$ $\frac{m-m'}{1-mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B},$ $\alpha+\alpha' = \frac{(m+m')(A+B)}{A+Bmm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{Amm'+B}{A+Bmm'},$ $\alpha > \alpha', \quad x^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad k = \sqrt{\left(\frac{2-c^2}{2-x^2}\right)},$ $\left\{\begin{array}{l} \sin^2\varepsilon = \frac{m-m^\circ}{m-m'}, \\ \varepsilon \text{ de même espèce que } \pi-\mu. \end{array}\right.$	$kF(c,\psi) - kF(c,\varepsilon) = F(x,\zeta),$ $p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi),$ $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\text{tang}\,\zeta.$
Corollaire I. Si l'on a $m^\circ = m$,	$\left\{\begin{array}{l} kF(c,\psi) = F(x,\zeta), \\ p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi), \\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\text{tang}\,\zeta. \end{array}\right.$
Corollaire II. Si l'on a $m^\circ = m'$,	$\left\{\begin{array}{l} kF(c,\psi) = F(x,\zeta), \\ p^2 = \frac{m'}{1-c^2\sin^2\psi}, \\ q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\text{tang}\,\zeta. \end{array}\right.$
CAS III. $A > Bmm', \quad B > Amm',$ $\frac{m+m'}{1+mm'} < \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}, \quad c^2 = \frac{m}{m+m'},$ $\alpha^2 = \frac{B-Amm'}{A-Bmm'}, \quad \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(m-m')(A+B)}{\sqrt{(A-Bmm')}.\sqrt{(B-Amm')}},$ $x = \sin\frac{1}{2}\theta, \quad k = \sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2x^2}\right)},$ $\left\{\begin{array}{l} \text{tang}\,\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{(\alpha m^\circ)}. \end{array}\right.$ On devra prendre pour F celui des deux centres vers lequel l'angle $\mu = $ FAH est plus grand qu'un droit.	$kF(c,\psi) = F(x,\zeta) - F(x,\varepsilon),$ $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$ $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\text{tang}\,\frac{1}{2}\zeta.$

Conditions et dénominations.	Équations de la courbe.
CAS IV. $A > Bmm'$, $B > Amm'$, $m' < m$, $\frac{m+m'}{1+mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$, $\alpha + \alpha' = \frac{(m-m')(A+B)}{A-Bmm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{B-Amm'}{A-Bmm'}$, $\alpha > \alpha'$, $\varkappa^2 = 1 - \frac{\alpha'}{\alpha}$, $k = \sqrt{\left(\frac{2c^2-1}{2-\varkappa^2}\right)}$, $\left\{\right.$ $\tang \varepsilon = \sqrt{(\alpha m^\circ)}$. On prendra pour F celui des deux centres vers lequel l'angle $\mu = \mathrm{FAH}$ est plus grand qu'un droit.	$k\mathrm{F}(c,\psi) = \mathrm{F}(\varkappa,\zeta) - \mathrm{F}(\varkappa,\varepsilon)$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\tang\zeta$.
CAS V. $A > Bmm'$, $B > Amm'$, $m' > m$, $\frac{m+m'}{1+mm'} > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$, $\alpha + \alpha' = \frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{A-Bmm'}{B-Amm'}$, $\alpha > \alpha'$, $\varkappa^2 = \frac{\alpha'}{\alpha}$, $k = \sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1+\varkappa^2}\right)}$, $\left\{\right.$ $\sin\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^\circ}\right)}$, ε de même espèce que μ.	$k\mathrm{F}(c,\psi) = \mathrm{F}(\varkappa,\zeta) - \mathrm{F}(\varkappa,\varepsilon)$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}$.
Le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$ donne $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, et les mêmes formules sont applicables. Mais l'équation de la courbe se réduira à deux termes, au moyen des formules ci-jointes.	$k\mathrm{F}(c,\psi) = \mathrm{F}(\varkappa,\zeta)$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{\alpha}.\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$.
CAS VI. $A < Bmm'$, $B > Amm'$, $c^2 = \frac{m}{m+m'}$, $\alpha - \alpha' = \frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$, $\alpha\alpha' = \frac{Bmm'-A}{B-Amm'}$, $\varkappa^2 = \frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'}$, $k = \sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1-2\varkappa^2}\right)}$, $\mu > \frac{1}{2}\pi$, $\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{\alpha}{m^\circ}}$, $\mu = \frac{1}{2}\pi$, $\varepsilon = 0$.	$k\mathrm{F}(c,\psi) = \mathrm{F}(\varkappa,\zeta) - \mathrm{F}(\varkappa,\varepsilon)$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$.

Conditions et dénominations.	Équations de la courbe.
CAS VI.	
$\mu < \frac{1}{2}\pi$, $\cos\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{m^\circ - \alpha}{m^\circ + \alpha'}\right)}$,	$\begin{cases} kF(c,\psi) = F(\varkappa,\zeta) - F(\varkappa,\varepsilon), \\ p = \frac{c\sqrt{m'}\cdot\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}, \\ q = \frac{\sqrt{\alpha'}}{\varkappa}\cdot\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}. \end{cases}$
Nota. Si l'on avait les conditions $B < Amm'$, $A > Bmm'$, il faudrait faire la permutation entre A et B, ainsi qu'entre F et G, et les formules du cas VI deviendraient applicables au cas proposé.	

Nous allons maintenant développer les solutions indiquées dans ce tableau général, en nous bornant à celles qui offrent les résultats les plus remarquables. Nous donnerons aussi, dans les cas principaux, les formules qui servent à déterminer le temps.

Développement du cas I.

131. Si la vitesse initiale et sa direction satisfont aux conditions du cas I, on connaîtra, par les formules du tableau, les modules c et $\varkappa$, ainsi que les constantes α, ε et $k = \sqrt{\left(\frac{4 - 2c^2}{1 - 2\varkappa^2}\right)}$; au moyen de toutes ces données, l'équation de l'orbite sera $kF(c,\psi) - kF(c,\varepsilon) = F(\varkappa,\zeta)$, et on aura en même temps $p^2 = m\,(1 - c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$; on pourra donc trouver tant de points qu'on voudra de l'orbite. En effet, prenant à volonté l'un des arcs ψ, ζ, qui peut comprendre plusieurs circonférences, l'autre se trouvera par la résolution de l'équation $kF(c,\psi) = kF(c,\varepsilon) + F(\varkappa,\zeta)$, où un seul terme deviendra inconnu. On connaîtra donc les valeurs de p et q; quant aux signes de ces quantités, on observera que p reste toujours positif, parce qu'il ne devient jamais zéro, ses limites étant $\sqrt{m}$ et $\sqrt{m'}$; mais que q prendra le signe qui convient à $\tang\frac{1}{2}\zeta$, suivant les valeurs indéfiniment grandes de l'arc ζ. Ensuite le point correspondant de la

courbe se trouvera, soit par les valeurs de r et s exprimées en fonctions de p et q (art. 72), soit plutôt, pour ne laisser aucune indétermination, par les valeurs des coordonnées $GP = x$, $PM = y$, lesquelles sont

$$x = \frac{a(1-p^2q^2)}{(1-p^2)(1+q^2)}, \qquad y = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}.$$

132. Puisque l'orbite dont il s'agit est renfermée toute entière dans l'espace que laissent entr'eux les périmètres des deux ellipses $p^2 = m$, $p^2 = m'$, décrites des mêmes foyers F et G; soient E et D les sommets voisins de ces ellipses, ensorte qu'on ait $m = \frac{EF}{EG}$ et $m' = \frac{DF}{DG}$, Fig. 20.
les deux autres sommets étant L et K; il est visible que l'orbite qui commence au point A ne pourra, dans ses circonvolutions, couper l'axe que dans les intervalles KL et DE. Voyons d'abord comment on détermine ces intersections, qui sont des points d'autant plus remarquables, qu'ils servent à compter les révolutions et demi-révolutions du corps dans son orbite.

A partir du point A, le premier point B^1, où la courbe rencontre son axe, se trouvera, d'après le n° 82, en faisant $q = \infty$ ou $\zeta = \pi$. Soit γ' la valeur correspondante de ψ, de sorte qu'on ait

$$F(c, \gamma') = F(c, \varepsilon) + \tfrac{2}{k} F'x;$$

supposons qu'on ait déterminé δ' par l'équation $F(c, \delta') = \frac{2}{k} F'x$, ce qui peut se faire par la méthode du n° 67, I. p., il restera à résoudre l'équation $F(c, \gamma') = F(c, \varepsilon) + F(c, \delta')$, ou simplement $F\gamma' = F\varepsilon + F\delta'$, c étant le module commun à ces fonctions; or, celle-ci se résout par les formules du n° 18, qui donnent

$$\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\gamma')} = \frac{\sqrt{(1-c^2\sin^2\delta')}\sqrt{(1-c^2\sin^2\varepsilon)} - c^2 \sin\delta' \sin\varepsilon \cos\delta' \cos\varepsilon}{1 - c^2 \sin^2\delta' \sin^2\varepsilon};$$

de là, $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2\gamma') = \frac{GB^1}{FB^1}$; ainsi le point B^1 est déterminé.

133. A partir du point B^1, l'intersection suivante, qui doit avoir lieu en un point A^1 situé sur la partie de l'axe ED, se déterminera en faisant $q = 0$ ou $\zeta = 2\pi$. Appelant donc γ'' la valeur correspon-

dante de ψ, on trouvera γ'' par la résolution de l'équation $F(c, \gamma'') = F(c, \varepsilon) + \frac{4}{k} F^1 x = F(c, \varepsilon) + 2F(c, \delta')$.

Soit δ'' l'amplitude qui donne $F(c, \delta'') = 2F(c, \delta')$, δ'' pourra se déduire trigonométriquement de δ', par les formules de la duplication des fonctions; ensuite il faudra résoudre l'équation $F\gamma'' = F\varepsilon + F\delta''$, et on en déduira une valeur de $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \gamma'')}$ pareille à celle que nous avons trouvée dans l'article précédent.

134. En général, soient B^1, B^2, B^3, etc., les intersections successives qui ont lieu du côté du centre G; soient A^1, A^2, A^3, etc., celles qui ont lieu du côté de F; les valeurs de ζ et ψ correspondantes à ces différens points, suivant l'ordre avec lequel ils se succèdent dans le mouvement du corps, pourront se désigner comme il suit, en y joignant les auxiliaires δ', δ'', δ''', etc.

Intersections.....	$B^1, A^1, B^2, A^2, B^3, A^3, B^4$, etc.,
ζ...............	$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$, etc.,
Auxiliaires.......	$\delta', \delta'', \delta''', \delta^{\text{iv}}, \delta^5, \delta^6, \delta^7$, etc.,
ψ...............	$\gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma^{\text{iv}}, \gamma^5, \gamma^6, \gamma^7$, etc.

Ayant donc déterminé la première auxiliaire δ' avec toute l'exactitude nécessaire, par l'équation $F(c, \delta') = \frac{2}{k} F^1 x$, on déterminera les suivantes, δ'', δ''', δ^{iv}, etc., par les formules connues pour la multiplication de la fonction $F(c, \delta')$ ou $F\delta'$, de manière qu'on ait

$$F\delta'' = 2F\delta', \; F\delta''' = 3F\delta', \; F\delta^{\text{iv}} = 4F\delta', \text{ etc.}$$

Cela posé, chaque valeur de γ se déduira du δ correspondant, en résolvant l'équation $F\gamma = F\delta + F\varepsilon$, dans laquelle γ et δ prendront un même nombre d'accens, tandis que ε reste toujours le même; or, la résolution de cette équation donne en général

$$\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \gamma)} = \frac{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \delta)} \cdot \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varepsilon)} - c^2 \sin \varepsilon \sin \delta \cos \varepsilon \cos \delta}{1 - c^2 \sin^2 \varepsilon \sin^2 \delta}.$$

On connaîtra ainsi la valeur de $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \gamma)$, laquelle étant égale à $\frac{GB^n}{FB^n}$ ou à $\frac{FA^n}{GA^n}$, déterminera le point d'intersection correspondant B^n ou A^n.

Les points B^1, B^2, B^3, etc., sont ceux où le corps termine la 1re, la 3e, la 5e, etc., demi-révolution; les points A^1, A^2, A^3, etc., sont ceux où il termine la 1re, la 2e, la 3e, etc., révolution. Ces points seront tous différens les uns des autres, dans chaque série, si la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$ est irrationnelle; mais si cette quantité est rationnelle, le corps reviendra, après un certain nombre de révolutions, au point A, d'où il était parti, et la même période de mouvement se renouvellera à l'infini.

En effet, le corps reviendra au point A, si l'on peut faire à la fois $\zeta = 2i\pi$ et $\psi = e\pi + \varepsilon$, i et e étant des nombres entiers. Ces valeurs étant substituées dans l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(x, \zeta)$, on en tire $2keF'c = 4iF'x$, ou $\frac{kF'c}{2F'x} = \frac{i}{e}$. Donc si la quantité $\frac{kF'c}{2F'x}$ est un nombre rationnel $\frac{i}{e}$, le corps reviendra au point de départ A, après une période composée de i révolutions, ce qui résulte de la valeur $\zeta = 2i\pi$. En revenant ainsi au même point, on voit, par l'équation (1), que le corps aura la même vîtesse qu'à l'origine du mouvement; mais cette vîtesse sera-t-elle dirigée dans le même sens? c'est ce qu'il faut examiner.

135. En général, quel que soit l'état initial du mouvement, si le corps passe deux fois par un même point M de son orbite, sa vîtesse en ce point sera égale dans les deux cas, et la direction de cette vîtesse devra faire un angle égal, dans un sens ou dans l'autre, avec la droite MQ, qui divise en deux parties égales l'angle FMG. Fig. 13.

En effet, il résulte des équations (1) et (2), que si on désigne par dz l'élément de la courbe, la valeur de $\frac{dz^2}{dt^2}$ et celle de $\frac{rd\varphi}{dz} \cdot \frac{sd\omega}{dz}$, seront les mêmes dans les deux passages du corps par le point M. La première quantité est le carré de la vîtesse; donc la vîtesse est égale dans les deux cas; la seconde représente le produit $\sin TMF \cdot \sin TMG$, ou $\frac{1}{2}\cos FMG - \frac{1}{2}\cos 2TMQ$, MQ étant la droite qui divise en deux également l'angle FMG. Donc si TM est la tangente de l'orbite au premier passage, la tangente de l'orbite, au second passage, sera nécessairement l'une des deux droites TM, T'M, également inclinées sur MQ.

Le point M devient un point double, lorsque l'orbite a deux tangentes différentes TM, T'M; jamais il n'y aura de point triple, car il est impossible que trois tangentes différentes donnent une même valeur pour le produit sin TMF. sin TMG.

136. On voit maintenant que si $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est rationnelle, et qu'en conséquence on puisse faire $\psi = e\pi + \varepsilon$ et $\zeta = 2i\pi$, ce qui ramène le corps, après un nombre i de révolutions, au point A d'où il était parti, il aura en ce point la même vîtesse V qu'au point de départ, et la direction de cette vîtesse devra être également inclinée, dans un sens ou dans l'autre, avec l'axe FG; c'est-à-dire que l'angle EAH, qui est μ au point A dans l'état initial du mouvement, ne pourra être que μ ou $\pi - \mu$, lorsque le corps sera revenu au point A. Mais par la valeur de $\frac{d\psi}{dt}$ (art. 109), on voit que $\frac{d\psi}{dt}$ ne pourrait continuer d'être positive, si à la place de μ on mettait $\pi - \mu$, puisque d'ailleurs l'angle ε reste toujours le même. Donc le corps A revenu au point A après un nombre i de révolutions, aura en ce point la même vîtesse et la même direction qu'au commencement du mouvement; ainsi cette période de i révolutions devra se répéter à l'infini.

137. Si au contraire la quantité $\frac{kF'c}{F'\varkappa}$ est irrationnelle, l'orbite, composée d'une infinité de circonvolutions toutes différentes les unes des autres, devra remplir tout l'espace renfermé entre les périmètres des deux ellipses $p^2 = m$, $p^2 = m'$; de sorte qu'il n'y aura aucun point de cet espace qui ne soit un point de l'orbite, ou qui n'en soit infiniment peu distant. Il faut excepter seulement le cas de $m' = 0$, qui donne lieu à une figure particulière.

Cette propriété n'est qu'une conséquence fort simple des considérations précédentes; mais on peut la démontrer directement au moyen de l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \varepsilon) = F(\varkappa, \zeta)$, qui doit satisfaire à tous les points de l'orbite. En effet, supposons que pour un point déterminé M, compris entre les deux ellipses qui limitent l'orbite, on ait $p^2 = m\,(1 - c^2 \sin^2 \psi^\circ)$ et $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang \frac{1}{2} \zeta^\circ$; si l'on satisfait à l'équation l'équation $k\mathrm{F}(c,\psi)-k\mathrm{F}(c,\varepsilon)=\mathrm{F}(x,\zeta)$, en faisant $\psi=\psi^\circ$ et $\zeta=\zeta^\circ$, il s'ensuivra que le point M est un point de l'orbite. Supposons donc qu'il existe une différence quelconque entre les quantités $k\mathrm{F}(c,\psi^\circ)-k\mathrm{F}(c,\varepsilon)$ et $\mathrm{F}(x,\zeta^\circ)$; je dis qu'on pourra néanmoins satisfaire à l'équation $k\mathrm{F}(c,\psi)-k\mathrm{F}(c,\varepsilon)=\mathrm{F}(x,\zeta)$, dans un point de l'orbite dont la distance au point M sera plus petite que toute quantité donnée.

Pour cet effet, soit $\psi=\pi x+\psi^\circ$, et $\zeta=2\pi y+\zeta^\circ$ (x et y étant des entiers quelconques); le point déterminé par ces valeurs sera toujours le point M, quels que soient les entiers x et y. Pour qu'il soit en même temps un point de l'orbite, il faut qu'on ait

$$k[2x\mathrm{F}'c+\mathrm{F}(c,\psi^\circ)-\mathrm{F}(c,\varepsilon)]=4y\mathrm{F}'x+\mathrm{F}(x,\zeta^\circ),$$

ce qui donne $\mathrm{L}x-\mathrm{M}y=\mathrm{N}$, en faisant, pour abréger, $\mathrm{L}=k\mathrm{F}'c$, $\mathrm{M}=2\mathrm{F}'x$, $\mathrm{N}=\frac{1}{2}k\mathrm{F}(c,\varepsilon)-\frac{1}{2}k\mathrm{F}(c,\psi^\circ)+\frac{1}{2}\mathrm{F}(x,\zeta^\circ)$. Or, en prenant les entiers x et y suffisamment grands, il sera toujours possible de satisfaire à l'équation $\mathrm{L}x-\mathrm{M}y=\mathrm{N}$, de manière que la différence des deux membres soit plus petite que toute quantité donnée. Car soit pris à volonté $y=b'$, b' étant un entier, et soit $\frac{\mathrm{M}b'+\mathrm{N}}{\mathrm{L}}=a'+\delta$, a' étant un entier, et δ un reste plus petit que l'unité; si l'on fait $x=a'$, on aura $\mathrm{L}x-\mathrm{M}y=\mathrm{N}-\mathrm{L}\delta$. Supposons qu'en réduisant la quantité irrationnelle $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$ en fraction continue, et prolongeant le calcul jusqu'à un terme assez éloigné, on ait $\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{M}'}$ pour la dernière fraction convergente vers $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$, on aura, par les propriétés connues de ces fractions, $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}-\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{M}'}=\frac{\delta'}{\mathrm{M}'^2}$, δ' étant une quantité positive ou négative plus petite que l'unité, d'où résultera $\mathrm{LM}'-\mathrm{L}'\mathrm{M}=\frac{\delta'\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}$. Soit maintenant $x=a'+\mathrm{M}'z$, $y=b'+\mathrm{L}'z$, on aura $\mathrm{L}x-\mathrm{M}y=\mathrm{N}-\mathrm{L}\delta+\frac{\delta'\mathrm{M}z}{\mathrm{M}'}=\mathrm{N}+\frac{\delta'\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}\left(z-\frac{\delta\mathrm{LM}'}{\delta'\mathrm{M}}\right)$; soit donc $\frac{\delta\mathrm{LM}'}{\delta'\mathrm{M}}=c'+\delta''$, c' étant un entier, et δ'' un reste plus petit que l'unité; si l'on fait $z=c'$, ce qui donne $x=a'+c'\mathrm{M}'$, $y=b'+c'\mathrm{L}'$, on aura $\mathrm{L}x-\mathrm{M}y=\mathrm{N}-\frac{\delta'\delta''\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}$. Ainsi, l'équation proposée $\mathrm{L}x-\mathrm{M}y=\mathrm{N}$ sera résolue; de manière que l'erreur ou la différence entre les deux membres ne sera que $\frac{\delta'\delta''M}{M'}$, quantité moindre que $\frac{M}{M'}$. Or, le dénominateur M' donné par le développement d'une quantité irrationnelle $\frac{L}{M}$ en fraction continue, sera aussi grand qu'on voudra; donc l'erreur dont il s'agit pourra être rendue moindre que toute quantité donnée.

138. Après avoir déterminé les différens points d'intersection de la courbe avec l'axe, il importe de déterminer avec la même précision les absides tant supérieures qu'inférieures, c'est-à-dire les points où l'orbite est tangente aux ellipses terminatrices $p^2 = m$, $p^2 = m'$; car la connaissance de ces points, jointe à celle des intersections de la courbe avec l'axe, contribuera beaucoup à donner une idée exacte de la figure de cette courbe.

Puisqu'on a, au commencement du mouvement, $\psi = \varepsilon$, ε étant moindre que 180°, on voit, d'après l'équation $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2\psi)$, que la première abside rencontrée par le corps sera une abside inférieure si l'on a $\varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, et une abside supérieure si l'on a $\varepsilon > \frac{1}{2}\pi$. En général, si l'on désigne par S^1, S^2, S^3, etc., les absides supérieures, et par I^1, I^2, I^3, I^4, etc., les absides inférieures, auxquelles le corps parvient successivement à partir du point A, ces points se détermineront en donnant à ψ les valeurs successives, savoir :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour le point.....} & I^1,\ S^1,\ I^2,\ S^2,\ I^3,\ S^3,\ I^4,\ S^4, \text{ etc.,} \\ \psi \ldots\ldots\ldots = & \tfrac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \tfrac{3}{2}\pi;\ 2\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \tfrac{7}{2}\pi,\ 4\pi, \text{ etc.} \end{array}$$

Il faudra donc calculer les valeurs correspondantes de ζ, en observant que le premier point I^1 doit être omis, comme se rapportant à une époque antérieure à l'origine du mouvement, si l'on a $\varepsilon > \frac{1}{2}\pi$. Il n'en est pas moins nécessaire de calculer dans tous les cas la valeur de ζ qui répond au point I, parce que cette valeur, une fois connue avec toute la précision nécessaire, sert à calculer trigonométriquement les valeurs de ζ qui répondent aux autres points I et S.

En faisant $\psi = \frac{1}{2}\pi$, on aura à résoudre l'équation $kF^1c - kF(c, \varepsilon) = F(x, \zeta)$; en faisant $\psi = \pi$, on aurait à résoudre l'équation $2kF^1c - kF(c, \varepsilon) = F(x, \zeta)$, ainsi des autres. Pour obtenir une plus grande uniformité dans la résolution de ces équations, supposons qu'on ait déterminé η et δ' par les équations $F(x, \eta) = kF(c, \varepsilon)$, $F(x, \delta') = kF^{1}c$; connaissant l'auxiliaire δ', on déterminera les auxiliaires suivantes δ'', δ''', δ^{IV}, etc., de manière qu'on ait

$$F\delta'' = 2F\delta', \quad F\delta''' = 3F\delta', \quad F\delta^{\text{IV}} = 4F\delta', \text{ etc.},$$

x étant le module commun à ces fonctions.

Cela posé, si l'on appelle λ', λ'', λ''', λ^{IV}, etc., les valeurs de ζ qui répondent aux valeurs successives $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, etc., ces quantités seront déterminées par les équations suivantes, où x est le module commun des fonctions :

$$\begin{aligned} F\lambda' &= F\delta' - F\eta, \\ F\lambda'' &= F\delta'' - F\eta, \\ F\lambda''' &= F\delta''' - F\eta, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ces équations étant toutes de la même forme, il suffira de résoudre l'équation générale $F\lambda = F\delta - F\eta$, d'où l'on tire, par les formules de l'art. 19, I^re p.,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{\sin\delta\cos\eta\,\sqrt{(1-x^2\sin^2\eta)} - \sin\eta\,\cos\delta\,\sqrt{(1-x^2\sin^2\delta)}}{1+\cos\delta\cos\eta - x^2\sin^2\delta\sin^2\eta + \sin\delta\sin\eta\sqrt{(1-x^2\sin^2\eta)}.\sqrt{(1-x^2\sin^2\delta)}}.$$

Par cette formule, où l'on donnera à δ et λ un même nombre d'accens, on connaîtra les valeurs successives λ', λ'', λ''', λ^{IV}, λ^{V}, λ^{6}, etc.; ensuite les absides inférieures I^1, I^2, I^3, I^4, etc., seront déterminées par la valeur constante $p^2 = m'$ combinée avec les valeurs successives $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda'$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda'''$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda^{\text{V}}$, etc.; et les absides supérieures S^1, S^2, S^3, S^4, etc., seront déterminées par la valeur constante $p^2 = m$ combinée avec les valeurs successives $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda''$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda^{\text{IV}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda^{\text{VI}}$, etc.

Ainsi, la série finie ou infinie des absides, tant supérieures qu'inférieures, peut être déterminée par de simples formules trigonométriques, dès qu'une fois on a calculé avec la précision nécessaire, les deux quantités η et δ'. Au reste, cette série sera finie si la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$ est rationnelle, et elle sera infinie dans le cas contraire. Dans le premier cas sont compris tous ceux où l'orbite est une courbe algébrique.

139. Il ne sera pas inutile de chercher dans quels cas l'orbite peut avoir une abside supérieure ou inférieure située sur l'axe EFGL; car dans ces cas, l'équation de la courbe se réduira à deux termes, en prenant cette abside pour l'origine du mouvement; et alors on a les formules qui répondent à l'un des corollaires I et II du cas I, dans le tableau général.

Lorsque la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$ est irrationnelle, la courbe passe exactement, ou à un infiniment petit près, par tous les points de l'axe EL non situés entre F et G; ainsi on peut placer indifféremment l'origine du mouvement, soit dans une abside supérieure au point E ou au point L, soit dans une abside inférieure au point D ou K; et on remplira également des deux manières le but qu'on peut avoir de réduire l'équation de la courbe à la forme la plus simple, telle que la donnent les corollaires I et II du cas I.

Il n'en est pas de même si la quantité $\frac{kF'c}{F'x}$ est rationnelle et représentée par $\frac{2i}{e}$; car ce n'est que dans un petit nombre de cas que l'orbite pourra avoir une abside située sur l'axe.

En effet, s'il y a une abside supérieure ou inférieure située sur l'axe, il faut qu'on puisse avoir à la fois $\psi = \frac{\pi}{2} n$, et $\zeta = \pi n'$, n et n' étant des entiers. Substituant ces valeurs dans l'équation $kF(c, \psi) - kF(c, \epsilon) = F(x, \zeta)$, il en résulte la condition

$$\frac{F'(c, \epsilon)}{F'c} = n - \frac{en'}{i}.$$

Ainsi, il n'y aura d'abside sur l'axe qu'autant que $\frac{F(c, \epsilon)}{F'c}$ sera une fraction rationnelle, qui a pour dénominateur i ou un diviseur de i. Si cette condition a lieu, on pourra prendre pour équations du mouvement celles qui appartiennent à l'un des corollaires I et II; dans le cas contraire, cette réduction ne pourra avoir lieu.

On voit, par là, que la solution du problème donnée par les formules du cas I aurait perdu beaucoup de sa généralité, si l'on avait supposé qu'au point A, origine du mouvement, l'angle μ est droit, ce qui revient à supposer que le point A est une abside supérieure ou inférieure.

140. Il reste à trouver l'expression générale du temps employé à parcourir un arc quelconque de l'orbite. Pour cela, il faut recourir à la formule (4), où l'on voit que le temps est composé de deux parties toujours additives, l'une, fonction de p ou de ψ; l'autre, fonction de q ou de ζ. Nous allons chercher successivement ces deux parties.

Désignant la première par t', il faudra, dans l'équation $\frac{dt'}{a\sqrt{2a}} = -\frac{p^2}{(1-p^2)^2} \cdot \frac{dp}{\sqrt{P}}$, substituer les valeurs trouvées $p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi)$, $-\frac{dp}{\sqrt{P}} = \sqrt{\left(\frac{1-mm'}{mA+mB}\right)} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, et on aura la formule à intégrer

$$dt = D \cdot \frac{d\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}{(1+n\sin^2\psi)^2},$$

où l'on a fait, pour abréger, $n = \frac{mc^2}{1-m} = \frac{m-m'}{1-m}$, $D = \frac{a\sqrt{2am}}{(1-m)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+B}\right)}$.

Soit $Z(\psi) = \int \frac{\Delta d\psi}{(1+n\sin^2\psi)^2}$, Δ étant mis pour $\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}$, on aura, par les réductions connues,

$$2(1+n)\,Z(\psi) = \frac{n\Delta\sin\psi\cos\psi}{1+n\sin^2\psi} + E(c,\psi) - \left(1+\frac{c^2}{n}\right)F(c,\psi) + \left(2+n+\frac{c^2}{n}\right)\Pi(n,c,\psi).$$

Lorsque $\psi = \frac{1}{2}\pi$, l'intégrale $Z(\psi)$ devenant Z^1, on aura

$$2(1+n)\,Z^1 = E^1c - \left(1+\frac{c^2}{n}\right)F^1c + \left(2+n+\frac{c^2}{n}\right)\Pi^1(n,c).$$

Soit $n = \cot^2\lambda$, on aura, par la formule de l'art. 96, I^{re} p.,

$$\frac{\Delta(b,\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda}\left[\Pi^1(n,c) - \sin^2\lambda F^1c\right] = \tfrac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)F(b,\lambda) - F^1cE(b,\lambda).$$

Donc en faisant, pour abréger, $K = \frac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)\,F(b,\lambda) - F^1cE(b,\lambda)$, on aura

$$Z^1 = \tfrac{1}{2}\sin^2\lambda\left(E^1c + b^2\sin^2\lambda\, F^1c + \frac{m+\sin^2\lambda}{\sqrt{m}\,.\sin\lambda}K\right).$$

141. Il résulte de ces calculs, que pour une valeur quelconque de ψ, on aura t' ou

$$t'(\psi) = \frac{a\sqrt{(2am)}}{(1-m)^2}\sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+B}\right)}\,.\,Z(\psi) = DZ(\psi);$$

et pour la valeur déterminée $\psi = \frac{1}{2}\pi$, t' devenant T', on aura

$$T' = \frac{a\sqrt{(2am)}}{(1-m)^2}\sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+B}\right)}\,.\,Z^1 = DZ^1.$$

Donc, si l'on a en général $\psi = I\pi + \psi'$, I étant un entier quelconque, et ψ' un arc positif ou négatif moindre que $\frac{1}{2}\pi$, la valeur correspondante de t' ou $t'(\psi)$ sera

$$t'(\psi) = 2IT' + t'(\psi'),$$

$t'(\psi')$ désignant la valeur de t' qui répond à l'amplitude ψ', et qui est du même signe que ψ'; cette quantité sera toujours moindre que T', et pourra être évaluée avec tel degré d'approximation qu'on voudra, par les formules que nous avons données pour cet objet.

On voit donc que la valeur de t', pour une amplitude ψ composée de tant de circonférences qu'on voudra, se détermine en supposant connue la valeur de cette quantité pour toute amplitude non plus grande que $\frac{1}{2}\pi$. Si la quantité $c\sin\psi'$ est assez petite pour qu'on puisse prendre $1 - \frac{1}{4}c^2\sin^2\psi'$ pour $\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi')}$, la valeur de $t'(\psi')$ se trouvera très-simplement par la formule suivante, où l'on a pris un angle auxiliaire Ω tel que $\tang\Omega = \frac{\tang\psi}{\sin\lambda}$:

$$t'(\psi') = \tfrac{1}{2}D\sin\lambda\,[\Omega + \tfrac{1}{2}\sin 2\Omega + (1 - \tfrac{1}{2}c^2)\sin^2\lambda\,(\Omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\Omega)].$$

Ces formules supposent le temps compté depuis $\psi = 0$; mais comme au commencement du mouvement on a $\psi = \varepsilon$, il faut regarder l'époque où $\psi = 0$ comme antérieure à celle où $\psi = \varepsilon$, et en conséquence retrancher du temps trouvé pour une valeur quelconque de ψ, la quantité constante $t'(\varepsilon)$, qu'on déterminera par les mêmes formules.

142. Pour avoir l'autre partie du temps, il faut, dans la formule $\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, substituer les valeurs $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\zeta$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-mm'}{A+Bmm'}\right)} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-x^2 \sin^2\zeta)}}$, ce qui donnera

$$t = \frac{a\sqrt{(\frac{1}{2}a\alpha)} \cdot \sqrt{(1-mm')}}{\sqrt{(A+Bmm')}} \int \frac{d\zeta \sin^2\zeta}{[\alpha+1+(\alpha-1)\cos\zeta]^2 \sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}.$$

Pour obtenir cette intégrale, il faut la partager en deux parties $t''+t'''$, dont les valeurs seront, en faisant $\alpha = \cot^2 \frac{1}{2}\eta$, $\nu = \cot^2\eta$,

$$D' = \frac{a}{4}\sqrt{\left(\frac{a}{2\alpha} \cdot \frac{1-mm'}{A+Bmm'}\right)} = \frac{a}{4k}\sqrt{\left(\frac{2a}{m} \cdot \frac{1-mm'}{A+B}\right)},$$

$$t'' = D'U(\zeta), \quad U(\zeta) = \int \frac{(1+2\nu-\nu\sin^2\zeta)\,d\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}},$$

$$t''' = -D'W(\zeta), W(\zeta) = \frac{2\cos\eta}{\sin^2\eta}\int \frac{d\zeta \cos\zeta \sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}.$$

Soit ζ un arc moindre que $\frac{1}{2}\pi$, tel qu'on ait $\operatorname{tang}\zeta = \frac{\sin\zeta\sqrt{(x^2+\nu)}}{\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}$, ou $\sin\zeta = \frac{\sin\xi}{\sqrt{(x^2+\nu\cos^2\xi)}}$, on aura, en faisant $b^2 = 1 - x^2$,

$$W(\zeta) = \frac{\sin\eta\cos\eta}{(1-b^2\sin^2\eta)^{\frac{3}{2}}}(\xi - \sin\xi\cos\xi).$$

Cette quantité est nulle, lorsque ζ est un multiple de π; elle est à son *maximum* positif ou négatif, lorsque ζ est un multiple impair de $\frac{1}{2}\pi$. En général, il suffira de connaître la fonction $W(\zeta)$ depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, car on a $W(\zeta) = W(\pi-\zeta)$ et $W(\pi+\zeta) = -W(\zeta)$.

143. Quant à la valeur de l'intégrale U ou $U(\zeta)$, on trouvera, par les formules connues, en faisant $\Delta = \sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}$,

$$(1-b^2\sin^2\eta)U(\zeta) = -\frac{\Delta\sin\zeta\cos\zeta\cos^2\eta}{1+\nu\sin^2\zeta} - \sin^2\eta\, E(x,\zeta) + \Pi(\nu,x,\zeta).$$

Soit U^1 la valeur de $U(\zeta)$ lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$(1-b^2\sin^2\eta)U^1 = -\sin^2\eta\, E^1x + \Pi^1(\nu,x).$$

D'ailleurs, par la formule du n° 96, Ire p., on trouve

$$\frac{(1-\mathcal{C}^2\sin^2\eta)^{\frac{1}{2}}}{\sin\eta\cos\eta}\left[\Pi^1(\nu, x)-\sin^2\eta\, F^1 x\right]=\tfrac{1}{2}\pi+(F^1x-E^1x)\,F(\mathcal{C},\eta)$$
$$-F^1x\,E(\mathcal{C},\eta).$$

Donc, si l'on fait pour abréger, $H=\frac{1}{2}\pi+(F^1x-E^1x)\,F(\mathcal{C},\eta)-F^1x\,E(\mathcal{C},\eta)$, on aura

$$(1-\mathcal{C}^2\sin^2\eta)\,U^1=\sin^2\eta\,(F^1x-E^1x)+\frac{\sin\eta\cos\eta}{\sqrt{(1-\mathcal{C}^2\sin^2\eta)}}\cdot H.$$

144. Cela posé, soit $\zeta=L\pi+\zeta'$, L étant un nombre entier, et ζ' un arc positif ou négatif moindre que $\frac{1}{2}\pi$, on aura le temps correspondant $t''+t'''$, par les formules

$$t''=D'\left[2LU^1+U(\zeta')\right],$$
$$t'''=-D'\cos L\pi\,.\,W(\zeta').$$

Soit T'' la valeur de t'' qui répond à $\zeta=\frac{1}{2}\pi$, savoir, $T''=D'U^1$, on aura plus simplement

$$t''=2LT'''+D'U(\zeta').$$

145. Etant donnée la valeur $\zeta=L\pi+\zeta'$, comme dans l'article précédent, si l'on veut avoir le temps total du mouvement, il faudra chercher la valeur de ψ correspondante, afin d'en déduire la première partie du temps désignée par t'. Soit donc, comme ci-dessus, $\psi=I\pi+\psi'$, I étant un entier, et ψ' un arc $<\frac{1}{2}\pi$; substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe $kF(c,\psi)-kF(c,\varepsilon)=F(x,\zeta)$, on aura

$$2I+\frac{F(c,\psi')}{F^1c}=\frac{2LF^1x+F(x,\zeta')+kF(c,\varepsilon)}{kF^1c}.$$

Le second membre étant un nombre connu, on connaîtra l'entier pair 2I, qui en approche le plus; on connaîtra en même temps la valeur et le signe de la partie $\frac{F(c,\psi')}{F^1c}$; ainsi, il ne restera à résoudre que l'équation $F(c,\psi')=k'F^1c$, dans laquelle k' sera un nombre donné plus petit que l'unité. Or, cette équation peut être résolue avec tel degré de précision qu'on voudra, par la méthode du n° 67, Ire p.

146.

146. Ayant donc à la fois $\psi = \mathrm{I}\pi + \psi'$, $\zeta = \mathrm{L}\pi + \zeta'$, on trouvera, par les formules précédentes, les différentes parties du temps, savoir:

$$t' = 2\mathrm{IT}' + t'(\psi'),$$
$$t'' = 2\mathrm{LT}'' + t''(\zeta'),$$
$$t''' = -\mathrm{D}' \cos \mathrm{L}\pi \,.\, \mathrm{W}(\zeta'),$$

où il faut observer que les fonctions $t'(\psi')$, $t''(\zeta')$, $\mathrm{W}(\zeta')$, prennent le même signe que les variables ψ' et ζ', dont elles dépendent. De là résulte le temps cherché

$$t = 2\mathrm{IT}' + 2\mathrm{LT}'' + t'(\psi') + t''(\zeta') - \mathrm{D}' \cos \mathrm{L}\pi \,.\, \mathrm{W}(\zeta') - t'(\varepsilon).$$

147. Si l'on fait $\zeta = 2\mathrm{N}\pi$, ou si l'on suppose que le corps a achevé un nombre N de révolutions, on aura $\mathrm{L} = 2\mathrm{N}$, $\zeta' = 0$, ce qui donnera

$$t = 2\mathrm{IT}' + 4\mathrm{NT}'' + t'(\psi') - t'(\varepsilon).$$

Mais dans ce même cas on a $2\mathrm{I} + \frac{\mathrm{F}(c,\, \psi')}{\mathrm{F}'c} = \frac{4\mathrm{NF}'\varkappa + k\mathrm{F}(c,\, \varepsilon)}{k\mathrm{F}'c}$; donc

$$t = 4\mathrm{N}\left(\mathrm{T}'' + \frac{\mathrm{T}'\mathrm{F}'\varkappa}{k\mathrm{F}'c}\right) + \mathrm{T}'\left(\frac{\mathrm{F}(c,\, \varepsilon)}{\mathrm{F}'c} - \frac{\mathrm{F}(c,\, \psi')}{\mathrm{F}'c}\right) + t'(\psi') - t'(\varepsilon).$$

Désignons par τ la durée moyenne d'une révolution $\frac{t}{\mathrm{N}}$, nous aurons

$$\tau = 4\mathrm{T}'' + 4\mathrm{T}' \,.\, \frac{\mathrm{F}'\varkappa}{k\mathrm{F}'c} + \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{N}}\left(\frac{\mathrm{F}(c,\, \varepsilon)}{\mathrm{F}'c} - \frac{t'(\varepsilon)}{\mathrm{T}'}\right) + \frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{N}}\left(\frac{t'(\psi')}{\mathrm{T}'} - \frac{\mathrm{F}(c,\, \psi')}{\mathrm{F}'c}\right);$$

or, les quantités $\frac{\mathrm{F}(c,\, \varepsilon)}{\mathrm{F}'c}$, $\frac{t'\varepsilon}{\mathrm{T}'}$ sont plus petites que deux unités, et presqu'égales entr'elles; de même les quantités $\frac{t'(\psi')}{\mathrm{T}'}$, $\frac{\mathrm{F}(c,\, \psi')}{\mathrm{F}'c}$ sont plus petites que l'unité, et presqu'égales entr'elles; donc le temps moyen d'une révolution approchera de plus en plus d'être égal à la limite $4\mathrm{T}'' + 4\mathrm{T}' \,.\, \frac{\mathrm{F}'\varkappa}{k\mathrm{F}'c}$. Il sera exactement égal à cette limite, lorsque $\frac{k\mathrm{F}'c}{\mathrm{F}'\varkappa}$ sera rationnel, et que le temps comprendra une ou plusieurs périodes entières.

148. Supposons maintenant qu'on veuille résoudre le problème

54

inverse, qui consiste à déterminer la position du corps au bout d'un temps donné $\mathfrak{C}$ aussi grand qu'on voudra. On prendra, comme dans l'article précédent, la limite $\tau = 4T'' + 4T' \cdot \frac{F^1 x}{kF^1 c}$; et parce que le quotient $\frac{\mathfrak{C}}{\tau}$ doit indiquer à très-peu près le nombre de révolutions faites dans le temps $\mathfrak{C}$, on pourra prendre pour première hypothèse $\zeta = 2\pi \cdot \frac{\mathfrak{C}}{\tau}$, et on calculera la valeur correspondante de t.

Soit cette valeur $t = \mathfrak{C} + d$, la différence d fera connaître par son signe le sens dans lequel la première valeur de ζ doit être rectifiée; et comme un temps d répond à peu près à une partie $\frac{d}{\tau}$ de révolution, il est clair qu'on devra prendre pour seconde hypothèse $\zeta = 2\pi \cdot \frac{\mathfrak{C} - d}{\tau}$.

Avec cette valeur, on calculera le temps correspondant, lequel sera exprimé par $\mathfrak{C} + d'$, d' étant une quantité beaucoup plus petite que d. Désignant donc par ζ_1 la valeur prise pour ζ dans la seconde hypothèse, on aura la valeur corrigée $\zeta = \zeta_1 - 2\pi \cdot \frac{d'}{\tau}$, laquelle devra suffire pour la solution du problème, à moins qu'on ne veuille obtenir une approximation encore plus grande, en ayant recours à une troisième hypothèse.

Des courbes algébriques qui satisfont aux formules du cas I.

149. Si l'on fait $F(c, \psi) - F(c, \varepsilon) = F(c, z)$, ou simplement $F\psi - F\varepsilon = Fz$, l'équation de l'orbite se réduit, en général, à la forme

$$kF(c, z) = F(x, \zeta);$$

et pour construire la courbe, on aura toujours les équations... $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tan \frac{1}{2}\zeta$; mais il faudra exprimer p en fonction de z, ce qui se fera en tirant de l'équation $F\psi - F\varepsilon = Fz$, la valeur de $\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \psi)}$, ou $\Delta(\psi)$, par les formules du n° 18, I^re p., on aura ainsi

$$\frac{p}{\sqrt{m}} = \frac{\Delta(\varepsilon)\Delta(z) - c^2 \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin z \cos z}{1 - c^2 \sin^2\varepsilon \sin^2 z}.$$

150. Nous allons faire voir maintenant comment on peut trouver tant de courbes algébriques qu'on voudra qui satisfassent à l'équation $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(x, \zeta)$. Ces courbes auront généralement la propriété de rentrer sur elles-mêmes, après une période composée d'un certain nombre de révolutions ; de sorte qu'il suffira de calculer le mouvement du corps pendant une seule période, pour connaître et déterminer le mouvement au bout du temps quelconque.

Nous avons déjà remarqué que si l'orbite rentre sur elle-même après un certain nombre de révolutions, la quantité $\frac{k\mathrm{F}'c}{\mathrm{F}'x}$ doit être rationnelle. Cette condition aura donc lieu généralement dans toutes les courbes algébriques que nous allons déterminer ; mais elle pourrait avoir lieu aussi dans une infinité d'autres courbes qui ne seraient pas algébriques.

Ce n'est que par des suppositions particulières sur la valeur de la vîtesse initiale, ou sur celle de quelques-unes des autres données du problème, qu'on parvient à obtenir des courbes algébriques ; mais les résultats de ce genre ont encore une telle généralité, que non-seulement le nombre des courbes algébriques qui peuvent satisfaire au problème dans le seul cas I est infini, mais que l'on peut former une infinité de systèmes différens qui y satisferont également, et dont chacun comprendra un nombre infini de courbes algébriques des formes les plus variées et les plus bizarres.

151. Soit d'abord $x = c$, et k ou $\sqrt{\left(\frac{4 - 2c^2}{1 - 2c^2}\right)} = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une fraction rationnelle ; on aura, en supposant $i > 2e$,

$$c^2 = \frac{i^2 - 4e^2}{2i^2 - 2e^2};$$

et l'équation $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(x, \zeta)$ deviendra $i\mathrm{F}(c, z) = e\mathrm{F}(c, \zeta)$, ou simplement $i\mathrm{F}z = e\mathrm{F}\zeta$, c étant le module commun à ces deux fonctions.

Par les propriétés connues des fonctions F, on pourra toujours remplacer l'équation transcendante $i\mathrm{F}(c, z) = e\mathrm{F}(x, \zeta)$, par une équation algébrique équivalente ; et si l'on combine cette équation avec les valeurs de x et y exprimées en fonctions de p et q, qui elles-mêmes s'expriment trigonométriquement au moyen des arcs z et ζ, on aura l'équation cherchée de la trajectoire. Mais il sera toujours plus simple de ne point faire d'élimination, et de construire la courbe par le moyen de l'équation $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$, qui fera connaître tant de valeurs correspondantes qu'on voudra des variables z et ζ, et par conséquent tant de points qu'on voudra de cette courbe.

152. En donnant à $\frac{i}{e}$ une valeur rationnelle quelconque, plus grande que deux unités, on connaîtra la valeur du module c qui détermine entièrement l'équation $i\mathrm{F}z = e\mathrm{F}\zeta$; et comme la quantité $\frac{k\mathrm{F}^1 c}{2\mathrm{F}^1 \varkappa}$ se réduit, dans ce cas, à $\frac{i}{2e}$, il s'ensuit que l'orbite rentrera sur elle-même après un nombre i de révolutions, ou $\frac{i}{2}$, selon que i est impair ou pair.

Etant donnée la fraction rationnelle $\frac{i}{e} > 2$, d'où l'on déduit la valeur du module c; étant données également les forces A et B, ou seulement leur rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, les valeurs de m et m' ne sont plus arbitraires. En effet, les formules du cas I donnent $m' = m(1 - c^2) = mb^2$, $\sin\frac{1}{2}\theta = \varkappa = c$, $\cos\theta = 1 - 2c^2$; substituant ces valeurs dans les équations $\alpha^2 = \frac{\mathrm{A}mm' + \mathrm{B}}{\mathrm{A} + \mathrm{B}mm'}$, $2\alpha\cos\theta = \frac{(m + m')(\mathrm{A} + \mathrm{B})}{\mathrm{A} + \mathrm{B}mm'}$, et éliminant α, on aura, pour déterminer m, l'équation

$$\frac{m}{1 - b^2m^2} = \frac{1 - 2c^2}{c\sqrt{(c^2 + 16b^4)}} \cdot \frac{2\sqrt{\mathrm{AB}}}{\mathrm{A} + \mathrm{B}}.$$

Connaissant m et m', les équations du n° 78 donneront cette relation entre les données m° et μ, à l'origine du mouvement,

$$\tan^2\mu = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}mm'}{\mathrm{A} + \mathrm{B}} \cdot \frac{(1 - m^\circ)^2}{(m - m^\circ)(m^\circ - m')}.$$

Cette équation détermine l'angle μ, d'après la valeur connue de m°, comprise entre m et m', ou d'après la position donnée du point A, entre les points E et D, connus par les valeurs de m et de m'. Elle servirait également à déterminer m° par le moyen de μ, ce qu'on ferait par les formules

$$\frac{m - m^\circ}{m^\circ - m'} = \left(\frac{1 - m}{1 - m'}\right) \cdot \tan^2\chi,$$

$$\sin 2\chi = \frac{2\cot\mu \sqrt{[(1 - m)(1 - m')(\mathrm{A} + \mathrm{B}mm')]}}{(m - m')\sqrt{(\mathrm{A} + \mathrm{B})}},$$

χ étant une auxiliaire qui exige que $\cot\mu$ ne passe pas la limite d'où résulte $\sin 2\chi = 1$, et $\tang\chi = 1$.

Dans les deux cas, la vîtesse initiale nécessaire pour que la courbe dont il s'agit soit décrite, est donnée par l'équation

$$\tfrac{1}{2}aV^2 \cdot \frac{m^\circ}{(1-m^\circ)^2} = \frac{A+Bmm'}{1-mm'}.$$

153. Soit, par exemple, $i=4$, $e=1$, on aura $c^2=\frac{2}{5}$, $b^2=\frac{3}{5}$, et la courbe qui a pour équation $4F(z)=F(\zeta)$ rentrera sur elle-même après deux révolutions; dans ce cas, m devra satisfaire à l'équation

$$\frac{m\sqrt{(385)}}{5-3m^2} = \frac{\sqrt{(AB)}}{A+B}.$$

Pour avoir une idée de la figure de cette courbe dans le cas le plus simple, supposons $m^\circ=m$, afin qu'on ait $\varepsilon=0$, et $z=\psi$; le point E sera l'origine du mouvement, et sera en même temps une apside supérieure. Pour avoir le premier point B' où la courbe rencontre son axe, il faudra faire $\zeta=\pi$, ce qui donne $F\psi=\frac{1}{2}F^1c$, $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$, $p^2=m(1-c^2\sin^2\psi)=mb=\frac{GB'}{FB'}$, d'où résulte $GB'=\frac{abm}{1-mb}$. Fig. 21.

La seconde intersection A' se trouvera en faisant $\zeta=2\pi$, ce qui donne $\psi=\frac{1}{2}\pi$, $p^2=mb^2=m'$; ainsi le point A', qui se confond avec le point D, est en même temps une apside inférieure. De là le corps retourne au nœud B, puis au point E, où s'achève la période entière de deux révolutions. Au reste, le point D ou A' partageant l'orbite en deux parties égales et semblables, il est visible que toutes les révolutions du corps seront d'une égale durée.

154. Prenons encore pour exemple les valeurs $i=3$, $e=1$, d'où résulte $c^2=\frac{5}{16}$, $b^2=\frac{11}{16}$; la courbe aura pour équation $3F(z)=F(\zeta)$, et elle rentrera sur elle-même après trois révolutions. Dans ce cas, la valeur de m devra satisfaire à l'équation,

$$\frac{4m\sqrt{70}}{16-11m^2} = \frac{\sqrt{(AB)}}{A+B}.$$

Par exemple, si l'on fait $\frac{A}{B}=\frac{35}{8}$, on aura $m=\frac{2}{11}$, et $m'=mb^2=\frac{1}{8}$.

Fig. 22. Supposons, pour plus de simplicité, $m^\circ = m$, afin que E soit encore le premier point de la courbe, et qu'on ait $z = \psi$, $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \psi)$. Le premier point d'intersection B^1 de la courbe avec l'axe se trouvera en faisant $\zeta = \pi$, $\psi = \gamma'$, et déterminant γ' par l'équation $\mathrm{F}\gamma' = \frac{2}{3}\mathrm{F}^1 c$, ce qui donnera........ $p^2 = m(1 - c^2 \sin^2 \gamma') = \frac{\mathrm{GB}^1}{\mathrm{FB}^1}$.

Le second point d'intersection A^1 se trouvera en faisant $\zeta = 2\pi$, $\psi = \gamma''$, ce qui donnera $\mathrm{F}\gamma'' = \frac{4}{3}\mathrm{F}^1 c = 2\mathrm{F}\gamma'$, ensuite........... $p^2 = m\,(1 - c^2 \sin^2 \gamma'') = \frac{\mathrm{FA}^1}{\mathrm{GA}^1}$.

Enfin soit $\zeta = 3\pi$, $\psi = \gamma'''$, on aura $\mathrm{F}\gamma''' = 2\mathrm{F}^1 c$, $\gamma''' = \pi$, et par conséquent $p^2 = m$; ainsi le troisième point d'intersection B^2 se confond avec le point L, autre extrémité du grand axe EL de l'ellipse terminatrice, et ce point sera par conséquent une apside supérieure.

Le point L où le corps achève sa troisième demi-révolution est visiblement le milieu de l'orbite entière, composée de trois révolutions, après lesquelles le corps, revenu au point E, commence une nouvelle période de trois révolutions, et ainsi à l'infini.

On voit que la courbe aura deux nœuds ou points doubles situés en B^1 et A^1, et deux apsides supérieures situées aux extrémités E, L du grand axe de l'ellipse terminatrice; quant aux apsides inférieures, il y en a également deux, I^1 et I^2, qu'on déterminera en faisant successivement $\psi = \frac{1}{2}\pi$ et $\psi = \frac{3}{2}\pi$; soient λ' et λ''' les valeurs correspondantes de ζ, on aura, pour déterminer λ' et λ''', les équations $\mathrm{F}\lambda' = 3\mathrm{F}^1 c$, $\mathrm{F}\lambda''' = 9\mathrm{F}^1 c$, d'où résultent $\lambda' = \frac{3}{2}\pi$, $\lambda''' = \frac{9}{2}\pi$; ainsi le point I^1, situé au-dessous de l'axe EFG, sera déterminé par les valeurs $p^2 = m'$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, et le point I^2 sera placé semblablement au-dessus du même axe.

155. La supposition de $x = c$ nous a fait connaître un système de courbes algébriques qui satisfont aux formules du cas I; on trouvera également d'autres systèmes de courbes algébriques, en tel nombre qu'on voudra, par les suppositions $x = c^\circ$, $c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc., cette suite étant formée suivant la loi connue des modules décroissans.

Soit d'abord $x = c^\circ$, on aura $F(c, z) = \frac{1+c^\circ}{2} F(c^\circ, z^\circ)$, et par conséquent $k\left(\frac{1+c^\circ}{2}\right) F(c^\circ, z^\circ) = F(x, \zeta) = F(c^\circ, \zeta)$. Mais on a $c^2 = \frac{4c^\circ}{(1+c^\circ)^2}$; donc $k\left(\frac{1+c^\circ}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1+c^{\circ 2}}{1-2c^{\circ 2}}\right)}$. Soit cette quantité $= \frac{i}{e}$; on aura

$$c^{\circ 2} = x^2 = \frac{i^2 - e^2}{2i^2 + e^2},$$

et l'équation de la courbe deviendra $iF(z^\circ) = eF(\zeta)$, le module commun à ces fonctions étant c°.

Les nombres i et e étant entiers, et $i > e$, il y aura toujours une équation algébrique qui représentera cette équation transcendante. D'ailleurs, entre z° et z on a l'équation

$$\sin(2z - z^\circ) = c^\circ \sin z^\circ.$$

Ainsi en y joignant les valeurs de p et q de l'art. 149, on aura tous les moyens pour construire la courbe et pour en trouver, si l'on veut, l'équation rapportée aux coordonnées x et y.

Et comme la quantité $\frac{kF^1c}{F^1x}$ se réduit, dans ce cas, à $\frac{k(1+c^\circ)}{2}$, ou $\frac{i}{e}$, on voit qu'il faudra i révolutions pour que la courbe rentre sur elle-même.

156. Étant données la valeur de $\frac{i}{e} > 1$ et celle de $\frac{A}{B}$, les valeurs de m et m' ne sont plus arbitraires. En effet, les formules du cas I donnent $m' = mb'$, $\sin\frac{1}{2}\theta = x$, $\cos\theta = 1 - 2x^2$, ... $4\cos^2\theta(A + Bmm')(Amm' + B) = (m + m')^2(A + B)^2$; de là on déduit, en faisant $6^2 = 1 - x^2$,

$$\frac{4mm'}{(1 - m'm)^2} = \frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{6^4(1 - 2x^2)^2}{x^2(1 + 6^6)}.$$

Connaissant mm', on aura $m = \frac{1}{b}\sqrt{mm'}$ et $m' = b\sqrt{(mm')}$. Ensuite on aura, comme dans l'art. 152, une relation entre m° et μ, qui laisse une de ces quantités arbitraires, et d'où l'on déduit enfin la vîtesse nécessaire pour que la courbe dont il s'agit soit décrite.

157. Soit, par exemple, $i=2$, $e=1$; on aura $c^{\circ 2}=x^2=\frac{1}{3}$, $\mathfrak{C}^2=\frac{2}{3}$, $c^2=2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$, $b=2-\sqrt{3}$, et la valeur de mm' devra être déduite de l'équation

$$\frac{35\,mm'}{(1-mm')^2}=\frac{AB}{(A+B)^2}.$$

Si l'on suppose, pour plus de simplicité, que le point E, où $p^2=m$, est l'origine du mouvement, on aura $z=\psi$; l'équation de la courbe sera $2F\psi^\circ=F\zeta$, le module commun étant $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$; de plus on aura, pour construire la courbe, les équations $\sin(2\psi-\psi^\circ)=x\sin\psi^\circ$, $p^2=m(1-c^2\sin^2\psi)$, $q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta$. D'après ces équations, on trouvera que la courbe rentre sur elle-même après deux révolutions, et qu'elle est d'une forme analogue à celle de la figure 21.

158. Pour avoir un troisième système de courbes algébriques, soit $x=c^{\circ\circ}$, on aura $F(c,z)=\frac{1+c^\circ}{2}\cdot\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}F(c^{\circ\circ},z^{\circ\circ})$, et l'équation de la courbe deviendra

$$k.\frac{1+c^\circ}{2}\cdot\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}F(x,z^{\circ\circ})=F(x,\zeta).$$

On a déjà trouvé $k.\frac{1+c^\circ}{2}=\sqrt{\left(\frac{1+c^{\circ 2}}{1-2x^2}\right)}$; multipliant de part et d'autre par $\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}$ ou $\frac{1+x}{2}$, et observant que $c^\circ=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$, on aura

$$k.\frac{1+c^\circ}{2}\cdot\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+6x+x^2}{1-2x^2}\right)}.$$

Soit cette quantité $=\frac{i}{e}$, afin qu'on ait l'équation de la courbe $iF(z^{\circ\circ})=eF(\zeta)$, x étant le module commun à ces fonctions, on aura

$$x=\frac{-3e^2+2\sqrt{(2e^4-i^2e^2+8i^4)}}{e^2+8i^2}.$$

On

On voit, par cette formule, que toute valeur rationnelle de $\frac{i}{e}$ plus grande que $\frac{1}{2}$, donnera une valeur de x comprise entre 0 et $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et qu'ainsi on aura une courbe algébrique qui satisfera au problème, en laissant encore arbitraires, tant le rapport de A à B, que l'une des deux quantités m° et μ relatives à l'état initial du corps. Cette courbe rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions qui peut être déterminé par la quantité $\frac{kF^1c}{2F^1x}$; et comme on a $F^1c = (1+c^\circ)(1+c^{\circ\circ})F^1x$, cette quantité $=\frac{k}{2}(1+c^\circ)(1+c^{\circ\circ}) = \frac{2i}{e}$. Donc le nombre de ces révolutions sera $2i$ ou i, selon que e est impair ou pair.

On aura d'ailleurs, pour construire la courbe, les valeurs de p et q, comme dans l'art. 149, et de plus les équations

$$\begin{aligned} \sin(2z - z^\circ) &= c^\circ \sin z^\circ, \\ \sin(2z^\circ - z^{\circ\circ}) &= x \sin z^{\circ\circ}. \end{aligned}$$

159. Nous remarquerons enfin que la suite des modules décroissans c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc., étant liée par une même loi à la suite des modules croissans c, c', c'', etc., on pourra obtenir une infinité de combinaisons nouvelles, en faisant x égal à l'un des termes c', c'', etc., et chaque supposition donnera naissance à une série infinie de courbes algébriques qui satisferont toutes aux formules du cas I.

Soit, par exemple, $x = c'$; puisqu'on a $F(c, z) = \frac{2}{1+c} F(c', z')$, l'équation $kF(c, z) = F(x, \zeta)$ deviendra $\frac{2k}{1+c} F(z') = F(\zeta)$, c' étant le module commun. Soit $\frac{2k}{1+c}$ ou $\frac{2}{1+c}\sqrt{\left(\frac{4-2c^2}{1-2x^2}\right)} = \frac{i}{e}$; si l'on substitue dans cette équation la valeur $x = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, il en résultera

$$c = \frac{3i^2 - 2\sqrt{(2i^4 + 2e^2i^2 + 32e^4)}}{i^2 + 8e^2},$$

formule qui donnera $c < 3 - 2\sqrt{2}$, pourvu qu'on ait $i > 4e$; on connaîtra ensuite x par sa valeur $\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et son complément $b = \sqrt{(1-x^2)}$.

Cela posé, la courbe décrite aura pour équation $i\mathrm{F}(z') = e\mathrm{F}(\zeta)$, $\varkappa$ étant le module commun; on aura en même temps l'équation $\operatorname{tang}(z - z') = \mathfrak{C} \operatorname{tang} z$, à laquelle on joindra les valeurs de p et q données art. 149.

Quant au nombre de révolutions qui compose chaque période, il se déterminera par la quantité $\frac{k\mathrm{F}^1 c}{\mathrm{F}^1 \varkappa}$, qui se réduit à $\frac{i}{4e}$; ce nombre sera donc i, $\frac{1}{2}i$ ou $\frac{1}{4}i$, selon que i sera de la forme $2n + 1$, $4n + 2$ ou $4n$.

160. Il est inutile de pousser plus loin nos recherches sur les courbes algébriques qui peuvent satisfaire aux formules du cas I; il y en a, comme on voit, une infinité dans chaque système, et le nombre de ces systèmes peut être multiplié à l'infini. D'ailleurs, j'observe que les courbes ainsi déterminées sont différentes de celles qu'Euler a indiquées dans les Mémoires de Berlin, année 1760, celles-ci étant toutes rapportées à des fonctions dont le module $= \sqrt{\frac{1}{2}}$. Or, dans les formules du cas I, on ne peut jamais avoir $\varkappa^2 = \frac{1}{2}$, puisque cette valeur rendrait le coefficient k infini.

Du cas particulier où l'on a $m' = 0$.

161. L'hypothèse $m' = 0$ réduit l'ellipse $p^2 = m'$ à son grand axe FG; on a alors $c = 1$, et l'équation de la courbe devient $k\mathrm{F}(1, z) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$, ou $\frac{k}{2} \log\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta)$; ainsi, on ne peut avoir $z = \frac{1}{2}\pi$ que lorsque ζ est infini, ou lorsque le corps a fait une infinité de révolutions autour de l'ellipse infiniment petite FG.

Fig. 23. Supposons, pour plus de simplicité, que le point E soit l'origine du mouvement, on aura $\varepsilon = 0$, $z = \psi$, $p = \sqrt{m} \cdot \cos \psi$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \zeta$. Pour avoir le point B¹, premier point d'intersection de la courbe avec son axe, il faut faire $\zeta = \pi$, $\psi = \gamma'$, et γ' sera déterminé par l'équation $\log\left(\frac{1 + \sin \gamma'}{1 - \sin \gamma'}\right) = \frac{4}{k} \mathrm{F}^1 \varkappa$; soit $n = \frac{4\mathrm{F}^1 \varkappa}{k}$, on aura $\sin \gamma' = \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$, ce qui donnera $p^2 = m \cos^2 \gamma' = \frac{\mathrm{GB}^1}{\mathrm{FB}^1}$.

Le second point d'intersection A¹ qui termine la première révolution, se trouvera en faisant $\zeta = 2\pi$, $\psi = \gamma''$, et γ'' sera déterminé par l'équation $\log\left(\frac{1+\sin\gamma''}{1-\sin\gamma''}\right) = 2n$, d'où l'on déduit $\sin\gamma'' = \frac{e^{2n}-1}{e^{n}+1}$, $p^2 = m\cos^2\gamma'' = \frac{FA^1}{GA^1}$.

Le troisième point d'intersection B^2 se trouvera de même en faisant $\zeta = 3\pi$, $\psi = \gamma'''$, ce qui donnera $\sin\gamma''' = \frac{e^{3n}-1}{e^{3n}+1}$, ensuite $m\cos^2\gamma''' = \frac{FB^2}{GB^2}$.

En continuant ainsi, on voit que les termes γ', γ'', γ''', γ^{IV}, etc., croissent de plus en plus, jusqu'à la limite $\frac{1}{2}\pi$, qu'ils n'atteignent cependant que lorsque leur nombre est devenu infini. Il suit de là que les points d'intersection B^1, B^2, B^3, etc., se rapprochent continuellement du foyer G, et finissent par se confondre avec ce foyer. De même les points d'intersection A^1, A^2, A^3, etc., se rapprochent progressivement du foyer F, et finissent par se confondre avec lui. Ainsi, le corps parti du point E, suivant une direction perpendiculaire à l'axe EL, fait une infinité de révolutions autour de l'ellipse infiniment petite FG, lesquelles forment autant de spires qui se resserrent de plus en plus en s'approchant de FG; et le corps finit par coïncider avec l'un des centres F et G. On trouvera d'ailleurs, par la formule de l'art. 147, qu'à mesure que les spires se resserrent, le temps de chaque révolution approche de plus en plus de la limite $4T''$.

Développement du cas II.

162. Les formules générales du cas II ne diffèrent de celles du cas I que par les valeurs des constantes nécessaires pour construire la courbe, et par la valeur de q, dans laquelle $\frac{1}{2}\zeta$ est remplacé par ζ; changemens qui n'apportent qu'une modification très-légère dans les formules qui servent à déterminer les intersections successives de la courbe avec l'axe et ses apsides tant supérieures qu'inférieures. Du reste, le caractère essentiel du premier système, qui comprend les cas I et II, est que la courbe décrite par le corps soit comprise dans l'espace que laissent entr'eux les périmètres des deux

ellipses $p^2=m$, $p^2=m'$, dont les centres F et G sont les foyers. La courbe fera une infinité de révolutions dans cet espace; et ces révolutions seront toutes différentes les unes des autres, si la quantité $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}$ est irrationnelle; mais elle rentrera sur elle-même après un certain nombre de révolutions, si $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}$ est rationnelle, condition qui est toujours remplie, lorsque l'orbite est une courbe algébrique.

Si l'on a $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}=\frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une quantité rationnelle, le nombre des révolutions après lesquelles la courbe rentre sur elle-même sera égal à i; et il suffira de connaître le mouvement du corps pendant une période de i révolutions, puisque cette période se renouvellera sans cesse en restant toujours semblable à elle-même.

163. Si l'on veut déterminer le temps du mouvement, il faut d'abord observer que la première partie, désignée par t', se trouvera, ainsi que T', par les mêmes formules que dans l'art. 141, puisque p^2 est représenté dans les deux cas par la même valeur $m(1-c^2\sin^2\psi)$. On aura soin également de retrancher du résultat la quantité constante $t'(\varepsilon)$, lorsque ε ne sera pas zéro; et comme le cas du corollaire II se déduit des formules générales en faisant $\varepsilon=\frac{1}{2}\pi$, il conviendra, pour plus d'uniformité, de calculer le temps par les formules de l'art. 141, et de retrancher du résultat la constante $t'(\frac{1}{2}\pi)$ ou T', ce qui suppose l'équation de la courbe $kF(c,\psi)-kF^1c=F(\varkappa,\zeta)$, et en même temps $p^2=m(1-c^2\sin^2\psi)$. Cette observation s'applique également aux formules des cas I et II.

164. Pour avoir l'autre partie du temps désignée par t'', il faut, dans l'équation $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}}=\frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, substituer les valeurs.... $q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\zeta$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha M-\alpha B)}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$; on aura, en faisant $\nu=\frac{1}{\alpha}-1$, $D'=a\sqrt{\left(\frac{2a}{\alpha}\cdot\frac{1-mm'}{A+Bmm'}\right)}$,

$$t''=D'V(\zeta),\qquad V(\zeta)=\int\frac{(1+\nu)\,d\zeta\sin^2\zeta\cos^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Or, par les réductions connues on a, en faisant $\Delta = \sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}$,

$$\frac{2\nu(x^2+\nu)}{1+\nu}V(\zeta) = \left(2+\nu+\frac{x^2}{\nu}\right)\Pi(\nu, x, \zeta) - \frac{\nu\Delta\sin\zeta\cos\zeta}{1+\nu\sin^2\zeta} - \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)F(x, \zeta) - E(x, \zeta).$$

Soit T'' ce que devient t'' lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $T'' = D'V^1$, et

$$\frac{2\nu(x^2+\nu)}{1+\nu}V^1 = \left(2+\nu+\frac{x^2}{\nu}\right)\Pi^1(\nu, x) - \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)F^1x - E^1x.$$

Quant à la valeur de $\Pi^1(\nu, x)$, elle s'exprimera toujours par les fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce; mais la formule sera différente, selon que α sera plus petit ou plus grand que l'unité.

165. Par les formules du tableau, on trouve

$$\alpha\alpha' - 1 = \frac{(B-A)(1-mm')}{A+Bmm'}, \qquad \frac{(1-\alpha)(1-\alpha')}{1+\alpha\alpha'} = \frac{(1-m)(1-m')}{1+mm'};$$

d'où il suit que α et α' sont tous deux plus petits que l'unité, si l'on a $A > B$; et tous deux plus grands que l'unité, si l'on a $A < B$.

Soit d'abord $A > B$, et par conséquent $\alpha < 1$, on pourra faire $\alpha = \sin^2\eta$, ce qui donnera $\nu = \cot^2\eta$; ensuite, par l'application de la formule du n° 96, I^re p., on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta(6, \eta)}{\sin\eta\cos\eta}\Pi^1(\nu, x) = H + \dfrac{\sin\eta}{\cos\eta}\Delta(6, \eta).F^1x, \\ H = \frac{1}{2}\pi + (F^1x - E^1x)F(6, \eta) - F^1xE(6, \eta); \end{array}\right.$$

d'où résulte

$$T'' = \frac{D'\sin^2\eta}{2\cos^2\eta(1-6^2\sin^2\eta)}\left(\frac{1-6^2\sin^4\eta}{\sin\eta\cos\eta\Delta(6, \eta)}H + 6^2\sin^2\eta F^1x - E^1x\right).$$

166. En second lieu, soit $A < B$, et par conséquent $\alpha > 1$, il faudra faire $\nu = \frac{1}{\alpha} - 1 = -1 + 6^2\sin^2\eta$, ce qui donnera ..... $\sin^2\eta = \frac{1}{6^2\alpha} = \frac{1}{\alpha'}$, et la valeur de η sera réelle, puisqu'on a $\alpha' > 1$. Ensuite la formule du n° 101, I^re p., donnera

$$\frac{6^2\sin\eta\cos\eta}{\Delta(6, \eta)}[\Pi^1(\nu, x) - F^1x] = H,$$

H étant la même quantité que dans l'art. précédent, et de là résulte

$$\mathrm{T}'' = \frac{\mathrm{D}' \sin^2 \eta}{2\cos^2 \eta\,(1 - \mathrm{б}^2 \sin^2 \eta)} \left(\frac{1 - \mathrm{б}^2 \sin^4 \eta}{\sin \eta \cos \eta\, \Delta(\mathrm{б}, \eta)} \mathrm{H} + \mathrm{б}^2 \sin^2 \eta\, \mathrm{F}^1 x - \mathrm{E}^1 x \right).$$

Il est remarquable que la valeur de T'' soit la même lorsqu'on fait $\nu = -1 + \mathrm{б}^2 \sin^2 \eta$, que lorsqu'on fait $\nu = \cot^2 \eta$; d'où résulte le théorème suivant :

« Si l'on prend entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ les deux intégrales

$$\mathrm{V}(n) = \int \frac{(1+n)\, d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2 \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}, \quad \mathrm{V}(n') = \int \frac{(1+n')\, d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(1+n'\sin^2\varphi)^2 \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

» dans lesquelles $n = \cot^2 \theta$, $n' = -1 + b^2 \sin^2 \theta$, ces deux in-
» tégrales seront égales à une même quantité.

$$\mathrm{V}^1 = \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta \Delta^2(b, \theta)} \left(\frac{1 - b^2 \sin^4 \theta}{\sin \theta \cos \theta \Delta(b, \theta)} \mathrm{H} + b^2 \sin^2 \theta\, \mathrm{F}^1 c - \mathrm{E}^1 c \right),$$

» dans laquelle $\mathrm{H} = \frac{1}{2}\pi + (\mathrm{F}^1 c - \mathrm{E}^1 c)\mathrm{F}(b, \theta) - \mathrm{F}^1 c . \mathrm{E}(b, \theta)$. »

Au reste, l'égalité de ces intégrales se déduirait immédiatement de la formule (g'), pag. 73, Ire p., en différenciant les deux membres par rapport aux paramètres n et $-m$, liés entr'eux par l'équation $(1+n)(1-m) = b^2$.

167. Supposons maintenant qu'après tant de révolutions qu'on voudra, le corps se trouve en un point de l'orbite, déterminé, à compter de l'origine, par les arcs $\psi = \mathrm{I}\pi + \psi'$, $\zeta = \mathrm{L}\pi + \zeta'$, I et L étant des entiers, et ψ', ζ' des arcs positifs ou négatifs moindres que $\frac{1}{2}\pi$. Les parties du temps correspondantes à ces valeurs seront

$$t'(\psi) = 2\mathrm{I}\mathrm{T}' + t'(\psi'),$$
$$t''(\zeta) = 2\mathrm{L}\mathrm{T}'' + t''(\zeta');$$

ce qui donne le temps total

$$t = 2\mathrm{I}\mathrm{T}' + 2\mathrm{L}\mathrm{T}'' + t'(\psi') + t''(\zeta') - t'(\varepsilon),$$

formule dans laquelle les termes $t'(\psi')$, $t''(\zeta')$ prendront le même signe que les arcs ψ', ζ', dont ils dépendent.

168. D'après l'équation de la courbe $k\mathrm{F}(c, \psi) - k\mathrm{F}(c, \varepsilon) = \mathrm{F}(\gamma, \zeta)$,

on aura

$$2\text{I} + \frac{\text{F}(c, \psi')}{\text{F}'c} = \frac{2\text{LF}'\varkappa + \text{F}(\varkappa, \zeta') + k\text{F}(c, \varepsilon)}{k\text{F}'c},$$

équation qui servira à déterminer I et ψ', par le moyen des valeurs données de L et ζ', et réciproquement.

Lorsque le corps aura achevé un nombre L de révolutions, on aura $\zeta = \text{L}\pi$, $\zeta' = 0$; et si l'on fait $\text{F}(c, \psi') = k'\text{F}'c$, I et k' étant déterminées par l'équation

$$2\text{I} + k' = \frac{2\text{LF}'\varkappa + k\text{F}(c, \varepsilon)}{h\text{F}'c},$$

le temps correspondant sera

$$t = 2\text{LT}'' + 2\text{LT}' \cdot \frac{\text{F}'\varkappa}{k\text{F}'c} + t'(\psi') - t'(\varepsilon) \\ - \text{T}'k' + \text{T}' \frac{\text{F}(c, \varepsilon)}{\text{F}'c}.$$

Donc, si l'on appelle τ le temps moyen d'une de ces L révolutions, on aura

$$\tau = 2\text{T}'' + 2\text{T}' \cdot \frac{\text{F}'\varkappa}{k\text{F}'c} + \frac{\text{T}'}{\text{L}}\left(\frac{t'(\psi')}{\text{T}'} - k'\right) - \frac{\text{T}'}{\text{L}}\left(\frac{t'(\varepsilon)}{\text{T}'} - \frac{\text{F}(c, \varepsilon)}{\text{F}'c}\right).$$

Les deux derniers termes de cette formule, déjà très-petits, puisqu'ils sont la différence de deux quantités presqu'égales, diminueront de plus en plus à mesure que le nombre L des révolutions augmentera; ainsi la valeur de τ approchera de plus en plus de la limite $2\text{T}'' + 2\text{T}' \cdot \frac{\text{F}'\varkappa}{k\text{F}'c}$. Elle sera exactement égale à cette limite, si l'orbite est rentrante sur elle-même, ou si $\frac{k\text{F}'c}{\text{F}'\varkappa}$ est égale à un nombre rationnel $\frac{i}{e}$, et si le temps total embrasse un nombre entier de périodes. Alors on a le temps moyen d'une révolution

$$\tau = 2\text{T}'' + \frac{2e}{i}\text{T}',$$

et le temps d'une période composée de i révolutions sera $2i\text{T}'' + 2e\text{T}'$.

Des courbes algébriques qui satisfont aux formules du cas II.

169. En faisant usage des mêmes formules que dans l'art. 149, l'équation de la courbe sera semblablement $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(x, \zeta)$, et on aura $k = \sqrt{\left(\frac{2-c^2}{2-x^2}\right)}$, valeur qui sera toujours comprise entre $\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{2}$.

Pour obtenir des courbes algébriques, on ne peut supposer $c = x$, parce qu'il en résulterait, suivant les formules du tableau général, $\alpha = m$ et $\alpha' = m'$, ce qui donnerait $\mathrm{B} = 0$.

Soit donc pour première hypothèse $x = c^\circ$, on aura l'équation $k \cdot \frac{1+c^\circ}{2} \mathrm{F}(c^\circ, z^\circ) = \mathrm{F}(c^\circ, \zeta)$; et pour avoir des courbes algébriques, il faudra faire $k\left(\frac{1+c^\circ}{2}\right)$ ou $\frac{1+c^\circ}{2}\sqrt{\left(\frac{2-c^2}{2-x^2}\right)} = \frac{i}{e}$, ce qui donnera

$$x^2 = \frac{4i^2 - e^2}{2i^2 + e^2}.$$

On peut prendre pour $\frac{i}{e}$ toute fraction rationnelle plus grande que $\frac{1}{2}$, et l'on aura une valeur convenable pour x^2, d'où l'on déduira $c = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. Alors l'équation de la courbe sera $i\mathrm{F}(z^\circ) = e\mathrm{F}(\zeta)$, x étant le module commun à ces fonctions. Cette équation devra être combinée avec l'équation $\sin(2z - z^\circ) = x \sin z^\circ$, et avec les valeurs de p et q données dans l'art. 149.

170. Connaissant c^2, x^2, ainsi que le rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, on connaîtra le rapport $\frac{m'}{m} = 1 - c^2 = b^2$; mais il reste à déterminer séparément m et m'.

Pour cela, j'observe qu'on a, d'après le tableau général,

$$\alpha + \alpha' = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})(m+m')}{\mathrm{A}+\mathrm{B}mm'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{\mathrm{A}mm' + \mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}mm'};$$

d'ailleurs on connaît le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 - x^2$. Ainsi, en éliminant α et α', on aura, pour déterminer mm', l'équation

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2} = \frac{\mathrm{AB}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2} \cdot \frac{b^2(2-x^2)^2}{(c^2-x^2)(c^2+x^2-c^2x^2)}.$$

Connaissant

Connaissant mm', on aura $m = \frac{1}{b}\sqrt{mm'}$, $m' = b\sqrt{(mm')}$. Ensuite les formules de l'art. 152 donneront deux équations de condition entre les données m°, μ, V relatives à l'état initial du corps, pour que le mouvement ait lieu dans la courbe dont il s'agit.

Le nombre des révolutions après lesquelles la courbe rentrera sur elle-même, se détermine par la quantité $\frac{kF'c}{F'x} = k(1+c^{\circ}) = \frac{2i}{e}$; donc ce nombre est i ou $2i$, selon que e sera pair ou impair.

171. Pour avoir d'autres séries de courbes algébriques, on peut supposer, comme ci-dessus, $x = c^{\circ\circ}$, $c^{\circ\circ\circ}$, etc. Nous nous contenterons de développer encore le système qui résulte de la supposition $x = c^{\circ\circ}$.

Alors l'équation de la courbe devient $k \cdot \frac{1+c^{\circ}}{2} \cdot \frac{1+c^{\circ\circ}}{2} F(x, z^{\circ\circ}) = F(x, \zeta)$. Soit $k \cdot \frac{1+c^{\circ}}{2} \cdot \frac{1+c^{\circ\circ}}{2}$, ou $\frac{1+x}{4}\sqrt{\left(\frac{2+2c^{\circ 2}}{2-x^2}\right)} = \frac{i}{e}$; comme on a $c^{\circ 2} = \frac{4x}{(1+x)^2}$, il en résulte

$$x = -\frac{3e^2 + 2\sqrt{(2e^4 + 2i^2e^2 + 32i^4)}}{e^2 + 8i^2}.$$

On devra prendre $\frac{e}{i}$ entre les limites 1 et 4, et on aura une valeur convenable de x ou $c^{\circ\circ}$, d'où l'on déduira $c^{\circ} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$, et $c = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{1+c^{\circ}}$; du reste, on déterminera mm', m et m', par les mêmes formules que dans l'article précédent.

Cela posé, l'équation de la courbe sera $iF(z^{\circ\circ}) = eF(\zeta)$, x étant le module commun à ces deux fonctions; elle devra être combinée avec la valeur de p de l'art. 149, et la valeur $q = \frac{1}{\sqrt{a}}\tang\zeta$, ainsi qu'avec les équations

$$\begin{aligned} \sin(2z - z^{\circ}) &= c^{\circ}\sin z^{\circ}, \\ \sin(2z^{\circ} - z^{\circ\circ}) &= x \sin z^{\circ\circ}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, comme on a $\frac{kF'c}{F'x} = k(1+c^{\circ})(1+c^{\circ\circ}) = \frac{4i}{e}$, il s'ensuit que le nombre de révolutions nécessaire pour que la courbe rentre sur elle-même, sera $4i$, $2i$ ou i, selon que e sera impair, double d'un impair, ou divisible par 4.

172. Le cas le plus simple est celui où l'on fait $i=1$, $e=2$, ce qui donne $x=\sqrt{2}-1$, $c^\circ=\sqrt{2x}$, $c=\frac{2\sqrt{c^\circ}}{1+c^\circ}$. Alors l'équation de la courbe sera $F(z^{\circ\circ})=2F(\zeta)$, le module de ces fonctions étant $x=\sqrt{2}-1$; cette courbe rentrera sur elle-même après deux révolutions; et on trouvera aisément que si, pour plus de simplicité, on suppose $\varepsilon=0$, de sorte que le point E soit l'origine du mouvement, la figure de cette courbe ressemble beaucoup à celle qui a été décrite, fig. 21.

Si, dans le même cas, on veut avoir les valeurs de m et m', qui répondent aux valeurs trouvées pour c et x, on aura à résoudre l'équation de l'art. 170, qui devient

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2}\left(\frac{8}{x^3}-1\right)=\frac{AB}{(A+B)^2}.$$

Comme on doit toujours avoir $m<1$, on aura $mm'<b^2$, et $\frac{mm'}{(1-mm')^2}<\frac{b^2}{c^4}$; or, d'après la valeur $x=\sqrt{2}-1$, on a.... $\frac{b^2}{c^4}\cdot\frac{8}{x^3}=\frac{1}{4}$; ainsi, on devra avoir $\frac{AB}{(A+B)^2}<\frac{1}{4}-\frac{b^2}{c^4}$, ou $\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2>\frac{4b^2}{c^4}$. Mettant les valeurs numériques et supposant $A>B$, on aura $\frac{A-B}{A+B}>0.0942522$, ou $\frac{A}{B}>\frac{10942522}{9057478}$, et en termes plus simples, $\frac{A}{B}>\frac{238}{197}$. Cette condition étant remplie, on aura, par l'équation précédente, une valeur convenable de mm', qui donnera celles de m et de m'.

Soit, par exemple, $A=2B$, ou $B=2A$, on aura à peu près $mm'=\frac{1}{504}$, $m'=\frac{2}{955}$, $m=\frac{955}{1008}$. Or, $m=\frac{FE}{GE}$ et $m'=\frac{FD}{GD}$; donc $FE=\frac{955}{53}a$ et $FD=\frac{2}{953}a$, ou en rapportant les distances au point C, milieu de FG, on aura $EC=(\frac{955}{53}+\frac{1}{2})a$, $DC=(\frac{2}{953}+\frac{1}{2})a$. Ainsi le corps sera environ 37 fois plus éloigné du centre C dans l'apside supérieure E que dans l'apside inférieure D.

173. Si l'on prolonge l'échelle des modules dans le sens inverse, on pourra faire de même $x = c'$, $x = c''$, etc., et chaque supposition produira un nouveau système comprenant une infinité de courbes algébriques.

Il est à remarquer que ces calculs donneront des résultats semblables à ceux que nous avons déjà obtenus par les suppositions $x = c^\circ$, $x = c^{\circ\circ}$, etc., avec cette différence que les modules c et x devront être échangés entre eux, ainsi que les variables z et ζ. La raison en est que l'équation générale $k\mathrm{F}(c, z) = \mathrm{F}(x, \zeta)$ peut être mise sous la forme $(2 - c^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{F}(c, z) = (2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{F}(x, \zeta)$, dont les deux membres sont semblables entre eux; d'où il suit que l'équation subsiste en faisant le double échange dont nous venons de parler.

174. Soit d'abord $x = c'$, ce qui revient à faire $c = x^\circ$, on aura, comme au n° 169,

$$c^2 = \frac{4i^2 - e^2}{2i^2 + e^2},$$

ce qui donnera $x = c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et l'équation de la courbe sera $i\mathrm{F}(c, \zeta^\circ) = e\mathrm{F}(c, z)$, ou simplement $i\mathrm{F}(\zeta^\circ) = e\mathrm{F}(z)$, c étant le module commun.

Pour construire la courbe, il faudra combiner cette équation avec l'équation $\sin(2\zeta - \zeta^\circ) = c\sin\zeta^\circ$ et avec les valeurs de p et q données art. 149.

Quant au nombre de révolutions nécessaire pour que la courbe rentre sur elle-même, il se détermine toujours par la quantité $\frac{k\mathrm{F}^1c}{\mathrm{F}^1x} = \frac{k}{1+x^\circ} = \frac{e}{2i}$; donc ce nombre sera e ou $\frac{1}{2}e$, selon que e est impair ou pair.

175. Soit en second lieu $x = c''$, ou $c = x^{\circ\circ}$, on aura, comme au n° 171,

$$c = \frac{-3e^2 + 2\sqrt{(2e^4 + 2i^2e^2 + 32i^4)}}{e^2 + 8i^2},$$

ensuite $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et c'' ou $x = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$. Cela posé, l'équation de la courbe sera $e\mathrm{F}(z) = i\mathrm{F}(\zeta^{\circ\circ})$, c étant le module commun à ces fonctions ; elle devra être combinée avec les équations $\sin(2\zeta - \zeta^\circ) = c'\sin\zeta^\circ$, $\sin(2\zeta^\circ - \zeta^{\circ\circ}) = c\sin\zeta^{\circ\circ}$, la valeur de p de l'art. 149 et la valeur $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\zeta$.

D'ailleurs comme on a $\frac{kF^1c}{F^1x} = \frac{k}{(1+c)(1+c')} = \frac{e}{4i}$, le nombre de révolutions qui compose une période sera e, $\frac{1}{2}e$ ou $\frac{1}{4}e$, selon que e sera impair, double d'un impair, ou divisible par 4.

176. La formule générale suppose $e > i$ et $e < 4i$; c'est pourquoi le cas le plus simple s'obtient en faisant $e = 2$, $i = 1$. Alors on a l'équation $2Fz = F\zeta^{\circ\circ}$, et la période ne sera que d'une révolution, c'est-à-dire que la courbe rentrera sur elle-même après une seule révolution ; ce cas est très-remarquable, et il mérite d'être développé.

Fig. 24. Supposons, pour plus de simplicité, que le point E soit celui où commence le mouvement, on aura $\varepsilon = 0$, $z = \psi$, $p^2 = m(1 - c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\zeta$, et l'équation de la courbe sera $2F\psi = F(\zeta^{\circ\circ})$.

Pour avoir le premier point d'intersection de la courbe avec l'axe, soit $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\zeta^\circ = \pi$, $\zeta^{\circ\circ} = 2\pi$, $\psi = \pi$ et $p^2 = m$. Donc le point B^1, où la courbe rencontre son axe après une demi-révolution, se confondra avec l'extrémité L du grand axe de l'ellipse $p^2 = m$, et ce point sera par conséquent une apside supérieure, comme le point de départ E.

Entre les deux points E et L, le corps a dû passer par son apside inférieure I^1 ; pour déterminer ce point, il faut faire $\psi = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $\zeta^{\circ\circ} = \pi$, $\zeta^\circ = \frac{1}{2}\pi$ et $\operatorname{tang}^2\zeta = \frac{1}{b}$. Donc le point I^1 est déterminé par les valeurs $p^2 = m'$, $q = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha b}\right)}$.

Ainsi, pendant une révolution, le corps passe deux fois à l'apside supérieure en E et L, et deux fois à l'apside inférieure en I^1 et I^2. Dans ce cas, il est évident que toutes les demi-révolutions doivent se faire en temps égaux.

177. Il est essentiel d'observer que dans toutes les hypothèses $x = c'$, $x = c''$, etc., où l'on aura $x > c$, les forces A et B devront

être de signes contraires, c'est-à-dire que l'une de ces forces sera attractive et l'autre répulsive. Cela résulte de l'équation

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2}=\frac{AB}{(A+B)^2}\cdot\frac{b^2(2-x^2)^2}{(c^2-x^2)(c^2+x^2-c^2x^2)},$$

dont le second membre serait négatif, si AB ne devenait pas négatif en même temps que le facteur c^2-x^2.

Cette circonstance, qu'on peut admettre au moins comme hypothèse, n'entraînera d'ailleurs aucun inconvénient; les quantités α et α' seront toujours de même signe, et les formules générales s'appliqueront sans difficulté aux cas particuliers.

178. Ayant donc fait $x=c''$, ensuite $e=2$, $i=1$, ce qui donne $c=\sqrt{2}-1$, $c'=\sqrt{2c}$, $x=\frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$; supposant de plus $\varepsilon=0$, on aura, comme dans l'art. 176, $2F\psi=F\zeta^{\circ\circ}$, c étant le module commun, $\sin(2\zeta-\zeta^\circ)=c'\sin\zeta^\circ$, $\sin(2\zeta^\circ-\zeta^{\circ\circ})=c\sin\zeta^{\circ\circ}$, $p^2=m(1-c^2\sin^2\psi)$, $q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\zeta$.

Pour appliquer ces formules à un cas particulier, j'observe que la valeur de x étant substituée dans l'équation de l'article précédent, on aura

$$\frac{mm'}{(1-mm')^2}=-\frac{AB}{(A+B)^2}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}c)^3-1}.$$

Soit donc, par exemple, $A=2I$, $B=-I$, I étant l'unité qui sert à mesurer les forces A et B, on aura à résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+mm'}{1-mm'}\right)^2=\frac{9-(\frac{1}{2}c)^3}{1-(\frac{1}{2}c)^3}.$$

Ensuite on connaîtra $m=\frac{1}{b}\sqrt{mm'}$, $m'=b\sqrt{mm'}$, $\alpha=\frac{\sqrt{mm'}}{2-mm'}\cdot\frac{(1+b)^2}{2b}$; appliquant donc les valeurs numériques, on aura les résultats suivans:

$\log mm'=9.7002592$	$\log c=9.6172243$
$\log m=9.8910024$	$\log b=9.9591271$
$\log m'=9.8092567$	$\log \alpha=9.9764602$

A l'égard de la vitesse initiale V qui a lieu au point E, elle devra satisfaire à l'équation

$$V^2 = \frac{(1-m)^2}{\frac{1}{2}ma} \cdot \frac{A+Bmm'}{1-mm'} = \frac{2I}{a} \cdot \frac{(1-m)^2}{m} \cdot \frac{2-mm'}{1-mm'}.$$

Au moyen de toutes ces données, le corps décrira la courbe algébrique que nous avons déterminée, laquelle rentre sur elle-même après une seule révolution.

Du cas particulier où l'on a $\alpha = \alpha'$.

179. Ce cas se rapporte également aux formules du cas II et à celles du cas I; il sert de passage de l'un à l'autre, puisqu'on doit avoir alors $\frac{m-m'}{1-mm'} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Mais comme la variable ζ n'a pas la même signification dans les deux cas principaux, nous suivrons ici les dénominations du cas II.

On a d'abord $x = 0$, $k = \sqrt{(1-\frac{1}{2}c^2)}$, $m' = m(1-c^2) = mb^2$; ainsi il faudra satisfaire à l'équation $\frac{mc^2}{1-b^2m^2} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Supposons que A et B sont donnés, ainsi que la quantité m qui détermine la position du point E sur l'axe EFG, on déterminera le module c par l'équation

$$c^2 = \frac{(1-m^2) \cdot 2\sqrt{AB}}{m(A+B) - 2m^2\sqrt{AB}},$$

d'où résulte $b^2 = \frac{m(A+B) - 2\sqrt{AB}}{m(A+B) - 2m^2\sqrt{AB}}$; ainsi, pour que cette solution ait lieu, il faut prendre $m > \frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Connaissant le module c, on aura $m' = mb^2$; ensuite α se déduira à volonté de l'une des deux équations

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(m+m')(A+B)}{A+Bmm'}, \quad \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 = \frac{1+m}{1-m}, \quad \frac{1+m'}{1-m'}.$$

Supposons encore, pour plus de simplicité, $\epsilon = 0$, on aura l'équation de la courbe $kF(c, \psi) = \zeta$, qu'il faudra combiner avec les valeurs $p^2 = m(1-c^2\sin^2\psi)$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\zeta$.

Cette courbe ne peut jamais devenir algébrique, parce qu'on ne peut supposer $c=0$; cependant elle rentrerait sur elle-même après un nombre déterminé de révolutions, si la quantité $\frac{kF'c}{\frac{1}{2}\pi}$ était rationnelle. Ce cas seul excepté, la courbe fera une infinité de révolutions dans l'espace renfermé entre les périmètres des ellipses $p^2=m$, $p^2=m'$, et ces révolutions seront toutes d'une inégale durée.

Pour déterminer les apsides I^1, S^1, I^2, S^2, etc., alternativement supérieures et inférieures, il faut faire successivement $\psi=\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, etc.; et les valeurs correspondantes de ζ, qui croissent proportionnellement aux valeurs de ψ, seront $\zeta=kF'c$, $2kF'c$, $3kF'c$, etc.

Développement du cas III.

180. Le cas III est le premier des quatre cas principaux qui composent le second système. Dans ce système, la valeur de p varie depuis $p=0$ jusqu'à $p=\sqrt{m}$; l'ellipse $p^2=m$ enveloppe toujours l'orbite, et la touche dans les points S^1, S^2, S^3, etc., qui sont ses apsides supérieures; mais il n'y a d'apsides inférieures que les points I^1, I^2, I^3, etc., situés entre les centres F et G, où la courbe rencontre son axe, et où, par conséquent, la somme des rayons vecteurs $r+s$, égale à FG, est un *minimum*.

Les formules propres au cas III, ainsi qu'aux trois autres cas du second système, sont établies en supposant que le point A, origine du mouvement, est situé sur l'axe entre les centres F et G. C'est à ce point que sont rapportées les données m°, μ, V, d'après lesquelles on détermine m, m' et M, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 115, et qui servent aussi à déterminer la constante ε, comme l'indiquent les formules du tableau général.

181. Dans le cas III, les intersections de la courbe avec l'axe sont de trois sortes, savoir :

Les intersections B^1, B^2, B^3, etc., qui ont lieu à droite du centre G; elles se déterminent par la valeur $q=\infty$, en faisant successivement $\zeta=\pi$, 3π, 5π, etc.

Les intersections A^1, A^2, A^3, etc., qui ont lieu à gauche du centre F;

elles se déterminent par la valeur $q=0$, en faisant successivement $\zeta=2\pi, 4\pi, 6\pi$, etc.

Enfin les intersections I^1, I^2, I^3, etc., qui ont lieu entre les centres F et G; elles se déterminent par la valeur $p=0$, en faisant successivement $\psi=\pi, 2\pi, 3\pi$, etc.

Ces derniers points sont en même temps les apsides inférieures de la courbe; quant aux apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc., elles seront déterminées par la valeur $p^2=m$, en faisant successivement $\psi=\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$, etc. Ainsi, on voit que la détermination de ces points est liée avec celle des apsides inférieures I^1, I^2, I^3, etc., de manière qu'on peut obtenir les uns et les autres par un même calcul.

182. Pour déterminer avec plus d'uniformité les points B^1, A^1, B^2, A^2, B^3, etc., qui répondent aux valeurs $\zeta=\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$, etc., nous procéderons comme dans le nº 139. Supposons que les valeurs correspondantes de ψ soient $\psi=\gamma', \gamma'', \gamma'''$, etc., il s'agira de résoudre les équations successives $k\mathrm{F}(c, \gamma')+\mathrm{F}(x, \varepsilon)=2\mathrm{F}^1x$, $k\mathrm{F}(c, \gamma'')+\mathrm{F}(x, \varepsilon)=4\mathrm{F}^1x$, etc. Pour cela, soient η et δ' deux arcs déterminés par les équations

$$\mathrm{F}(c, \eta)=\frac{2}{k}\mathrm{F}(x, \varepsilon),\ \mathrm{F}(c, \delta')=\frac{1}{k}\mathrm{F}^1x;$$

appelons ensuite δ'', δ''', etc., les amplitudes qui résultent de la multiplication de la fonction $\mathrm{F}(c, \delta')$ ou $\mathrm{F}\delta'$, ensorte qu'on ait

$$\mathrm{F}(\delta'')=2\mathrm{F}\delta',\ \mathrm{F}\delta'''=3\mathrm{F}\delta',\ \mathrm{F}\delta^{\mathrm{iv}}=4\mathrm{F}\delta', \text{ etc.},$$

c étant le module commun à ces fonctions.

Cela posé, chaque valeur de γ se déduira de celle du δ correspondant qui a le même indice, en résolvant l'équation $\mathrm{F}\gamma+\mathrm{F}\eta=\mathrm{F}\delta$. Il en résulte

$$\frac{p}{c\sqrt{m'}}=\frac{\sin\eta\cos\delta\Delta(\delta)+\sin\delta\cos\eta\Delta(\eta)}{\Delta(\eta)\Delta(\delta)+c^2\sin\eta\cos\eta\sin\delta\cos\delta}.$$

Faisant ensuite $p^2=\frac{\mathrm{GB}^n}{\mathrm{FB}^n}$ ou $\frac{\mathrm{FA}^n}{\mathrm{GA}^n}$, la position du point d'intersection correspondant B^n ou A^n sera déterminée.

183. Pour déterminer semblablement les points $S^1, I^1, S^2, I^2,$

S^3,

S^3, I^3, etc., qui répondent alternativement aux apsides supérieures et inférieures, nous supposerons qu'en faisant successivement $\psi = \frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, etc., on ait les valeurs correspondantes $\zeta = \lambda'$, λ'', λ''', λ^{IV}, λ^{V}, λ^{VI}, etc.; il faudra résoudre les équations successives $kF^{\text{I}}c = F(x, \lambda') - F(x, \varepsilon)$, $2kF^{\text{I}}c = F(x, \lambda'') - F(x, \varepsilon)$, etc. Pour cela, soit δ' une première auxiliaire déterminée par l'équation $F(x, \delta') = kF^{\text{I}}c$; ensuite soient δ'', δ''', δ^{IV}, etc., d'autres auxiliaires qui résultent de la multiplication de la fonction $F(x, \delta')$, ensorte qu'on ait

$$F\delta'' = 2F\delta',\ F\delta''' = 3F\delta',\ F\delta^{\text{IV}} = 4F\delta',\ \text{etc.},$$

x étant le module commun, il restera à résoudre en général l'équation $F\lambda - F\varepsilon = F\delta$, x étant le module commun à ces fonctions, et on en déduira

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{\sin\varepsilon \cos\delta\Delta(\delta) + \sin\delta \cos\varepsilon\Delta(\varepsilon)}{1 - c^2 \sin^2\varepsilon \sin^2\delta + \cos\varepsilon \cos\delta - \sin\varepsilon \sin\delta\Delta(\delta)\Delta(\varepsilon)},$$

formule dans laquelle on a $\Delta(\varepsilon) = \sqrt{(1 - x^2 \sin^2\varepsilon)}$, $\Delta(\delta) = \sqrt{(1 - x^2 \sin^2\delta)}$, et où il faudra donner à λ et δ un même nombre d'accens.

Les points I^1, I^2, I^3, etc., qui sont les apsides inférieures, ou les points d'intersection de la courbe avec l'axe, entre les centres F et G, seront en général déterminés par la valeur $q^2 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\zeta = \frac{FI}{GI}$, où il faudra donner à ζ les valeurs successives $\zeta = \lambda''$, λ^{IV}, λ^{VI}, etc.

Les points S^1, S^2, S^3, etc., qui sont les apsides supérieures, seront déterminés par la valeur constante $p^2 = m$ et la valeur $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta$, dans laquelle il faudra faire successivement $\zeta = \lambda'$, λ''', λ^{V}, etc.

184. Examinons maintenant combien le corps devra faire de révolutions pour arriver à un point de l'orbite déterminé, soit par la valeur $\zeta = L\pi$, soit par la valeur $\psi = I\pi$, L et I étant des nombres entiers. Le nombre de demi-révolutions se trouvera par celui des intersections de la courbe avec l'axe; car nous comptons comme demi-révolution le passage d'une intersection à l'intersection suivante.

Soit d'abord $\zeta = L\pi$; cette valeur conviendra au dernier des points d'intersection B, A^1, B^1, A^2, B^2, etc.; ainsi le nombre de ces points sera L. Mais il y a d'autres points d'intersection I^1, I^2, etc., situés entre F et G; pour en connaître le nombre, il faut avoir la valeur de ψ qui correspond à la valeur $\zeta = L\pi$. Soit donc $\psi = I\pi + \psi'$, I étant un entier et ψ' un arc positif moindre que π, on aura, pour déterminer I et ψ', l'équation

$$I + \frac{F(c, \psi')}{2F^1c} = \frac{2LF^1\varkappa + F(\varkappa, \varepsilon)}{2kF^1c}.$$

Ainsi I sera l'entier le plus grand contenu dans la quantité donnée $\frac{2LF^1\varkappa + F(\varkappa, \varepsilon)}{2kF^1c}$.

I étant ainsi déterminé, le nombre total des demi-révolutions qui correspondent à la valeur $\zeta = L\pi$, sera L + I.

En second lieu, soit donnée la valeur $\psi = I\pi$; le nombre des points d'intersection I^1, I^2, I^3, etc., dont le dernier répond à la valeur $\psi = I\pi$, sera I. Pour avoir le nombre des autres points d'intersection, il faut connaître la valeur correspondante de ζ; soit donc $\zeta = L\pi + \zeta'$, L étant un entier et ζ' un arc positif moindre que π. On aura, pour déterminer L et ζ', l'équation

$$L + \frac{F(\varkappa, \zeta')}{2F^1\varkappa} = \frac{2kIF^1c + F(\varkappa, \varepsilon)}{2F^1\varkappa}.$$

Connaissant L, le nombre total des points d'intersection, ou celui des demi-révolutions du corps dans son orbite, sera I + L.

185. Pour que le corps revienne au point de départ A, après un certain nombre de révolutions, il faut qu'on ait à la fois $\psi = e\pi$ et $\zeta = 2i\pi + \varepsilon$, e et i étant des entiers, ce qui donnera $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa} = \frac{2i}{e}$; ainsi il faut que la quantité $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}$ soit une fraction rationnelle $\frac{2i}{e}$. Alors le nombre des demi-révolutions faites par le corps sera $2i + e$; si e est pair, le corps aura achevé $i + \frac{1}{2}e$ révolutions, et la courbe rentrera sur elle-même. Mais si e est impair, il faudra encore $2i + e$ demi-révolutions pour que la courbe rentre sur elle-même. Ainsi, en général, le nombre des révolutions qui composent une période, sera $i + \frac{1}{2}e$ ou $2i + e$, selon

que e sera pair ou impair : on connaîtra d'ailleurs les nombres i et e par la valeur $\frac{kF'c}{2F'x}$, réduite à l'expression la plus simple $\frac{i}{e}$.

186. Les résultats des deux articles précédens devront être modifiés, si la courbe passe par l'un des foyers F et G.

Pour que le corps parvienne au foyer F, il faut qu'on ait à la fois $p=0$, $q=0$, c'est-à-dire $\psi=n\pi$ et $\zeta=2n'\pi$, n et n' étant des entiers. Alors on aura l'équation de condition $2knF'c=4n'F'x-F(x,\varepsilon)$. Si dans cette équation on regarde $kF'c$, $F'x$ comme seules données, les entiers n et n' étant à volonté, ainsi que $F(x, \varepsilon)$, qui doit seulement être plus petit que $F(x, \pi)$ ou $2F'x$, on voit qu'il y aura une infinité de manières de satisfaire à cette équation, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de suppositions à faire sur l'état initial du mouvement dont dépend la valeur de la constante ε, pour que le corps, après un certain nombre de demi-révolutions, parvienne au centre F.

Cependant lorsque $kF'c$ et $F'x$ seront commensurables entr'eux, si l'on appelle H leur commune mesure, les diverses valeurs de $F(x, \varepsilon)$ ne pourront être que des multiples de $2H$, ainsi leur nombre sera limité.

Pour que le corps parvienne au foyer G, il faut qu'on ait à la fois $\psi=n\pi$ et $\zeta=(2n'+1)\pi$, ce qui donnera l'équation de condition $2knF'c=2(2n'+1)F'x-F(x, \varepsilon)$, équation à laquelle on pourra satisfaire d'une infinité de manières, si $\frac{kF'c}{F'x}$ est irrationnelle ; et d'un certain nombre de manières seulement, si cette quantité est rationnelle.

187. Les cas dont nous venons de parler donnent lieu à exception dans les formules des articles 184 et 185; car si le foyer G est l'un des points d'intersection de la courbe avec l'axe, ce point appartiendra également à la série des points B^1, B^2, B^3, etc., et à celle des points I^1, I^2, I^3, etc. De même, si le foyer F est l'un des points d'intersection de la courbe avec l'axe, ce point appartiendra également à la série des points A^1, A^2, A^3, etc., et à celle des points I^1, I^2, I^3, etc. Ainsi, dans l'énumération des points d'intersection

qui servent à compter les révolutions du corps dans son orbite, il y aurait une unité à retrancher, tant de la somme $L+I$ trouvée art. 184, que de la somme $2i+e$ de l'art. 185.

Mais une remarque plus essentielle à faire, c'est qu'aussitôt que le corps est parvenu à l'un des foyers F et G, les formules générales cessent d'être applicables à la question, puisque, passé ces points, les valeurs de p et q devraient être supposées imaginaires.

On doit être peu surpris de cette difficulté analytique, si l'on considère que la vîtesse du corps devient infinie lorsqu'il parvient à l'un des centres des forces; on peut supposer que la loi de continuité est violée par cette circonstance; du reste, nous ne nous occuperons pas ici de la solution de cette difficulté, et nous ferons généralement abstraction, dans tout ce qui suit, des cas où l'orbite peut passer par l'un des foyers. Nous donnerons cependant ci-après l'exemple d'un cas de ce genre, dans lequel le mouvement se détermine d'une manière qui semble d'abord peu admissible, mais que le calcul justifie suffisamment.

188. Il faut maintenant chercher dans le cas III l'expression générale du temps que le corps met à parvenir à un point quelconque de son orbite. Ce temps est toujours composé de deux parties, l'une t' fonction de ψ, l'autre t'' fonction de ζ; or, comme la valeur de q est la même que dans le cas I, les formules pour déterminer la partie t'', ou plutôt $t''+t'''$, seront les mêmes que dans les art. 142 et suiv.; il faudra seulement observer que dans le résultat on devra retrancher la constante $t''(\varepsilon)+t'''(\varepsilon)$, parce qu'à l'origine du mouvement on a $\zeta=\varepsilon$. Il ne reste donc à trouver que la valeur de la première partie t'.

Si dans l'équation $\frac{dt'}{a\sqrt{2a}}=\frac{p^2}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{P}}$, on substitue les valeurs qui conviennent au cas III, savoir, $p^2=\frac{c^2m'\sin^2\psi}{1-c^2\sin^2\psi}$, $\frac{dp}{\sqrt{P}}=\frac{c}{\sqrt{(Mm)}}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, on aura, en faisant pour abréger, $n=-c^2(1+m')$, $D=c^3m'.\sqrt{\left(\frac{2a^3}{m}\cdot\frac{1+mm'}{A+B}\right)}$,

$$t'=DZ,\quad Z=\int\frac{d\psi\sin^2\psi\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}{(1+n\sin^2\psi)^2}.$$

Or, par les réductions connues, on a

$$2(1+n)Z=-\frac{\Delta\sin\psi\cos\psi}{1+n\sin^2\psi}+\frac{c^2+n}{n^2}F(c,\psi)-\frac{1}{n}E(\psi)+\left(1-\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi(n,c,\psi).$$

Soit Z^1 la valeur de Z lorsque $\psi=\frac{1}{2}\pi$, on aura

$$2(1+n)Z^1=\frac{c^2+n}{n^2}F^1c-\frac{1}{n}E^1c+\left(1-\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi^1(n,c).$$

Or, si l'on fait $n=-1+b^2\sin^2\lambda$, on aura $\sin^2\lambda=1-m$; et en substituant la valeur de $\Pi^1(n,c)$, déduite de la formule de l'art. 101, Ire p., puis faisant, pour abréger, $K=\frac{1}{2}\pi+(F^1c-E^1c)F(b,\lambda)-F^1c.E(b,\lambda)$, on aura

$$2b^2\sin^2\lambda(1-b^2\sin^2\lambda)Z^1=E^1c-b^2\sin^2\lambda F^1c+\frac{\cos^4\lambda-b^2\sin^4\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda\Delta(b,\lambda)}.K.$$

Soit T′ la valeur de t' lorsque $\psi=\frac{1}{2}\pi$, on aura $T'=DZ^1$, ou

$$T'=\frac{D}{2b^2\sin^2\lambda(1-b^2\sin^2\lambda)}\left(E^1c-b^2\sin^2\lambda F^1c+\frac{(\cos^4\lambda-b^2\sin^4\lambda)K}{\sin\lambda\cos\lambda\sqrt{(1-b^2\sin^2\lambda)}}\right).$$

En général, soit $\psi=I\pi+\psi'$, et on aura la partie du temps correspondante

$$t'(\psi)=2IT'+t'(\psi');$$

cette partie devra être jointe à celle qui dépend de la variable ζ, savoir, $t''(\zeta)+t'''(\zeta)-t''(\varepsilon)-t'''(\varepsilon)$.

Du cas particulier où l'on a $m'=m$.

189. Alors on a $c^2=x^2=\frac{1}{2}$, et la valeur de k devient indéterminée. Pour obvier à cet inconvénient, je fais $m'=m(1-2\delta)$; δ étant supposé infiniment petit, j'ai $c^2=\frac{1}{2}(1+\delta)$, $\cos\theta=\frac{\delta m(A+B)}{\alpha(A-Bm^2)}$ $=1-2x^2$. Donc $k^2=\frac{4c^2-2}{1-2x^2}=\frac{2\alpha}{m}\cdot\frac{A-Bm^2}{A+B}$, ou, en substituant la valeur de α,

$$k^4=\frac{4AB}{(A+B)^2}\left(\frac{1+m^2}{m}\right)^2-4.$$

k étant ainsi déterminé, l'équation de la courbe sera

$$kF(\psi)=F(\zeta)-F(\varepsilon),$$

le module commun à ces fonctions étant $c=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

190. Si l'on veut que la courbe décrite soit une courbe algébrique, il faudra faire $k = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une fraction rationnelle à volonté; alors m devra être déterminée par l'équation

$$\frac{4m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{4AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{4e^4}{i^4+4e^4}.$$

Connaissant les nombres i, e, et le rapport $\frac{A}{B}$, on trouvera toujours par cette équation une valeur convenable de m; car le second membre étant toujours plus petit que l'unité, si on le désigne par $\sin^2 h$, on aura $m = \tang \frac{1}{2} h$; et comme on peut prendre $h < \frac{1}{2}\pi$, on aura $m < 1$.

D'après les formules de l'art. 115, le cas de $m' = m$ suppose une vitesse initiale V telle que

$$\frac{1}{2} a V^2 = \frac{\left(\frac{A}{m^\circ} + Bm^\circ\right)(1+m^\circ)^2}{(1+m^\circ)^2 - 2m^\circ \sin^2 \mu};$$

de plus, on doit avoir entre m° et μ l'équation

$$\frac{(A + Bm^{\circ 2})\sin^2 \mu}{(1+m^\circ)^2 - 2m^\circ \sin^2 \mu} = \frac{m^2(A+B)}{1+m^2},$$

d'où l'on déduit

$$\cos^2 \mu = \frac{A - Bm^2 + m^{\circ 2}(B - Am^2)}{2m^\circ m^2(A+B) + (1+m^2)(A + Bm^{\circ 2})};$$

et comme on doit supposer dans ce cas $A > Bm^2$, et $B > Am^2$, il s'ensuit que $\cos \mu$ n'est jamais zéro, et qu'ainsi $\sin \mu$ ne peut surpasser un *maximum* facile à déterminer par la variation de m°. La valeur de m°, qui convient au *maximum* de $\sin \mu$ est $m^\circ = \frac{A - Bm^2}{B - Am^2}$, ce qui donne $\cos^2 \mu = \frac{1 - m^2}{1 + m^2\left(\frac{1}{m^\circ} + 1 + m^\circ\right)}$, et $\sin^2 \mu = \frac{4e^4(1-m^2)}{i^4 + 4e^4(1-m^2)}$.

Ayant donc pris m° et μ dans les limites convenables, l'équation de la courbe sera $i F\psi = e(F\zeta - F\varepsilon)$; et si l'on fait $F\zeta - F\varepsilon = F\zeta'$, elle deviendra $iF\psi = eF\zeta'$. On aura en même temps les valeurs suivantes de p et q :

$$p = \frac{c\sqrt{m}\,.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1-\cos\varepsilon\cos\zeta' - c^2\sin^2\varepsilon\sin^2\zeta' + \sin\varepsilon\sin\zeta'\Delta(\varepsilon)\Delta(\zeta')}{\sin\varepsilon\cos\zeta'\Delta(\zeta') + \sin\zeta'\cos\varepsilon\Delta(\varepsilon)}.$$

Etant donné le rapport $\frac{A}{B}$, on peut varier à l'infini les nombres entiers i et e, ainsi que les données m° et μ; d'où il suit qu'il y a une infinité de courbes algébriques qui satisfont à la question dans l'hypothèse de $m' = m$, laquelle est d'ailleurs comprise dans l'hypothèse $C' + C = 0$, dont nous avons parlé n° 102.

191. Le cas le plus simple s'obtient en faisant $i = 1$, $e = i$, ce qui donnera l'équation de la courbe $\psi = \zeta'$; mais il vaudra autant conserver cette équation sous la forme $F\psi = F\zeta - F\varepsilon$, parce que de là il est facile de déduire algébriquement, suivant les cas, ψ par le moyen de ζ, et réciproquement.

Pour avoir le premier point B^1 d'intersection de la courbe avec l'axe, il faut faire $\zeta = \pi$, ce qui donnera $\psi = \pi - \varepsilon$, et $p^2 = \frac{c^2 m\sin^2\varepsilon}{1-c^2\sin^2\varepsilon} = \frac{GB^1}{FB^1}$. Fig. 25.

Le point d'intersection suivant I^1 se trouvera en faisant $\psi = \pi$, ce qui donne $\zeta = \pi + \varepsilon$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\zeta = -\cot\frac{1}{2}\varepsilon$, et $q = -\frac{1}{\alpha\sqrt{m^\circ}}$; ce point I^1 se trouvera donc en faisant $q^2 = \frac{1}{\alpha^2 m^\circ} = \frac{FI^1}{GI^1}$. Il se confondrait avec le point A, si la valeur initiale de μ était telle, qu'on eût $m^\circ = \frac{1}{\alpha}$; cas où l'on a $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$.

Le troisième point d'intersection A^1 se trouvera en faisant $\zeta = 2\pi$, ce qui donne $\psi = 2\pi - \varepsilon$, $\sin\psi = -\sin\varepsilon$, et $p^2 = \frac{c^2 m\sin^2\varepsilon}{1-c^2\sin^2\varepsilon} = \frac{FA^1}{GA^1}$; ainsi le point A^1 sera situé à la même distance du centre F, que le point B l'est du centre G.

Pour avoir la quatrième intersection, on fera $\psi = 2\pi$, ce qui donnera $\zeta = 2\pi + \varepsilon$; ainsi cette quatrième intersection retombera sur le point A, et la période sera entièrement achevée. Cette période est composée par conséquent de deux révolutions.

Dans le cas de $\varepsilon=\frac{1}{2}\pi$, les points A et I' coïncideraient, et les points A' et B' seraient des apsides supérieures.

Des cas où la courbe devient algébrique.

192. Revenons aux formules générales du cas III; et comme la valeur de $k=\sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2\varkappa^2}\right)}$ ne permet pas de supposer $\varkappa=c$, excepté dans le cas déjà examiné où $c=\sqrt{\frac{1}{2}}$, faisons, pour première hypothèse, $\varkappa=c^\circ$, nous aurons $F(c,\psi)=\frac{1+c^\circ}{2}F(c^\circ,\psi^\circ)$. Soit donc $k.\frac{1+c^\circ}{2}$, ou $\frac{1+c^\circ}{2}\sqrt{\left(\frac{4c^2-2}{1-2c^{\circ 2}}\right)}=\frac{i}{e}$, il en résultera

$$c^\circ=\varkappa=\frac{e^2+2i^2}{3e^2+\sqrt{(8e^4+2e^2i^2+8i^4)}}.$$

Etant donnés les nombres i et e qui servent à déterminer les modules c et $\varkappa$; connaissant de plus le rapport $\frac{A}{B}$, les quantités m et m' ne sont plus arbitraires; car les formules générales qui servent à déterminer α et α' donnent l'équation suivante pour déterminer mm';

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2}=\frac{4AB}{(A+B)^2}\cdot\frac{b^2c^2(1-2\varkappa^2)^2}{4b^2c^2(1-2\varkappa^2)^2+(2c^2-1)^2},$$

ensuite on aura $m=\frac{c}{b}\sqrt{(mm')}$, et $m'=\frac{b}{c}\sqrt{(mm')}$, $\alpha^2=\frac{B-Amm'}{A-Bmm'}$. Connaissant m et m', les équations du n° 115 donneront cette relation entre m° et μ,

$$\sin^2\mu=\frac{(1+m^\circ)^2mm'(A+B)}{m^\circ(m-m'+2mm')(A+B)+(1+mm')(A+Bm^{\circ 2})},$$

qui permet de prendre m° à volonté, pourvu que la valeur de $\sin\mu$ qui en résulte soit plus petite que l'unité; enfin la vitesse initiale V sera donnée par l'équation

$$\tfrac{1}{2}aV^2=\frac{m-m'+2mm'}{1+mm'}(A+B)+\frac{A}{m^\circ}+Bm^\circ.$$

Avec toutes ces conditions, l'équation de la courbe décrite sera $iF\psi^\circ=e(F\zeta-F\varepsilon)$; on aura en même temps les équations....

sin

$\sin(2\psi - \psi^\circ) = c^\circ \sin\psi^\circ$, $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tang \frac{1}{2}\zeta$. On obtiendra ainsi une infinité de courbes algébriques qui satisferont aux formules du cas III.

193. Si l'on fait $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$ et $\psi = I\pi$, ou $\psi^\circ = 2I\pi$, le corps reviendra au point de départ A, pourvu que les entiers L et I satisfassent à l'équation $Ii = eL$, qui donne $L = i$, $I = e$; or, depuis la valeur $\zeta = \varepsilon$ jusqu'à la valeur $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$, il devra y avoir 2L intersections, soit à droite de G, soit à gauche de F; la valeur $\psi = I\pi$ indique pareillement I intersections entre F et G; donc le nombre total des intersections, ou celui des demi-révolutions, sera $2L + I$. Si ce nombre est pair, la période sera terminée après $L + \frac{1}{2}I$ révolutions; mais si I est impair, il faudra encore un pareil nombre de demi-révolutions pour terminer la période. Ainsi, en général, l'orbite rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions $L + \frac{1}{2}I$ ou $2L + I$, selon que $2L + I$ sera pair ou impair. Il faut, comme nous l'avons déjà dit, excepter les cas où la courbe passerait par l'un des centres F et G; car la continuation du mouvement au-delà de ce centre n'est point donnée par nos formules. J'observerai, au reste, que si dans la fraction $\frac{i}{e}$, toujours supposée réduite aux moindres termes, le dénominateur e est pair, la courbe ne passera par aucun des centres F et G; alors la période sera de $i + \frac{1}{2}e$ révolutions; si au contraire le dénominateur e est impair, la courbe passera toujours par l'un des centres F et G; savoir, par le centre F, si i est pair, et par le centre G, si i est impair.

194. La supposition $x = c^\circ$ fait connaître une infinité de courbes algébriques qui satisfont au cas III; on en trouverait de même une infinité par chacune des suppositions $x = c^{\circ\circ}$, $x = c^{\circ\circ\circ}$, etc.; mais il nous paraît superflu d'entrer dans de nouveaux détails à ce sujet.

Développement du cas IV.

195. Les observations générales que nous avons faites sur les formules du cas III s'appliquent avec très-peu de modifications

58

aux formules du cas IV; nous nous dispenserons donc de donner une explication détaillée de celles-ci; nous remarquerons seulement que le temps se déterminera par les formules déjà données, savoir, la partie t' qui dépend de ψ, par les formules de l'art. 188, et la partie t'' qui dépend de ζ, par les formules de l'art. 164.

196. A l'égard des courbes algébriques qui peuvent satisfaire au cas IV, il est facile d'en trouver tant de séries qu'on voudra. L'hypothèse la plus simple pour obtenir de telles courbes, consiste à faire $c=\varkappa$ et $k=\sqrt{\left(\frac{2c^2-1}{2-c^2}\right)}=\frac{i}{e}$; il en résultera

$$c^2=\varkappa^2=\frac{2i^2+e^2}{2e^2+i^2},\qquad b^2=\frac{e^2-i^2}{2e^2+i^2}.$$

Ainsi pourvu qu'on prenne $e>i$, on aura une valeur convenable du module c, et l'équation de la courbe sera $i\mathrm{F}\psi=e(\mathrm{F}\zeta-\mathrm{F}\varepsilon)$; on aura en même temps $p=\frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{tang}\zeta$.

Ayant pris à volonté la fraction $\frac{i}{e}<1$, et le rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, on connaîtra d'abord le module c, par la formule précédente; ensuite mm' devra être déterminé par l'équation

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2}=\frac{\mathrm{AB}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2}\cdot\frac{c^2(2-c^2)^2}{1+c^6}.$$

Connaissant mm', on aura $m=\frac{c}{b}\sqrt{(mm')}$, et $m'=\frac{b}{c}\sqrt{(mm')}$. Enfin, les deux équations de l'art. 192 donneront, l'une la relation entre m° et $\sin\mu$, l'autre la valeur de la vîtesse initiale V, pour que la courbe dont il s'agit soit décrite.

On trouvera d'ailleurs, comme dans le n° 193, que la courbe rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions $i+\frac{1}{2}e$, si e est pair. Lorsque e est impair, la courbe passe par l'un des foyers F et G, et la période cesse d'avoir lieu, ou ne peut être déterminée que par d'autres considérations.

Du cas particulier où l'on a $\mathrm{B}=\mathrm{A}mm'$.

197. Dans ce cas on a $\alpha'=0$, $\varkappa=1$, $k=\sqrt{(2c^2-1)}$, et l'équa-

tion de la courbe devient $k\mathrm{F}(c,\psi)=\mathrm{F}(1,\zeta)-\mathrm{F}(1,\varepsilon)$, ou

$$2k\mathrm{F}(c,\psi)=\log\left(\frac{1+\sin\zeta}{1-\sin\zeta}\right)-\log\left(\frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\right).$$

Cette courbe n'est point algébrique, mais elle est d'une forme qui mérite d'être remarquée.

On voit que l'arc ζ a pour limite $\frac{1}{2}\pi$, et qu'il n'atteint cette limite que lorsque ψ est devenu infini; d'ailleurs, comme ζ augmente en même temps que ψ, et que lorsque $\psi=0$ on a $\zeta=\varepsilon$, il faut, à plus forte raison, qu'on ait $\varepsilon<\frac{1}{2}\pi$; c'est ce qu'on voit immédiatement par l'équation $\operatorname{tang}\varepsilon=\sqrt{(\alpha m^\circ)}$; on peut même prouver que ε est $<\frac{1}{4}\pi$; car on a, dans ce cas, $\alpha=\frac{m-m'}{1-mm'}$, et par les équations de l'art. 192, on trouve

$$\alpha m^\circ=1-\frac{mm'}{1-mm'}(1+m^\circ)^2\cot^2\mu=\operatorname{tang}^2\varepsilon.$$

198. Puisque dans la courbe dont il s'agit, la valeur de ζ est toujours comprise entre ε et $\frac{1}{2}\pi$, cette courbe ne peut rencontrer son axe qu'entre les points F et G, ou même qu'entre les points A, G. Ces points d'intersection sont les apsides inférieures successives I^1, I^2, I^3, etc.; ils répondront aux valeurs $\psi=\pi$, 2π, 3π, etc.

Quant aux apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc., toutes placées sur le périmètre de l'ellipse $p^2=m$, elles devront répondre aux valeurs $\psi=\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, etc.

Supposons qu'aux valeurs successives $\psi=\frac{1}{2}\pi,\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi,\frac{5}{2}\pi$, etc. répondent les valeurs............... $\zeta=\lambda',\lambda'',\lambda''',\lambda^{\text{IV}},\lambda^{\text{V}}$, etc., le premier terme λ' de cette dernière suite sera déterminé par l'équation $2k\mathrm{F}^1c=\log\left(\frac{1+\sin\lambda'}{1-\sin\lambda'}\right)-\log\left(\frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\right)$. Soit $2k\mathrm{F}^1c=\eta$, et on aura

$$\frac{1+\sin\lambda'}{1-\sin\lambda'}=\frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\,e^{\eta}.$$

On aura de même $\frac{1+\sin\lambda''}{1-\sin\lambda''}=\frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\,e^{2\eta}$, et en général, pour un indice quelconque i,

$$\frac{1+\sin\lambda^i}{1-\sin\lambda^i}=\frac{1+\sin\varepsilon}{1-\sin\varepsilon}\,e^{i\eta}.$$

De là on voit que la suite ε, λ', λ'', λ''', λ^{iv}, etc. est continuellement croissante depuis le terme ε ou λ°, jusqu'au dernier terme $\frac{1}{2}\pi$. Il en résulte que les points I^1, I^2, I^3, etc. s'approchent continuellement du centre G, avec lequel ils finissent par se confondre, et que les points S^1, S^2, S^3, S^4, etc. s'approchent de même continuellement du point L, avec lequel ils finissent par coïncider. Mais ces coïncidences n'ont lieu qu'après un nombre de termes infini.

Fig. 26. 199. Cela posé, on voit que la courbe est composée d'une infinité de parties AS^1I^1, $I^1S^2I^2$, $I^2S^3I^3$, etc., situées alternativement des deux côtés de l'axe FG, lesquelles avancent graduellement par leurs bases AI^1, I^1I^2, I^2I^3, etc., jusqu'au point G, et par leurs sommets jusqu'au point L, qui est le dernier terme de la suite supérieure S^1, S^3, S^5, etc., comme celui de la suite inférieure S^2, S^4, S^6, etc.

Cette courbe ainsi composée d'une infinité de spires juxta-posées qui diminuent continuellement de largeur, et dont les sommets convergent vers le point L, ne ressemble en rien aux autres courbes que nous avons décrites jusqu'à présent; et c'est un résultat de calcul assez frappant, qu'une telle courbe puisse être décrite par l'action de deux forces qui, considérées séparément, ne pourraient faire décrire qu'une ellipse. Si l'on demandait, dans ce cas, quel est le temps moyen d'une révolution, il faudra entendre par demi-révolution le passage d'un point d'intersection tel que I^3 au point d'intersection suivant I^4, pendant lequel ψ varie depuis 3π jusqu'à 4π. En général, si l'on calcule, par les formules données ci-dessus, le temps écoulé depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = I\pi$, ce temps sera celui des I premières demi-révolutions; et en le divisant par I on aura le temps moyen d'une demi-révolution, lequel approchera d'autant plus d'une valeur constante, que I sera plus grand; d'où il suit qu'à mesure que ψ augmente, les temps des demi-révolutions tendent de plus en plus vers l'égalité.

On pourrait aussi considérer le mouvement du corps comme une espèce de mouvement d'oscillation, dans lequel le corps passe successivement d'une apside supérieure telle que S^2 à l'apside suivante S^3, puis de S^3 à S^4, et ainsi de suite. Ces sortes d'oscillations vont en diminuant d'étendue, à mesure que le corps s'approche du centre G, mais elles finissent par s'effectuer toutes dans le même temps.

Développement du cas V.

200. Les cas I et II, et tous ceux qui en dépendent, ont un caractère commun et distinctif qui consiste en ce que les intersections de la courbe avec l'axe ne peuvent avoir lieu que dans les parties DE, KL situées entre les deux ellipses terminatrices. Les cas III et IV se distinguent des premiers, en ce que les intersections de la courbe avec son axe ont lieu, non-seulement dans les deux parties DF, GL comprises entre les ellipses $p^2 = m, p^2 = 0$, mais encore dans la partie de l'axe FG comprise entre les deux centres. Les cas V et VI, qui nous restent à examiner, se distinguent des autres en ce que les intersections de la courbe avec l'axe n'ont lieu que dans les deux parties FG, GL qui sont adjacentes au centre G. Il y a donc dans ces deux derniers cas une partie de l'axe DE, même une partie FI° de la droite FG, déterminée par la valeur $\frac{\text{FI°}}{\text{GI°}} = \alpha$, où il ne peut y avoir aucune intersection de la courbe. Cela s'explique par la prépondérance de la force qui agit au centre G, soit à raison de l'intensité, soit à raison d'une moindre distance.

Cette propriété des deux cas V et VI qui les distingue de tous les autres, est fondée sur les valeurs $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}$ et $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$, qui ne peuvent jamais se réduire à zéro. Ainsi, il n'y a aucune intersection entre les points E et F; et la moindre valeur de q^2 étant α, si l'on prend sur la droite de FG le point I° tel que $\frac{\text{FI°}}{\text{GI°}} = \alpha$, il ne pourra y avoir non plus aucune intersection entre F et I°, puisque cette intersection supposerait une valeur de q^2 plus petite que α.

201. Nous avons déjà suffisamment expliqué la manière de trouver les diverses intersections de la courbe avec son axe. On sait que les points B¹, B², B³, etc., situés sur la partie GL de l'axe, se trouvent en faisant $q = \infty$, ce qui donne successivement $\zeta = \pi, 2\pi, 3\pi$, etc. (On ne fait pas $\zeta = 0$, parce que la première valeur de ζ étant ε, la

valeur $\zeta = 0$ se rapporterait à une époque antérieure à l'origine du mouvement.) Soit, en général, γ^n la valeur de ψ qui répond à la valeur $\zeta = n\pi$, le point correspondant B^n se déterminera par l'équation $\frac{c^2 m' \cdot \sin^2 \gamma^n}{1 - c^2 \sin^2 \gamma^n} = \frac{GB^n}{FB^n}$. A l'égard des points d'intersection I^1, I^2, I^3, etc., situés entre les centres F et G, ils font partie de la suite des apsides tant supérieures qu'inférieures S^1, I^1, S^2, I^2, S^3, I^3, etc., à laquelle répondent les valeurs $\psi = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi$, etc. Appelant donc λ', λ'', λ''', etc., les valeurs correspondantes de ζ, et calculant ces valeurs comme dans l'art. 183, on connaîtra à la fois les points I^1, I^2, I^3, etc., qui sont censés les apsides inférieures de la courbe, et ses apsides supérieures S^1, S^2, S^3, etc.

202. Pour que la courbe rentre sur elle-même après un certain nombre de révolutions, il faut qu'on ait à la fois $\psi = 2I\pi$, $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$, I et L étant des entiers, ce qui donnera $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa} = \frac{L}{I}$. Ainsi, toutes les fois que $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}$ sera une quantité rationnelle, son expression la plus simple $\frac{L}{I}$ fera connaître les valeurs $\psi = 2I\pi$, $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$, qui ont lieu après l'achèvement de la première période; et cette période devra se renouveler à l'infini.

Par la valeur $\psi = 2I\pi$, on voit que le nombre des points d'intersection I est 2I; et par la valeur $\zeta = 2L\pi + \varepsilon$, on voit que le nombre des points d'intersection B est 2L; et comme chaque intersection répond à une demi-révolution, il s'ensuit que la courbe rentrera sur elle-même après un nombre de révolutions égal à $I + L$.

203. Si le rapport $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}$ est irrationnel, l'orbite sera composée d'une infinité de révolutions inégales entr'elles; et il n'est aucun point de l'axe, dans toute la partie IGL prise à compter du point I où l'on a $\frac{FI}{GI} = \alpha$, qui ne puisse être regardé comme un point d'intersection de la courbe avec l'axe.

Au contraire, si la quantité $\frac{kF^1c}{F^1\varkappa}$ est rationnelle, il n'y aura qu'un certain nombre d'intersections, dont on a vu que le nombre est $2I+2L$. Mais la question est de savoir si le centre G peut être un de ces points d'intersection.

Pour qu'il en soit un, il faut qu'on ait à la fois $\psi = i\pi$, $\zeta = l\pi$, i et l étant des entiers. Or, si d'après l'hypothèse $\frac{kF'c}{F'\varkappa} = \frac{L}{I}$, on fait $F'\varkappa = I\chi$, $kF'c = L\chi$, l'équation de la courbe $kF(c, \psi) = F(\varkappa, \zeta) - F(\varkappa, \varepsilon)$ donnera dans ce cas

$$F(\varkappa, \varepsilon) = 2\chi(Il - Li).$$

Et comme en vertu de l'indétermination des nombres i et l, on peut faire à volonté $Il - Li = 1, 2, 3$, etc., il s'ensuit que le cas dont il s'agit aura effectivement lieu, si la fonction $F(\varkappa, \varepsilon)$ est égale à 2χ, ou à un multiple de 2χ, moindre cependant que $2I\chi$, puisque ε doit toujours être moindre que π. Ces cas seront une exception à la loi générale de l'art. 202; car lorsque le corps parvient à l'un des centres des forces, la continuation de son mouvement ne peut se déterminer par les mêmes formules, qu'en altérant infiniment peu les élémens ou l'un des élémens de l'orbite, de manière qu'elle ne passe pas tout-à-fait par le centre, mais qu'elle en approche jusqu'à une distance aussi petite qu'on voudra.

204. Si l'on veut avoir l'expression générale du temps dans le cas V, la première partie t' qui dépend de ψ se déterminera comme dans l'art. 188. Quant à la seconde partie t'', on la trouvera par la formule $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, dans laquelle il faut substituer les valeurs $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{(M\alpha - A\alpha)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$, ce qui donnera, en faisant, pour abréger, $D'' = \sqrt{\left(\frac{2a^3}{\alpha^3} \cdot \frac{1+mm'}{B - Amm'}\right)} = \frac{c}{k\alpha}\sqrt{\left(\frac{2a^3}{m} \cdot \frac{1+mm'}{A+B}\right)}$, $\nu = \frac{1}{\alpha}$,

$$t'' = D''\int \frac{d\zeta \sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Soit $N = (\nu+1)(\nu+\varkappa^2)$, on aura, par les réductions connues,

$$t'' = \frac{D''}{2N}\left[-\frac{\nu\Delta\sin\zeta\cos\zeta}{1+\nu\sin^2\zeta} + \left(1+\frac{\varkappa^2}{\nu}\right)F(\varkappa,\zeta) - E(\varkappa,\zeta) + \left(\nu - \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\Pi(\nu,\varkappa,\zeta)\right];$$

et si on appelle T″ la valeur de t'' lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$T'' = \frac{D''}{2N}\left[\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)F^1x - E^1x + \left(\nu - \frac{x^2}{\nu}\right)\Pi^1(\nu, x)\right].$$

D'ailleurs, en faisant $\alpha = \text{tang}^2\delta$, ou $\nu = \cot^2\delta$, et $\mathcal{C}^2 = 1 - x^2$, on a

$$\frac{\Delta(\mathcal{C}, \delta)}{\sin\delta\cos\delta}[\Pi^1(\nu, x) - \sin^2\delta F^1 x] = \tfrac{1}{2}\pi + (F^1x - E^1x)F(\mathcal{C}, \delta) - F^1xE(\mathcal{C}, \delta);$$

donc, en appelant K′ le second membre de cette équation, il viendra

$$T'' = \frac{D''}{2N}\left[\left(1+\frac{x^2+\nu}{\nu+1}\right)F^1x - E^1x + \left(\nu - \frac{x^2}{\nu}\right)\frac{K'\sin\delta\cos\delta}{\Delta(\mathcal{C}, \delta)}\right].$$

D'après ces deux formules, il sera aisé de trouver le temps employé par le corps à parvenir à un point quelconque de son orbite, déterminé par les valeurs $\psi = I\pi + \psi'$, $\zeta = L\pi + \zeta'$, entre lesquelles on a l'équation

$$\frac{kF^1c}{F^1x}\left(2I + \frac{F(c, \psi')}{F^1c}\right) = 2L + \frac{F(x, \zeta') - F(x, \varepsilon)}{F^1x}.$$

Des courbes algébriques qui satisfont au cas V.

205. Soit d'abord $c = x$, et $k = \sqrt{\left(\frac{1-2c^2}{1+c^2}\right)} = \frac{i}{e}$, on aura

$$c^2 = x^2 = \frac{e^2 - i^2}{2e^2 + i^2}.$$

Ainsi, pourvu qu'on prenne $e > i$, on aura une valeur convenable du module c. Soit donné en outre le rapport $\frac{A}{B}$, on aura, pour déterminer mm', l'équation

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2} = \frac{b^2(1+c^2)^2}{1+b^6}\cdot\frac{AB}{(A+B)^2},$$

ensuite m et m' seront connus par les valeurs $m = \frac{c}{b}\sqrt{mm'}$, $m' = \frac{b}{c}\sqrt{mm'}$.

Ces valeurs ayant lieu, ainsi que les deux équations de l'art. 192, entre

entre les données m°, μ et V, relatives à l'état initial, la courbe décrite aura pour équation $i\mathrm{F}(\psi) = e(\mathrm{F}\zeta - \mathrm{F}\varepsilon)$, c étant le module commun; on aura en même temps

$$p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}},\ q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta};$$

et ce système comprendra une infinité de courbes algébriques.

206. Soit, par exemple, $e=2$, $i=1$, on aura $c^2=\frac{1}{3}$, $b^2=\frac{2}{3}$, et la valeur de mm' devra être tirée de l'équation $\frac{mm'}{(1+mm')^2} = \frac{32}{35}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2}$, ensuite on aura $m=\sqrt{(\frac{1}{2}mm')}$, $m'=2m$. Supposons de plus, que la position initiale du point A est telle, qu'on a $\mathrm{F}^1\varepsilon = \frac{3}{2}\mathrm{F}^1c$, ce qui donne $\sin\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$, $\cos\varepsilon = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(1+b)}}$; voici comment on trouvera la figure de la courbe d'après son équation $\frac{1}{2}\mathrm{F}\psi = \mathrm{F}\zeta - \frac{3}{2}\mathrm{F}^1c$.

Pour avoir le premier point d'intersection B^1, soit $\zeta=\pi$, on aura $\psi=\frac{1}{2}\pi$, et $p^2=m$; donc ce point coïncide avec l'extrémité L du diamètre de l'ellipse $p^2=m$, et il est en même temps une apside supérieure de la courbe. Fig. 27.

Soit ensuite $\psi=\pi$, afin d'avoir le point d'intersection I^1, on aura $\mathrm{F}\zeta=\frac{5}{2}\mathrm{F}^1c$, ou $\zeta=2\pi-\varepsilon$; ainsi le point I^1 coïncide avec le point A, ce qui, d'ailleurs, résulte de ce que la tangente en L est perpendiculaire à l'axe, et qu'ainsi les deux parties de la trajectoire situées des deux côtés de l'axe doivent être égales et semblables.

Pour avoir la seconde apside supérieure S^2, soit $\psi=\frac{3}{2}\pi$, on aura $\mathrm{F}\zeta=3\mathrm{F}^1c$, et par conséquent $\zeta=\frac{3}{2}\pi$; ainsi le point S^2 sera déterminé par les valeurs $p^2=m$, $q^2=\alpha$.

Du point S^2, le corps reviendra vers l'axe, et le coupera au point où $\psi=2\pi$; alors on aura $\mathrm{F}\zeta=\frac{7}{2}\mathrm{F}^1c=\mathrm{F}\pi+\mathrm{F}\varepsilon$, et par conséquent $\zeta=\pi+\varepsilon$. Donc ce point d'intersection n'est autre que le point A.

207. On pourrait penser d'abord que le corps qui a suivi la route $\mathrm{A}m''\mathrm{S}^2$ pour aller à l'apside supérieure S^2, revient par une autre route au point A, et qu'il décrit une foliole dont la pointe aboutit au point A; mais cette supposition ne s'accorderait pas avec le principe général (n° 135), que jamais plus de deux branches de courbe ne se

rencontrent en un même point A. Il faut donc que la seconde branche de la foliole, si elle existe, ait au point A la même tangente que l'une ou l'autre des branches Am, Am'.

Mais en examinant la chose avec plus d'attention, on reconnaît bientôt que cette foliole n'est qu'un même arc de courbe $S^2m''A$, comme si sa largeur était infiniment petite dans toute son étendue.

Pour s'assurer de l'existence de cette singularité, soit m'' un point de l'orbite avant le point S^2 où l'on a $\psi = \frac{3}{2}\pi - \sigma$, $\zeta = \frac{3}{2}\pi - \theta$, et m''' un point de l'orbite passé le point S^2, où l'on a $\psi = \frac{3}{2}\pi + \sigma$, $\zeta = \frac{3}{2}\pi + \theta'$, on aura les deux équations

$$\tfrac{1}{2}F\left(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma\right) = F\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right),$$
$$\tfrac{1}{2}F\left(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma\right) = F\left(\tfrac{1}{2}\pi + \theta'\right);$$

d'où résulte $\theta' = \theta$. Donc les deux points m'', m''' répondent aux mêmes valeurs de p et q, et ainsi ils ne font qu'un seul et même point.

De là on voit que le corps, après être parvenu à l'apside supérieure S^2, doit revenir sur ses pas en décrivant précisément le même arc de courbe de S^2 en A, qu'il avait décrit en allant de A à S^2.

208. Ce résultat ne peut avoir lieu à moins que la vîtesse au point S^2 ne soit nulle. En effet, la vîtesse en un point quelconque étant nommée v, on aura, d'après l'équation (1),

$$\tfrac{1}{2}av^2 = \left(\frac{A}{p^2+q^2} + \frac{B}{1+p^2q^2}\right)(1-p^2)(1+q^2) + \tfrac{1}{2}aV^2 - \left(\frac{A}{m^\circ} + B\right)(1+m^\circ).$$

Faisant $p^2 = m$, $q^2 = \alpha$, et substituant pour $\frac{1}{2}aV^2$ la valeur trouvée art. 115, dans laquelle on fera $m' = 2m$, on aura au point S^2

$$\tfrac{1}{2}av^2 = \frac{(1-m)^2}{2m^2+1}\left[\frac{A(1-2m\alpha)}{m+\alpha} + \frac{B(\alpha-2m)}{1+\alpha m}\right].$$

Pour que v se réduise à zéro, il faut donc qu'on ait

$$\frac{A}{B} = \frac{2m^2 + m\alpha - \alpha^2}{1 - m\alpha - 2m^2\alpha^2}.$$

Mais puisque $\varkappa^2 = \frac{1}{3} = \frac{\alpha'}{\alpha}$, on a $\alpha' = \frac{1}{3}\alpha$ et $\alpha + \alpha'$ ou $\frac{4}{3}\alpha = \frac{m(A+B)}{B-2Am^2}$; de ces deux équations combinées résulte une nouvelle valeur de $\frac{A}{B}$, savoir, $\frac{A}{B} = \frac{6m^2 + \alpha^2}{3 + 2m^2\alpha^2}$; donc $\alpha^2 = \frac{3A - 6Bm^2}{B - 2Am^2} = \frac{9}{16} m^2 . \frac{(A+B)^2}{(B - 2Am^2)^2}$; cette dernière se réduit à $\frac{2m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{32}{35} . \frac{AB}{(A+B)^2}$, et s'accorde par conséquent avec l'équation qui sert à déterminer $mm' = 2m^2$. Il est démontré ainsi, d'une manière générale, que la vîtesse au point S^2 est nulle.

Cette vérification deviendrait plus facile dans les cas particuliers. Soit, par exemple, $\frac{A}{B} = \frac{5}{7}$, on aura $m = \frac{1}{2}$, $m' = 1$, $\alpha = 1$, ce qui donne immédiatement $v = 0$.

209. On voit dans cet exemple que le corps parti de A décrit Fig. 27. d'abord la feuille $AmLm'A$; que, revenu au point A, avec une vîtesse égale à la vîtesse initiale, mais dirigée de manière que l'angle FAm'' est le supplément de FAm, il se meut dans la branche $Am''S^2$, jusqu'au point S^2, dans lequel cette branche rencontre l'ellipse terminatrice $p^2 = m$. Le corps ayant perdu toute sa vîtesse au point S^2, il revient sur ses pas et décrit la même courbe $S^2m''Am'LmA$, qui le ramène de nouveau au point A; et enfin il décrit au-dessous de l'axe la branche AS^4, entièrement semblable à AS^2; il fait ainsi des oscillations dont le milieu est au point L, et qui se terminent alternativement aux points S^2 et S^4.

Au reste, une courbe algébrique ne pouvant pas être terminée brusquement en S^2 et S^4, les branches AS^2, AS^4 ont sans doute une continuation qui ne peut plus être représentée par les valeurs $p = \frac{c\sqrt{m'} - \sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sin\zeta}$, mais qu'il serait facile de construire par d'autres moyens.

210. Pour avoir la durée d'une oscillation, il suffira de doubler le temps que le corps met à parcourir la partie $S^2Am'L$, ou la partie S^4AmL. Nous avons fixé l'origine du mouvement au point A; mais on peut supposer qu'avant d'arriver en A le corps était parti du point S^4; relativement au point A, où l'on a $\psi = 0$ et $\zeta = \varepsilon$, le point S^4, qui appartient à une époque antérieure, est représenté par les valeurs $\psi = -\frac{1}{2}\pi$, $\zeta = -\frac{3}{2}\pi$, et le point L l'est par les

valeurs $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\zeta = \pi$. Donc si l'on désigne par $t'(\psi)$ et $t''(\zeta)$, les parties du temps qui dépendent des variables ψ et ζ, ces parties étant prises de manière qu'elles s'évanouissent lorsque les variables sont nulles, et qu'on appelle T le temps d'une oscillation, on aura $\frac{1}{2}\mathrm{T} = 2t'(\frac{1}{2}\pi) + 5t''(\frac{1}{2}\pi)$, ou, suivant les dénominations déjà usitées, $\mathrm{T} = 4\mathrm{T}' + 10\mathrm{T}''$.

Dans le cas pris pour exemple, où l'on a $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{5}{7}$, $m = \frac{1}{2}$, $m' = 1$, $\alpha = 1$, on trouvera, toutes réductions faites,

$$\mathrm{T} = \frac{a\sqrt{2a}}{4\sqrt{(\mathrm{A}+\mathrm{B})}}\left(21\mathrm{F}^1 c - 3\mathrm{E}^1 c + \frac{7\mathrm{K}'}{b}\right),$$

formule où $\mathrm{K}' = \frac{1}{2}\pi + (\mathrm{F}^1 c - \mathrm{E}^1 c)\mathrm{F}(b, \frac{1}{4}\pi) - \mathrm{F}^1 c\mathrm{E}(b, \frac{1}{4}\pi)$.

211. Les courbes algébriques dont nous venons de donner un exemple, résultent de la supposition $x = c$; il serait facile d'obtenir d'autres séries infinies de courbes algébriques, en supposant $x = c^{\circ}$, $x = c^{\circ\circ}$, etc. Mais nous n'entrerons pas dans ces détails, et nous préférons de traiter encore avec toute l'étendue nécessaire, un cas fort remarquable compris dans les formules précédentes.

Soit encore $e = 2$, $i = 1$, on aura $c^2 = \frac{1}{3}$, $b^2 = \frac{2}{3}$, $\frac{mm'}{(1+mm')^2} = \frac{32}{35} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2}$, $m = \frac{1}{2}\sqrt{mm'}$, $m' = 2m$, $\frac{\alpha^2 + 3}{4\alpha} = \frac{1 - 2m^2}{m}$, $\alpha' = \frac{1}{3}\alpha$; ces quantités seront toutes connues, lorsqu'on donnera le rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

Supposons, de plus, que la tangente en A est perpendiculaire à l'axe; on aura $\mu = \frac{1}{2}\pi$, et l'équation entre μ et m° de l'art. 192, combinée avec l'équation précédente entre α et m, donnera $\alpha^2 - 4\alpha m^{\circ} + 3m^{\circ 2} = 0$; d'où résultent deux valeurs de m°, savoir, $m^{\circ} = \alpha$ et $m^{\circ} = \frac{1}{3}\alpha$. Enfin la vitesse initiale se déterminera par l'équation $\frac{\frac{1}{2}a\mathrm{V}^2}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = \frac{(1+m^{\circ})^2}{m^{\circ}} \cdot \frac{2m^2}{1+2m^2}$.

Au moyen de ces données, l'équation de la courbe décrite sera $\mathrm{F}\psi = 2\mathrm{F}\zeta$, et on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{2m}\,.\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{\alpha}.\frac{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$.

Soit, par exemple, $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{15}{7}$, on trouvera $mm' = \frac{3}{8}$, $m = \frac{1}{4}\sqrt{3}$,

$m' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\alpha = c$; $\alpha' = \frac{1}{3}c$; et si l'on prend $m^\circ = c$, on aura... $\frac{\frac{1}{2}aV^2}{A+B} = \frac{6}{11}(1+2c)$.

212. Voyons maintenant, d'après ces équations, quelle est la figure de la courbe. A partir du point A, le corps monte vers l'apside supérieure S', où l'on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $F\zeta = \frac{1}{2}F'c$, $\sin\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1+b)}}$. Ce point est donc déterminé par les valeurs $p^2 = m$, $q^2 = \alpha(1+b)$. Fig. 28

Pour avoir le premier point d'intersection B', il faut faire $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $\psi = \pi$; donc on a à la fois $p = 0$, $q = \infty$, et par conséquent le point d'intersection B' se confond avec le centre G. Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, puisque la continuation du mouvement au-delà de G ne paraît pas pouvoir être donnée par nos formules, ou du moins est l'objet d'une difficulté particulière.

213. Si l'on veut connaître l'angle que la courbe fait au point G avec l'axe, il faut considérer un point infiniment proche de G. Soit, dans ce point, $\zeta = \frac{1}{2}\pi - \delta$, et $\psi = \pi - \eta$; δ et η étant infiniment petits, on aura $F\zeta = F'c - \frac{\delta}{b}$, $F\psi = 2F'c - \eta$. Substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe $F\psi = 2F\zeta$, on aura $\eta = \frac{2\delta}{b}$. Donc, au point m, infiniment proche de G, on a $p = c\sqrt{2m.\eta}$, $q = \frac{b\sqrt{\alpha}}{\delta}$, et par conséquent $pq = 2c\sqrt{(2m\alpha)}$. Soit θ l'angle de la tangente en G avec l'axe, θ sera la valeur de ω au point G, et on aura $\tang\frac{1}{2}\theta = pq = 2c\sqrt{(2m\alpha)}$.

Ainsi, dans l'exemple de l'art. 211, $\tang\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} = b$, et $\tang\theta = \sqrt{24}$, ou $\theta = 78^\circ 27'.78$ à peu près.

214. Il y a un cas où l'on aurait $\theta = 90^\circ$, c'est lorsque $m\alpha = \frac{1}{8c^2} = \frac{3}{8}$. Or, on a $\frac{4}{3}\alpha = \frac{m(A+B)}{B-2Am^2}$; ainsi, en faisant $\alpha m = \frac{3}{8}$, on aura l'équation $\frac{1}{2} = \frac{m^2(A+B)}{B-2Am^2}$, d'où résulte $2m^2 = \frac{B}{2A+B}$; substituant cette valeur dans l'équation $\frac{2m^2}{(1+2m^2)^2} = \frac{3}{35} \cdot \frac{AB}{(A+B)^2}$, on aura $\frac{B}{A} = \frac{58}{35}$. Tel est donc le rapport qu'il doit y avoir entre les forces A et B, pour que l'angle θ soit de 90°; dans ce cas on aurait $m = \frac{\sqrt{58}}{16}$, $\alpha = \frac{6}{\sqrt{58}} = m^\circ$.

Par la valeur de m° égale au rapport $\frac{FA}{GA}$, on connaît la position du point A, et la vîtesse initiale V dirigée perpendiculairement à FG, telles, que le corps, après une seule demi-révolution, tombera perpendiculairement sur l'axe au point G. Dans ce cas, il n'y a pas de raison pour que le corps ne continue son mouvement au-dessous de l'axe, en décrivant une courbe égale et semblable à celle qu'il a décrite au-dessus de l'axe. Il reviendra donc, après une autre demi-révolution, au point de départ A; et la période composée ainsi d'une seule révolution devra se répéter à l'infini. Ce mouvement est extrêmement simple, eu égard à la complication des causes qui le produisent; mais on ne peut douter qu'il n'ait lieu réellement, ce résultat étant fondé sur des calculs qui ne sont sujets à aucune difficulté. D'ailleurs, il est de principe, que si la vîtesse avec laquelle le corps arrive au point G lui était restituée tout à coup en sens contraire, ce corps reviendrait sur ses pas en décrivant la même courbe, et retrouverait aux mêmes points les mêmes degrés de vîtesse en sens contraire. Or, une pareille circonstance a lieu relativement à la partie de l'orbite qui sera décrite passé le point G, et qui devra être égale à l'autre partie.

215. Il n'en sera pas de même dans tout autre cas, et notamment dans l'exemple où nous avons supposé $\frac{B}{A} = \frac{15}{7}$. On ne voit plus alors comment le mouvement doit se continuer au-dessous de l'axe; car en supposant qu'il se continue ainsi, les quantités p et q ne seraient plus réelles, et les formules cesseraient d'être exactes. L'analyse donne cependant une solution de cette difficulté.

Suivant l'analyse, le corps, parvenu au point G, n'ira point au-delà, mais reviendra sur ses pas en décrivant la même courbe qu'il a déjà décrite. Le corps arrivera donc au point A avec une vîtesse égale à la vîtesse initiale, et dirigée en sens contraire. En vertu de cette vîtesse il continuera son mouvement, en décrivant une courbe entièrement semblable de l'autre côté de l'axe; il reviendra donc encore au point G. Du point G, il retournera sur ses pas; et il décrira ainsi, par un mouvement d'oscillation, une courbe dont le point A sera le milieu, et dont les extrémités coïncideront avec le centre G.

216. Pour faire voir que cette solution est en effet donnée par l'analyse, je reprends l'équation $F\psi = 2F\zeta$; et faisant successivement $\psi = \pi - u$, $\psi = \pi + u$, je dis que les valeurs correspondantes de ζ seront $\zeta = \frac{1}{2}\pi - v$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi + v$; de sorte qu'on aura à la fois

$$F(\pi - u) = 2F(\tfrac{1}{2}\pi - v),$$
$$F(\pi + u) = 2F(\tfrac{1}{2}\pi + v).$$

En effet, si l'on ajoute ces deux équations, on aura l'équation identique $2F\pi = 2F\pi$; donc la seconde équation est une suite nécessaire de la première. Soit M le lieu du corps correspondant aux valeurs $\psi = \pi - u$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi - v$, on aura, dans ce point, $p = \frac{c\sqrt{2m}\,.\,\sin u}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 u)}}$, $q = \sqrt{\alpha}\,.\,\frac{\sqrt{(1 - c^2 \cos^2 v)}}{\sin v}$. Ces valeurs ont lieu avant que le corps parvienne au centre G. Si ensuite on change les signes de u et de v, afin d'avoir la position du corps qui répond aux valeurs $\psi = \pi + u$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi + v$, on voit que les variables p et q changent de signe l'une et l'autre, mais conservent les mêmes valeurs; d'où il suit que les angles ω et φ, déterminés par les valeurs $\tang \frac{1}{2}\omega = pq$, $\tang \frac{1}{2}\varphi = \frac{q}{p}$, restent les mêmes; donc le corps doit se retrouver encore au point M. Ainsi, le corps, après être parvenu au point G, revient sur ses pas en suivant la même route, comme si sa vîtesse avait été changée tout à coup en une vîtesse égale et directement opposée.

Nous ne dissimulons pas que cette explication est peu satisfaisante en elle-même, et qu'elle ne peut guère être admise que comme un résultat de pur calcul; cependant on verra bientôt qu'elle peut être justifiée, en altérant infiniment peu la vîtesse initiale.

217. Pour avoir une idée de la figure complète de la courbe, dans l'exemple que nous avons choisi art. 211, nous observerons d'abord que l'expression des coordonnées en fonctions de p et q étant

$$GP = x = \frac{a(1 - p^2 q^2)}{(1 - p^2)(1 + q^2)}, \quad PM = y = \frac{2apq}{(1 - p^2)(1 + q^2)},$$

si on élimine ces deux variables d'après le rapport qui doit exister entr'elles, le résultat sera indépendant de la supposition que p et q sont réels, et il servira à déterminer la courbe dans toute son étendue.

Or, l'équation $F\psi = 2F\zeta$ peut être remplacée par l'équation algébrique $\tang\frac{1}{2}\psi = \tang\zeta\sqrt{(1-c^2\sin^2\zeta)}$; et puisqu'on a en même temps $p = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}c}\cdot\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{c}\cdot\frac{\sqrt{(1-c^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$, si on élimine ψ et ζ de ces équations, la relation entre p et q sera donnée par l'équation

$$p^2 = \frac{2q^2(q^2-c)(3q^2-c)}{(3q^4-2cq^2+c^2)^2}.$$

Ayant ainsi exprimé p^2 par le moyen de q^2, la courbe sera facile à construire dans son entier, en employant toutes les valeurs, tant positives que négatives, de p^2 et q^2.

Fig. 28. 218. Les valeurs de q^2, depuis $q^2 = c$ jusqu'à $q^2 = \infty$, donnent la portion de courbe AS¹GS²A, dans laquelle le corps fait ses oscillations, et qui se termine en G par deux branches faisant entr'elles un angle double de 78° 27′.78.

Les valeurs de q^2, depuis $q^2 = 0$ jusqu'à $q^2 = c^3$, donneront naissance à une autre portion de courbe DNKF, terminée en F, dont les principaux points se déterminent comme il suit.

Soit $q^2 = c^3 z$, z étant < 1, on aura

$$p^2 = \frac{6cz(1-z)(3-z)}{(3-2z+z^2)^2}.$$

Au point D, où l'on a $FD = \frac{ac^3}{1+c^3} = \frac{a}{1+3\sqrt{3}}$, la courbe s'élève perpendiculairement à l'axe, et tourne sa concavité du côté de F; elle passe par le point N, où l'on a $p^2 = q^2$, $x = a$, $y = 0.354a$; puis par le point K, où l'ordonnée est tangente à la courbe, et où l'on a $FH = 0.529a$, $HK = 0.657a$; vient enfin au point F, où elle fait avec l'axe un angle dont la tangente $= \sqrt{\frac{24}{25}}$. Pareille branche doit être tracée de l'autre côté de l'axe.

Ces deux feuilles, qui offrent en F et en G des angles, l'un de près de 90°, l'autre d'environ 157°, sont les seules qu'on puisse obtenir en supposant p^2 et q^2 positifs. La nature des courbes algébriques exige que ces feuilles aient une continuation, mais cette continuation

continuation ne pourra répondre qu'à des valeurs négatives de p^2 et de q^2.

219. D'abord si l'on change à la fois le signe de z, p^2 et q^2, ce qui donne toujours $q^2 = c^3 z$, et

$$p^2 = \frac{6cz(1+z)(3+z)}{(3+2z+z^2)^2},$$

on aura

$$x = \frac{a(1-p^2q^2)}{(1+p^2)(1-q^2)}, \quad y = \frac{2apq}{(1+p^2)(1-q^2)}.$$

Si ensuite on fait varier z depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{c^3} = 3\sqrt{3}$, on aura la continuation des deux branches qui se croisent en F sous un angle presque droit.

Soit $z = \frac{1-\delta}{c^3}$, δ étant infiniment petit, et $p^2 = M(1+N\delta)$, on trouvera

$$M = \frac{120 + 9\sqrt{3}}{242}, \quad N = \frac{40 + 36\sqrt{3}}{143},$$

ou à peu près $M = 0.5603$, $N = 0.7157$. Or, il est aisé de conclure de ces valeurs, que la courbe a deux asymptotes qui se rencontrent en un point X de l'axe, où l'on a $GX = \frac{1}{2}a(1-N) = a(0.14215)$, et qui font de part et d'autre avec l'axe, un angle X déterminé par la valeur $\tang \frac{1}{2}X = \sqrt{M}$, qui donne $X = 73° 38'$.

De même si l'on fait varier z depuis $z = \frac{1}{c^3}$ jusqu'à $z = \infty$, on aura la continuation des branches qui se coupent en G, lesquelles s'étendront à l'infini, et auront dans un sens opposé les mêmes asymptotes que les branches qui se coupent en F.

220. Maintenant, pour connaître plus facilement la vraie courbe que doit décrire le corps, d'après les données prises pour exemple dans l'art. 211, nous conserverons les mêmes forces A et B, dont le rapport est de 7 à 15, le même point A où commence le mouvement et où l'on a $m^0 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{FA}{AG}$; nous supposerons également que la vîtesse en A est perpendiculaire à l'axe, mais nous altérerons infiniment peu cette vîtesse; et comme dans le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$,

on a $\frac{\frac{1}{2}aV^2}{A+B} = \frac{(1+m^\circ)^2}{m^\circ} \cdot \frac{mm'}{1+mm'}$, et dans l'exemple de l'art. 211, $\frac{mm'}{1+mm'} = \frac{2m^2}{1+2m^2} = \frac{3}{11}$, nous supposerons

$$\frac{mm'}{1+mm'} = \frac{3}{11}(1+\delta);$$

de manière que le quarré de la vîtesse sera augmenté dans le rapport de 1 à $1+\delta$, δ étant considéré comme infiniment petit.

Cela posé, les valeurs des élémens m, m', c, x, k, α, α' deviendront infiniment peu différentes de celles qui ont lieu dans l'exemple cité; et voici comment on trouvera ces nouvelles valeurs.

L'équation précédente donne d'abord $mm' = \frac{3+3\delta}{8-3\delta}$. Ensuite si, dans l'expression de $m-m'$, art. 115, on substitue la valeur.... $\frac{1}{2}aV^2 = \frac{(1+m^\circ)^2}{m^\circ}(A+B) \cdot \frac{3}{11}(1+\delta)$, et qu'on fasse en même temps les substitutions $m^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{A}{B} = \frac{7}{15}$, on aura

$$m'-m = \frac{(1-2\delta)2\sqrt{3}}{8-3\delta}.$$

De là résulte

$$m' = \left(\frac{1-2\delta+\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}{8-3\delta}\right)\sqrt{3},$$

$$m = \left(\frac{-1+2\delta+\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}{8-3\delta}\right)\sqrt{3},$$

$$c^2 = \frac{m}{m+m'} = \frac{\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}-1+2\delta}{2\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}.$$

Substituant les valeurs de mm' et de $m'-m$ dans les formules générales du cas V qui servent à déterminer α et α', on en déduira

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = m^\circ, \text{ et } \alpha' = \frac{1-6\delta}{3-2\delta}\sqrt{\tfrac{1}{3}};$$

donc

$$x^2 = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1-6\delta}{3-2\delta},$$

et enfin

$$k^2 = \frac{1-2c^2}{1+x^2} = \frac{3-2\delta}{4\sqrt{(9+\delta+\delta^2)}}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation de la courbe décrite sera

$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(x, \zeta)$, et on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{m'}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \sqrt{\alpha}.\frac{\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}{\cos\zeta}$.

221. Pour faire une application numérique de ces formules, soit d'abord $\delta = 0.001$, ensorte que le quarré de la vîtesse initiale soit plus grand d'un millième que celui qui fait passer la courbe par le centre G, on aura les valeurs approchées des constantes comme il suit :

$\log c = 9.761662$	$c = \sin 35° \, 17', 11$	$\log \mathrm{F}^1 c = 0.239081$
$\log x = 9.760277$	$x = \sin 35. \; 9.37$	$\log \mathrm{F}^1 x = 0.238754$
$\log k = 9.698813$		$\log m' = 9.937495$
		$\log m = 9.637134$

Pour avoir le premier point d'intersection de la courbe avec l'axe, il faut faire $q = \infty$, ou $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, et déterminer ψ par l'équation $k\mathrm{F}^1(c, \psi) = \mathrm{F}^1 x$. Or, comme $k - \frac{1}{2}$ est très-petit, ainsi que $c - x$, on voit que ψ diffère très-peu de π; c'est pourquoi, faisant $\psi = \pi - \psi'$, on aura $\mathrm{F}\psi' = 2\mathrm{F}^1 c - \frac{1}{k}\mathrm{F}^1 x = 0.00136$. Cette quantité étant très-petite, on aura, avec une exactitude suffisante, $\psi' = 0.00136$, et $p^2 = c^2 m'. \psi'^2 = 0.000000534 = \frac{\mathrm{GB}^1}{\mathrm{FB}^1}$. On voit, par conséquent, que le point d'intersection B^1 est à une distance de G qu'on peut regarder comme très-petite de l'ordre δ^2.

222. Pour avoir le second point d'intersection I^1, il faudra faire $p = 0$, ou $\psi = \pi$, et on aura, pour déterminer ζ, l'équation $2k\mathrm{F}^1 c = \mathrm{F}(x, \zeta)$; et comme $2k\mathrm{F}^1 c$ est très-peu différent de $\mathrm{F}^1 x$, on pourra faire $\zeta = \frac{1}{2}\pi + \zeta'$, ζ' étant une quantité très-petite, ce qui donnera $\mathrm{F}(x, \zeta) = \mathrm{F}^1 x + \frac{\zeta'}{6}$, 6 étant $\sqrt{(1-x^2)}$. Donc $\zeta' = 6(2k\mathrm{F}^1 c - \mathrm{F}^1 x)$ $= 6k\,(0.00136) = 0.000556$; de là $\frac{1}{q^2} = \frac{\zeta'^2}{\alpha 6^2} = 0.000000800 = \frac{\mathrm{GI}^1}{\mathrm{FI}^1}$. Le point I^1, situé de l'autre côté de G, est donc encore extrêmement près du centre G.

On remarquera que dans la demi-révolution que fait le corps en passant du point B^1 au point I^1, l'espace parcouru est très-petit de l'ordre δ^2. Ce passage a pour effet, de changer, dans un temps excessivement petit, la direction de la vîtesse, et de la rendre presque diamétralement opposée.

223. On peut aisément prévoir qu'à partir de I^1, le corps se trouvera, après une demi-révolution, très-près du point de départ A. En effet, pour trouver le troisième point d'intersection I^2, soit $\psi = 2\pi$; il faudra déterminer ζ par l'équation $F(x, \zeta) = 4kF'c$. Il en résulte à très-peu près $\zeta = \pi + 2\zeta'$, ζ' étant la même quantité qu'on a déjà trouvée dans le cas de $\psi = \pi$. Cette valeur donne $q^2 - \alpha = \alpha\mathrm{C}^2.4\zeta'^2$; ainsi le point I^2 sera à une distance du point A très-petite de l'ordre δ^2; il sera d'ailleurs situé entre A et G.

On voit que le corps, après trois demi-révolutions, revient très-près du point de départ A. Alors sa vîtesse est très-peu différente de la vîtesse initiale en grandeur; mais sa direction est à très-peu près diamétralement opposée.

224. Après le point I^2, où l'on a $\psi = 2\pi$, le corps, passant de l'autre côté de l'axe, parvient au quatrième point d'intersection B^2, où l'on a $\zeta = \frac{3}{2}\pi$, et $\psi = 3\pi - \psi''$, ψ'' étant une quantité très-petite de l'ordre δ; de sorte que la distance GB^2, proportionnelle à ψ''^2, est encore une quantité très-petite de l'ordre δ^2.

Du point B^2 le corps passe, par un circuit très-petit, à l'intersection suivante I^3, où l'on a $\psi = 3\pi$ et ζ très-peu différent de $\frac{3}{2}\pi$. De là le corps passe à un sixième point d'intersection I^3 très-voisin de A, et les choses continuent de la même manière pendant un assez grand nombre de révolutions. Cependant l'orbite finit par s'éloigner sensiblement, tant du point de départ A, que du centre G; mais elle y revient après des périodes presqu'égales, et les mêmes phénomènes se renouvellent.

225. Au reste, il est facile, par nos formules, de déterminer la situation du corps après un nombre quelconque de révolutions. Veut-on, par exemple, déterminer la 501ème des intersections B^1, B^2, etc.? il faudra faire $\zeta = 1001.\frac{\pi}{2}$, et chercher la valeur correspondante de ψ. On trouvera, d'une manière approchée, $\psi = 1001\pi$

$-73°24'$; et de là, $p^2 = 0.3826 = \frac{\mathrm{GB}}{\mathrm{FG}}$, ou $\mathrm{GB} = a(0.620)$. On connaît donc le point B, où se trouve le corps après 501 intersections à droite, et 1000 intersections à gauche de G, c'est-à-dire après 1501 demi-révolutions.

226. Ayant calculé l'orbite dans le cas de $\delta = 0.001$, il importe aussi de la calculer en supposant $\delta = -0.001$. Alors, en faisant la substitution dans les formules de l'art. 220, on aura les résultats suivans :

$$\log c = 9.761216 \quad \log \mathrm{F}^1 c = 0.238975 \quad \log 2\mathrm{F}^1 c = 0.540005$$
$$\log x = 9.762593 \quad \log \mathrm{F}^1 x = 0.239303 \quad \log \tfrac{1}{k}\mathrm{F}^1 x = 0.540176$$
$$\log k = 9.699127$$

Puisque $2\mathrm{F}^1 c$ est $< \frac{1}{k}\mathrm{F}^1 x$, il s'ensuit que lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on a $\psi > \pi$. Donc la première intersection a lieu en un point I^1 situé à gauche de G; c'est d'ailleurs ce qui s'accorde avec la supposition faite sur la vîtesse initiale. En faisant $\delta = 0$, la première intersection tombe précisément au centre G; en faisant $\delta = 0.001$, ce qui augmente d'un millième le carré de la vîtesse, nous avons vu que la première intersection avait lieu en un point B^1 à droite de G; maintenant que nous faisons $\delta = -0.001$, ce qui diminue d'un millième le carré de la vîtesse, il est tout simple que la première intersection de l'orbite se fasse en un point I^1 situé à gauche de G.

Pour déterminer le point I^1, il faut faire $\psi = \pi$, et chercher ζ par l'équation $\mathrm{F}(x, \zeta) = 2k\mathrm{F}^1 c$; soit $\zeta = \frac{1}{2}\pi - \zeta'$, on pourra supposer $\mathrm{F}(x, \zeta) = \mathrm{F}^1 x - \frac{\zeta'}{6}$, ce qui donnera $\zeta' = 6(\mathrm{F}^1 x - 2k\mathrm{F}^1 c) = 0.0005579$. De là $\frac{1}{q^2} = \frac{\zeta'^2}{a6^2} = 0.000000811 = \frac{\mathrm{GI}^1}{\mathrm{FI}^1}$. Ainsi la distance GI^1 est très-petite de l'ordre δ^2.

Pour avoir l'intersection suivante B^1, il faudra faire $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \pi + \psi'$, ce qui donnera $\psi' = \frac{1}{k}\mathrm{F}^1 x - 2\mathrm{F}^1 c = 0.001368$, ensuite $p^2 = c^2 m' \psi'^2 = 0.000000540 = \frac{\mathrm{GB}^1}{\mathrm{FB}^1}$. Ainsi la distance GB^1 est encore très-petite de l'ordre δ^2.

227. Ces résultats, trouvés dans les hypothèses $\delta = 0.001$, $\delta = -0.001$, servent à expliquer ce qui se passe lorsque $\delta = 0$. On voit que δ étant très-petit, positif ou négatif, mais non pas nul, le corps parti de A s'approche à une distance extrêmement petite du centre G, et décrit au-dessous de l'axe une sorte de demi-ellipse très-petite, au moyen de laquelle la vîtesse change subitement de direction, et en prend une presque diamétralement opposée. Il revient donc sur ses pas par une route très-peu différente de celle qu'il a suivie, et arrive, après une troisième demi-révolution, en un point de l'axe très-voisin du point A. La vîtesse en ce point étant très-peu différente de la vîtesse initiale, mais dirigée dans un sens à très-peu près opposé, le corps vient de nouveau rencontrer l'axe en un point très-voisin de G; là il décrit encore autour de G une sorte de demi-ellipse très-petite qui change tout à coup sa direction et le reporte de nouveau vers un point de l'axe fort voisin du point de départ A. Les parties de courbe décrites autour du centre G, d'abord excessivement petites, s'agrandissent de plus en plus, et au bout d'un certain temps, les demi-révolutions successives deviennent de moins en moins inégales en étendue comme en durée. Dans ce mouvement, le corps ne peut revenir au point de départ, à moins que la quantité $\frac{k\text{F}^1c}{\text{F}^1x}$ n'ait une valeur rationnelle; mais l'orbite est toujours limitée par le périmètre de l'ellipse $p^2 = m$, et elle touche ce périmètre dans une infinité de points qui sont ses apsides supérieures, et qu'on peut aisément déterminer.

Au reste, l'anomalie qui a lieu au commencement du mouvement, c'est-à-dire l'extrême inégalité de deux demi-révolutions successives, se renouvelle à des époques déterminées, dont les intervalles sont à peu près égaux ou tout-à-fait égaux, si la quantité $\frac{k\text{F}^1c}{\text{F}^1x}$ est rationnelle. Car si l'on fait à la fois $\psi = \text{I}\pi + \psi'$, $\zeta = \text{L}\pi + \zeta'$, l'équation $k\text{F}(c, \psi) = \text{F}(x, \zeta)$ deviendra $k\text{F}(c, \psi') = \text{F}(x, \zeta')$, pourvu qu'on ait $k\text{IF}^1c = \text{LF}^1x$; or, on peut prendre les entiers I et L assez grands pour que cette équation ait lieu, ou exactement, ou aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{\text{L}}$, lesquelles peuvent être supposées plus petites que le rapport $\frac{\text{GM}}{\text{FM}}$, M étant le point d'intersection le plus voisin de G.

228. On voit maintenant comment le calcul explique la possibilité que le corps parcoure l'orbite anguleuse $AS^{\prime}G$, dans l'exemple de l'art. 211, et dans les cas semblables où le corps, parti de A, doit parvenir au centre G. Il faut supposer que la vîtesse initiale est infiniment peu différente de celle qui est nécessaire pour que le corps parvienne exactement au centre G; qu'en vertu de cette différence, le corps ne parvient pas précisément au centre G, mais qu'il en approche jusqu'à une distance infiniment petite du second ordre; que dans cette proximité, où le corps a une vîtesse presqu'infinie, il décrit au-dessous de l'axe une sorte de demi-ellipse infiniment petite, au moyen de laquelle son mouvement acquiert dans un instant une direction opposée. Il revient donc sur ses pas, arrive à un point de l'axe infiniment près de A, continue sa route au-dessous de l'axe, s'approche de nouveau infiniment près de G; que là il éprouve de même, par sa circulation dans une demi-ellipse infiniment petite, un changement de direction, puis il revient à un point de l'axe infiniment près de A, et ainsi à l'infini. De là on voit que le mouvement du corps dans l'orbite anguleuse $AS^{\prime}GS^{2}A$ est un mouvement d'oscillation par lequel il s'approche du centre G et s'en éloigne ensuite, en revenant sur ses pas, comme s'il y avait en G un obstacle inébranlable qui ne permît pas au corps de passer outre, et qui le fît rejaillir en sens contraire avec la même vîtesse. Fig. 28.

229. Avant de terminer l'examen du cas V, nous remarquerons que les formules pour le cas de $\mu=\frac{1}{2}\pi$ souffrent une exception lorsque $\alpha'=\alpha$; car alors on a $x=1$, et la valeur de q devient $q=\sqrt{\alpha}$. Cette valeur étant constante, la courbe décrite est une hyperbole, et l'équation ordinaire $k\mathrm{F}(c, \psi)=\mathrm{F}(x, \zeta)$ n'a plus lieu. Cependant, comme la valeur de p ne peut surpasser $\sqrt{m}$, il est nécessaire que la partie de l'hyperbole décrite par le corps ne s'étende pas au-delà de l'ellipse $p^2=m$. On doit donc présumer que, dans ce cas, la vîtesse du corps devient nulle lorsqu'il est arrivé à son apside supérieure S^{1} située sur l'ellipse terminatrice; alors il reviendra sur ses pas en décrivant toujours le même arc d'hyperbole, terminé de part et d'autre de l'axe par l'ellipse $p^2=m$; et son mouvement sera un mouvement d'oscillation, comme nous

en avons déjà trouvé des exemples. C'est ce qu'il est facile de vérifier par nos formules.

230. En faisant $\alpha'=\alpha$, on a les deux équations $2\alpha=\frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$, $\alpha^2=\frac{A-Bmm'}{B-Amm'}$, d'où résulte la condition $\frac{m+m'}{1+mm'}=\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$. Supposant α donné ainsi que A et B, on tirera de ces équations, $mm'=\frac{A-B\alpha^2}{B-A\alpha^2}$, $m'-m=\frac{2\alpha(B-A)}{B-A\alpha^2}$, $m'+m=\frac{(1-\alpha^2)\cdot 2\sqrt{AB}}{B-A\alpha^2}$, d'où

$$m=\frac{\sqrt{A}-\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\alpha\sqrt{A}},\quad m'=\frac{\sqrt{A}+\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}+\alpha\sqrt{A}}.$$

On a, au commencement du mouvement, $p=0$, $q^2=m^\circ=\alpha$; ainsi, l'équation qui donne la vîtesse v en un point quelconque, sera

$$\tfrac{1}{2}av^2=\tfrac{1}{2}aV^2+\left(\frac{A}{p^2+\alpha}+\frac{B}{1+\alpha p^2}\right)(1-p^2)(1+\alpha)-\left(\frac{A}{\alpha}+B\right)(1+\alpha).$$

D'ailleurs on a $\frac{1}{2}aV^2=(A+B)\cdot\frac{mm'}{1+mm'}\cdot\frac{(1+m^\circ)^2}{m^\circ}=\left(\frac{A}{\alpha}-B\alpha\right)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$; donc

$$\tfrac{1}{2}av^2=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left(A\cdot\frac{1+\alpha p^2}{p^2+\alpha}-B\cdot\frac{\alpha+p^2}{1+\alpha p^2}\right).$$

Maintenant, on voit que v sera nulle lorsqu'on aura $\frac{1+\alpha p^2}{p^2+\alpha}=\sqrt{\frac{B}{A}}$, ou $p^2=\frac{\sqrt{A}-\alpha\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\alpha\sqrt{A}}$; cette valeur étant la même que celle de m, il
Fig. 29. s'ensuit que la vîtesse est nulle en effet au point S^1, et qu'ainsi le corps décrit librement l'arc d'hyperbole S^2AS^1 par un mouvement analogue à celui du pendule.

231. Si l'on veut avoir le temps de l'oscillation, il faudra observer que puisque q est constant, la partie t'' due à la variable ζ sera nulle. Il ne restera donc à trouver que la partie t' due à la variable ψ; et comme au point A on a $\psi=0$, et au point S^1, $\psi=\frac{1}{2}\pi$, il est visible que le temps d'une oscillation sera $2t'(\frac{1}{2}\pi)$, ou $2T'$, T' étant déterminé par la formule du n° 188.

On voit immédiatement quelles sont les conditions pour que ce cas particulier ait lieu, c'est-à-dire pour que le corps décrive, par un un mouvement d'oscillation, l'arc de l'hyperbole $q^2=\alpha$, terminé par l'ellipse $p^2=m$. Il faut, pour cela, que le point A, origine du mouvement, soit un sommet de l'hyperbole où l'on a $\frac{\text{FA}}{\text{AG}}=\alpha$, que la vîtesse en A soit perpendiculaire à l'axe, et que cette vîtesse satisfasse à l'équation $\frac{1}{2}a\text{V}^2=\left(\frac{\text{A}}{\alpha}-\text{B}\alpha\right)\cdot\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

Développement du cas VI.

232. Dans ce cas, la valeur de q a deux différentes formes, selon que l'angle μ, qui donne la direction de la vîtesse initiale, est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}\pi$. Mais ces valeurs s'accordent, en ce qu'elles ont également pour *minimum* $\sqrt{\alpha}$; de sorte qu'en prenant un point I situé entre F et G, tel, qu'on ait $\frac{\text{FI}}{\text{IG}}=\alpha$, aucune intersection de la courbe avec l'axe ne peut avoir lieu à gauche du point I.

Le cas VI ayant beaucoup d'analogie avec le cas V, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, nous ne croyons pas devoir entrer dans de nouvelles explications sur la manière de déterminer les points d'intersection de la courbe avec l'axe, ainsi que ses apsides tant supérieures qu'inférieures; nous ferons voir seulement comment on trouve l'expression générale du temps.

233. La première partie t', qui est fonction de ψ, est toujours la même que dans le cas IV; quant à la seconde partie t'', qui est fonction de ζ, on la trouvera par la formule $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}}=\frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{\text{Q}}}$, dans laquelle il faut substituer les valeurs $q=\frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$, $\frac{dq}{\sqrt{\text{Q}}}=\frac{\varkappa}{\sqrt{(\text{M}\alpha'-\text{A}\alpha')}}\times\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$. Soit donc

$$\text{D}''=a\sqrt{\left(\frac{2a\varkappa^2}{\alpha'}\cdot\frac{1+mm'}{\text{B}-\text{A}mm'}\right)}=\frac{a}{k}\sqrt{\left(\frac{2a}{\text{A}+\text{B}}\cdot\frac{1+mm'}{m+m'}\right)},\ \nu=-\frac{1}{\alpha+1},$$

on aura

$$t''=\frac{\text{D}''\alpha}{(\alpha+1)^2}.\text{Z},\ \text{Z}=\int\frac{d\zeta\cos^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

J'observe sur cette formule, que le paramètre ν se rapporte toujours à la forme $\nu = -1 + \mathcal{C}^2 \sin^2 \eta$; car de là résulte $\sin^2 \eta = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha + 1}$, $\cos^2 \eta = \frac{1 - \alpha'}{\alpha + 1}$. Or, par les valeurs de $\alpha - \alpha'$ et $\alpha\alpha'$, on a $(1 + \alpha)(1 - \alpha') = (1 - m)(1 + m') \cdot \frac{A + B}{B - Amm'}$; donc $\alpha' < 1$, donc l'angle η est toujours réel.

Or, par les réductions ordinaires, on trouve

$$Z = \frac{\nu}{\nu + \varkappa^2} \cdot \frac{\Delta \sin \zeta \cos \zeta}{1 + \nu \sin^2 \zeta} - F(\varkappa, \zeta) + \frac{\nu}{\nu + \varkappa^2} E(\varkappa, \zeta) + \frac{\varkappa^2(1 + \nu)}{\nu + \varkappa^2} . \Pi(\nu, \varkappa, \zeta);$$

et en appelant Z^1 la valeur de Z, lorsque $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$Z^1 = \frac{\nu}{\nu + \varkappa^2} E^1 \varkappa - F^1 \varkappa + \frac{\varkappa^2(1 + \nu)}{\nu + \varkappa^2} \Pi^1(\nu, \varkappa).$$

D'un autre côté, si l'on fait $K' = \frac{1}{2}\pi + (F^1\varkappa - E^1\varkappa) F(\mathcal{C}, \eta) - F^1\varkappa E(\mathcal{C}, \eta)$, on aura

$$\Pi^1(\nu, \varkappa) = \frac{\Delta(\mathcal{C}, \eta)}{\mathcal{C}^2 \sin \eta \cos \eta} K' + F^1\varkappa;$$

donc

$$Z^1 = \frac{1 - \mathcal{C}^2 \sin^2 \eta}{\mathcal{C}^2 \cos^2 \eta} (E^1\varkappa - \mathcal{C}^2 F^1\varkappa) - \frac{\varkappa^2 \operatorname{tang} \nu . \Delta(\mathcal{C}, \eta)}{\mathcal{C}^2 \cos^2 \eta} K'.$$

Ces valeurs étant connues, on aura, en général, $t'' = \frac{D''\alpha}{(\alpha + 1)^2} Z$, et $T'' = \frac{D''\alpha}{(\alpha + 1)^2} Z^1$, T'' étant la valeur de t'' qui répond à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$.

234. La valeur de t'', qu'on vient de trouver, suppose $\mu > \frac{1}{2}\pi$. Si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, il faudra se servir des secondes formules du cas VI; alors, dans la formule $\frac{dt''}{a\sqrt{2a}} = \frac{q^2}{(1 + q^2)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{Q}}$, il faudra substituer les valeurs $q^2 = \frac{\alpha'(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}{\varkappa^2 \sin^2 \zeta}$, $\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{(M\alpha' - A\alpha')}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}$, ce qui donnera, en faisant $D'' = \frac{a}{k} \sqrt{\left(\frac{2a}{A + B} \cdot \frac{1 + mm'}{m + m'}\right)}$, $\sin^2 \eta = \frac{\alpha + \alpha'}{\alpha + 1}$, et $\nu = \cot^2 \eta$,

$$t'' = \frac{D''}{\alpha + \alpha'} \int \frac{d\zeta \sin^2 \zeta \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \zeta)}}{(1 + \nu \sin^2 \zeta)^2}.$$

Or, l'intégrale comprise dans cette expression étant semblable à celle du n° 188, on aura, d'après la même formule,

$$t''=\frac{\frac{1}{2}D''}{\alpha+1}\left[-\frac{\Delta\sin\zeta\cos\zeta}{1+\nu\sin^2\zeta}+\frac{\varkappa^2+\nu}{\nu^2}F(\varkappa,\zeta)-\frac{1}{\nu}E(\varkappa,\zeta)+\left(1-\frac{\varkappa^2}{\nu^2}\right)\Pi(\nu,\varkappa,\zeta)\right],$$

et en faisant $\zeta=\frac{1}{2}\pi$,

$$T''=\frac{\frac{1}{2}D''}{\alpha+1}\left[\frac{\varkappa^2+\nu}{\nu^2}F^1\varkappa-\frac{1}{\nu}E^1\varkappa+\left(1-\frac{\varkappa^2}{\nu^2}\right)\Pi^1(\nu,\varkappa)\right].$$

Mais puisque $\nu=\cot^2\eta$, on a, en faisant $K'=\frac{1}{2}\pi+(F^1\varkappa-E^1\varkappa)F(\mathfrak{b},\eta)$ $-F^1\varkappa E(\mathfrak{b},\eta)$, $\Pi^1(\nu,\varkappa)=\sin^2\eta F^1\varkappa+\frac{\sin\eta\cos\eta}{\Delta(\mathfrak{b},\eta)}K'$; donc

$$T''=\frac{\frac{1}{2}D''\tang^2\eta}{\alpha+1}\left(\frac{1-\mathfrak{b}^2\sin^4\eta}{\sin^2\eta}F^1\varkappa-E^1\varkappa+\frac{\cos^4\eta-\varkappa^2\sin^4\eta}{\sin\eta\cos\eta\,\Delta(\mathfrak{b},\eta)}K'\right).$$

Du cas particulier où l'on a $m'=m$.

235. Dans ce cas, on a $c^\circ=\varkappa^\circ=\frac{1}{2}$, mais alors la valeur de k reste indéterminée; pour obvier à cet inconvénient, soit $m'=m(1+\omega)$, ω étant infiniment petit, on aura $c^2=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\omega)$, $\alpha-\alpha'=\frac{m\omega(A+B)}{B-Am^2}$, $1-2c^2=\frac{1}{2}\omega$, $1-2\varkappa^2=\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha+\alpha'}=\frac{m\omega(A+B)}{2\alpha(B-Am^2)}$; donc $k^2=\frac{\alpha}{m}\cdot\frac{B-Am^2}{A+B}$. Et comme on a en même temps $\alpha^2=\frac{Bm^2-A}{B-Am^2}$, il en résulte

$$k^2=\frac{\alpha}{m}\cdot\frac{1-m^2}{1-\alpha^2}=\sqrt{\left(1-\frac{AB}{(A+B)^2}\cdot\frac{(1+m^2)^2}{m^2}\right)};$$

d'ailleurs les conditions propres au cas VI exigent qu'on ait à la fois $m^2<\frac{B}{A}$, $m^2>\frac{A}{B}$.

Cela posé, l'équation de la courbe sera $kF\psi=F\zeta-F\varepsilon$, le module commun à ces fonctions étant $c=\sqrt{\frac{1}{2}}$. On aura en même temps $p=\frac{c\sqrt{m}.\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}$, $q=\frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$, $\cos\varepsilon=\sqrt{\frac{\alpha}{m^\circ}}$. Toutes ces valeurs sont relatives aux formules du cas VI, qui supposent dans l'état initial du mouvement $\mu>\frac{1}{2}\pi$, ou $\mu=\frac{1}{2}\pi$; dans ce dernier cas on aurait, de plus, $\alpha=m^\circ$ et $\varepsilon=0$.

236. Si l'on veut que la courbe décrite soit une courbe algébrique,

il faudra faire $k = \frac{i}{e}$, $\frac{i}{e}$ étant une fraction rationnelle plus petite que l'unité. Cette fraction étant prise à volonté, ainsi que le rapport $\frac{B}{A}$ moindre aussi que l'unité, on aura, pour déterminer m, l'équation

$$\frac{m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{AB}{(A+B)^2} \cdot \frac{e^4}{e^4 - i^4};$$

ensuite on aura $\alpha = \sqrt{\left(\frac{Bm^2 - A}{B - Am^2}\right)}$. Quant aux données m° et μ relatives à l'état initial, on voit, comme dans l'art. 119, qu'il doit exister entr'elles la relation

$$\cos^2\mu = \frac{m^{\circ 2}(B - Am^2) - (Bm^2 - A)}{2m^2 m^\circ (A+B) + (1+m^2)(A + Bm^{\circ 2})}.$$

Le numérateur de cette expression est la même chose que.... $(m^{\circ 2} - \alpha^2)(B - Am^2)$, ainsi on devra avoir $m^\circ > \alpha$; ce qui s'accorde avec la valeur $\cos\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m^\circ}\right)}$, qui a lieu en général sans supposer $m' = m$. Il faut en outre que la vîtesse initiale V soit telle qu'on ait $\frac{1}{2}aV^2 = (A+B) \cdot \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \frac{(1+m^\circ)^2}{m^\circ \sin^2\mu}$.

Ces conditions ayant lieu, l'équation de la courbe décrite sera $iF\psi = e(F\zeta - F\varepsilon)$; on aura en même temps $p = \frac{c\sqrt{m} . \sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$.

Ces formules supposent l'angle $\mu > \frac{1}{2}\pi$; elles s'appliqueront de même au cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, en faisant $\varepsilon = 0$.

Si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, le seul changement à faire dans les formules, sera de prendre $\cos\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{m^\circ - \alpha}{m^\circ + \alpha}\right)}$, et $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} \cdot \frac{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}$.

237. Dans tous les cas, le corps reviendra au point de départ lorsqu'on aura $\zeta = i\pi + \varepsilon$ et $\psi = e\pi$; alors le nombre des points d'intersection I situés entre F et G, sera e; celui des points d'intersection B situés au-delà de G, sera i; le corps reviendra donc au point de départ A après un nombre $i+e$ de demi-révolutions; ainsi la période qui doit se répéter sans cesse comprendra $\frac{1}{2}(i+e)$ ou $i+e$ révolutions, selon que $i+e$ est pair ou impair.

Ce résultat souffrira néanmoins une exception si la courbe passe par le centre G, ce qui peut avoir lieu dans deux cas :

1°. Si l'on a $\mu > \frac{1}{2}\pi$, ou $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$, il faudra qu'on ait à la fois $\psi = \mathrm{I}\pi$, $\zeta = (2\mathrm{L}+1)\frac{\pi}{2}$, I et L étant des entiers ; et de là résulte la condition $2\mathrm{I}i\mathrm{F}'c = (2\mathrm{L}+1)e\mathrm{F}'c - e\mathrm{F}'\varepsilon$, ou

$$i\mathrm{I} - \mathrm{L}e = \frac{e}{2}\left(1 - \frac{\mathrm{F}'\varepsilon}{\mathrm{F}'c}\right).$$

Donc il faut que $\frac{\mathrm{F}'\varepsilon}{\mathrm{F}'c}$ soit une fraction rationnelle $\frac{n}{n'}$, telle que.... $\left(1 - \frac{n}{n'}\right) \cdot \frac{e}{2}$ soit un entier. Dans le cas de $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on a $\varepsilon = 0$, et il suffira que e soit un nombre pair.

2°. Si l'on a $\mu < \frac{1}{2}\pi$, et par conséquent $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{c} \cdot \frac{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}}{\sin\zeta}$, il faudra qu'on ait à la fois $\psi = \mathrm{I}\pi$, $\zeta = \mathrm{L}\pi$, ce qui donnera la condition

$$e\mathrm{L} - i\mathrm{I} = \frac{e}{2} \cdot \frac{\mathrm{F}'\varepsilon}{\mathrm{F}'c};$$

ainsi il faut que $\frac{\mathrm{F}'\varepsilon}{\mathrm{F}'c}$ soit une quantité rationnelle, et que son produit par $\frac{1}{2}e$ soit un nombre entier.

238. Si l'on fait, par exemple, $i = 1$, $e = 2$, $\varepsilon = 0$ ou $\mu = \frac{1}{2}\pi$, l'équation de la courbe sera $\mathrm{F}\psi = 2\mathrm{F}\zeta$, et il en résulte que le corps parti de A suivant une direction perpendiculaire à l'axe, tombe au centre G après une demi-révolution ; ce cas est donc analogue à celui que nous avons traité fort au long art. 215 et suivans, et il est susceptible d'une semblable solution.

Un cas plus simple, ou moins sujet à difficulté, s'obtiendra en faisant $i = 1$, $e = 3$, $\varepsilon = 0$; alors l'équation de la courbe sera $\mathrm{F}\psi = 3\mathrm{F}\zeta$, et on trouvera que la courbe rentre sur elle-même après deux révolutions, comme l'indique le nombre $\frac{1}{2}(i+e) = 2$.

239. Les courbes algébriques que nous venons d'obtenir, jointes à celles que nous avons déjà trouvées dans le développement du cas III, art. 189 et suivans, sont les seules que donne l'hypothèse

$C+C'=0$ de l'art. 102; ce sont aussi les seules qu'Euler ait indiquées dans les Mémoires de Berlin, année 1760. Elles sont toutes représentées par l'équation $iF\psi=e(F\zeta-F\varepsilon)$, dans laquelle le module des fonctions est $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $\sin 45^\circ$. Mais on a déjà fait voir qu'il y a une infinité d'autres systèmes de courbes algébriques qui peuvent également satisfaire à la question; c'est ce dont on va donner de nouveaux exemples.

Des courbes algébriques qui satisfont au cas VI.

240. On ne peut faire $c=\varkappa$, parce qu'il en résulterait, ou $c^2=\varkappa^2=\frac{1}{2}$, ou $AB=0$, cas qu'il est maintenant inutile d'examiner. Soit donc $\varkappa=c^\circ$, et $k\left(\frac{1+c}{2}\right)=\frac{i}{e}$; on aura

$$\varkappa=c^\circ=\frac{3e^2-2\sqrt{(2e^4-e^2i^2+8i^4)}}{e^2+8i^2},$$

et l'équation de la courbe sera $iF\psi^\circ=e(F\zeta-F\varepsilon)$, $\varkappa$ étant le module commun; on aura en même temps $\sin(2\psi-\psi^\circ)=c^\circ\sin\psi^\circ$, $p=\frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin\psi)}}$, $q=\frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$; cette dernière valeur suppose $\mu>\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on prend la fraction rationnelle $\frac{i}{e}$ à volonté $<\frac{1}{2}$, on aura une valeur convenable de $\varkappa=c^\circ$, ensuite on aura $c=\frac{2\sqrt{c^\circ}}{1+c^\circ}$. Connaissant ces modules ainsi que le rapport $\frac{B}{A}$, on déterminera mm' par l'équation

$$\frac{mm'}{(1+mm')^2}=\frac{AB}{(A+B)^2}\cdot\frac{b^2c^2\varkappa^2\mathcal{C}^2}{b^2c^2-\varkappa^2\mathcal{C}^2};$$

où l'on a $\mathcal{C}^2=1-\varkappa^2$, $b^2=1-c^2$. Connaissant mm', on aura, à l'ordinaire, $m=\frac{c}{b}\sqrt{mm'}$, et $m'=\frac{b}{c}\sqrt{mm'}$.

Les valeurs de α et α' sont connues par celles de m et m', puisqu'on a $\alpha-\alpha'=\alpha\left(\frac{1-2\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\right)=\frac{(m'-m)(A+B)}{B-Amm'}$. Enfin, ayant supposé $\mu>\frac{1}{2}\pi$, on a entre μ et m° une équation qui laisse une de ces quantités à volonté; et on en déduit la valeur de la vitesse initiale, par les formules de l'art. 192. C'est avec toutes ces données qu'on aura l'équation de la courbe et les équations accessoires, comme nous les avons rapportées ci-dessus. Cette solution a encore une assez grande généralité, puisqu'elle laisse arbitraires la quantité m° et les rapports $\frac{A}{E} < 1$, $\frac{i}{e} < \frac{1}{2}$, ce dernier devant être rationnel.

241. Pour savoir combien le corps doit faire de révolutions pour revenir au point de départ, il faudra faire $\psi = I\pi$, $\zeta = L\pi + \varepsilon$, L et I étant des entiers; alors on aura $\psi^\circ = 2I\pi$, et la substitution de ces valeurs donnera $\frac{I}{L} = \frac{e}{2i}$. Donc les moindres nombres à prendre pour I et L sont $I = \frac{1}{2}e$, $L = i$, si e est pair; et ils seront $I = e$, $L = 2i$, si e est impair. Le nombre des demi-révolutions qui ramènent le corps au point de départ, est $\frac{1}{2}e + i$ dans un cas, et $e + 2i$ dans l'autre. Donc le nombre des révolutions qui composent une période sera $\frac{1}{2}e + i$, ou $e + 2i$, selon que e sera pair ou impair.

242. Soit, par exemple, $i = 1$, $e = 4$, $\varepsilon = 0$, on aura $x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{14}$, $c = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$; et l'équation de la courbe sera $F\psi^\circ = 4F\zeta$, x étant le module commun; on aura en même temps $\sin(2\psi - \psi^\circ) = x \sin\psi^\circ$, $p = \frac{c\sqrt{m'}\sin\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin\psi)}}$, $q = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos\zeta}$. Soit $\psi = \pi$, on aura $\psi^\circ = 2\pi$, $\zeta = \frac{1}{2}\pi$; donc $p = 0$, et $q = \infty$; c'est-à-dire que le corps parti du point A tombe sur le centre G après une demi-révolution, ce qui est encore un cas analogue à celui que nous avons traité art. 215 et suivans.

243. Soit encore $i = 1$, $e = 3$, $\varepsilon = 0$, on aura $x = \frac{27 - 2\sqrt{161}}{17}$, et l'équation de la courbe sera $F\psi^\circ = 3F\zeta$, x étant le module commun. Soit $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\psi^\circ = \frac{3}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\pi - \gamma)$, γ étant le plus petit arc dont le sinus est x. Ces valeurs déterminent le point d'intersection B^1. Soit $\zeta = \frac{3}{2}\pi$, on aura $\psi^\circ = \frac{9}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}(\frac{9}{2}\pi + \gamma)$; cette seconde valeur de ψ détermine un point d'intersection B^2 qui ne diffère pas de B^1; il en sera de même du point B^3.

Pour avoir les points d'intersection I, soit $\psi = \pi$, on aura $\psi^\circ = 2\pi$, $F\zeta = \frac{4}{3}F^1c$, ce qui détermine le premier point I^1. Soit $\psi = 2\pi$, on aura $F\zeta = \frac{8}{3}F^1c$, ce qui détermine le second point d'intersection I^2, différent de I^1. Enfin, soit $\psi = 3\pi$, on aura $F\zeta = 4F^1c$, ce qui donne $\zeta = 2\pi$; donc le troisième point I^3 se confond avec le point A.

On voit maintenant, par les différentes valeurs de ζ, qu'à partir du point A, les demi-révolutions successives se terminent aux points B^1, I^1, I^2, B^1, A. Après ces cinq demi-révolutions, le corps revient au point A, mais avec une vîtesse diamétralement opposée à celle du point de départ; donc il n'a achevé que la moitié de la période, et il faut encore cinq demi-révolutions pour que le corps revienne au point A avec la même vîtesse dirigée dans le même sens. Ce nombre 5, qui exprime combien il y a de révolutions dans une période, serait donné immédiatement par la formule $e+2i$.

Solution du problème général, lorsque la courbe décrite est à double courbure.

244. Ayant fait voir comment, par l'application de la théorie des fonctions elliptiques, on détermine avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, toutes les circonstances du mouvement d'un corps attiré vers deux centres fixes, lorsque la courbe décrite est située dans un plan, il ne sera pas inutile d'indiquer, au moins sommairement, comment on pourrait appliquer les mêmes méthodes au problème considéré dans toute sa généralité, lorsque la courbe décrite est à double courbure. Nous donnerons d'abord, d'après Euler (*Novi Com. Petrop.*, tom. XI), l'analyse par laquelle le problème se réduit immédiatement aux quadratures.

Fig. 30. Soient toujours F et G les centres des forces, M le lieu du corps au bout du temps t; nous imaginerons que le plan FMG était, au commencement du mouvement, confondu avec le plan fixe EFG, et que pendant le temps t il a décrit autour de l'intersection commune FG, l'angle MPQ $= \rho$. Il est évident que pour déterminer le lieu du corps au bout d'un temps quelconque, il suffira de connaître sa position dans le plan mobile FMG, avec l'angle ρ que fait ce plan mobile avec le plan fixe EGF.

Remarquons, avant tout, que si la vîtesse du corps, à l'origine du mouvement, était dirigée toute entière dans le plan EFG, il n'y aurait aucune raison pour que le corps sortît de ce plan, et ce cas serait celui que nous avons déjà traité. Le seul élément auquel est dû le mouvement du plan FMG, est donc la partie de la vîtesse initiale

initiale qui est perpendiculaire au plan EFG; mais cet élément n'a pas seulement pour effet de produire le mouvement du plan FMG; on verra qu'il a encore celui de rendre d'une nature toute différente la courbe décrite dans ce plan.

245. Nous conserverons les mêmes dénominations que dans l'art. 70, pour toutes les quantités, lignes et angles qui appartiennent au plan FMG; nous ferons, de plus, $QP=y'$, $PM=z'$, MQ étant une perpendiculaire abaissée de M sur le plan fixe EFG; et comme on a déjà fait l'angle $MPQ=\rho$, il est clair qu'on aura $y'=y\cos\rho$, $z'=y\sin\rho$.

Cela posé, nous avons les forces $\frac{A}{r^2}$, $\frac{B}{s^2}$, dirigées suivant MF et MG; ces forces étant décomposées suivant les trois coordonnées rectangles x, y', z', il en résultera les trois équations différentielles du mouvement, savoir :

$$\frac{ddx}{dt^2}=-\frac{A(x-a)}{r^3}-\frac{Bx}{s^3},$$
$$\frac{ddy'}{dt^2}=-\frac{Ay'}{r^3}-\frac{By'}{s^3},$$
$$\frac{ddz'}{dt^2}=-\frac{Az'}{r^3}-\frac{Bz'}{s^3};$$

et voici comment on les réduira au premier ordre :

1°. Multipliant la première par dx, la seconde par dy', la troisième par dz'; ajoutant les produits et intégrant, on aura

$$\frac{dx^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2}=\frac{A}{r}+\frac{B}{s}+\frac{C}{a}. \qquad (a')$$

C'est l'équation connue des forces vives, dans laquelle le premier membre, qu'on peut aussi représenter par $\frac{dx^2+dy^2+y^2d\rho^2}{2dt^2}$, est la moitié du quarré de la vîtesse.

2°. De la seconde et de la troisième, on déduit immédiatement $y'dz'-z'dy'=Hdt$, ou

$$y^2d\rho=Hdt. \qquad (b')$$

Cette seconde équation prouve que les aires décrites dans le plan mobile MPQ, perpendiculaire à FG, sont proportionnelles au temps.

En effet, le mouvement du corps dans ce plan, considéré comme fixe, n'est troublé que par la force $\frac{Ay}{r^3}+\frac{By}{s^3}$ dirigée vers le centre P.

3°. La troisième intégrale se déduira, comme dans l'art. 71, de la considération des aires élémentaires $d\alpha$, $d\beta$, et de leurs différentielles

$$dd\alpha = (x-a)ddy - yddx,$$
$$dd\beta = xddy - yddx.$$

Or, les valeurs $y'=y\cos\rho$, $z'=y\sin\rho$, donnent $ddy'\cos\rho + ddz'\sin\rho = ddy - yd\rho^2$; donc en substituant les valeurs de ddy' et ddz' données par les équations du mouvement, on aura

$$ddy - yd\rho^2 = -\left(\frac{A}{r^3}+\frac{B}{s^3}\right)ydt^2,$$

ou

$$\frac{ddy}{dt^2} = \frac{H^2}{y^3} - \frac{Ay}{r^3} - \frac{By}{s^3};$$

d'où l'on déduira

$$\frac{dd\alpha}{dt^2} = \frac{H^2(x-a)}{y^3} + \frac{aBy}{s^3},$$
$$\frac{dd\beta}{dt^2} = \frac{H^2x}{y^3} - \frac{aAy}{r^3}.$$

D'ailleurs on a $d\alpha = r^2d\varphi$, $d\beta = s^2d\omega$, $y = r\sin\varphi = s\sin\omega$, $x = s\cos\omega$, $a - x = r\cos\varphi$. Faisant donc ces diverses substitutions, on parviendra à l'équation différentielle

$$\frac{d\alpha dd\beta + d\beta dd\alpha}{dt^2} = -Aad\varphi\sin\varphi + Bad\omega\cos\omega + H^2\left(\frac{d\varphi\cos\omega\sin\omega + d\omega\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\omega\sin^2\varphi}\right),$$

qui peut s'intégrer immédiatement, et dont l'intégrale est

$$\frac{d\alpha d\beta}{dt^2} = C'a + Aa\cos\varphi - Ba\cos\omega - H^2\cot\omega\cot\varphi,$$

ou

$$\frac{r^2s^2d\omega d\varphi}{dt^2} = C'a + Aa\cos\varphi - Ba\cos\omega - H^2\cot\omega\cot\varphi; \qquad (c')$$

c'est la troisième intégrale cherchée.

246. Il reste à faire voir comment on peut parvenir à la séparation des variables. Pour cela nous ferons les mêmes substitutions

que dans l'art. 72; et observant que les équations (a') et (b') donnent pour le mouvement dans le plan mobile FMG, l'équation

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=\frac{C}{a}+\frac{A}{r}+\frac{B}{s}-\frac{H^2}{2y^2}; \qquad (d')$$

si l'on fait encore, pour abréger, $M=C+\frac{Aa}{r}+\frac{Ba}{s}-\frac{aH^2}{2y^2}$, $N=\frac{1}{2}A\cos\varphi-\frac{1}{2}B\cos\omega+\frac{1}{2}C'-\frac{H^2}{2a}\cot\omega\cot\varphi$, on aura

$$\frac{r^2s^2d\omega d\varphi}{a^2(dx^2+dy^2)}=\frac{p^2dq^2-q^2dp^2}{(1+q^2)^2dp^2+(1-p^2)^2dq^2}=\frac{N}{M}.$$

De là résulte l'équation $Pdq^2=Qdp^2$, dans laquelle on a

$$\begin{aligned} P &= Mp^2-N(1-p^2)^2,\\ Q &= Mq^2+N(1+q^2)^2; \end{aligned}$$

et substituant dans ces expressions les valeurs de M et N, après les avoir réduites en fonctions de p et q, on obtient le résultat suivant, très-remarquable en ce que P se réduit à une fonction de p seule, de même que Q à une fonction de q seule, comme dans le cas de $H=0$:

$$\begin{aligned} P &= Cp^2+\tfrac{1}{2}(A+B)(1-p^4)-\tfrac{1}{2}C'(1-p^2)^2-\frac{H^2}{2a}\left(\frac{1-p^2}{2p}\right)^2,\\ Q &= Cq^2+\tfrac{1}{2}(A-B)(1-q^4)+\tfrac{1}{2}C'(1+q^2)^2-\frac{H^2}{2a}\left(\frac{1-q^2}{2q}\right)^2. \end{aligned}$$

On aura donc enfin l'équation à différentielles séparées $\pm\frac{dp}{\sqrt{P}}=\frac{dq}{\sqrt{Q}}$, dont chaque membre est intégrable par une fonction elliptique de première espèce, comme on le voit immédiatement en faisant $p^2=u$, $q^2=z$.

247. Les valeurs de P et Q exprimées en fonctions de M et N donnent, en faisant $dR^2=\frac{dp^2}{P}=\frac{dq^2}{Q}$,

$$p^2dq^2-q^2dp^2=NdR^2(p^2+q^2)(1+p^2q^2);$$

substituant cette valeur dans l'expression de $r^2s^2d\varphi d\omega$ de l'art. 72, et ensuite mettant à la place de $r^2s^2d\varphi d\omega$ sa valeur $2aNdt^2$, on aura, comme dans l'art. 73,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}\,d\mathrm{R} = \frac{p^2 d\mathrm{R}}{(1-p^2)^2} + \frac{q^2 d\mathrm{R}}{(1+q^2)^2},$$

ce qui donne, en séparant les variables,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \pm\frac{p^2}{(1-p^2)^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} + \frac{q^2}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}}. \qquad (e')$$

Remarquez que les deux parties de cette formule doivent toujours être positives, parce que $d\mathrm{R}$ est essentiellement positif, et qu'elles ne peuvent devenir nulles, ni l'une ni l'autre, parce que, d'après l'équation (d'), l'ordonnée y ne peut jamais se réduire à zéro.

248. De la valeur de dt résulte celle de $d\rho = \frac{\mathrm{H}dt}{y^2}$; et comme $y = r\sin\varphi = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)}$, on aura $d\rho = \frac{\mathrm{H}d\mathrm{R}}{2\sqrt{2a}}\cdot\frac{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}{p^2q^2}$ $= \frac{\mathrm{H}d\mathrm{R}}{2\sqrt{2a}}\left(\frac{(1-p^2)^2}{p^2} + \frac{(1+q^2)^2}{q^2}\right)$, ou enfin

$$d\rho = \frac{\mathrm{H}}{2\sqrt{2a}}\left(\pm\frac{(1-p^2)^2}{p^2}\cdot\frac{dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} + \frac{(1+q^2)^2}{q^2}\cdot\frac{dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}}\right).$$

On voit que cette valeur est composée, comme celle de dt, de deux parties qui doivent toujours être prises positivement. Elles sont écrites l'une et l'autre dans la supposition que la première valeur de $\frac{dq}{dt}$ est positive; il faudrait changer les signes, si cette première valeur était négative.

249. On peut donner une forme plus simple aux polynomes qui entrent dans l'équation fondamentale $\pm\frac{dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} = \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}}$. Pour cela on fera $p^2 = \frac{u-1}{u+1}$, $q^2 = \frac{1-z}{1+z}$, ce qui revient à supposer $r+s = au$, $s-r = az$; alors u sera toujours positif et >1; mais z, qui pourra être positif ou négatif, sera toujours <1. Cela se voit par le triangle FMG, dont un côté doit toujours être plus petit que la somme des deux autres. Faisant donc ces substitutions, on aura

les nouveaux polynomes

$$U = \tfrac{1}{2}C(u^2-1)^2 + (A+B)u(u^2-1) - C'(u^2-1) - H'u^2,$$
$$Z = \tfrac{1}{2}C(1-z^2)^2 + (A-B)z(1-z^2) + C'(1-z^2) - H'z^2,$$

où l'on a fait $H' = \frac{H^2}{a}$, et qui donnent l'équation

$$\pm\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dz}{\sqrt{Z}}. \qquad (f')$$

On voit que chaque membre est intégrable par une fonction elliptique de première espèce; d'ailleurs on peut remarquer qu'en changeant le signe de A dans l'un des polynomes U et Z, ils deviennent des fonctions semblables de u et de z.

En vertu des mêmes transformations, les valeurs de dt et de $d\rho$ seront données par les formules

$$\frac{dt}{a\sqrt{a}} = \pm\frac{u^2-1}{4}\cdot\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{1-z^2}{4}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad (g')$$

$$d\rho = \pm\frac{H'}{u^2-1}\cdot\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{H'}{1-z^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad (h')$$

où il faut observer que les deux parties, considérées dans leur valeur absolue, sont toujours positives et ne peuvent jamais être nulles.

250. Si l'on se borne, comme dans les recherches précédentes, à ne considérer que les mouvemens permanens, c'est-à-dire ceux dans lesquels le corps reste toujours à une distance finie des centres des forces, alors la valeur de u sera toujours finie; quant à celle de z, elle est plus petite que l'unité, dans toutes les hypothèses; elle ne peut être égale à l'unité que dans le cas où l'orbite couperait l'axe FG, ce qui n'a jamais lieu lorsque l'orbite est à double courbure.

Cela posé, soit m la plus grande et m' la plus petite valeur de u; cette valeur m' ne peut jamais être zéro, car alors y serait zéro, ce qui ne peut jamais avoir lieu d'après l'équation (d'). On pourra donc supposer le polynome U ainsi décomposé en facteurs, où l'on a fait $D = -\frac{1}{2}C$,

$$U = D(m-u)(u-m')(u^2+2fu+f'),$$

et il faudra que $u^2+2fu+f'$ soit positif dans toute l'étendue de la courbe décrite, depuis $u=m'$ jusqu'à $u=m$.

Supposons qu'à l'origine du mouvement, on désigne par F le foyer le plus proche du corps; alors la première valeur de z sera positive. Dans cette hypothèse, les différentes valeurs de z seront ou toutes positives, ou les unes positives, les autres négatives. Soit n la plus grande valeur positive de z, n' la plus petite valeur, laquelle pourra même être négative; dans les deux cas, $n-n'$ sera positif. Et en faisant semblablement

$$Z=D(n-z)(z-n')(z^2+2gz+g'),$$

il faudra que le facteur $z^2+2gz+g'$ soit positif pour toutes les valeurs de z comprises entre les limites $z=n'$, $z=n$.

251. D'après l'état initial du mouvement, on connaîtra les valeurs des constantes C, C', H ou $H'=\frac{H^2}{a}$; on pourrait donc décomposer les polynomes U et Z en facteurs, par les règles ordinaires de l'analyse; mais il est préférable de suivre les formes que nous venons d'indiquer, lesquelles se rapportent d'ailleurs spécialement à l'hypothèse que les distances r et s ne peuvent devenir infinies.

Si l'on fait successivement $u=m$ et $u=m'$, dans l'expression du polynome U, on aura les équations

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}C(m^2-1)^2+(A+B)m(m^2-1)-C'(m^2-1)&=H'm^2,\\ \tfrac{1}{2}C(m'^2-1)^2+(A+B)m'(m'^2-1)-C'(m'^2-1)&=H'm'^2,\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned}D=-\tfrac{1}{2}C&=\frac{A+B}{m+m'}+\frac{H'}{(m^2-1)(m'^2-1)},\\ C'&=(A+B)\left(\frac{1+mm'}{m+m'}\right)-\frac{H'(m^2m'^2-1)}{(m^2-1)(m'^2-1)}.\end{aligned}$$

Ces valeurs sont exprimées en fonctions de m et m'; mais dans le problème à résoudre, il faut au contraire déduire m et m' des données D, C', A+B, H'. Pour cela, soit $1+mm'=y$, $m+m'=xy$ (les quantités x et y ne devant pas être confondues avec celles qui représentent les coordonnées du point M), on aura les deux équations

$$D = \frac{A+B}{xy} + \frac{H'}{y^2(1-x^2)},$$
$$C' = \frac{A+B}{x} - \frac{H'}{1-x^2}\left(1-\frac{2}{y}\right).$$

La première donne

$$\frac{2H'x}{y} + (A+B)(1-x^2) = \sqrt{[(A+B)^2(1-x^2)^2 + 4DH'x^2(1-x^2)]};$$

la seconde étant mise sous la forme

$$H'x + C'x(1-x^2) = (A+B)(1-x^2) + \frac{2H'x}{y},$$

puis combinée avec la précédente, on en déduit

$$(H'+C'-C'x^2)^2x^2 = (A+B)^2(1-x^2)^2 + 4DH'x^2(1-x^2),$$

équation qui est du troisième degré relativement à l'inconnue x^2, et d'où l'on tirera une valeur de x plus petite que l'unité.

Connaissant x, on trouvera y par la valeur

$$y = \frac{(A+B)(1-x^2) + \sqrt{[(A+B)^2(1-x^2)^2 + 4DH'x^2(1-x^2)]}}{2Dx(1-x^2)},$$

ou par la formule entièrement rationnelle $y = \dfrac{2H'x}{H'x-(A+B-C'x)(1-x^2)}$.
Enfin, on aura m et m' par les équations $m+m'=xy$, $mm'=y-1$.

252. Il reste à déterminer les coefficiens du facteur $u^2+2fu+f'$; pour cela, je fais successivement $u=1$, $u=-1$, dans les deux expressions du polynome U, et j'ai les deux équations

$$H' = D(m-1)(m'-1)(1+2f+f'),$$
$$H' = D(m+1)(m'+1)(1-2f+f'),$$

d'où résulte

$$2f = \frac{H'(1+m')}{D(m^2-1)(m'^2-1)},$$
$$1+f = \frac{H'(1+mm')}{D(m^2-1)(m'^2-1)}.$$

Ces formules font voir que f et $1+f'$ sont toujours positifs; d'où il suit que le facteur $u^2+2fu+f'$ est positif pour toute valeur de u plus grande que l'unité, et à plus forte raison pour toute valeur comprise entre m et m'.

253. Il suffira de changer le signe de A dans les formules du n° 251, et on en déduira semblablement les valeurs de n et n'. Quant au facteur $z^2+2gz+g'$ qui entre dans l'expression de z, on trouvera ses coefficiens, comme dans l'art. 252, par les formules

$$2g = \frac{H'(n+n')}{D(1-n^2)(1-n'^2)},$$
$$1+g' = \frac{H'(1+nn')}{D(1-n^2)(1-n'^2)}.$$

Au reste, l'équation $Udz^2 = Zdu^2$ fait voir que comme U est positif dans toute l'étendue de la courbe décrite, de même Z sera toujours positif, ainsi que le facteur $z^2+2gz+g'$, pour toute valeur de z comprise entre les limites $z=n$, $z=n'$.

Fig. 30. 254. Puisque les valeurs de u sont toujours comprises entre les limites m et m', et celles de z entre les limites n et n', il s'ensuit que la courbe décrite dans le plan mobile FMG est toujours renfermée dans une espèce de trapèze hyperbolico-elliptique TVYX, dont deux côtés opposés TV, XY, appartiennent aux ellipses tracées d'après les équations $r+s=am$, $r+s=am'$, et les deux autres côtés TX, VY, appartiennent aux hyperboles dont les équations sont $s-r=an$, $s-r=an'$, F et G étant les foyers communs de ces quatre courbes. Il faut, de plus, que ce trapèze soit situé tout entier d'un même côté de l'axe FG.

Et puisque la courbe que décrit le corps dans le plan mobile FMG est ainsi circonscrite par le trapèze TVYX, dont elle doit toucher tous les côtés, on voit que la détermination de cette courbe est, en quelque sorte, plus simple que dans le cas où le plan est fixe, et qu'il y aura beaucoup moins de variété dans les formes qu'elle doit prendre suivant les différens cas.

D'ailleurs, la position du corps dans le plan mobile FMG étant connue au bout du temps t, ainsi que l'angle ρ décrit par ce plan autour du plan fixe EFG, il est clair que le mouvement du corps et son orbite tracée dans l'espace seront parfaitement connus et déterminés.

255. Venons maintenant à l'intégration de l'équation (f'). Comme on

on peut prendre pour origine du mouvement tout autre point de l'orbite que celui qui dans l'état initial a servi à déterminer les constantes C, C′, H, nous supposerons, pour plus de simplicité, que le mouvement commence à compter d'une apside supérieure S° où l'on a $r+s=am$; nous supposerons en même temps, que le corps parti de S° suivant la tangente de l'ellipse en ce point, se meut dans le sens S°V, de manière qu'il se rapproche du foyer G, et qu'ainsi la valeur de $\frac{dz}{dt}$ au point S° est négative. Par ce moyen, l'équation (f'), où les premières valeurs de u et de z vont en diminuant, devra être écrite ainsi, $\frac{du}{\sqrt{U}}=\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, et les équations (g'), (h') deviendront, en prenant convenablement les signes,

$$\frac{dt}{a\sqrt{a}}=-\left(\frac{u^2-1}{4}\right)\frac{du}{\sqrt{U}}-\left(\frac{1-z^2}{4}\right)\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$d\rho=-\frac{H'}{u^2-1}\cdot\frac{du}{\sqrt{U}}-\frac{H'}{1-z^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

256. Cela posé, pour exprimer que u est contenu entre les limites m et m', je fais $u=m\cos^2\sigma+m'\sin^2\sigma$, ce qui donne

$$-\frac{du}{\sqrt{U}}=\frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\frac{2d\sigma}{\sqrt{(u^2+2fu+f')}}.$$

Pour simplifier ultérieurement ce résultat, il faut considérer différens cas, selon que $u^2+2fu+f'$ est de l'une des trois formes

$$u^2+2\mu u\cos\theta+\mu^2,$$
$$(u+\mu)(u+\mu'),$$
$$(u+\mu)(u-\mu'),$$

μ et μ' étant des quantités réelles et positives.

Nous nous bornerons ici au second cas; et supposant $\mu>\mu'$, nous ferons $\tang\sigma=h\tang\psi$, ensuite $h=\sqrt{\left(\frac{m+\mu}{m'+\mu}\right)}$, et $c^2=\frac{m-m'}{m+\mu'}\cdot\frac{\mu-\mu'}{\mu+m'}$, ce qui donnera la transformée

$$-\frac{du}{\sqrt{U}}=\frac{2D^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(m+\mu')}\cdot\sqrt{(m'+\mu)}}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\psi)}}.$$

On parviendrait immédiatement à ce résultat par la substitution

$$u = \frac{(mm' + m\mu)\cos^2\psi + (mm' + m'\mu)\sin^2\psi}{(m' + \mu)\cos^2\psi + (m + \mu)\sin^2\psi}.$$

257. Si l'on fait pareillement $z = n\cos^2\chi + n'\sin^2\chi$, on aura d'abord

$$-\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \frac{2d\chi}{\sqrt{(z^2 + 2gz + g')}};$$

ensuite il faudra distinguer de même trois cas, selon que la quantité $z^2 + 2gz + g'$ sera de l'une des trois formes,

$$z^2 + 2\nu z\cos\lambda + \nu^2,$$
$$(z + \nu)(z + \nu'),$$
$$(z + \nu)(z - \nu'),$$

ν et ν' étant des quantités réelles et positives.

Ces trois cas combinés avec les trois de la première formule, offrent neuf cas différens à considérer, et pour lesquels on pourra former un tableau analogue à celui que nous avons donné pour le cas où le corps se meut dans un plan fixe.

Supposons de nouveau que $z^2 + 2gz + g' = (z + \nu)(z + \nu')$, et qu'on a $\nu > \nu'$; nous ferons $\tang\chi = h'\tang\zeta$, ensuite $h' = \sqrt{\left(\frac{n + \nu}{n' + \nu}\right)}$ et $\varkappa^2 = \frac{n - n'}{n + \nu'} \cdot \frac{\nu - \nu'}{n' + \nu}$, ce qui donnera la transformée

$$-\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2D^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n + \nu')} \cdot \sqrt{(n' + \nu)}} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \varkappa^2\sin^2\zeta)}};$$

elle résulterait directement de la substitution

$$z = \frac{(nn' + n\nu)\cos^2\zeta + (nn' + n'\nu)\sin^2\zeta}{(n' + \nu)\cos^2\zeta + (n + \nu)\sin^2\zeta}.$$

Ces formules auraient lieu quand même n' serait négatif; en effet, soit $n' = -n''$, pour que la quantité $z^2 + 2gz + g'$ ou son égale $(z + \nu)(z + \nu')$ conserve le même signe, conformément à ce qui a été démontré, depuis $z = -n''$ jusqu'à $z = n$, il faut que $\nu' - n''$ soit positive, et à plus forte raison $\nu - n''$; donc ayant fait

$$\varkappa^2 = \frac{n + n''}{n + \nu'} \cdot \frac{\nu - \nu'}{\nu - n''}, \qquad b^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{n + \nu}{n + \nu'} \cdot \frac{\nu' - n''}{\nu - n''},$$

on voit que $\varkappa^2$ et $\mathcal{C}^2$ seront positifs, et qu'ainsi $\varkappa^2$ sera plus petit que l'unité.

258. Cela posé, si l'on fait en général $k = \sqrt{\left(\frac{n+\nu'}{m+\mu'} \cdot \frac{n'+\nu}{m'+\mu}\right)}$, l'équation de la courbe décrite dans le plan mobile sera

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) + \text{const.}$$

Au commencement du mouvement, c'est-à-dire lorsque le corps est dans l'apside supérieure S°, on a $\psi = 0$; soit en même temps $\zeta = \varepsilon$, et on aura

$$k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(\varkappa, \zeta) - \mathrm{F}(\varkappa, \varepsilon).$$

Il serait d'ailleurs facile de réduire le second membre au seul terme $\mathrm{F}(\varkappa, \xi)$, au moyen de l'équation algébrique qui représente l'équation transcendante $\mathrm{F}(\zeta) - \mathrm{F}(\varepsilon) = \mathrm{F}(\xi)$, $\varkappa$ étant le module commun.

Au reste, la valeur de ε peut se déterminer par l'état initial du mouvement qui a servi à déterminer les constantes C, C', H. Pour cela, soient ψ° et ζ° les valeurs de ψ et ζ qui conviendraient à cet état initial, on peut supposer ψ° et ζ° positifs ou négatifs, mais moindres que $\frac{1}{2}\pi$; or, quand, de l'époque où le corps est au point S°, on revient à une époque antérieure, telle que celle de son état initial, il faut supposer que les valeurs de ψ et ζ qui répondent à un point déterminé du plan FMG, sont diminuées chacune d'un certain nombre de demi-circonférences, c'est-à-dire qu'on devra faire dans l'équation de la courbe $\psi = \psi^\circ - \mathrm{I}\pi$, $\zeta = \zeta^\circ - \mathrm{L}\pi$, I et L étant des entiers, et alors de cette équation on déduira

$$2\mathrm{L} + \frac{\mathrm{F}(\varkappa, \varepsilon)}{\mathrm{F}^1\varkappa} = \frac{2k\mathrm{I}\mathrm{F}^1c - k\mathrm{F}(c, \psi^\circ) + \mathrm{F}(\varkappa, \zeta^\circ)}{\mathrm{F}^1\varkappa}.$$

Et quoiqu'on ait trois inconnues I, L, ε, à déterminer par cette équation, il n'y aura jamais qu'une manière d'y satisfaire exactement; car si, ε restant le même, ainsi que ψ° et ζ°, on supposait que les entiers I et L fussent remplacés par d'autres entiers I' et L', il faudrait qu'on eût $\frac{\mathrm{L}' - \mathrm{L}}{\mathrm{I}' - \mathrm{I}} = \frac{k\mathrm{F}^1c}{\mathrm{F}^1\varkappa}$; ainsi il faudrait que la quantité

$\frac{kF'c}{F'x}$ fût rationnelle, ou que la courbe fût rentrante sur elle-même, ce qui n'indiquerait toujours qu'un seul point où les valeurs de ψ et ζ seraient ψ° et ζ°.

259. On voit maintenant qu'il est facile de trouver une infinité de courbes algébriques qui satisfassent à la question. On peut pour cela faire $c = x$ et $k = \frac{i}{e}$, i et e étant des entiers, ce qui donnera les deux conditions

$$\frac{n+\nu'}{m+\mu'} \cdot \frac{n'+\nu}{m'+\mu} = \frac{i^2}{e^2},$$
$$\frac{m+\mu}{m+\mu'} \cdot \frac{m'+\mu'}{m'+\mu} = \frac{n+\nu}{n+\nu'} \cdot \frac{n'+\nu'}{n'+\nu}.$$

Ces conditions ayant lieu, l'équation de la courbe sera $iF\psi = eF\zeta$, c étant le module commun.

On obtiendra encore des courbes algébriques en satisfaisant aux conditions $k\left(\frac{1+c^\circ}{2}\right) = \frac{i}{e}$, $x = c^\circ$, et ainsi de suite, chaque système représentant toujours une infinité de courbes algébriques.

Nous ne parlons ici que de la courbe tracée dans le plan mobile FMG, et circonscrite par le quadrilatère TVYX; car si l'on voulait que la véritable orbite à double courbure, décrite dans l'espace, fût une courbe algébrique, il faudrait satisfaire à beaucoup d'autres conditions qui rendraient ce problème plus épineux qu'intéressant.

260. Un cas fort remarquable est celui où l'on aurait $m = m'$; alors la courbe décrite dans le plan mobile serait l'arc d'ellipse TV, qui, dans ce cas, se confondrait avec XY. Ainsi le corps ne pourrait faire que des oscillations dans cet arc, en allant alternativement de T en V et de V en T. Combinant ce mouvement d'oscillation avec le mouvement du plan qui se détermine toujours de la même manière par l'angle ρ, on aurait le mouvement absolu du corps. Ce mouvement s'exécute dans la surface du sphéroïde elliptique décrit par la rotation de l'arc TV autour de l'axe FG; et il est visible qu'à cause du mouvement de rotation, l'orbite comprise dans cette sur-

face est composée de diverses sinuosités qui touchent alternativement les deux circonférences décrites par les points T et V, sans que la vîtesse du corps en ces points soit jamais nulle. Ce cas, au reste, donne lieu à des simplifications de calcul assez remarquables.

Alors l'équation à l'ellipse $u=m$, tient lieu de l'équation..... $k\mathrm{F}(c, \psi) = \mathrm{F}(x, \xi)$, et on aura pour déterminer t et ρ les formules

$$\frac{dt}{a\sqrt{a}} = -\left(\frac{m^2 - z^2}{4}\right)\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$d\rho = -\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{m^2-1}\right)\frac{\mathrm{H}'dz}{\sqrt{Z}},$$

où il faudra substituer les valeurs trouvées ci-dessus,

$$z = \frac{n(n'+\nu)\cos^2\zeta + n'(n+\nu)\sin^2\zeta}{(n'+\nu)\cos^2\zeta + (n+\nu)\sin^2\zeta},$$

$$-\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{2\mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n+\nu')}.\sqrt{(n'+\nu)}}\cdot\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\kappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Le temps d'une oscillation se trouverait en prenant l'intégrale depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$.

261. Un second cas non moins remarquable, est celui où l'on aurait $n=n'$; alors la courbe décrite dans le plan mobile serait l'arc d'hyperbole TX, qui, dans ce cas, se confondrait avec VY. Ainsi le mouvement du corps dans ce plan serait un simple mouvement d'oscillation suivant l'arc TX, et sa vîtesse serait nulle dans le plan aux deux extrémités de cet arc. Les formules qui satisfont à ce cas sont semblables à celles que nous venons de rapporter.

262. Enfin un troisième cas qui dérive des deux autres est celui où l'on aurait à la fois $m=m'$ et $n=n'$; alors le quadrilatère TVYX se réduirait à un point; le corps n'aurait aucun mouvement dans le plan FMG, et sa vîtesse serait toute entière perpendiculaire à ce plan, de sorte qu'il décrirait nécessairement une circonférence dont le centre est au point P.

Les symptômes de ce troisième cas sont faciles à établir immédiatement. En effet, soit M le lieu du corps qui doit rester fixe dans le plan FMG; si l'on emploie les dénominations de l'art. 70, Fig. 31.

les quantités φ, ω, r, s, y seront constantes, et on aura entr'elles les relations $r = \frac{a \sin \omega}{\sin(\varphi - \omega)}$, $s = \frac{a \sin \varphi}{\sin(\varphi - \omega)}$, $y = r \sin \varphi = s \sin \omega$, $x = s \cos \omega$, $a - x = -r \cos \varphi$. Or, en vertu des forces A et B, dirigées vers les centres F et G, le corps M est sollicité parallèlement à GF par la force $\frac{A(a-x)}{r^3} - \frac{Bx}{s^3}$, et dans le sens MP par la force $\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3}$; la première doit être nulle, pour que le corps n'ait aucun mouvement dans le sens de l'axe FG; ainsi on aura la condition

$$0 = A \cos \varphi \sin^2 \varphi + B \cos \omega \sin^2 \omega,$$

qui servira à déterminer φ par ω, ou réciproquement.

Ensuite, pour que la force $\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3}$ dirigée vers P, n'ait d'autre effet que de faire mouvoir le corps dans le cercle dont le rayon est MP, il faut, en appelant V sa vîtesse, qu'on ait

$$\frac{Ay}{r^3} + \frac{By}{s^3} = \frac{V^2}{y};$$

substituant dans cette équation les valeurs de r, s, y en fonctions de a, φ, ω, et observant que d'après l'équation (b') on a $H = Vy$ et $V^2 = \frac{H^2}{y^2} = \frac{aH'}{y^2}$, il en résultera

$$H' = A \sin^3 \varphi \operatorname{tang} \omega,$$

ou $V = \sin(\varphi - \omega) \sqrt{\left(\frac{A \sin \varphi}{a \sin \omega \cos \omega}\right)}$. Ainsi on connaît la position du corps et la vîtesse primitive dont il doit être animé, pour que ce cas particulier ait lieu.

Du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes.

263. Quoique ce problème ne soit sujet à aucune difficulté, cependant comme il n'a point été traité jusqu'ici d'une manière complète, j'ai cru qu'il serait convenable d'en donner ici la solution, laquelle pourra être regardée d'ailleurs comme une application nouvelle de la théorie des fonctions elliptiques.

Supposons que le point A, où commence le mouvement, soit Fig. 32.
situé sur le prolongement de la ligne des centres FG, du côté de F; soit V la vîtesse initiale que nous supposons dirigée suivant AM, et soit M le lieu du corps au bout du temps t. Si l'on fait $FG=a$, $AF=h$, $AG=a+h=h'$, $FM=x$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{ddx}{dt^2}=-\frac{A}{x^2}-\frac{B}{(a+x)^2},$$

dont l'intégrale est, en déterminant convenablement la constante,

$$\frac{dx^2}{2dt^2}=\tfrac{1}{2}V^2+\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}-\frac{A}{h}-\frac{B}{a+h'}.$$

On voit déjà par cette intégrale que si l'on a $V^2 = \text{ou} > \frac{2A}{h}+\frac{2B}{h'}$, le corps s'éloignera à l'infini; et qu'au contraire si l'on a $V^2 < \frac{2A}{h}+\frac{2B}{h'}$, le corps ne pourra s'éloigner que jusqu'à une distance $FD=k$ déterminée par l'équation

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{a+k}=\frac{A}{h}+\frac{B}{a+h}-\frac{V^2}{2};$$

or, cette équation étant du genre de celles que j'ai appelées *équations omales* (*), elle aura toujours une racine réelle positive.

264. Le corps, parvenu au point D, revient sur ses pas en vertu de l'action des forces centrales, et il descend de D vers F, d'un mouvement continuellement accéléré. Sa vîtesse en un point quelconque M, que nous désignerons par v, se déterminera toujours par la même équation, qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{v^2}{2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}-\frac{A}{k}-\frac{B}{a+k};$$

d'où il suit que la vîtesse en A est égale à la vîtesse initiale V, mais dirigée en sens contraire, et que la vîtesse finale au point F est infinie.

En vertu de cette vîtesse, le corps passe au-delà du centre F,

(*) Supplément à l'Essai sur la Théorie des Nombres, page 29.

et sa vîtesse redevient aussitôt finie. Mais comme la force A change de signe en même temps que x, il s'ensuit qu'au point M', où l'on a $FM'=x$, la vîtesse du corps sera déterminée par l'équation

$$\frac{v^2}{2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}-\frac{A}{k}-\frac{B}{a+k}.$$

J'observe maintenant que la quantité $\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}$ ayant pour *minimum* $\frac{1}{a}(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$, il y aura deux cas à considérer, selon que $\frac{Aa}{k}+\frac{Ba}{a+k}$ est $<$ ou $>(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$.

265. *Premier cas.* Si l'on a $\frac{Aa}{k}+\frac{Ba}{a+k}>(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$, le corps ne pourra s'éloigner de F que jusqu'à une certaine distance $FE=k'$, moindre que FG, même moindre que $\frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$, et déterminée par l'équation

$$\frac{A}{k'}+\frac{B}{a-k'}=\frac{A}{k}+\frac{B}{a+k}.$$

Parvenu au point E, le corps reviendra sur ses pas; sa vîtesse, d'abord nulle en E, deviendra infinie en F, elle redeviendra finie passé le point F, et diminuera continuellement jusqu'au point D, où elle sera nulle. En général, le mouvement du corps sera un mouvement d'oscillation par lequel il passera alternativement du point D au point E et du point E au point D; et sa vîtesse dans un même point de la droite DE sera toujours la même dans un sens ou dans l'autre.

Ce premier cas comprend celui où l'on aurait l'égalité....... $\frac{Aa}{k}+\frac{Ba}{a+k}=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$; alors le corps s'éloignera le plus qu'il est possible du centre F, dans le sens FG, et cette plus grande distance serait $k'=\frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$.

266. *Second cas.* Si l'on a $\frac{Aa}{k}+\frac{Ba}{a+k}<(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$, la vîtesse du corps sera dans son *minimum* au point où l'on a $x=\frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$; mais

mais elle augmentera ensuite, et le corps se portera d'un mouvement accéléré vers le centre G, où sa vîtesse sera infinie.

En vertu de cette vîtesse, le corps continuera son mouvement au-delà du centre G. Soit $GM''=x$, et on aura, au point M'',

$$\frac{v^2}{2}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{x}-\frac{A}{k}-\frac{B}{a+k}.$$

Le corps s'éloigne donc du centre G jusqu'à une distance $GD'=k'$ déterminée par l'équation

$$\frac{A}{a+k'}+\frac{B}{k'}=\frac{A}{k}+\frac{B}{a+k}.$$

Le point D' ainsi déterminé sera le second terme de l'oscillation; ensuite on voit que le corps reviendra du point D' au point D, et que sa vîtesse, dans un même point de la ligne DD', sera la même en allant et en revenant. Il s'agit maintenant de trouver dans ces deux hypothèses le temps de chaque oscillation.

267. Supposons donc que le corps parte du point D, où sa vîtesse est nulle, et qu'au bout du temps t il se trouve au point M, situé entre D et F; si l'on fait $FD=k$, $FM=x$, on aura l'équation

$$\frac{dx^2}{2dt^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}-\frac{A}{k}-\frac{B}{a+k},$$

d'où résulte

$$dt\sqrt{2A}=\frac{-dx\sqrt{[Ak(a+k)x(a+x)]}}{\sqrt{(k-x)}.\sqrt{[A(a+k)(a+x)+Bkx]}}.$$

Soit d'abord $x=\frac{k}{1+y^2}$, ensuite $y=\sqrt{\left(\frac{a+k}{a}\right)}\tang\varphi$ et........ $c^2=\frac{Bk^2}{A(a+k)^2+Bk^2}$, on aura la transformée

$$dt=bk\sqrt{\left(\frac{2k}{A}.\frac{a+k}{a}\right)}.\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\left(1+\frac{k}{a}\sin^2\varphi\right)^2\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Pour avoir le temps de la descente de D en F, il faut intégrer la formule précédente depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Soit dans ces limites $Z^1=\int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2\Delta}$, n étant $=\frac{k}{a}$, on aura, par les réductions connues

$$2(n+c^2)Z^1=E^1c-\left(1+\frac{c^2}{n}\right)F^1c+\left(n+2c^2+\frac{c^2}{n}\right)\Pi^1(n,c).$$

64

Quant à la fonction $\Pi^1(n, c)$, elle se trouve par la formule du n° 96, I[re] p.; connaissant donc Z^1 et appelant T' le temps employé à parcourir DF, on aura

$$T' = bkZ^1 \cdot \sqrt{\left[\frac{2k(1+n)}{A}\right]}.$$

268. Pour avoir maintenant le temps du mouvement sur la droite FG, il faudra intégrer l'équation

$$dt\sqrt{2} = \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} - \frac{C}{a}\right)}},$$

dans laquelle $\frac{C}{a} = \frac{A}{k} + \frac{B}{a+k}$. Pour cela il faut, comme ci-dessus, distinguer deux cas.

Soit 1°. $C > (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$; le corps ne pourra s'éloigner de F que jusqu'à une distance $FE = k'$, moindre que FG, déterminée par l'équation

$$\frac{A}{k'} + \frac{B}{a-k'} - \frac{C}{a} = 0.$$

Soit donc $x = k'\sin^2\psi$, on aura

$$dt = \frac{\sqrt{2k'} \cdot d\psi \sin^2\psi}{\sqrt{\left[\frac{A}{k'^2} - \frac{B\sin^2\psi}{(a-k')(a-k'\sin^2\psi)}\right]}}.$$

Soit ensuite $\operatorname{tang}\psi = \sqrt{\left(\frac{a}{a-k'}\right)}\operatorname{tang}\zeta$; si l'on fait $\nu = \frac{k'}{a-k'}$, et $\varkappa^2 = \frac{B\nu^2}{A}$, on aura la transformée

$$dt = \frac{\nu a\sqrt{(2\nu a)}}{\sqrt{A}} \cdot \frac{d\zeta \sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}.$$

Cette formule devra être intégrée depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, afin d'avoir le temps employé à parcourir FE; soit donc dans ces limites $Z'' = \int \frac{d\zeta \sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\zeta)}}$, on aura, par les formules connues,

$$2(1+\nu)(\nu+c^2)Z'' = \left(1 + \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)F^1c - E^1c + \left(\nu - \frac{\varkappa^2}{\nu}\right)\Pi^1(\nu, \varkappa),$$

et on en déduira le temps cherché

$$T'' = \frac{\nu a\sqrt{(2\nu a)}}{\sqrt{A}}\,Z'',$$

de sorte que le temps total de l'oscillation de D en E sera $T'+T''$.

Si l'on a $C=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$, il s'ensuivra $k'=\frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$, $\nu=\sqrt{\frac{A}{B}}$ et $x=1$; d'où il suit que T'' sera infini. Ainsi le corps qui a une vîtesse infinie en F, mettra cependant un temps infini à parcourir l'espace FE. Pour expliquer ce paradoxe, il faut considérer que la vîtesse devient tout à coup finie, à une très-petite distance de F ; qu'ensuite cette vîtesse diminue progressivement, à mesure que le corps s'approche du point E, et qu'à une petite distance de E elle est proportionnelle à l'espace qui reste à parcourir; d'où il suit qu'il faut un temps infini pour que le corps arrive au point E. Parvenu à ce point, il sera également attiré des deux côtés par les forces A et B, et restera en repos.

269. Si l'on a $C<(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$, le corps éprouvera un *minimum* de vîtesse en un point de l'espace FG; mais ensuite la vîtesse augmentera et deviendra infinie au point G.

Pour avoir le temps du mouvement, soit $x=a\sin^2\psi$, on aura

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{d\psi\sin^2\psi\cos^2\psi}{\sqrt{(A\cos^4\psi+B\sin^2\psi-C\sin^2\psi\cos^2\psi)}},$$

et cette formule devra être intégrée depuis $\psi=0$ jusqu'à $\psi=\frac{1}{2}\pi$, pour donner le temps T'' employé à parcourir FG.

Il faut observer avant tout que la quantité P sous le radical étant mise sous la forme

$$P = A\cos^4\psi+(A+B-C)\sin^2\psi\cos^2\psi+B\sin^4\psi,$$

offre deux cas à distinguer, selon que C est plus grand ou plus petit que $(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$, parce que les deux facteurs de cette quantité seront imaginaires dans le premier cas, et réels dans l'autre.

270. Soit, 1°. $C>(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$, on pourra faire

$$P = A(\cos^4\psi+2\alpha\cos\theta\cos^2\psi\sin^2\psi+\alpha^2\sin^4\psi),$$

ce qui donnera

$$\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \cos\theta = \frac{A+B-C}{2\sqrt{AB}};$$

et comme, dans ce cas, C est compris entre les limites $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$, $(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$, on voit que $\cos\theta$ sera toujours compris entre les limites $+1$ et -1, et qu'ainsi θ sera réel. Cela posé, soit $\tang\psi = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\frac{1}{2}\zeta$, $x=\sin\frac{1}{2}\theta$, $m=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, on aura

$$t = \frac{a\sqrt{2a\alpha}}{2\sqrt{A}}\cdot\int\frac{\left(\frac{1-m}{2}\right)^2 d\zeta\sin^2\zeta}{(1+m\cos\zeta)^2\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}.$$

Cette intégrale doit être prise depuis $\zeta=0$ jusqu'à $\zeta=\pi$, afin d'avoir le temps entier T'' employé à parcourir FG; et comme on a

$$\frac{1}{(1+m\cos\zeta)^2}+\frac{1}{(1-m\cos\zeta)^2}=\frac{2(1+m^2\cos^2\zeta)}{(1-m^2\cos^2\zeta)^2},$$

si l'on fait $\nu=\frac{m^2}{1-m^2}=\frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha}$, il suffira de prendre depuis $\zeta=0$ jusqu'à $\zeta=\frac{1}{2}\pi$, l'intégrale $Z''=\int\frac{(1+2\nu-\nu\sin^2\zeta)d\zeta\sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}$, et on aura le temps cherché

$$T''=\sqrt{\left(\frac{a^3}{2\sqrt{AB}}\right)}\cdot\tfrac{1}{2}Z''.$$

Voyez ci-dessus, n° 143, les formules qui servent à trouver l'intégrale Z'' représentée par U^1.

271. Soit, 2°. $C<(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$, on pourra faire

$$P = A(\cos^2\psi+\alpha\sin^2\psi)(\cos^2\psi+\alpha'\sin^2\psi),$$

α et α' étant des quantités réelles et positives données par les équations

$$\alpha+\alpha' = \frac{A+B-C}{A}; \quad \alpha\alpha' = \frac{B}{A}.$$

Soit $\alpha>\alpha'$, $\tang\psi=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tang\zeta$, $x^2=1-\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\nu=\frac{1}{\alpha}-1$, on aura

$$t=\frac{a\sqrt{2a}}{\alpha\sqrt{(A\alpha)}}\cdot\int\frac{d\zeta\sin^2\zeta\cos^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}.$$

Ainsi prenant l'intégrale $Z''=\int\frac{d\zeta\cos^2\zeta\sin^2\zeta}{(1+\nu\sin^2\zeta)^2\sqrt{(1-x^2\sin^2\zeta)}}$ depuis...

$\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, on aura le temps cherché

$$T'' = \frac{a\sqrt{2a}}{\alpha\sqrt{(A\alpha)}} . Z''.$$

272. Un cas qui tient le milieu entre les deux précédens, est celui où l'on aurait $C = (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$; alors $P = A(\cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi)^2$ et $\alpha = \sqrt{\frac{B}{A}}$, ce qui donne directement

$$t = \frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{A}} \int \frac{d\psi \sin^2\psi \cos^2\psi}{\cos^2\psi + \alpha \sin^2\psi};$$

intégrant dans les limites requises, on aura

$$T'' = \frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{A}} . \frac{\pi}{4(\sqrt{\alpha} + 1)^2}.$$

273. Dans les trois cas qui précèdent, le corps continue son mouvement au-delà du point G jusqu'à une distance $GD' = k'$, que nous avons déterminée n° 266. Quant au temps T''' employé à parcourir cette troisième partie de l'oscillation, il se détermine par la même formule qui a servi à déterminer le temps T' de la première partie; il suffit pour cela de changer dans cette formule les quantités A, B, k en B, A, k', respectivement. Ainsi les différens cas du mouvement rectiligne d'un corps attiré vers deux centres fixes sont résolus d'une manière générale, toutes les fois que la vîtesse initiale est telle, que le corps ne peut s'éloigner à l'infini, ce qui réduit son mouvement à un simple mouvement d'oscillation.

274. Les formules précédentes supposent les forces A et B attractives; mais il serait facile d'en trouver de semblables pour le cas où ces forces seraient l'une attractive, l'autre répulsive, ou toutes les deux répulsives, ce qui pourrait alors s'appliquer à quelques phénomènes d'électricité ou de magnétisme.

Pour en montrer un exemple, supposons que les deux forces A et B, situées aux centres F et G, soient répulsives, il y aura sur la droite FG un point I déterminé par le rapport $\frac{FI}{IG} = \sqrt{\frac{A}{B}}$, où un corps, placé sans vîtesse initiale, resterait en repos. Mais si l'on place ce corps en tout autre point, par exemple en D, l'action prépondérante de la force A fera mouvoir le corps dans le sens DG; Fig. 33.

par ce mouvement il dépassera le point I, mais il ne pourra s'approcher du centre G que jusqu'à un certain point E, où sa vîtesse sera de nouveau anéantie. Du point E le corps reviendra vers D, et ainsi alternativement.

275. Pour déterminer le temps de chaque oscillation, soit M le lieu du corps au bout du temps t, et soit $FG = a$, $FD = a \sin^2 \alpha$, $FM = x = a \sin^2 \varphi$, $FE = a \sin^2 \beta$, on aura d'abord l'équation différentielle

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{(a-x)^2},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dx^2}{2dt^2} = \frac{C}{a} - \frac{A}{x} - \frac{B}{a-x};$$

et parce que la vîtesse est nulle au point D, on aura $C = \frac{A}{\sin^2 \alpha} + \frac{B}{\cos^2 \alpha}$. Mettant au lieu de x sa valeur $a \sin^2 \varphi$, on tirera de cette équation, après avoir substitué la valeur de C,

$$\frac{dt}{a\sqrt{2a}} = \frac{d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{(\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha)} \cdot \sqrt{\left(\frac{A \cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} - \frac{B \sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha}\right)}}.$$

Le point E, limite de l'oscillation, se déterminera en faisant à la fois $\varphi = \beta$ et $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, ce qui donnera

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)};$$

c'est la relation entre les deux angles α et β qui déterminent la limite de chaque oscillation; ils seraient complémens l'un de l'autre si l'on avait $A = B$.

276. L'équation précédente peut être mise sous la forme

$$\frac{dt\sqrt{A}}{a\sqrt{2a}} = \sin \alpha \sin \beta \cdot \frac{d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{(\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha)} \cdot \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \varphi)}}.$$

Ainsi en faisant $Z' = \int \frac{d\varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{(\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha)} \cdot \sqrt{(\sin^2 \beta - \sin^2 \varphi)}}$, et prenant cette intégrale depuis $\varphi = \alpha$ jusqu'à $\varphi = \beta$, on aura le temps T d'une oscillation par la formule

$$T = \frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{A}} \cdot Z' \sin \alpha \sin \beta.$$

L'intégrale Z' peut se trouver au moyen des formules de la case VI, supplément à la 1^re partie.

277. Dans le cas de A=B, qui donne $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, et où il faut supposer $\alpha < \frac{1}{4}\pi$, les formules se simplifient par la substitution $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha\cos^2\psi + \cos^2\alpha\sin^2\psi$; il en résulte

$$Z = \int d\psi \sqrt{[(\sin^2\alpha\cos^2\psi + \cos^2\alpha\sin^2\psi)(\cos^2\alpha\cos^2\psi + \sin^2\alpha\sin^\circ\psi)]};$$

soit de plus $\tang\psi = \tang\alpha\tang\zeta$, et on aura, en faisant $c^2 = 1 - \tang^4\alpha$, $b = \tang^2\alpha$,

$$Z = \sin^2\alpha \int \frac{d\zeta\sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)}}{[1 - (1 - b)\sin^2\zeta]^2}.$$

Pour simplifier encore cette intégrale, nous ferons usage des formules de l'art. 60, I^re p., suivant lesquelles on aura

$$c^\circ = \frac{1-b}{1+b} = \cos 2\alpha,\quad \Delta = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\zeta)},\quad \Delta^\circ = \sqrt{(1 - c^{\circ 2}\sin^2\zeta^\circ)},$$

$$\tang(\zeta^\circ - \zeta) = b\tang\zeta,\quad \frac{d\zeta}{\Delta} = \frac{1 + c^\circ}{2}\cdot\frac{d\zeta^\circ}{\Delta^\circ},\quad 1 - (1 - b)\sin^2\zeta = \Delta\Delta^\circ.$$

Par ces substitutions, on trouve

$$dZ = \sin^2\alpha\cos^2\alpha.\frac{d\zeta^\circ}{\Delta^{\circ 3}} = \frac{1}{4}b^{\circ 2}.\frac{d\zeta^\circ}{\Delta^{\circ 3}};$$

donc par les formules du n° 138, I^re p., on a

$$Z = \frac{1}{4}E(c^\circ, \zeta^\circ) - \frac{1}{4}.\frac{c^{\circ 2}\sin\zeta^\circ\cos\zeta^\circ}{\Delta^\circ}.$$

Faisant $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, et par conséquent $\zeta^\circ = \pi$, on aura l'intégrale $Z^1 = \frac{1}{2}E^1c^\circ$, qui donne pour le temps de l'oscillation cette expression très-simple

$$T = \sqrt{\left(\frac{a^3}{2A}\right)}\cdot\frac{1}{2}b^\circ E^1(c^\circ),$$

où il faut se rappeler qu'on a $c^\circ = \cos 2\alpha$ et $b^\circ = \sin 2\alpha$.

Lorsque α diffère peu de $\frac{1}{4}\pi$, les oscillations sont très-petites; alors on a $c^\circ = 0$, $b^\circ = 1$, $E^1(c^\circ) = \frac{1}{2}\pi$; donc $T = \frac{\pi}{4}\sqrt{\left(\frac{a^3}{2A}\right)}$.

TROISIÈME SECTION.

§ I. *Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes.*

278. Nous donnons ici la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes, considérablement simplifiée par M. Yvory, et telle que nous l'avons déjà publiée dans les Mémoires de l'Institut, an 1812. Les formules de l'attraction, qui, dans les cas ordinaires, sont développées en séries infinies, s'expriment toujours exactement par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce; elles offrent ainsi une application importante de ces fonctions, soit pour conduire à des théorèmes nouveaux sur l'attraction des ellipsoïdes, soit pour faire connaître avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, les valeurs des forces, dans les cas, rares à la vérité, où elles ne peuvent être exprimées par des séries suffisamment convergentes.

Formules pour la solution générale du problème.

279. Soient f, g, h les trois coordonnées du point attiré S, soient x, y, z celles d'une molécule quelconque $d\text{M}$ du corps attirant, et r sa distance au point S, ensorte qu'on ait

$$r^2 = (f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2.$$

L'attraction que la molécule $d\text{M}$ exerce sur le point S est exprimée par $\frac{d\text{M}}{r^2}$; elle se décompose en trois forces parallèles aux axes des coordonnées, lesquelles sont

$$\frac{(f-x)d\text{M}}{r^3},\ \frac{(g-y)d\text{M}}{r^3},\ \frac{(h-z)d\text{M}}{r^3};$$

si donc on désigne par A, B, C, les attractions totales exercées dans le le sens des coordonnée x, y, z, respectivement, on aura

$$A = \int \frac{f-x}{r^3} dM,$$
$$B = \int \frac{g-y}{r^3} dM,$$
$$C = \int \frac{h-z}{r^3} dM,$$

ces intégrales étant étendues à toutes les molécules du corps attirant.

280. Supposons le corps homogène, et soit sa densité $=1$, on pourra faire $dM = dxdydz$, et alors on aura

$$A = \iiint \frac{f-x}{r^3} dxdydz\,;$$

les deux autres forces seront semblablement exprimées; mais il suffira de nous occuper de la force A.

Il est facile d'abord d'exécuter l'intégration par rapport à x; car, puisqu'en regardant x seule comme variable, on a $rdr = -(f-x)dx$, il s'ensuit qu'on a $\int \frac{f-x}{r^3} dx = \int -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r} +$ const. Soient donc r_0 et r_1 les deux valeurs de r qui répondent aux deux limites de l'intégrale, c'est-à-dire aux deux points de la surface du solide qui sont situés sur une même parallèle à l'axe des x, on aura

$$A = \iint dydz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right).$$

281. Supposons que le corps attirant soit un ellipsoïde dont la surface ait pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1\,;$$

il faudra tirer la valeur de x de cette équation, puis la substituer dans les valeurs de r_0 et r_1, lesquelles sont

$$r_0 = \sqrt{[(f+x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]},$$
$$r_1 = \sqrt{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]}\,;$$

alors il ne s'agira plus que d'exécuter les deux intégrations par rapport à y et à z, dans toute l'étendue de l'ellipsoïde. Mais ces intégrations ne peuvent être effectuées, ni l'une ni l'autre, par les méthodes connues, et il faut recourir à d'autres moyens, pour achever la solution du problème, ou du moins pour la ramener aux simples quadratures.

Comparaison des forces exercées dans le même sens par deux ellipsoïdes, dont l'un agit sur un point extérieur, et l'autre sur un point intérieur correspondant.

282. Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la position du point S. Il convient maintenant de distinguer deux cas; celui où le point attiré S est situé dans l'intérieur ou sur la surface de l'ellipsoïde M, et celui où il est situé hors de cet ellipsoïde. Le premier cas suppose qu'on a $\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{6^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}<$ ou $=1$; et le second qu'on a $\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{6^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}>1$. Ce dernier cas étant le plus difficile, on aura fait un grand pas vers la solution du problème, si on parvient à le ramener au premier.

Pour cet effet, considérons un second ellipsoïde M′, dans lequel les quantités analogues à α, 6, γ, x, y, z soient désignées par les mêmes lettres accentuées; supposons que cet ellipsoïde, dont la densité est encore $=1$, exerce son attraction sur un nouveau point S′ déterminé par les trois coordonnées f', g', h'. Ces deux ellipsoïdes sont d'ailleurs concentriques, et les axes désignés semblablement ont la même direction.

Si l'on désigne par ρ_1 et ρ_0 les quantités analogues à r_1 et r_0, on aura semblablement

$$A'=\iint dy'dz'\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_0}\right),$$

A′ étant l'attraction exercée dans le sens des x, sur le point S′, par l'ellipsoïde M′.

283. Faisons maintenant ensorte que les quantités ρ_1 et r_1 soient égales dans les deux solides, il s'ensuivra que ρ_0 et r_0 doivent être aussi égales entre elles, et cette circonstance permettra de trouver, d'une manière très-simple, le rapport des quantités A et A′.

Puisque nous avons à la fois

$$r_1 = \sqrt{[(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2]},$$
$$\rho_1 = \sqrt{[(f'-x')^2 + (g'-y')^2 + (h'-z')^2]},$$

pour rendre ces expressions identiques, faisons d'abord

$$fx = f'x',\ gy = g'y',\ hz = h'z',$$

ou, ce qui revient au même, prenons trois indéterminées λ, μ, ν, au moyen desquelles on ait simultanément,

$$f = \lambda f',\ g = \mu g',\ h = \nu h',$$
$$x' = \lambda x,\ y' = \mu y,\ z' = \nu z,$$

les trois conditions dont il s'agit seront satisfaites, et il restera à satisfaire à l'équation

$$f^2 + g^2 + h^2 + x^2 + y^2 + z^2 = f'^2 + g'^2 + h'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Substituant dans celle-ci les valeurs de f', g', h', en f, g, h, et celles de x', y', z', en x, y, z, on aura l'équation

$$(\lambda^2-1)x^2 + (\mu^2-1)y^2 + (\nu^2-1)z^2 = \frac{f^2}{\lambda^2}(\lambda^2-1) + \frac{g^2}{\mu^2}(\mu^2-1) + \frac{h^2}{\nu^2}(\nu^2-1);$$

laquelle doit s'accorder avec l'équation de l'ellipsoïde donné.... $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{6^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$. Pour cela soit $\lambda^2 - 1 = \frac{\xi}{\alpha^2}$, il faudra qu'on ait $\mu^2 - 1 = \frac{\xi}{6^2}$, $\nu^2 - 1 = \frac{\xi}{\gamma^2}$, et on aura, pour déterminer ξ, l'équation

$$\frac{f^2}{\alpha^2+\xi} + \frac{g^2}{6^2+\xi} + \frac{h^2}{\gamma^2+\xi} = 1. \qquad \text{(a)}$$

Nous avons supposé que le point attiré S était situé hors de l'ellipsoïde M, et qu'ainsi on a $\frac{f^2}{\alpha^2} + \frac{g^2}{6^2} + \frac{h^2}{\gamma^2} > 1$; de là on voit qu'en faisant successivement $\xi = 0$ et $\xi = \infty$, dans la fonction qui forme le premier membre de l'équation (a), cette fonction devient > 1 dans le premier cas, et $= 0$ dans le second cas. Donc il y a une valeur réelle et positive de ξ qui satisfait à l'équation (a); et comme d'ailleurs le premier membre décroît continuellement à mesure que ξ augmente, depuis $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = \infty$, il s'ensuit que cette équation n'a qu'une racine réelle.

284. Connaissant la valeur de ξ, on aura celles de λ, μ, ν, par les équations $\lambda^2 = 1 + \frac{\xi}{\alpha^2}$, $\mu^2 = 1 + \frac{\xi}{\beta^2}$, $\nu^2 = 1 + \frac{\xi}{\gamma^2}$; ensuite le point S' sera déterminé par les coordonnées

$$f' = \frac{f}{\lambda}, \quad g' = \frac{g}{\mu}, \quad h' = \frac{h}{\nu}.$$

De plus, puisqu'on a $x = \frac{x'}{\lambda}$, $y = \frac{y'}{\mu}$, $z = \frac{z'}{\nu}$; si l'on substitue ces valeurs dans l'équation de l'ellipsoïde donné M, on aura

$$\frac{x'^2}{\lambda^2\alpha^2} + \frac{y'^2}{\mu^2\beta^2} + \frac{z'^2}{\nu^2\gamma^2} = 1;$$

c'est l'équation du second ellipsoïde M', dont les demi-axes sont α', β', γ'; on aura donc

$$\alpha' = \alpha\lambda, \quad \beta' = \beta\mu, \quad \gamma' = \gamma\nu.$$

De ces équations on tire

$$\alpha'^2 - \alpha^2 = \xi, \quad \beta'^2 - \beta^2 = \xi, \quad \gamma'^2 - \gamma^2 = \xi;$$

donc on a aussi

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad \beta'^2 - \gamma'^2 = \beta^2 - \gamma^2, \quad \gamma'^2 - \alpha'^2 = \gamma^2 - \alpha^2;$$

d'où l'on voit que les deux ellipsoïdes dont il s'agit se correspondent de telle sorte, que les sections principales situées dans le même plan sont décrites des mêmes foyers.

Remarquons maintenant que puisqu'on a $\alpha'^2 = \alpha^2 + \xi$, $\beta'^2 = \beta^2 + \xi$, $\gamma'^2 = \gamma^2 + \xi$, l'équation (a) donne

$$\frac{f^2}{\alpha'^2} + \frac{g^2}{\beta'^2} + \frac{h^2}{\gamma'^2} = 1,$$

et qu'ainsi le point S, dont les coordonnées sont f, g, h, est situé sur la surface de l'ellipsoïde M'.

Réciproquement, puisqu'on a aussi l'équation

$$\frac{f'^2}{\alpha^2} + \frac{g'^2}{\beta^2} + \frac{h'^2}{\gamma^2} = 1,$$

il s'ensuit que le point S', dont les coordonnées sont f', g', h', est situé sur la surface de l'ellipsoïde M.

Ces deux points S et S' se correspondent mutuellement de telle sorte, qu'on a

$$f : f' :: \alpha' : \alpha, \quad g : g' :: \beta' : \beta, \quad h : h' :: \gamma' : \gamma,$$

c'est-à-dire que les coordonnées homologues, ou parallèles à un même axe, divisent proportionnellement les axes sur lesquels elles sont situées.

285. Ayant fait voir qu'on a généralement $\rho_1 = r_1$, et par une suite nécessaire $\rho_0 = r_0$; si l'on observe d'ailleurs que les équations $y' = \mu y$, $z' = \nu z$ donnent $dy' = \mu dy$, $dz' = \nu dz$, et par conséquent $dy'dz' = \mu\nu dydz = \frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}\, dydz$, on en conclura que les forces A et A' sont ainsi exprimées,

$$\mathrm{A} = \int\!\!\int dydz\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right),$$
$$\mathrm{A}' = \frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}\int\!\!\int dydz\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right);$$

et comme ces intégrales sont prises de part et d'autre entre les mêmes limites, il s'ensuit qu'on a

$$\mathrm{A} : \mathrm{A}' :: \beta\gamma : \beta'\gamma',$$

c'est-à-dire que les attractions A et A', dans le sens des demi-axes α et α' sont entr'elles comme les produits $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ des deux autres demi-axes.

On aurait donc semblablement

$$\mathrm{B} : \mathrm{B}' :: \alpha\gamma : \alpha'\gamma',$$
$$\mathrm{C} : \mathrm{C}' :: \alpha\beta : \alpha'\beta'.$$

Ainsi étant proposé de déterminer l'attraction d'un ellipsoïde M sur un point S situé hors de ce solide, on imaginera un second ellipsoïde M', dont la surface passe par le point donné S, et dont les sections principales soient situées dans les mêmes plans et décrites des mêmes foyers que les sections correspondantes de l'ellipsoïde donné, conditions qui suffisent pour déterminer entièrement la grandeur et la position des axes α', β', γ' du second ellipsoïde; on prendra ensuite sur la surface de l'ellipsoïde donné M un point S', de manière que chaque coordonnée du point S' soit à la coordonnée correspondante du point S, dans le même rapport que les demi-axes des ellipsoïdes M et M', situés dans la direction de ces coordonnées. Cela posé, si on désigne par A', B', C' les trois forces parallèles aux axes des coordonnées qui résultent de l'attraction de l'ellipsoïde M' sur le point intérieur S', et par A, B, C les forces exercées semblablement par l'ellipsoïde M sur le point extérieur S, on aura, d'après ce que nous avons démontré,

$$A=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}A',\quad B=\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}B',\quad C=\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}C'.$$

On voit donc que le second cas du problème général, regardé jusqu'à présent comme sujet à de grandes difficultés, se ramène immédiatement au premier cas, où il s'agit de déterminer l'attraction d'un ellipsoïde donné sur un point intérieur quelconque : or, on sait que ce premier cas a été résolu il y a long-temps avec beaucoup de simplicité et d'élégance, et il ne nous reste qu'à exposer cette solution pour compléter entièrement la théorie de l'attraction des ellipsoïdes homogènes.

Solution du cas où le point attiré est situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde ou à sa surface.

286. Soit toujours M l'ellipsoïde donné, dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

et soit S le point attiré, dont les coordonnées sont f, g, h; ce point est maintenant situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde, de sorte qu'on a

$$\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{\beta^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}<1.$$

Soit dM une molécule quelconque du corps attirant, le lieu de cette molécule sera déterminé en général par les trois coordonnées rectangles x, y, z, prises dans le sens des demi-axes α, β, γ; mais il convient d'exprimer ces coordonnées par d'autres variables.

Soit R la distance de la molécule au point S; soit p l'angle que fait la droite R avec la parallèle à l'axe des x, menée par le point S; soit enfin q l'angle que fait le plan de ces deux droites avec le plan des x, y. Si l'origine des coordonnées était au point S, le lieu de la molécule dM serait déterminé par les valeurs $x = \mathrm{R}\cos p$, $y = \mathrm{R}\sin p\cos q$, $z = \mathrm{R}\sin p\sin q$; mais comme on doit supposer que l'origine des coordonnées est placée au centre de l'ellipsoïde, on aura

$$\begin{aligned}
x &= f + \mathrm{R}\cos p,\\
y &= g + \mathrm{R}\sin p\cos q,\\
z &= h + \mathrm{R}\sin p\sin q.
\end{aligned}$$

Concevons maintenant que la molécule dM prenne la forme d'un parallélepipède rectangle dont les côtés relatifs aux variations des quantités R, p, q, sont dR, Rdp, R$dq \sin p$; puisqu'on suppose la densité $= 1$, on pourra faire $d\mathrm{M} = \mathrm{R}^2 d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p$. Donc, l'attraction de la molécule dM sur le point S sera exprimée par $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p$; et les trois forces qui en résultent, suivant les axes des x, des y et des z, seront respectivement $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p\cos p$,.... $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\cos q$, $d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\sin q$; si donc on désigne, comme ci-dessus, par A, B, C, les attractions totales parallèlement à ces axes, on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \textstyle\iiint d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin p\cos p,\\
\mathrm{B} &= \textstyle\iiint d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\cos q,\\
\mathrm{C} &= \textstyle\iiint d\mathrm{R}\,dp\,dq\sin^2 p\sin q,
\end{aligned}$$

ces intégrales étant étendues à toutes les molécules du corps attirant.

287. Considérons d'abord la valeur de A : si on effectue l'intégration par rapport à R, et qu'on appelle R$'$ et R$''$ les deux valeurs de R qui répondent aux deux points de la surface du solide, situés sur la droite déterminée par les deux angles p et q, on aura

$$\mathrm{A} = \textstyle\iint(\mathrm{R}' - \mathrm{R}'')\,dp\,dq\sin p\cos p.$$

Dans cette formule, $\mathrm{R}'dp\,dq\sin p\cos p$ représente l'attraction dans le sens des x, de la pyramide infiniment aiguë qui a pour longueur

R', et pour base, perpendiculaire à R', l'élément $R'^2 dpdq \sin p$; de même $R'' dpdq \sin p \cos p$ représente l'attraction dans le sens des x, de la pyramide opposée à la précédente. Ces deux pyramides, terminées l'une et l'autre à la surface du solide, attirent évidemment le point S en sens contraires; ainsi nous avons dû prendre la différence des deux forces qu'elles exercent sur ce point.

Maintenant, si dans l'équation de la surface $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, on substitue pour x, y, z, leurs valeurs en fonctions de R, p, q, on aura l'équation

$$\delta R^2 + 2\varepsilon R - \zeta = 0,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$\delta = \cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sin^2 p \sin^2 q,$$

$$\varepsilon = f \cos p + \frac{\alpha^2}{\beta^2} g \sin p \cos q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} h \sin p \sin q,$$

$$\zeta = \alpha^2 - f^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} g^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} h^2.$$

Les deux valeurs de R que donne cette équation ont été désignées par R' et —R''; on aura donc

$$R' = \frac{-\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + \delta\zeta)}}{\delta},$$

$$R'' = \frac{\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 + \delta\zeta)}}{\delta},$$

d'où résulte $R' - R'' = -\frac{2\varepsilon}{\delta}$. Substituant cette valeur dans l'expression de A, et faisant abstraction du signe dont toute l'expression est affectée, on aura

$$A = \iint \frac{2\varepsilon}{\delta} dpdq \sin p \cos p;$$

intégrale qui doit être prise depuis $p=0$ jusqu'à $p=\pi$, et depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$.

288. Substituant d'abord la valeur de ε, on aura

$$A = 2f \iint \frac{dpdq \sin p \cos^2 p}{\delta} + \frac{2\alpha^2 g}{\beta^2} \iint \frac{dpdq \sin^2 p \cos p \cos q}{\delta},$$
$$+ \frac{2\alpha^2 h}{\gamma^2} \iint \frac{dpdq \sin^2 p \cos p \sin q}{\delta}:$$

or,

or, j'observe que lorsque p devient $\pi - p$, δ reste le même, mais qu'alors $\sin^2 p \cos p$ change de signe. Donc, puisque les intégrales doivent être prises depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \pi$, les deux dernières parties de la valeur de A se réduisent à zéro, et on a simplement

$$A = 2f \iint \frac{dp\,dq \sin p \cos^2 p}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{6^2} \sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sin^2 p \sin^2 q}.$$

Par des considérations semblables, on trouverait que les valeurs des forces B et C s'expriment ainsi :

$$B = \frac{2\alpha^2 g}{6^2} \iint \frac{dp\,dq \sin^3 p \cos^2 q}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{6^2} \sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sin^2 p \sin^2 q},$$

$$C = \frac{2\alpha^2 h}{\gamma^2} \iint \frac{dp\,dq \sin^3 p \sin^2 q}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{6^2} \sin^2 p \cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sin^2 p \sin^2 q};$$

289. Maintenant, sans effectuer les deux intégrations par rapport à p et à q, on voit qu'en faisant $A = 2fX$, la quantité X ne dépendra que des rapports $\frac{\alpha^2}{6^2}$, $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$. Donc le point S sera attiré également dans le sens des x, par tous les ellipsoïdes semblables et situés semblablement, qui enveloppent le point S. Il en sera de même de l'attraction dans le sens des y et de l'attraction dans le sens des z; d'où il suit que tous ces ellipsoïdes exerceront la même attraction absolue sur le point S situé dans leur intérieur.

Ce résultat ne peut avoir lieu, à moins que la couche solide comprise entre deux quelconques des ellipsoïdes qui environnent le point S, n'exerce aucune attraction sur ce point. Et c'est ce qu'on démontre aisément par une construction fondée sur les propriétés des surfaces du second ordre.

290. La valeur $A = 2fX$, où X ne dépend que des deux quantités $\frac{\alpha^2}{6^2}$, $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$, prouve encore que tous les points situés dans un même plan perpendiculaire à l'axe des x, sont également attirés par l'ellipsoïde dans le sens de cet axe, et qu'en général l'attraction parallèle à un axe, pour un point quelconque, est proportionnelle à la coordonnée de ce point parallèle au même axe.

Soient donc A_1, B_1, C_1 les attractions exercées par l'ellipsoïde M sur les points situés aux extrémités des demi-axes α, β, γ; les attractions exercées dans le sens des mêmes axes sur le point S, auront pour valeurs

$$A = \frac{f}{\alpha} A_1, \quad B = \frac{g}{\beta} B_1, \quad C = \frac{h}{\gamma} C_1.$$

Toutes ces propriétés ont été démontrées, il y a long-temps, par Maclaurin; mais on voit qu'elles se déduisent très-simplement de nos formules, avant même d'avoir effectué les intégrations.

291. Revenons à l'expression de A trouvée dans l'art. 288, et proposons-nous d'abord d'intégrer la différentielle

$$\frac{dq}{\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p\cos^2 q + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p\sin^2 q},$$

depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$. On sait que dans ces limites on a la formule $\int \frac{dq}{m^2\cos^2 q + n^2\sin^2 q} = \frac{\pi}{mn}$; ainsi nous aurons, pour l'intégrale dont il s'agit,

$$\frac{\pi}{\sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p)} \cdot \sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p)}},$$

et la valeur de A deviendra

$$A = 2f\pi \int \frac{dp \sin p \cos^2 p}{\sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 p)} \cdot \sqrt{(\cos^2 p + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin^2 p)}}.$$

Cette dernière intégrale doit être prise depuis $p=0$ jusqu'à $p=\pi$, ce qui revient à la prendre depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{1}{2}\pi$, et à doubler le résultat. Soit donc $\cos p = x$, et on aura

$$A = 4\pi\beta\gamma f \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[\alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)x^2]} \cdot \sqrt{[\alpha^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2]}},$$

nouvelle intégrale qui doit être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Si dans cette expression on introduit la masse M de l'ellipsoïde à la place de son volume $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$, on aura

$$A = \frac{3Mf}{\alpha}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(\alpha^2 + \overline{\beta^2 - \alpha^2}.x^2)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \overline{\gamma^2 - \alpha^2}.x^2)}}.$$

Il est clair qu'on déduira de cette expression les valeurs des forces B et C par une simple permutation de lettres; on aura ainsi

$$B = \frac{3Mg}{\beta}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(\beta^2+\overline{\gamma^2-\beta^2}.x^2)}.\sqrt{(\beta^2+\overline{\alpha^2-\beta^2}.x^2)}},$$

$$C = \frac{3Mh}{\gamma}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(\gamma^2+\overline{\alpha^2-\gamma^2}.x^2)}.\sqrt{(\gamma^2+\overline{\beta^2-\gamma^2}.x^2)}}.$$

J'observerai cependant que si on eût calculé directement les valeurs de B et C par les formules de l'art. 288, en intégrant d'abord par rapport à q, on aurait trouvé ces valeurs sous la forme suivante:

$$B = \frac{3Mg}{\alpha(\gamma^2-\beta^2)}\left(\frac{\gamma}{\beta}-\int\frac{dx\sqrt{(\alpha^2+\overline{\gamma^2-\alpha^2}.x^2)}}{\sqrt{(\alpha^2+\overline{\beta^2-\alpha^2}.x^2)}}\right),$$

$$C = \frac{3Mh}{\alpha(\gamma^2-\beta^2)}\left(-\frac{\beta}{\gamma}+\int\frac{dx\sqrt{(\alpha^2+\overline{\beta^2-\alpha^2}.x^2)}}{\sqrt{(\alpha^2+\overline{\gamma^2-\alpha^2}.x^2)}}\right);$$

mais d'ailleurs il est facile de s'assurer que ces diverses formules, où les intégrales doivent toujours être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, s'accordent parfaitement entr'elles.

292. Le problème étant ainsi réduit aux quadratures, on achèvera la solution dans les différens cas par les méthodes d'approximation connues.

Si l'ellipsoïde est peu différent d'une sphère, ensorte que les quantités $\alpha^2-\beta^2$, $\alpha^2-\gamma^2$ soient très-petites par rapport à α^2, on fera $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\mu$, $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}=\nu$, et on aura

$$A = \frac{3Mf}{\alpha^3}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-\mu x^2)}.\sqrt{(1-\nu x^2)}},$$

expression qu'il est facile de développer en suite convergente.

Pour cela, soit

$$(1-\mu x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-\nu x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+P'x^2+P''x^4+P'''x^6+\text{etc.},$$

on aura

$$A = \frac{3Mf}{\alpha^3}\int x^2dx(1+P'x^2+P''x^4+\text{etc.})$$

Effectuant l'intégration entre les limites $x=0$, $x=1$, il viendra

$$A = \frac{Mf}{\alpha^3}(1+\tfrac{3}{5}P'+\tfrac{3}{7}P''+\tfrac{3}{9}P'''+\text{etc.})$$

Quant aux valeurs des coefficiens P′, P″, etc., elles sont :

$$P' = \frac{1}{2}(\mu + \nu),$$
$$P'' = \frac{1.3}{2.4}(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mu\nu,$$
$$P''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}(\mu^3 + \nu^3) + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu),$$
$$P^{\text{IV}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\mu^4 + \nu^4) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2}\mu\nu(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\mu^2\nu^2,$$
etc.

La loi de ces expressions est facile à saisir; et on voit que si μ et ν sont, comme on le suppose, des quantités très-petites, la suite qui donne la valeur de A sera très-convergente. Des suites semblables exprimeront les attractions B et C dans le sens des deux autres axes.

293. Si l'on ne veut pas avoir recours aux séries, ou si les excentricités des sections principales de l'ellipsoïde sont trop grandes pour que les séries soient convergentes, alors il conviendra d'exprimer les attractions A, B, C, au moyen des fonctions elliptiques.

Pour cet effet, il faut établir un ordre de grandeur entre les demi-axes α, β, γ. Supposons que cet ordre est α, β, γ, ensorte qu'on ait $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma$; soit en conséquence $\beta^2 - \alpha^2 = m^2$ et $\gamma^2 - \alpha^2 = n^2$, on aura d'abord

$$A = \frac{3Mf}{\alpha}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(\alpha^2 + m^2x^2)}.\sqrt{(\alpha^2 + n^2x^2)}}.$$

Soit $x = \frac{\alpha}{n}\operatorname{tang}\varphi$ et $c^2 = 1 - \frac{m^2}{n^2}$, on aura la transformée

$$A = \frac{3Mf}{n^3}\int \frac{d\varphi \operatorname{tang}^2\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}},$$

intégrale qui devra être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à la valeur de φ pour laquelle on a $\operatorname{tang}\varphi = \frac{n}{\alpha}$, $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$.

De même, puisqu'on a

$$B = \frac{3Mg}{\beta}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(\beta^2 - m^2x^2)}.\sqrt{[\beta^2 + (n^2 - m^2)x^2]}},$$

si l'on fait $x = \frac{\beta \sin\varphi}{n\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}$, on aura la transformée

$$B = \frac{3Mg}{n^3}\int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

intégrale qui doit toujours être prise entre les mêmes limites.

Enfin, si dans la formule

$$C = \frac{3Mh}{\gamma}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(\gamma^2 - n^2x^2)}.\sqrt{(\gamma^2 - m^2x^2)}},$$

on fait $x = \frac{\gamma \sin\varphi}{n}$, on aura

$$C = \frac{3Mh}{n^3}.\int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}},$$

intégrale qui doit encore être prise entre les mêmes limites que les précédentes.

294. De là on voit que si on fait $\Delta = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}$, et qu'on prenne les trois intégrales suivantes, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à une valeur de $\varphi < \frac{1}{2}\pi$, telle que $\operatorname{tang}\varphi = \frac{n}{\alpha}$, $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$,

$$X = \int \frac{d\varphi \operatorname{tang}^2\varphi}{\Delta},\quad Y = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3},\quad Z = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta},$$

les trois forces A, B, C seront ainsi exprimées :

$$A = \frac{3Mf}{n^3}X,\quad B = \frac{3Mg}{n^3}Y,\quad C = \frac{3Mh}{n^3}Z.$$

Les intégrales X, Y, Z se rapportent immédiatement aux fonctions elliptiques, et d'après les formules données art 138, I^re p., on trouve

$$X = \frac{1}{b^2}[\Delta \operatorname{tang}\varphi - E(c, \varphi)],$$

$$Y = \frac{1}{b^2c^2}\left[E(c, \varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right] - \frac{1}{c^2}F(c, \varphi),$$

$$Z = \frac{1}{c^2}[F(c, \varphi) - E(c, \varphi)],$$

formules où il faudra substituer la valeur de φ pour laquelle on a $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\Delta = \frac{\beta}{\gamma}$.

Nous avons donné des méthodes pour évaluer, avec toute la précision nécessaire, les fonctions E et F, quels que soient le module c et l'amplitude φ ; ainsi nous n'avons rien à ajouter sur la détermination absolue des quantités A, B, C.

295. Mais comme les deux fonctions E et F suffisent pour exprimer les trois quantités X, Y, Z, on voit qu'il est possible d'éliminer ces deux transcendantes, et qu'on obtiendra par ce moyen une équation algébrique entre X, Y, Z ; cette équation est

$$X + Y + Z = \frac{\sin^3\varphi}{\Delta \cos \varphi} = \frac{n^3}{\alpha\beta\gamma}.$$

On a donc aussi entre les forces A, B, C, cette équation algébrique

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = \frac{3M}{\alpha\beta\gamma} = 4\pi;$$

équation qui ne paraît pas avoir été remarquée jusqu'à présent, et qui doit être regardée comme un théorème nouveau.

Au surplus, ce théorème se déduirait immédiatement des expressions en doubles intégrales de l'art. 288, lesquelles donnent

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = 2\int\int dp\,dq \sin p = 2\pi\int dp \sin p = 4\pi.$$

On peut encore déduire des formules de l'art. 294 cette équation

$$\alpha^2 X + \beta^2 Y + \gamma^2 Z = n^2 F(c, \varphi),$$

d'où résulte

$$\frac{A\alpha^2}{f} + \frac{B\beta^2}{g} + \frac{C\gamma^2}{h} = \frac{3M}{n} F(c, \varphi),$$

équation digne de remarque, parce que la fonction F est la plus simple des fonctions elliptiques.

296. Les formules de l'attraction se simplifient beaucoup lorsque l'ellipsoïde a deux axes égaux, ou lorsqu'il devient un solide de révolution, ce qui offre deux cas à distinguer.

Premier cas. S'il s'agit du sphéroïde aplati, on aura $\beta = \gamma$, $m = n = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)}$, $c = 0$, $\Delta = 1$, et les formules de l'art. 294 deviendront

$$X = \int d\varphi \operatorname{tang}^2\varphi = \operatorname{tang}\varphi - \varphi,$$
$$Y = Z = \int d\varphi \sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi);$$

donc en faisant $\varphi = \theta$, θ étant le plus petit arc qui satisfait à l'équation $\operatorname{tang}\theta = \frac{n}{\alpha}$, on aura

$$A = \frac{3Mf}{n^3}(\operatorname{tang}\theta - \theta),$$
$$B = \frac{3Mg}{2n^3}(\theta - \sin\theta\cos\theta),$$
$$C = \frac{3Mh}{2n^3}(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

Dans ce cas on peut, sans rien diminuer de la généralité de la solution, faire $h = 0$, et par conséquent $C = 0$, car on peut prendre pour plan des x et y le méridien qui passe par le point attiré.

Second cas. S'il s'agit du sphéroïde allongé, on aura $\mathcal{C} = \alpha$, $c = 1$, $\Delta = \cos\varphi$, ce qui donne

$$X = Y = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad Z = \int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\cos\varphi}:$$

effectuant les intégrations depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \theta$, et supposant toujours $\operatorname{tang}\theta = \frac{n}{\alpha}$, on aura

$$A = \frac{3Mf}{2n^3}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right),$$
$$B = \frac{3Mg}{2n^3}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right),$$
$$C = \frac{3Mh}{n^3}\left[\log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) - \sin\theta\right].$$

Substituant les valeurs connues de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, et supposant $g = 0$, ou $B = 0$, ce qui ne diminue en rien la généralité de la solution, on aura

$$A = \frac{3Mf}{2n^3}\left(\frac{\gamma n}{\alpha^2} - \log\frac{\gamma + n}{\alpha}\right),$$
$$C = \frac{3Mh}{n^3}\left(\log\frac{\gamma + n}{\alpha} - \frac{n}{\gamma}\right),$$

formules où l'on a $n = \sqrt{(\gamma^2 - \alpha^2)}$.

Solution du cas où le point attiré est situé hors de l'ellipsoïde.

297. Lorsque le point attiré S est situé hors de l'ellipsoïde, ses trois coordonnées f, g, h, prises dans le sens des demi-axes α, β, γ, doivent satisfaire à la condition

$$\frac{f^2}{\alpha^2}+\frac{g^2}{\beta^2}+\frac{h^2}{\gamma^2}>1.$$

Cela posé, il faut d'abord, suivant la théorie précédente, déterminer la quantité ξ d'après l'équation

$$\frac{f^2}{\alpha^2+\xi}+\frac{g^2}{\beta^2+\xi}+\frac{h^2}{\gamma^2+\xi}=1.$$

Connaissant la valeur réelle et positive de ξ, on aura les demi-axes α', β', γ', du second ellipsoïde M' par les équations

$$\alpha'^2=\alpha^2+\xi,\quad \beta'^2=\beta^2+\xi,\quad \gamma'^2=\gamma^2+\xi;$$

et l'ellipsoïde M' passera par le point donné S. On déterminera ensuite, sur la surface de l'ellipsoïde donné M, un point S' correspondant au point S, de sorte que ses coordonnées soient

$$f'=\frac{\alpha}{\alpha'}f,\quad g'=\frac{\beta}{\beta'}g,\quad h'=\frac{\gamma}{\gamma'}h.$$

Soient maintenant A', B', C' les trois forces, parallèles aux demi-axes α', β', γ', qui résultent de l'attraction de l'ellipsoïde M' sur le point intérieur S'. Ces forces étant trouvées par les formules du premier cas, on en déduira les forces A, B, C, qu'exerce l'ellipsoïde M sur le point extérieur S, lesquelles seront ainsi exprimées :

$$A=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}A',\quad B=\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}B',\quad C=\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}C'.$$

Or, on a par les formules du n° 291,

$$A'=\frac{3M'f'}{\alpha'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\alpha'^2+(\beta'^2-\alpha'^2)x^2]}\cdot\sqrt{[\alpha'^2+(\gamma'^2-\alpha'^2)x^2]}},$$
$$B'=\frac{3M'g'}{\beta'}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{[\beta'^2+(\alpha'^2-\beta'^2)x^2]}\cdot\sqrt{[\beta'^2+(\gamma'^2-\beta'^2)x^2]}},$$
$$C'=\frac{3M'h'}{\gamma'}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[\gamma'^2+(\alpha'^2-\gamma'^2)x^2]}\cdot\sqrt{[\gamma'^2+(\beta'^2-\gamma'^2)x^2]}};$$

donc

donc en faisant les substitutions, et observant qu'on a $\frac{M'}{M} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}$, $\beta'^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \alpha^2$, $\gamma'^2 - \alpha'^2 = \gamma^2 - \alpha^2$, on trouve pour les forces cherchées A, B, C, ces expressions

$$A = \frac{3Mf}{\alpha'}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{[\alpha'^2 + (\beta^2 - \alpha^2)x^2]}.\sqrt{[\alpha'^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)x^2]}},$$
$$B = \frac{3Mg}{\beta'}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{[\beta'^2 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2]}.\sqrt{[\beta'^2 + (\gamma^2 - \beta^2)x^2]}},$$
$$C = \frac{3Mh}{\gamma'}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{[\gamma'^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)x^2]}.\sqrt{[\gamma'^2 + (\beta^2 - \gamma^2)x^2]}},$$

dans lesquelles les intégrales doivent toujours être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Ces intégrales pourront être réduites en séries, comme dans l'art. 292, et les séries seront d'autant plus convergentes, que les quantités α', β', γ', qui dépendent de la distance du point attiré, seront plus grandes.

298. Les mêmes intégrales peuvent aussi être exprimées en fonctions elliptiques : pour cela, on supposera, comme ci-dessus, $\alpha < \beta$ et $\beta < \gamma$, ce qui donnera pareillement $\alpha' < \beta'$ et $\beta' < \gamma$; puis faisant de même $\beta^2 - \alpha^2 = m^2$, $\gamma^2 - \alpha^2 = n^2$, $1 - \frac{m^2}{n^2} = c^2$, et déterminant l'amplitude φ à sa dernière limite par les valeurs $\operatorname{tang}\varphi = \frac{n}{\alpha'}$, $\sin\varphi = \frac{n}{\gamma'}$, $\cos\varphi = \frac{\alpha'}{\gamma'}$, on aura d'abord

$$A = \frac{3Mf}{n^3}X', \quad B = \frac{3Mg}{n^3}Y', \quad C = \frac{3Mh}{n^3}Z',$$

ensuite

$$X' = \frac{1}{b^2}[\Delta\operatorname{tang}\varphi - E(c, \varphi)],$$
$$Y' = \frac{1}{b\,c^2}\left[E(c, \varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right] - \frac{1}{c^2}F(c, \varphi),$$
$$Z' = \frac{1}{c^2}[F(c, \varphi) - E(c, \varphi)].$$

299. Il est très-remarquable que les forces A, B, C sont exprimées absolument de la même manière en fonctions elliptiques, soit que le point attiré S soit situé au dedans de l'ellipsoïde, ou qu'il soit situé au dehors. La seule différence des résultats est dans la valeur de φ,

qui mesure l'amplitude des fonctions elliptiques; lorsque le point S est situé au dedans de l'ellipsoïde ou sur sa surface, on a $\tang \varphi = \frac{n}{\alpha}$; lorsqu'il est situé au dehors, on a $\tang \varphi = \frac{n}{\alpha'}$, α' étant une quantité qu'on peut déduire immédiatement de l'équation

$$\frac{f^2}{\alpha'^2} + \frac{g^2}{\alpha'^2 + m^2} + \frac{h^2}{\alpha'^2 + n^2} = 1.$$

Le second cas, considéré analytiquement, est même plus simple que le premier, parce que la valeur de φ est plus petite, et qu'ainsi les approximations sont plus faciles à obtenir. On a d'ailleurs, comme dans l'art. 295, les deux équations

$$\frac{A}{f} + \frac{B}{g} + \frac{C}{h} = \frac{3M}{\alpha'\mathit{6}'\gamma'} = 4\pi \cdot \frac{\alpha\mathit{6}\gamma}{\alpha'\mathit{6}'\gamma'};$$
$$\frac{A\alpha'^2}{f} + \frac{B\mathit{6}'^2}{g} + \frac{C\gamma'^2}{h} = \frac{3M}{n} F(c, \varphi).$$

Enfin on doit observer que les quantités X′, Y′, Z, par lesquelles s'expriment les forces A, B, C, ne dépendent que des deux seules données c et φ, tandis que la question offre en général six élémens, savoir: les demi-axes de l'ellipsoïde α, $\mathit{6}$, γ, et les coordonnées f, g, h du point attiré; on pourrait donc déduire de là un grand nombre de théorèmes au moyen desquels l'attraction d'un ellipsoïde donné servirait à déterminer celle d'une infinité d'autres ellipsoïdes; nouvelle preuve de l'avantage que présentent toujours les fonctions elliptiques dans leurs applications, en exprimant les résultats sous la forme la plus simple dont ils sont susceptibles.

300. Les formules générales se simplifient, lorsque l'ellipsoïde devient un solide de révolution, ce qui offre deux cas à distinguer.

Premier cas. Si le sphéroïde est applati, on aura $\mathit{6} = \gamma$, $\mathit{6}^2 - \alpha^2 = m^2$, $n = m$, $c = 0$; et comme on peut prendre pour plan des x et y celui qui passe par le point S, on aura $h = 0$, de sorte que l'équation qui détermine α' sera

$$\frac{f^2}{\alpha'^2} + \frac{g^2}{\alpha'^2 + n^2} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\alpha'^2 = \tfrac{1}{2}(f^2 + g^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(f^2 + g^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2]}.$$

Cela posé, ayant déterminé l'arc θ par la valeur tang $\theta = \frac{n}{\alpha'}$, les deux forces A et B auxquelles se réduit l'attraction du sphéroïde sur le point S, seront ainsi exprimées :

$$A = \frac{3Mf}{n^3}(\text{tang}\,\theta - \theta),$$
$$B = \frac{3Mg}{2n^3}(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

Second cas. Si le sphéroïde est allongé, on aura $6 = \alpha$, $m = 0$, $\gamma^2 - \alpha^2 = n^2$, $c = 1$; et comme on peut prendre pour plan des x et z celui qui passe par le point attiré S, on pourra faire $g = 0$, de sorte que l'équation qui détermine α' sera

$$\frac{f^2}{\alpha'^2} + \frac{h^2}{\alpha'^2 + n^2} = 1,$$

d'où l'on tire

$$\alpha'^2 = \tfrac{1}{2}(f^2 + h^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(f^2 + h^2 - n^2)^2 + 4f^2n^2]}.$$

Cela posé, ayant déterminé θ par l'équation tang $\theta = \frac{n}{\alpha'}$, les deux forces A et C, auxquelles se réduit l'attraction du sphéroïde sur le point S, auront pour valeurs

$$A = \frac{3Mf}{2n^3}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\right],$$
$$C = \frac{3Mh}{n^3}\left[\log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) - \sin\theta\right].$$

§ II. *Sur la formule de la page* 156, *première partie.*

501. Nous avons déjà vérifié cette formule dans un cas particulier : nous allons maintenant examiner si, en la considérant dans toute sa généralité, elle offre des réductions nouvelles de la fonction Π, ou si elle n'est qu'une conséquence des formules déjà établies.

Mettons, pour plus d'uniformité, m, $\pi - 2\theta$ et r à la place de $-m'$, λ, ν, respectivement, et supposons

$$r^2 = 1 + 2b\cos 2\theta + b^2 = (1+b)^2(1 - b^{\circ 2}\sin^2\theta),$$
$$n^\circ = -\frac{r^2}{(1+b)^2} = -1 + b^{\circ 2}\sin^2\theta,$$

$$m = -\frac{c^2r^2}{(1+b\cos 2\theta)^2},$$

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{br\sin 2\theta \sin\varphi\cos\varphi}{(1+b\cos 2\theta - r^2\sin^2\varphi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

l'équation qu'il s'agit de vérifier sera

$$\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ) = \frac{1+b}{2}\mathrm{F}(c,\varphi) - \frac{\frac{1}{2}b(1+b)(b-\cos\lambda)}{1-b\cos\lambda}\Pi(m,c,\varphi) + \frac{(1+b)r}{2b\sin\lambda}\Phi.$$

302. On remarquera d'abord que le paramètre m peut se mettre sous la forme $m = -1 + b^2\sin^2\mu$, en faisant $\sin\mu = \frac{\cos(\pi - 2\theta) - b}{1+b\cos 2\theta}$, $\cos\mu = \frac{c\sin 2\theta}{1+b\cos 2\theta}$. Cela posé, il faudra réduire la fonction $\Pi(m, c, \varphi)$ à une nouvelle fonction $\Pi(m^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$, au moyen des formules de la page 119; elles donnent une valeur positive de m°, savoir :

$$m^\circ = \frac{m(m+c^2)}{(1+b)^2(1+m)} = \frac{\cos^2\mu(1-b^2\sin^2\mu)}{(1+b)^2\sin^2\mu},$$

et en faisant $m^\circ = \cot^2\gamma$, on aura

$$\cot\gamma = \frac{\cos\mu\sqrt{(1-b^2\sin^2\mu)}}{(1+b)\sin\mu} = -\frac{c^\circ\sin 2\theta\sqrt{(1-b^{\circ 2}\sin^2\theta)}}{1-2\sin^2\theta + b^{\circ 2}\sin^4\theta}.$$

Soit, pour le module b°, $\mathrm{F}(\theta_2) = 2\mathrm{F}(\theta)$, on aura, par les formules de la duplication, pag. 25, Ire p.,

$$\operatorname{tang}\theta_2 = \frac{\sin 2\theta\sqrt{(1-b^{\circ 2}\sin^2\theta)}}{1-2\sin^2\theta + b^{\circ 2}\sin^4\theta};$$

donc, $\cot\gamma = -c^\circ\operatorname{tang}\theta_2$, ou $1 = c^\circ\operatorname{tang}\gamma\operatorname{tang}(\pi - \theta_2)$. Cette équation répond à l'équation transcendante

$$\mathrm{F}(\gamma) + \mathrm{F}(\pi - \theta_2) = \mathrm{F}^1 b^\circ,$$

ou, ce qui revient au même, à l'équation

$$\mathrm{F}(b^\circ, \gamma) + \mathrm{F}^1 b^\circ = 2\mathrm{F}(b^\circ, \theta).$$

C'est ainsi que γ peut se déduire directement de θ, sans faire usage de l'auxiliaire θ_2; d'ailleurs γ pourra être positif ou négatif à volonté.

On voit déjà, par ce résultat, que la formule dont il s'agit est comprise dans les formules générales de l'art. 115, et qu'ainsi la réduction entre les deux fonctions $\Pi(n^\circ, c^\circ, \varphi^\circ)$, $\Pi(m, c, \varphi)$, donnée par l'équation proposée, n'est qu'un corollaire des formules déjà connues. Nous allons cependant poursuivre le calcul, pour en tirer quelques nouveaux résultats.

303. On aura d'abord la transformée

$$\Pi(m, c, \varphi) = \frac{1+c^\circ}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1-b^2\sin^4\mu}{2b^2\sin^2\mu\cos^2\mu}\Pi(m^\circ, c^\circ, \varphi^\circ) - \frac{c^2}{2b^2\cos^2\mu}F(c^\circ, \varphi^\circ) \\ \qquad - \frac{(1-b^2\sin^2\mu)}{2b^2\sin^2\mu}\int\frac{d\varphi^\circ\cos\varphi^\circ}{1+m^\circ\sin^2\varphi^\circ}\end{array}\right\}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation proposée, exprimant les coefficiens en fonctions de θ, puis effaçant les signes $^\circ$ qui affectent m°, c°, b°, φ°, on aura cette nouvelle formule :

$$\begin{aligned}\Pi(n, c, \varphi) = {} & \frac{(1-b^2\sin^4\theta)(c^2+b^2\cos^4\theta)}{b^2\sin^2 2\theta(c^2\sin^4\theta-\cos^4\theta)}\Pi(m, c, \varphi) \\ & + \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta + b^2\sin^4\theta}{b^2\sin^2 2\theta}\right)F(c, \varphi) + \frac{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{b^2\sin 2\theta}(2\Phi - \Psi),\end{aligned}$$

dans laquelle il faut supposer

$$n = -1 + b^2\sin^2\theta, \qquad m = \cot^2\gamma,$$

$$\cot\gamma = \frac{c\sin 2\theta\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{c^2\sin^4\theta - \cos^4\theta},$$

$$\tang\Phi = \frac{b^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{c-(1-b^2\sin^2\theta)(c\sin^2\varphi - \Delta\cos\varphi)},$$

$$\tang\Psi = \frac{c\sin 2\theta\sin\varphi\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{c^2\sin^4\theta - \cos^4\theta};$$

on remarquera d'ailleurs que l'arc Φ est $< \frac{1}{2}\pi$, si $\tang\theta > \frac{1}{\sqrt{c}}$, et qu'il croît indéfiniment avec φ, si $\tang\theta < \frac{1}{\sqrt{c}}$.

304. Cette équation peut se vérifier assez facilement lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; alors elle devient

$$\begin{aligned}\Pi^1(n, c) = {} & \frac{(1-b^2\sin^4\theta)(c^2+b^2\cos^4\theta)}{b^2\sin^2 2\theta(c^2\sin^4\theta-\cos^4\theta)}\Pi^1(m, c) \\ & + \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta + b^2\sin^4\theta}{b^2\sin^2 2\theta}\right)F^1 c + \frac{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{b^2\sin 2\theta}(2\Phi^1 - \Psi^1).\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de $2\Phi^1 - \Psi^1$, il faut observer qu'on a

$$\tang\Phi^1 = \frac{\cos\theta\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{c\sin\theta}, \quad \tang\Psi^1 = \frac{c\sin 2\theta\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{c^2\sin^4\theta - \cos^4\theta};$$

or, de la première on tire $\tang 2\Phi^1 = \frac{c\sin 2\theta\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}{c^2\sin^4\theta - \cos^4\theta} = \tang\Psi^1$; donc, $2\Phi^1 - \Psi^1 = 0$.

Maintenant, puisqu'on a $n = -1 + b^2\sin^2\theta$, $m = \cot^2\gamma$, si l'on fait

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \tfrac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)F(b,\theta) - F^1c\,E(b,\theta), \\ K(\gamma) &= \tfrac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)F(b,\gamma) - F^1c\,E(b,\gamma), \end{aligned}$$

les formules des art. 96 et 101 donneront

$$\Pi^1(n,c) = F^1c + \frac{\Delta(b,\theta)}{b^2\sin\theta\cos\theta}K(\theta),$$

$$\Pi^1(m,c) = \sin^2\gamma F^1c + \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\Delta(b,\gamma)}K(\gamma);$$

substituant ces valeurs et exprimant les coefficiens en fonctions de θ, l'équation qu'il s'agit de vérifier se réduira à celle-ci :

$$0 = MF^1c + \frac{\Delta(b,\theta)}{b^2\sin 2\theta}[K(\gamma) - 2K(\theta)],$$

dans laquelle on a fait

$$M = \frac{(1-b^2\sin^4\theta)(c^2\sin^4\theta - \cos^4\theta)}{b^2\sin^2 2\theta(c^2 + b^2\cos^4\theta)} - \frac{1}{2} + \frac{\cos^2\theta + b^2\sin^4\theta}{b^2\sin^2 2\theta},$$

ou en réduisant, $M = -\frac{\cos^2\theta(1-b^2\sin^2\theta)}{c^2 + b^2\cos^4\theta}$. Or, on a par les formules connues,

$$\begin{aligned} K(\gamma) - 2K(\theta) &= -\tfrac{1}{2}\pi + (F^1c - E^1c)[F(b,\gamma) - 2F(b,\theta)] + F^1c[2E(b,\theta) - E(b,\gamma)], \\ 2F(b,\theta) - F(b,\gamma) &= F^1b, \\ 2E(b,\theta) - E(b,\gamma) &= E^1b + b^2(\sin^2\theta\sin\theta_2 - \sin\gamma\sin\theta_2); \end{aligned}$$

donc

$$K(\gamma) - 2K(\theta) = -\tfrac{1}{2}\pi - (F^1c - E^1c)F^1b + F^1cE^1b + b^2\sin\theta_2(\sin^2\theta - \sin\gamma)F^1c,$$

ou simplement

$$K(\gamma) - 2K(\theta) = b^2\sin\theta_2(\sin^2\theta - \sin\gamma)F^1c.$$

Ainsi tout se réduit à faire voir qu'on a

$$M = \frac{\Delta(b,\theta)\sin\theta_2}{\sin 2\theta}(\sin\gamma - \sin^2\theta),$$

et c'est ce qu'on trouve immédiatement par la substitution des valeurs de $\sin\gamma$ et $\sin\theta_2$ en fonctions de θ.

305. Il résulte de ces calculs qu'en prenant les modules....... $n = -1 + b^2\sin^2\theta$, $m = \cot^2\gamma = \frac{c^2\sin^2 2\theta(1 - b^2\sin^2\theta)}{(c^2\sin^4\theta - \cos\theta)^2}$, les deux fonctions complètes $\Pi^1(n, c)$, $\Pi^1(m, c)$, ou simplement $\Pi^1 n$, $\Pi^1 m$, auront entre elles cette relation

$$\Pi^1 n = \frac{(1 - b^2\sin^4\theta)(c^2 + b^2\cos^4\theta)}{b^2\sin^2 2\theta(c^2\sin^4\theta - \cos^4\theta)}\Pi^1 m + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta + b^2\sin^4\theta}{b^2\sin^2 2\theta}\right)F^1 c.$$

Si l'on fait disparaître le coefficient de $F^1 c$, le rapport des deux fonctions $\Pi^1 n$, $\Pi^1 m$, sera donné algébriquement, ce qui est un résultat assez remarquable. Alors on a

$$c^2 = \frac{\cos^2\theta(1 + \sin^2\theta)}{\sin^4\theta(1 + \cos^2\theta)}, \qquad b^2 = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta(1 + \cos^2\theta)},$$

et

$$\frac{\Pi^1 n}{\Pi^1 m} = 1 + \frac{9}{8}\tan^2 2\theta.$$

Soit, par exemple, $\sin^2\theta = \frac{4}{5}$, on aura $c^2 = \frac{3}{8}$, $n = -\frac{1}{2}$, $m = 3$, et $\frac{\Pi^1(-\frac{1}{2})}{\Pi^1(3)} = 3$; c'est-à-dire qu'en faisant $c^2 = \frac{3}{8}$, et prenant les intégrales depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a

$$\int \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}} = 3\int\frac{1}{1 + 3\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)}}.$$

§ III. *De l'intégrale* $Z^1 = \int\frac{d\varphi\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}}{\sqrt{(\sin\varphi)}}$, *prise depuis* $\varphi = 0$ *jusqu'à* $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

306. Si l'on demande le temps de l'oscillation d'un pendule dans une demi-ellipse dont le grand axe est vertical, soit ce temps $= T$, la gravité $= g$, le demi-grand axe de l'ellipse $= 1$, le demi-petit axe $= \sqrt{(1 - k^2)}$, on aura $\frac{1}{2}T\sqrt{2g} = \int\frac{d\varphi\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}}{\sqrt{(\sin\varphi)}} = Z^1$; ainsi le

temps dont il s'agit se détermine au moyen de l'intégrale Z^1, prise entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Considérons d'abord l'intégrale indéfinie $Z = \int \frac{d\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}{\sqrt{(\sin\varphi)}}$, si on fait $\sin\varphi = y^2$, on aura

$$Z = \int \frac{2dy \sqrt{(1 - k^2y^4)}}{\sqrt{(1 - y^4)}} = \int \frac{2dy\,(1 - k^2y^4)}{\sqrt{[1 - (1 + k^2)y^4 + k^2y^8]}}.$$

Cette intégrale peut se trouver en général par la méthode indiquée pag. 197 de la première partie.

307. Pour cela, soit $1 + ky^4 = y^2 z$, on aura

$$\sqrt{[1 - (1 + k^2)y^4 + k^2y^8]} = y^2\sqrt{[z^2 - (1 + k)^2]},$$

$$1 + y^2\sqrt{k} = y\sqrt{(z + 2\sqrt{k})}, \quad y = \frac{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})} - \sqrt{(z - 2\sqrt{k})}}{2\sqrt{k}},$$

$$1 - y^2\sqrt{k} = y\sqrt{(z - 2\sqrt{k})}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})} + \sqrt{(z - 2\sqrt{k})}}{2},$$

$$2dy = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\frac{dz}{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})}} - \frac{dz}{\sqrt{(z - 2\sqrt{k})}}\right],$$

$$\frac{1}{y^2} - k^2y^2 = \frac{1 - k}{2} z + \frac{1 + k}{2}\sqrt{(z^2 - 4k)}.$$

De là résulte

$$dZ = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z - 2\sqrt{k})}} \cdot \frac{1 + k - z\sqrt{k}}{\sqrt{[z^2 - (1 + k)^2]}} + \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})}} \cdot \frac{1 + k + z\sqrt{k}}{\sqrt{[z^2 - (1 + k)^2]}};$$

et pour avoir Z^1, il faudra intégrer le second membre depuis $z = 1 + k$ jusqu'à $z = \infty$.

Comme les deux parties de la valeur de dZ ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{k}$, il suffira d'en considérer une, savoir :

$$dZ' = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z + 2\sqrt{k})}} \cdot \frac{1 + k + z\sqrt{k}}{\sqrt{[z^2 - (1 + k)^2]}}.$$

Soit d'abord $z + 2\sqrt{k} = u^2$, on aura

$$dZ' = \frac{(1 - k + u^2\sqrt{k})\,du}{\sqrt{[u^2 - (1 + \sqrt{k})^2]} \cdot \sqrt{[u^2 + (1 - \sqrt{k})^2]}}.$$

Soit ensuite $u = \frac{1 + \sqrt{k}}{\cos\psi}$, $c^2 = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{2 + 2k}$, et $\Delta = \sqrt{(1 - c^2\sin^2\psi)}$,

on

on aura

$$dZ' = \frac{(1-k)}{\sqrt{(2+2k)}} \cdot \frac{d\psi}{\Delta} + \frac{(1+\sqrt{k})^2\sqrt{k}}{\sqrt{(2+2k)}} \cdot \frac{d\psi}{\Delta \cos^2\psi}.$$

L'intégrale est, par les formules du n° 138, Ire p.,

$$Z' = \frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}} F(c, \psi) + \sqrt{k}.\sqrt{(2+2k)}.[\Delta \operatorname{tang}\psi + b^2 F(c, \psi) - E(c, \psi)].$$

De même, si on fait $z - 2\sqrt{k} = u'^2$, $u' = \frac{1-\sqrt{k}}{\cos\psi'}$, ou $\cos\psi' = \frac{1-\sqrt{k}}{\sqrt{(z-2\sqrt{k})}}$, $b^2 = \frac{(1+\sqrt{k})^2}{2+2k}$, $\Delta' = \sqrt{(1 - b^2\sin^2\psi')}$, on aura l'autre partie de l'intégrale

$$Z'' = \frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}} F(b, \psi') - \sqrt{k}.\sqrt{(2+2k)}[\Delta' \operatorname{tang}\psi' + c^2 F(b, \psi') - E(b, \psi')].$$

308. Au commencement de l'intégrale, où $z = 1+k$, on a $\psi = 0$ et $\psi' = 0$; à la fin où $z = \infty$, on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$ et $\psi' = \frac{1}{2}\pi$; alors les termes $\Delta \operatorname{tang}\psi$ et $\Delta' \operatorname{tang}\psi'$ deviennent infinis; mais il est facile de prévoir que ces infinis disparaîtront dans la somme $Z' + Z''$ qui compose la valeur de Z^1.

En effet, laissant ψ et ψ' indéterminés, on a

$$\Delta \operatorname{tang}\psi = \sqrt{\left(\frac{1}{2+2k} + \frac{c^2}{z+2\sqrt{k}}\right)}.\sqrt{(z-1-k)},$$
$$\Delta' \operatorname{tang}\psi' = \sqrt{\left(\frac{1}{2+2k} + \frac{b^2}{z-2\sqrt{k}}\right)}.\sqrt{(z-1-k)}.$$

Donc, lorsqu'on fait z infini, la différence $\Delta \operatorname{tang}\psi - \Delta' \operatorname{tang}\psi'$ se réduit à

$$(1+k)\left(\frac{c^2}{z+2\sqrt{k}} - \frac{b^2}{z-2\sqrt{k}}\right).\sqrt{\left(\frac{z-1-k}{2+2k}\right)},$$

et devient par conséquent nulle.

On peut donc négliger les termes $\Delta \operatorname{tang}\psi$, $\Delta' \operatorname{tang}\psi'$, dans la somme $Z' + Z''$, et cette somme, après avoir fait $\psi = \psi' = \frac{1}{2}\pi$, donnera l'intégrale cherchée

$$Z^1 = \frac{1-k}{\sqrt{(2+2k)}} (F^1c + F^1b) + \sqrt{k}.\sqrt{(2+2k)}\,(b^2F^1c - c^2F^1b - E^1c + E^1b).$$

Ainsi cette intégrale ne dépend que des fonctions complètes F^1c,

E^1c, et de leurs complémens F^1b, E^1b. On peut d'ailleurs la réduire à cette forme très-simple

$$Z^1 = (1+k)(cF^1c + bF^1b) + \sqrt{k}.\sqrt{(2+2k)}.(E^1b - E^1c),$$

ou enfin

$$Z^1 = \frac{2cF^1c + 2bF^1b}{(b+c)^2} + \frac{2(b-c)}{(b+c)^2}(E^1b - E^1c).$$

§ IV. *De l'intégrale* $Z^1(\alpha) = \int \frac{1+\alpha x^2}{1+x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, *prise depuis* $x=0$ *jusqu'à* $x=1$.

309. Cette intégrale sera connue pour toute valeur de α, si on la connaît pour deux valeurs particulières telles que $\alpha = -1$ et $\alpha = +1$; en effet, on a généralement

$$Z^1(\alpha) = \frac{1-\alpha}{2} Z^1(-1) + \frac{1+\alpha}{2} Z^1(1).$$

Pour trouver celles-ci, soit d'abord $x^2 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, on aura la transformée

$$Z^1(\alpha) = \tfrac{1}{2}\int \frac{1+2z^2+z^4+\alpha(1-z^4)}{1+z^4} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}. \qquad \begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Et comme les limites de z sont les mêmes que celles de x, on pourra changer z en x, ce qui donnera

$$Z^1(\alpha) = \tfrac{1}{2}\int \frac{1+\alpha+2x^2+(1-\alpha)x^4}{1+x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

ou

$$Z^1(\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} + \frac{\alpha-1}{2} Z^1(-1) + \frac{\alpha+1}{2} Z^1(1).$$

Ces deux valeurs de $Z^1(\alpha)$ étant comparées entr'elles, donnent

$$Z^1(-1) = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2} cF^1c,$$

en faisant $c = \sin 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Il ne reste plus à trouver que l'intégrale

$$Z^1(1) = \int \frac{1+x^2}{1+x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}. \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

310. Pour cela soit $1 - x^4 = \frac{2x^2}{z^2}$, la transformée sera

$$2\sqrt{2}.Z'(1) = \int \frac{(1+z^2)dz}{1+z^4} + \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}}; \qquad \begin{cases} z = 0 \\ z = \infty \end{cases}$$

mais dans les limites $z = 0$, $z = \infty$, on a $\int \frac{(1+z^2)dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, et $\int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}} = F'c$; donc

$$Z'(1) = \frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}cF'c.$$

Les valeurs de $Z'(-1)$ et $Z'(1)$ étant ainsi trouvées, on aura l'intégrale cherchée

$$Z'(\alpha) = (1+\alpha)\frac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}\,cF'c.$$

La conséquence la plus simple qui résulte de cette formule est celle-ci :

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x^4)\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{8},$$

et voici comment on peut la démontrer directement. Soit...... $1 - x^4 = x^2z^2$, la transformée sera $-\int \frac{dz}{z^4+4}$; soit $z = u\sqrt{2}$, elle deviendra $\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{du}{1+u^4}$, et celle-ci devra être prise entre les limites $u = 0$, $u = \infty$, ce qui donnera, par les formules connues, $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}$, ou $\frac{\pi}{8}$.

311. On peut obtenir les mêmes résultats en ramenant l'intégrale proposée à la forme ordinaire des fonctions elliptiques. Soit, pour cet effet, $x = \cos\varphi$, et on aura

$$Z(\alpha) = \int \frac{\frac{1}{2}(1+\alpha) - \frac{1}{2}\alpha\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi} \cdot \frac{cd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

intégrale qui devra être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Or si, dans la formule du n° 46, Ire p., on fait $\alpha = c^2$, on aura, dans les mêmes limites,

$$\int \frac{1 - c^2\sin^4\varphi}{1 - \sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{dp}{1+c^2p^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\pi}{2},$$

et si, dans celle du n° 51, on fait $k = -c^2$, on aura de même

$$\int \frac{1 - 2\sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{1 - \sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi} = \int \frac{dp}{1 - c^2p^2} = 0.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$\int \frac{1 - \sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi}{1 - \sin^2\varphi + c^2\sin^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \mathrm{F}^1 c;$$

de là on déduit immédiatement

$$\mathrm{Z}^1(\alpha) = (1 + \alpha)\frac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}c\mathrm{F}^1 c,$$

ce qui s'accorde avec le résultat précédent.

§ V. *Éclaircissemens sur un article du Calcul intégral d'Euler.*

312. Dans le tome III du Calcul intégral, pag. 636, Euler a remarqué que l'équation différentielle

$$dx\sqrt{(1 + xx)} + dy\sqrt{(1 + yy)} + nydx + nxdy = 0,$$

qui a pour intégrale complète l'équation transcendante

$$\left.\begin{aligned} 2nxy + x\sqrt{(1 + xx)} + \log[x + \sqrt{(1 + xx)}] \\ + y\sqrt{(1 + yy)} + \log[y + \sqrt{(1 + yy)}] \end{aligned}\right\} = \mathrm{A}, \qquad (1)$$

A étant la constante arbitraire, peut être aussi satisfaite par l'équation algébrique

$$xx + yy + 2xy\sqrt{(1 + nn)} = nn; \qquad (2)$$

Si cette dernière intégrale était du nombre de celles qu'on appelle *intégrales particulières*, elle devrait se trouver directement par les règles propres à ce genre d'intégrales. Mais l'application de ces règles, maintenant bien connues, ne donne aucune intégrale de cette espèce; il faut par conséquent que l'intégrale (2), qui satisfait à l'équation différentielle proposée, soit contenue comme cas particulier dans l'intégrale complète donnée par l'équation (1). Mais il reste à expliquer comment une courbe algébrique, telle que celle qui est représentée par l'équation (2), peut être un cas particulier de la courbe transcendante représentée par l'équation (1). C'est sur quoi le calcul suivant ne laissera rien à desirer.

313. Soit $x+\sqrt{(1+xx)}=p[\sqrt{(1+yy)}-y]$, p étant une nouvelle variable, on aura $\sqrt{(1+xx)}-x=\frac{1}{p}[\sqrt{(1+yy)}+y]$, ce qui donnera

$$x=\tfrac{1}{2}p[\sqrt{(1+yy)}-y]-\frac{1}{2p}[\sqrt{(1+yy)}+y],$$

$$\sqrt{(1+xx)}=\tfrac{1}{2}p[\sqrt{(1+yy)}-y]+\frac{1}{2p}[\sqrt{(1+yy)}+y].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned}A=\log p+\frac{p^2}{4}[1+2yy-2y\sqrt{(1+yy)}]-\frac{1}{4p^2}[1+2y^2+2y\sqrt{(1+yy)}]\\+y\sqrt{(1+y^2)}+np[y(1+yy)-y^2]-\frac{n}{p}[y\sqrt{(1+yy)}+y^2].\end{aligned}$$

Maintenant j'observe que les termes y^2 et $y\sqrt{(1+y^2)}$ disparaîtront à la fois de cette équation, si l'on fait

$$n=\tfrac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right); \tag{3}$$

alors l'équation deviendra

$$A=\log p+\frac{p^2}{4}-\frac{1}{4p^2}. \tag{4}$$

La valeur de p qui résulte de l'équation (3) est constante; donc la valeur de A, donnée par l'équation (4), sera aussi constante; donc en effet l'équation (1), qui en général est transcendante, devient algébrique dans le cas où la constante A est telle que nous venons de la déterminer, et elle se réduit à l'équation (2).

§ VI. *Démonstration succincte d'une propriété générale de la cycloïde.*

314. Soit BMC une courbe quelconque *rectangulaire*, c'est-à-dire telle que les tangentes aux extrémités B, C soient, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe ACG; supposons qu'on développe l'arc BMC en commençant vers C, et que du développement naisse la courbe CPD comprise entre les parallèles AC, BD, laquelle sera aussi rectangulaire, puisque les tangentes en C et D seront, l'une dirigée suivant l'axe AC, l'autre perpendiculaire à cet axe; supposons ensuite que la courbe DPC soit développée à son tour, en commençant vers D, et ainsi à l'infini; le développement de Fig. 34.

chaque courbe commençant toujours où finit le développement de la précédente; je dis que par ces développemens successifs les courbes CD, DE, EF, etc., approcheront de plus en plus de se confondre avec une demi-cycloïde dont la base est égale et parallèle à AB.

Soient menées les tangentes successives MP, PN, NQ, QR, etc.; elles seront alternativement parallèles et perpendiculaires entr'elles, par la nature des développées.

Soit θ l'angle que font les tangentes MP, NQ, RS, etc. avec l'axe AB, et soit

l'arc CM $= x$,	l'arc entier CMB $= a$,
l'arc CP $= z$,	l'arc entier CPD $= b$,
l'arc EN $= x'$,	l'arc entier END $= a'$,
l'arc EQ $= z'$,	l'arc entier EQF $= b'$,
et ainsi de suite.	

Cela posé, si l'on mène des tangentes infiniment proches de PM, NP, QN, etc., il est clair qu'on aura $d\theta = \frac{dz}{\text{MP}} = \frac{dx'}{\text{PN}} = \frac{dz'}{\text{NQ}}$, etc.; et puisqu'on a, par la nature des développées, MP $=$ arc MC, PN $=$ arc DP, etc., il en résulte cette suite d'équations :

$$d\theta = \frac{dz}{x} = \frac{dx'}{b-z} = \frac{dz'}{x'} = \frac{dx''}{b'-z'} = \text{etc.}$$

315. La première donne $z = \int x d\theta$, intégrale qui doit s'évanouir lorsque $\theta = 0$, et qui, en faisant $\theta = \frac{1}{2}\pi$, donnera la valeur de b.

La seconde équation donne $dx' = bd\theta - zd\theta$, et on en déduit

$$x' = b\theta - \int d\theta \int x d\theta,$$

intégrale qu'il faut toujours prendre de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $\theta = 0$; si l'on fait ensuite $\theta = \frac{1}{2}\pi$, la valeur de x' deviendra celle de a'.

En continuant ce calcul, nous aurons $dz' = x'd\theta$, et par conséquent

$$z' = \tfrac{1}{2} b\theta^2 - \int d\theta \int d\theta \int x d\theta,$$

ou, par une notation abrégée,

$$z' = \tfrac{1}{2} b\theta^2 - \int^2 d\theta^2 \int x d\theta.$$

Il n'est pas nécessaire d'entrer dans d'autres détails pour voir qu'on aura successivement

$$x'' = b'.\theta - b.\frac{\theta^3}{2.3} + \int^3 d\theta^3 \int x d\theta,$$
$$z'' = b'.\frac{\theta^2}{2} - b.\frac{\theta^4}{2.3.4} + \int^4 d\theta^4 \int x d\theta,$$
$$x''' = b''.\theta - b'.\frac{\theta^3}{2.3} + b.\frac{\theta^5}{2.3.4.5} - \int^5 d\theta^5 \int x d\theta,$$
$$z''' = b''.\frac{\theta^2}{2} - b'.\frac{\theta^4}{2.3.4} + b.\frac{\theta^6}{2.3.4.5.6} - \int^6 d\theta^6 \int x d\theta,$$

etc.

J'observe maintenant que les intégrales qui restent dans ces formules diminuent continuellement de valeur, et qu'elles peuvent être négligées dans les termes infiniment éloignés. En effet, comme l'arc x n'est qu'une partie de l'arc total a, il est clair que les intégrales $\int^2 d\theta^2 \int x d\theta$, $\int^4 d\theta^4 \int x d\theta$, $\int^6 d\theta^6 \int x d\theta$, etc. sont moindres que les quantités $\frac{\theta^3}{2.3}a$, $\frac{\theta^5}{2.3.4.5}a$, $\frac{\theta^7}{2.3.4.5.6.7}a$, etc., respectivement. Mais la plus grande valeur de θ est $\frac{1}{2}\pi$; donc, à cause du décroissement très-rapide de la suite précédente, on est en droit de négliger les termes très-éloignés, et l'on aura avec une exactitude d'autant plus grande, que l'indice n sera plus grand :

$$z^n = b^{n-1}.\frac{\theta^2}{2} - b^{n-2}.\frac{\theta^4}{2.3.4} + b^{n-3}.\frac{\theta^6}{2.3.4.5.6} - \text{etc.},$$
$$x^n = b^{n-1}.\theta - b^{n-2}.\frac{\theta^3}{2.3} + b^{n-3}.\frac{\theta^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Appelant donc α l'arc $\frac{1}{2}\pi$, on aura

$$b^n = b^{n-1}.\frac{\alpha^2}{2} - b^{n-2}.\frac{\alpha^4}{2.3.4} + b^{n-3}.\frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

316. Il résulte de là que la suite $b + b'y + b''y^2 + b'''y^3 + \text{etc.}$, se confond, dans les termes très-éloignés, avec la suite récurrente qui provient du développement d'une fraction dont le numérateur est un polynome en y d'un nombre fini de termes, et dont le dénominateur est

$$1 - \frac{\alpha^2}{2}y + \frac{\alpha^4}{2.3.4}y^2 - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6}y^3 + \text{etc.};$$

cette quantité est la même chose que $\cos(\alpha\sqrt{y})$, et l'on sait que $\cos(\alpha\sqrt{y})$ résulte du produit des facteurs

$$(1-y)\left(1-\frac{y}{3^2}\right)\left(1-\frac{y}{5^2}\right)\left(1-\frac{y}{7^2}\right) \text{ etc.}$$

Donc le terme général de la suite dont il s'agit, ou l'expression générale de b^n sera, en exceptant les premiers termes dépendans du numérateur,

$$b^n = P + Q\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n} + R\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2n} + S\left(\tfrac{1}{7}\right)^{2n} + \text{etc.}$$

Donc, en supposant n fort grand, on aura $b^n = P$, c'est-à-dire b^n constant; ainsi on peut faire $b^n = b^{n-1} = b^{n-2}$, etc.

De là il suit qu'on aura

$$z^n = b^n\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{2.3.4} + \frac{\theta^6}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}\right),$$

ou $z^n = b^n(1-\cos\theta)$. On aura semblablement $x^n = b^n \sin\theta$; or, ces deux équations appartiennent à la cycloïde, dans laquelle $\frac{1}{2}b^n$ est le diamètre du cercle générateur; donc la cycloïde est le dernier terme des développemens successifs d'une courbe rectangulaire quelconque.

Cette proposition est due à Jean Bernoulli : on la trouve dans le tome IV de ses Œuvres, page 98; mais Euler est le premier qui en ait donné la démonstration, dans les *Novi Comm. Petrop.*, tom. X.

FIN DU TOME II.

De l'Imprimerie de Mme Ve COURCIER, rue du Jardinet, n° 12, quartier Saint-André-des-Arcs.

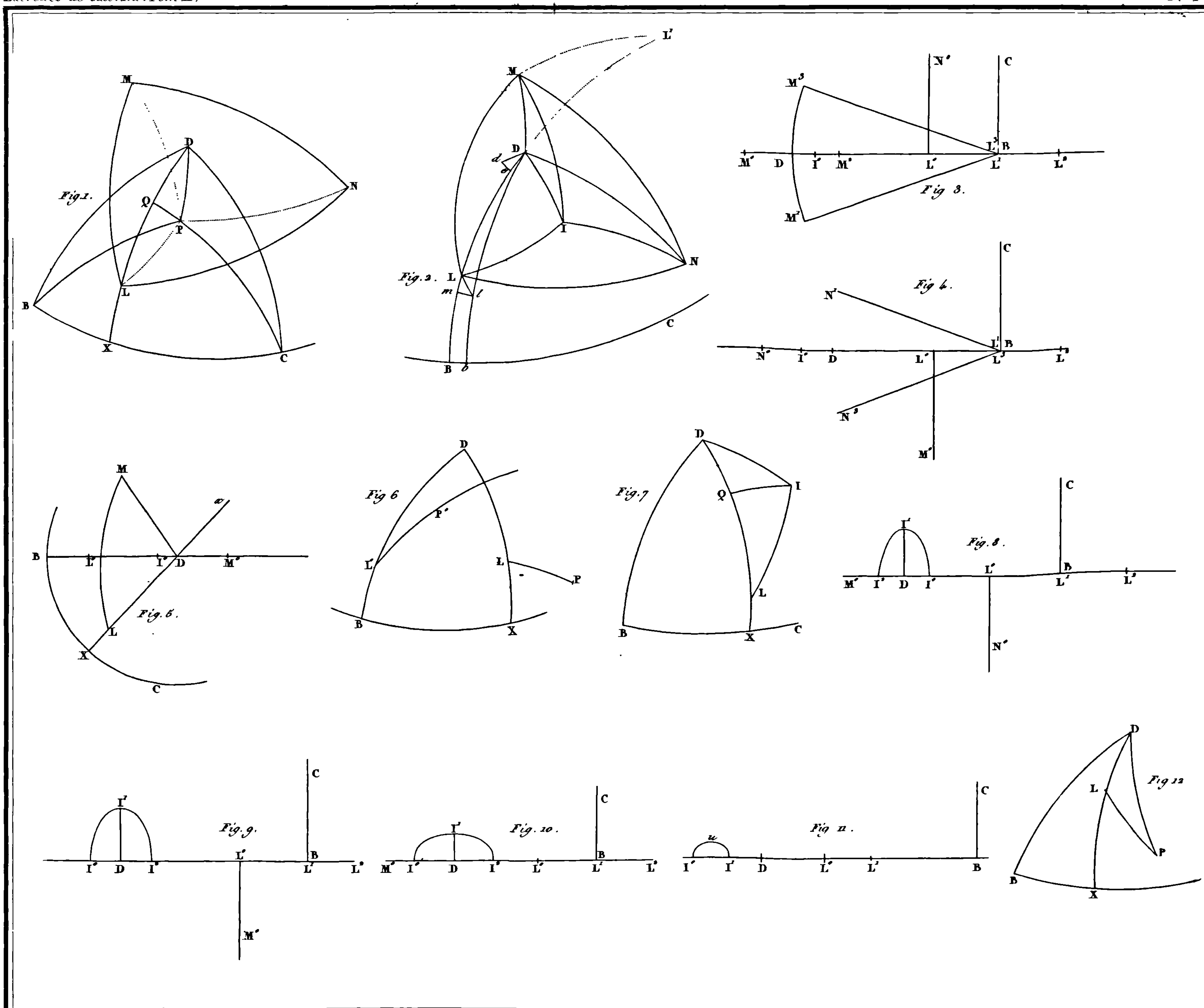
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12

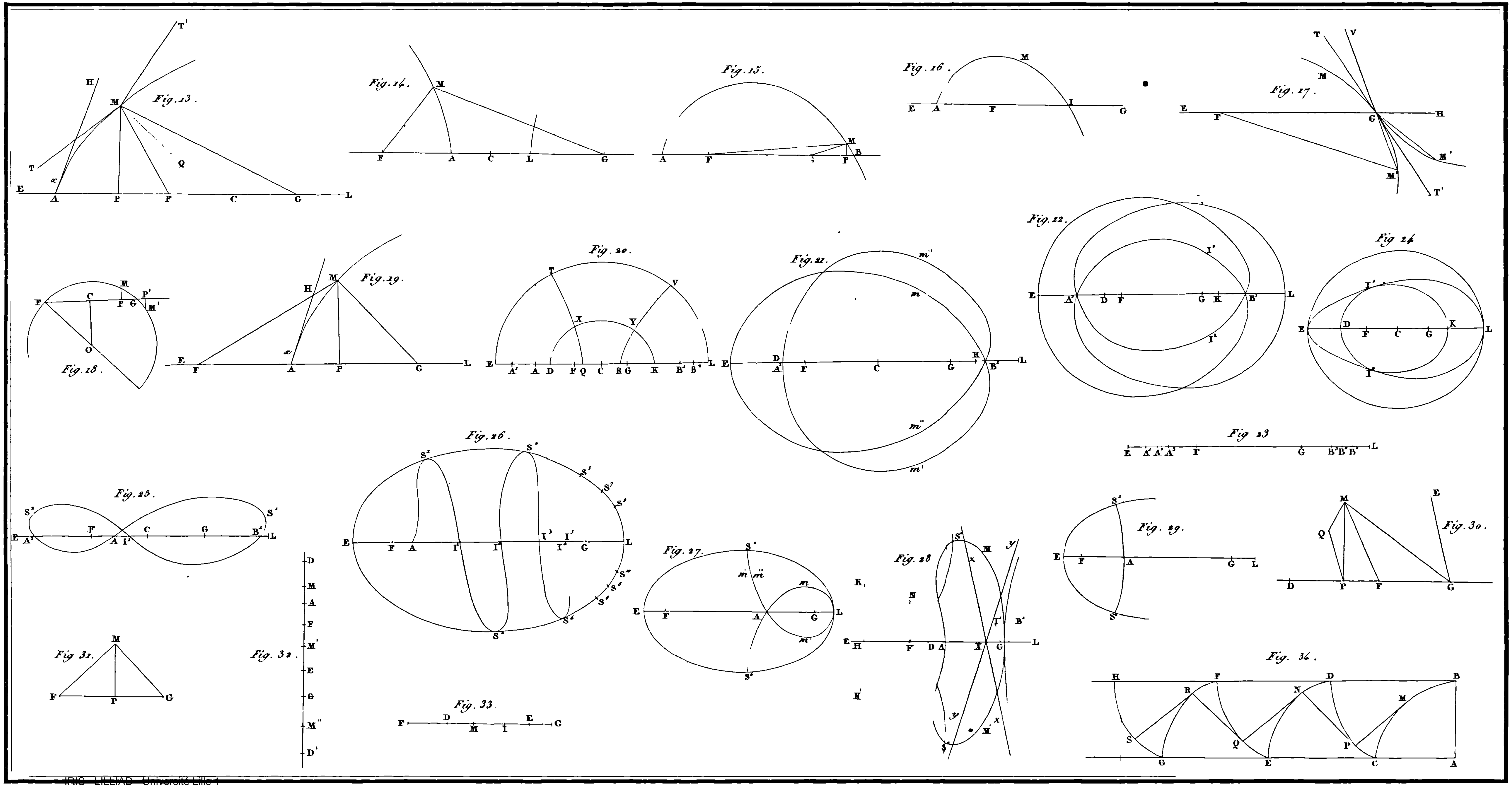
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig 23
Fig 24
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.