ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Tullio Levi-Civita** in Roma
Salvatore Pincherle in Bologna | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO IV
(LXI DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXVII

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1927

Transformations of relations between numerical functions.

By E. T. Bell (at Seattle).

1. On several occasions Cesàro [1] considered arithmetical identities between functions

$$f[\varepsilon_\alpha(x)], \quad g[\varepsilon_\beta(x)], \ldots \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3, \ldots),$$

in which $\varepsilon_\alpha(x)$, $\varepsilon_\beta(x), \ldots$ are single valued functions of x, and $f(y)$, $g(y), \ldots$ single valued functions of y, and where, moreover, for every pair of integers α, $\beta > 0$,

$$\varepsilon_\alpha[\varepsilon_\beta(x)] = \varepsilon_{\alpha\beta}(x) = \varepsilon_\beta[\varepsilon_\alpha(x)]. \tag{1}$$

If in (1) we put $\beta = 1$, we see that $\varepsilon_1(x) = x$, and evidently

$$\varepsilon_\alpha(x), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

form an abelian semi-group [2], whose order may be finite or infinite.

It is noted by Cesàro that obviously it is sufficient, if the $\varepsilon_\alpha(x)$ are to form an abelian semi-group, to take for α those integers > 0 which are prime to a given integer n. The case above is that in which $n = 1$. He considered also [3] *enumerative functions* $\Omega(x)$, such that $\Omega(x) = 1$ or 0 according as the integer $x > 0$ is or is not a member of a given class, and in particular he discusses the case for which

$$\Omega(x)\Omega(y) = \Omega(xy), \tag{3}$$

viz., that in which the product of two integers of a given class is contained in that class, and the product of two integers not both in the class is not a

---

(1) *Annali di Matematica pura ed applicata*, serie 2ª, vol. 13, pp. 235-351: reprinted in *Excursions arithmétiques à l'infini*, pp. 104-117, Paris, 1885; also elsewhere, cf. references in Dickson's: *History of the Theory of Numbers*, vol. I (Washington, D. C., 1919).

(2) It is inexact to say that the functions (2) form an abelian *group*. Thus, for example, if α is prime, $\varepsilon_\alpha(x)$ has no inverse in the set (2). Cesàro, (*Annali*, vol. 14, p. 155), calls (2) a *groupe fermé*; the nomenclature here employed is in accordance with modern usage. Likewise for Cesàro's Ω.

(3) Mémoires de l'Académie de Belgique, 6 février 1886; *Annali*, vol. 14, pp. 141 et seq..

member of the class. Putting $x = 1$ we see that $\Omega(1) = 1$. From these considerations CESÀRO obtains a remarkable inversion of series (1) « le plus général que l'on connaisse », and the points out « la possibilité de remplacer le système des nombres entiers par un groupe fermé quelconque, détaché du même système. Cette possibilité a été implicitement reconnue par MÖBIUS, qui s'est occupé, il y a longtemps, (*Crelle's Journal*, vol. 9, p. 105), de l'inversion des séries dans un cas particulier ».

I will show that the inversions of CESÀRO and MÖBIUS are abstractly identical, so that, in particular either can be immediately inferred from the other. Incidentally in § 2 there is obtained and stated an extremely general theorem of reciprocity, of which the CESÀRO-MÖBIUS theorem is the simplest instance.

2. Let n denote an integer > 0. Since $\varepsilon_n(x)$ is a single valued function of x for $n = 1, 2, 3, \ldots$, and since $f(y)$ is a single valued function of y, it follows that $f[\varepsilon_n(x)]$ takes a single definite value for each n. A function $\psi(y)$ is called *numerical* if $\psi(y)$ takes a single definite value for each integer value of $y > 0$. We can therefore consider $f[\varepsilon_n(x)]$ as a numerical function of n, and to emphasize that n rather than x is the variable under attention, we shall write

$$f[\varepsilon_n(x)] \equiv f_n(x) \equiv f_x(n).$$

I have fully discussed the consequences of this point of view elsewhere (2).

Here it is sufficient to note the following: $f_x(n)$ is a *particular instance* of $\psi(n)$. Hence, if we have established a specific relation between arbitrary numerical functions $f(n)$, $g(n)$, $h(n), \ldots$, it follows that the relation remains valid when $f, g, h, \ldots$ are replaced by $f_x, g_x, h_x, \ldots$ respectively.

Conversely, if in a specific relation between $f_x(n)$, $g_x(n)$, $h_x(n), \ldots$ we take the special $\varepsilon_n(x)$ such that $\varepsilon_n(x) \equiv nx$, as obviously is permissible by (1), and if in the result we replace x by 1, we obtain a relation between the numerical functions $f(n)$, $g(n)$, $h(n), \ldots$, and this relation can be written down at once from the original by suppressing the suffix x in $f_x, g_x, h_x, \ldots$.

Hence either of the relations between $f, g, h, \ldots$ or $f_x, g_x, h_x, \ldots$ implies the other, and the second can be written down from the first by supplying the suffix x, the first from the second by dropping the suffix x.

(1) *Annali*, loc. cit., p. 155, (12), (13).
(2) *Bulletin of the American Mathematical Society*, *Transactions* (of the same) vol. 25, pp. 145-154.

From the definitions it is evident that $\Omega(y)$ is a particular instance of a numerical function of y. Hence if $f(y)$ is a numerical function of y, so also is $\Omega(y)f(y)$. Note that $\Omega(y)f(y)$ is the ordinary algebraic product of $\Omega(y)$ and $f(y)$. For n an arbitrary integer > 0 it is sometimes convenient to write symbolically

$$\Omega(n)f(n) \equiv (\Omega f)(n) \equiv (\Omega f),$$

the parenthesis enclosing (Ωf) being used to distinguish this type of product from Ωf in § 3 which does *not* symbolize the ordinary algebraic product. As before we write

$$\Omega[\varepsilon_n(x)]\, f[\varepsilon_n(x)] \equiv \Omega_x(n)\, f_x(n) \equiv (\Omega_x f_x),$$

and note that, if $f(n)$, $g(n)$ are arbitrary numerical functions of n, then a relation involving $f(n)$ remains valid when for f is substituted $(\Omega_x g_x)$, and conversely.

From the foregoing we now have the following general statement: *A relation between arbitrary numerical functions*

$$f(n), \quad g(n), \quad h(n), \ldots, \tag{3}$$

remains valid when for these functions are substituted respectively

$$(\Omega_x^{(a)} f_x)(n), \quad (\Omega_y^{(b)} g_y)(n), \quad (\Omega_z^{(c)} h_z)(n), \ldots, \tag{4}$$

where the superscripts (a), (b), (c),... *refer to any classes* A, B, C,... *of integers respectively, and where the variables* x, y, z,... *are not necessarily independent, nor the classes* A, B, C,... *necessarily mutually exclusive, nor the abelian semi-groups*

$$e_\alpha(x), \quad e_\beta(y), \quad e_\gamma(z), \ldots \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, 3, \ldots)$$

necessarily distinct.

To pass from the relation for (3) to that for (4) we replace in the former f by $\Omega_x^{(a)} f_x$, g by $\Omega_y^{(b)} g_y$, h by $\Omega_z^{(c)} h_z, \ldots$; to pass from the relation for (4) to that for (3) we take

$$e_\alpha(x) = \alpha x, \quad e_\beta(y) = \beta y, \ldots \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3, \ldots),$$

$A = B = C = \ldots =$ the class of all integers > 0, and in the result so obtained put

$$x = y = z = \ldots = 1.$$

3. Let $\eta(n)=1$ or 0 according as the integer $n \gtreqless 1$, and write symbolically

$$\Sigma_n f(d)g(\delta)=fg,$$

the summation extending to all pairs (d, δ) of integers >0 such that $n=d\delta$. Then if $f(n)$ is an arbitrary numerical function, there exists a unique numerical function $f'(n)$, called the reciprocal of $f(n)$, such that $ff'=\eta$, or in full,

$$\Sigma_n f(d)f'(\delta)=\eta(n).$$

Elsewhere I have given the explicit form of f' in terms of f, and have developed a simple algebra for determining the reduced form of f' when f is a specific function [1].

Note that if g is any numerical function, $\eta g=g$, so that in this symbolic calculus of numerical functions, η has the multiplicative properties of unity in common algebra or arithmetic, and hence it is called the unit function.

4. Assuming with CESÀRO that all of the infinite processes concerned are significant, we shall now examine his most general inversion in the light of § 2. For j an arbitrary integer >0, write

(5) $$F(j)\equiv\sum_{i=1} h(i)f(ij),$$

and let f, g, h denote numerical functions. Note that (5) is the definition merely of $F(j)$. Immediately by § 3 we have

$$\sum_{j=1} g(j)F(j)=\sum_{j=1} hg(j)f(j),$$

and therefore, if in particular $hg=\eta$, we get $g\equiv h'$, the reciprocal of h, and obtain

(6) $$f(1)=\sum_{j-1} h'(j)F(j),$$

which can be considered as an inversion of (5). We have shown that (5) implies (6), and will prove next that this proposition implies CESÀRO'S most general inversion.

---

[1] *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 17, pp. 221-231; *Trans. American Math. Soc.*, loc. cit..

In (5) take $f \equiv f_x$, and *define* F_x by

(7) $$F_x(j) \equiv \sum_{i=1} h(i) f_x(ij),$$

which is a *particular instance* of (5), and which, therefore, by the proposition just proved, implies

(8) $$f_x(1) = \sum_{j=1} h'(j) F(j),$$

so that (7), (8) *constitute a particular instance of the inversion* (5), (6). We note that (7) *is implied by* its apparently special case $j = 1$, for

(9) $$F_x(1) \equiv \sum_{i=1} h(i) f_x(i),$$

on transforming to the other notation, is

$$F(x) \equiv \sum_{i=1} h(i) f[e_i(x)],$$

and if in this we replace x by $e_j(x)$ and transform back to the first notation, we obtain (7). Hence (9) implies (8).

By a further *specialization* we reach CESÀRO's inversion. Let $\Omega^{(u)}$ refer to u_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$), and be such that $\Omega^{(u)}(m)\Omega^{(u)}(n) = \Omega^{(u)}(mn)$. Take in (7) for $h(i)$ the *particular* function $\Omega^{(u)}(i)h(i)$. Then the reciprocal function is $\Omega^{(u)}(i)h'(i)$, where, as before, h, h' are reciprocals. For we have

$$\Sigma_n \Omega^{(u)}(d)h(d)\Omega^{(u)}(\delta)h'(\delta) = \Sigma_n \Omega^{(u)}(d\delta)h(d)h'(\delta) = \Omega^{(u)}(n)\eta(n),$$

and hence, since $\eta(n)$ is the unit function, the value becomes $\Omega^{(u)}(1) = 1$, or 0, according as $n = 1$, or $n > 1$. As a special case, then, of the result just proved that (9) implies (8), we have now shown that

(10) $$F_x(1) = \sum_{i=1} \Omega^{(u)}(i)h(i)f_x(i) \quad \textit{implies} \quad f_x(1) = \sum_{j-1} \Omega^{(u)}(j)h'(j)F_x(j),$$

which, transformed to the other notation,

$$F_x(1) \equiv F(x), \quad f_x(i) \equiv f[e_i(x)], \quad f_x(1) \equiv f(x), \quad F_x(j) \equiv F[e_j(x)],$$

is CESÀRO's most general inversion, with $hh' = \eta$ and $\Omega^{(u)}(m)\Omega^{(u)}(n) = \Omega^{(u)}(mn)$.

We have shown therefore that this most general inversion is implied by its apparently special case (5), (6).

To show next that the inversion (5), (6) is implied by (10), we replace x by $e_j(x)$ in the first of (10), take $u_i = i$ $(i = 1, 2, 3, ..)$, $\Omega(i) = i$, $e_i(x) = ix$, and in the result put $x = 1$.

We have proved then that each pair of inversions (5), (6) and (10) implies the other; that is, the pairs are equivalent.

5. The purpose of such transformations as we have discussed in § 2 and illustrated in § 4, is to throw arithmetical identities into more suggestive forms. For example, taking $u_i = u$ $(i = 1, 2, ...)$ where the u_i are prime to a given integer n, and choosing for $f_x(i)$ the function $g_x(i)\lambda(i)$, where g_x is an arbitrary numerical function, and $\lambda(i) = 1$ or 0 according as $i \overline{\gtrless} n$ or $i > n$, we transform a specific identity involving n into another involving only the integers not greater than n and prime to n.

Sur quelques problèmes du calcul des variations.

par M. LAVRENTIEFF (Moscou).

Nous nous proposons d'étudier dans ce Mémoire quelques problèmes liés à la question: dans quelles hypothèses il existe au moins une fonction $y=f(x)$ minimant l'integrale

$$\int_0^1 F(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Nous supposons que la fonction $F(x, y, y')$ est continue par rapport à l'ensemble des trois variables; quant à la classe des lignes admissibles, nous supposons que ce sont des courbes $y=f(x)$: 1°) continues; 2°) passant par l'origine et le point (1, 1); 3°) situées entièrement dans le carré (0, 0); (0, 1); (1, 1); (1, 0).

Dans la théorie classique on suppose les courbes $y=f(x)$ continues et ayant des tangentes qui varient aussi d'une manière continue [1]. M. TONELLI a construit une belle théorie dans la seule hypothèse que les $f(x)$ soient absolument continues [2]. La question se pose naturellement s'il est possible d'étendre cette théorie et, en particulier, si l'on peut considérer comme lignes admissibles toutes les courbes à variation bornée; nous démontrons dans le § 1 que cette question se résoud négativement.

Ainsi donc, parmi les courbes continues la classe la plus étendue naturelle de lignes admissibles est celle des fonctions absolument continues. Pour ces fonctions là M. TONELLI a démontré que pourvu que la fonction $F(x, y, y')$ jouisse de certaines propriétés, l'extrêmé absolu de l'intégrale (1) existe [3]; en ajoutant encore quelques hypothèses restrictives sur $F(x, y, y')$, M. TONELLI a démontré que la courbe qui extrême l'integrale (1) est une extrêmale [4].

---

[1] C'est à dire les courbes $y=f(x)$ telles que $f'(x)$ est continue.
[2] L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (Bologna, Nicola Zanichelli).
[3] Loc. cit., t. II, page 281.
[4] Loc. cit., t. II, pp. 321, 345.

Nous donnons dans le § 2 un lemme qui indique une nouvelle voie pour démontrer l'existence de l'extrêmé absolu; dans le § 3 nous donnons l'exemple d'un problème du calcul des variations conduisant à une courbe extrêmante, qui n'est pas une extrêmale dans aucun intervalle.

Cela posé, nous cherchons à résoudre la question, si la borne inférieure des valeurs de l'integrale (1) dans la classe des courbes absolument continues est égale à la borne inférieure des valeurs de la même integrale dans la classe des courbes continues $y = f(x)$ à dérivées $f'(x)$ continues [1]. Nous démontrons au § 4 que cette question se résoud par l'affirmative si l'on suppose $\frac{\partial F}{\partial y}$ bornée. Cette proposition attire notre attention sur un nouveau cas, où la courbe extrêmante est une extrêmale.

Nous démontrons enfin dans le § 5 qu'en posant la même question en général, on reçoit une réponse négative.

Pour simplifier l'exposition, nous allons poser quelques définitions.

Nous dirons que la courbe $y = f(x)$ *appartient à la classe* C_φ si l'on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \varphi(|h|), \qquad 0 \leq f(x) \leq 1,$$

appartient à la classe $C_\varphi^{(a)}$ si quel que soit un système fini d'intervalles δ_i sans points communs, on a

$$\sum_i |\operatorname{var} \delta_i f(x)| \leq \varphi(\sum_i \delta_i)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction continue définie pour $x \geq 0$ et telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$.

Enfin soit $C^{(a)}$ la classe de toutes les fonctions absolument continues et C' celles des fonctions à dérivées continues.

1. Sur la possibilité d'étendre la classe des lignes admissibles. — Nous allons démontrer ici la proposition suivante.

THÉORÈME. *Si l'on considère comme lignes admissibles toutes les courbes à variation bornée* ($y = f(x)$; $0 \leq f(x) \leq 1$; $f(0) = 0$; $f(1) = 1$), *le problème du calcul des variations se résoud, en général, négativement.*

En effet, soit $F(x, y, y')$ une fonction continue par rapport à l'ensemble des variables x, y, y' définie pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et pour toute valeur de y'; nous allons démontrer d'abord que la borne inférieure de l'integrale (1) pour toutes les fonctions $y = f(x)$ à variation bornée indiquées est égale à la

(1) Voir la note (1) page 7.

borne inférieure de la même intégrale où l'on suppose que $y = \varphi(x)$, $y' = \psi(x)$, φ et ψ étant des fonctions mesurables, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, et d'ailleurs absolument quelconques. En remarquant que cette dernière borne inférieure est toujours atteinte par un certain couple de fonctions mesurables $y = \varphi(x)$ et $z = \psi(x)$, mais qu'en général la fonction $\psi(x)$ n'est pas la dérivée de la fonction $\varphi(x)$, on verra que la proposition énoncée sera demontrée.

Le théorème à démontrer est donc réduit à la proposition suivante: *Quelles que soient les fonctions mesurables et finies presque partout* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ $(0 \leq \varphi(x) \leq 1)$, *pourvu que la fonction* $F[x, \varphi(x), \psi(x)]$ *soit sommable et quelque petit que soit* ε, *il existe toujours une fonction* $y = f(x)$ *à variation bornée* $(0 \leq f(x) \leq 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1)$ *telle qu'on a*

$$\left|\int_0^1 F[x, \varphi(x), \psi(x)]dx - \int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx\right| \leq \varepsilon.$$

Passons à la démonstration de cette dernière proposition.

La fonction $F(x, y, y')$ étant continue, il existe un nombre M tel que

$$|F(x, y, 0)| \leq M \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1. \tag{1}$$

La fonction $F[x, \varphi(x), \psi(x)]$ étant sommable, il existe donc, quelque soit ε, un ensemble parfait P [1] ayant les propriétés:

1°) mes $P \geq 1 - \dfrac{\varepsilon}{8M}$;

2°) $\psi(x)$ est continue sur P;

3°) $\left|\int_{CP} F[x, \varphi(x), \psi(x)]dx\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{8}$ [2].

Soit $\overline{\psi}(x)$ une fonction qui est égale à $\psi(x)$ sur P et à 0 en dehors de P.

En posent $I_0 = \int_0^1 F[x, \varphi(x), \psi(x)]dx$, nous avons

$$\left|I_0 - \int_P F[x, \varphi(x), \overline{\psi}(x)]dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

D'autre part en vertu de l'inégalité (1) on a

$$\left|\int_{CP} F[x, \varphi(x), 0]dx\right| \leq M \operatorname{mes} CP \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

---

[1] Nous supposons que P est situé sur le segment (0, 1).

[2] Nous prenons l'ensemble complémentaire par rapport au segment (0, 1).

il en suit

$$\left| I_0 - \int_0^1 F[x, \varphi(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I_1 = \int_0^1 F[x, \varphi(x), \bar{\psi}(x)]dx.$$

Soit N le maximé de $|\bar{\psi}(x)|$ pour $0 \leq x \leq 1$ et K le maximé de $|F(x, y, z)|$ pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|z| \leq N$.

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\bar{\psi}(x)$ étant mesurables, il existe un ensemble parfait P_1 ayant les propriétés :

1°) mes $P_1 \geq 1 - \frac{\varepsilon}{8K}$;

2°) $\varphi(x)$ est continue sur P_1;

3°) $\left| \int_{CP_1} F[x, \varphi(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}$.

Soit $\bar{\varphi}(x)$ une fonction continue, égale à $\varphi(x)$ sur P_1 et variant linéairement en dehors de P_1, on a

$$\left| I_1 - \int_0^1 F[x, \bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq \left| I_1 - \int_{P_1} F[x, \varphi(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{CP_1} F[x, \bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc, d'après (2), on a

$$\left| I_0 - \int_0^1 F[x, \bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

La fonction $F(x, y, y')$ étant continue, il existe un nombre h tel que

$$|F(x, y + \Delta y, z) - F(x, y, z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $|z| \leq N$ et $|\Delta y| \leq h$.

Soit

$$\varphi^*(x) = \int^x \bar{\psi}(x)dx.$$

La fonction $\varphi^*(x)$ est continue, donc, d'après un théorème de M. N. Lusin [1], on peut construire une fonction $\overline{\overline{\varphi}}(x)$ à variation bornée et telle que :

1°) $\overline{\overline{\varphi}}'(x) = 0$ presque partout ;

2°) $|\overline{\varphi}'(x) - \varphi^*(x) - \overline{\overline{\varphi}}(x)| \leq h$;

3°) en posant $f(x) = \varphi^*(x) + \overline{\overline{\varphi}}(x)$ on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Il en suit

$$|\overline{\varphi}(x) - f(x)| \leq h, \tag{4}$$

$f'(x) = \overline{\psi}(x)$ presque partout, et, d'après 3°, les fonctions $\varphi^*(x)$ et $\overline{\overline{\varphi}}(x)$ étant à variation bornée, la fonction $f(x)$ l'est aussi.

D'autre part, d'après (4)

$$\left|\int_0^1 F[x,\ \overline{\varphi}(x),\ \overline{\psi}(x)]dx - \int_0^1 F[x,\ f(x),\ f'(x)]dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, d'après (3)

$$\left|I_0 - \int_0^1 F[x,\ f(x),\ f'(x)]dx\right| \leq \varepsilon$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2. L'extrêmé absolu. — Les considérations de ce § se fondent sur la proposition suivante.

Lemme fondamental. *Étant donné une classe* C_φ *de courbes continues, on peut construire une fonction continue des deux variables* $\Psi(x, \alpha)$ *ayant les propriétés suivantes :*

1°) *On obtient toutes les fonctions de la classe donnée en attribuant à* α *toutes les valeurs numériques possibles* $0 \leq \alpha \leq 1$.

2°) *Quel que soit le nombre* α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, *la fonction de* x, $\Psi(x, \alpha_0)$ *appartient à la classe donnée.*

En effet, soit

$$\eta_1,\quad \eta_2, \dots,\quad \eta_n, \dots \tag{1}$$

une suite de nombres positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$.

Considérons, en posant $\varepsilon_n = \varphi(\eta_n)$ [2], une nouvelle suite de nombres positifs

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2, \dots,\quad \varepsilon_n, \dots \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

---

[1] N. Lusin, *L'intégrale et la serie trigonométrique* (en russe). Moscou 1915, p. 34.

[2] φ est la fonction qui figure dans la définition de la classe $C\varphi$.

D'après la définition de la classe C_φ, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée on a:

1°) $0 \leq f(x) \leq 1$;

2°) $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour tout h, $|h| = \eta_n$.

Considérons maintenant dans le carré (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) les points P_{nk} de coordonnées $(n\eta_p, k\varepsilon_p)$ $\left[n = 0, 1, 2, \ldots, E\left(\frac{1}{\eta_p}\right) + 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots, E\left(\frac{1}{\varepsilon_p}\right)\right]$, p étant un entier positif fixe. Construisons toutes les lignes polygonales possibles ayant leurs sommets aux points P_{nk} et telles que si l'un des sommets d'une telle ligne est au point P_{nk}, l'un des sommets voisins est nécessairement au point $P_{n-1,i}$ et l'autre au point $P_{n+1,j}$, i et j ne pouvant avoir d'autre valeur que $k-1$, ou k, ou $k+1$. Pour un p fixe il n'existe qu'un nombre fini de ces lignes polygonales, soit

$$\pi_1(x, p), \quad \pi_2(x, p), \ldots, \quad \pi_{N_p}(x, p)$$

toutes ces lignes.

Celà posé, considérons ceux des polygones $\pi_1(x, 1)$, $\pi_2(x, 1), \ldots$, $\pi_{N_1}(x, 1)$, qui verifient l'inégalité

$$|\pi_i(x, 1) - f(x)| \leq 2\varepsilon_1$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque de la classe C_φ; soit

$$\pi_1'(x, 1), \quad \pi_2'(x, 1), \ldots, \quad \pi_{N_1}'(x, 1)$$

tous ces polygones.

Soit $P_1(x, \alpha)$ une fonction continue définie pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ de la manière suivante

$$P_1\left(x, \frac{k}{N_1' - 1}\right) = \pi'_{k+1}(x, 1) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N_1' - 1).$$

On achève la définition de $P_1(x, \alpha)$ en la faisant varier linéairement en suivant des droites perpendiculaires à l'axe des x dans les autres points du carré (¹).

Il suit de la définition de $P_1(x, \alpha)$ qu'il existe, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe C_φ, un nombre α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, tel que

$$|f(x) - P_1(x, \alpha_0)| \leq 2\varepsilon_1.$$

(¹) Plus précisément, nous posons

$$P_1(x, \alpha) = \left\{1 - N_1\left(\alpha - \frac{k}{N_1}\right)\right\} \pi'_{k+1}(x, 1) + N_1\left(\alpha - \frac{k}{N_1}\right)\pi'_{k+2}(x, 1) \quad \text{pour} \quad \frac{k}{N_1} \leq \alpha \leq \frac{k+1}{N_1}.$$

De plus quel que soit le nombre β_0, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, il existe toujours une fonction $f(x)$ de la classe C_φ telle que

$$|P_1(x, \beta_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_1.$$

Supposons qu'on puisse construire une fonction continue $P_n(x, \alpha)$, ayant les propriétés suivantes :

1°) quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée, il existe toujours un nombre α_0 tel que $|P_n(x, \alpha_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_n$;

2°) quel que soit le nombre α_0', $0 \leq \alpha_0' \leq 1$, il existe une fonction $f(x)$ de la classe C_φ telle que $|P_n(x, \alpha_0') - f(x)| \leq 2\varepsilon_n$.

Nous allons démontrer que dans ce cas on peut toujours construire une fonction continue $P_{n+1}(x, \alpha)$ telle que :

1°) quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe C_φ, il existe toujours un nombre β_0, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, tel que $|P_{n+1}(x, \beta_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$;

2°) quel que soit le nombre β_0', $0 \leq \beta_0' \leq 1$, il existe une fonction $f(x)$ de la classe C_φ telle que $|P_{n+1}(x, \beta_0') - f(x)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$;

3°) $|P_n(x, \alpha) - P_{n+1}(x, \alpha)| \leq 4\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$.

En effet, soit $\beta > 0$ une quantité telle que $\frac{1}{\beta}$ est un entier et qu'on a

$$|P_n(x, \alpha + h) - P_n(x, \alpha)| \leq \varepsilon_n \quad \text{pour} \quad |h| \leq \beta.$$

Cela posé, considérons ceux des polygones

$$\pi_1(x, n+1), \ldots, \quad \pi_{N_{n+1}}(x, n+1)$$

qui vérifient l'inégalité

$$|\pi(x, n+1) - f(x)| \leq 2\varepsilon_{n+1}$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque de la classe C_φ ; soit

$$\pi_1'(x, n+1), \ldots, \quad \pi'_{N'_{n+1}}(x, n+1)$$

tous ces polygones.

D'après les propriétés de la fonction $P_n(x, \alpha)$ et d'après la construction des polygones $\pi'(x, n+1)$ il existe, quel que soit le polygone $\pi_i'(x, n+1)$, un entier $j < \frac{1}{\beta}$ tel que

$$|P_n(x, j\beta) - \pi_i'(x, n+1)| \leq 3\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}. \tag{2}$$

Nous dirons que le polygone $\pi_i'(x, n+1)$ appartient à la classe j si l'inégalité (2) est vérifiée. Chacun des polygones $\pi'(x, n+1)$ appartient ainsi à une classe $j\left(0 \leq j < \frac{1}{\beta}\right)$. Inversement quel que soit le nombre $j\left(0 \leq j < \frac{1}{\beta}\right)$ il exist des polygones $\pi'(x, n+1)$ de la classe j.

Soient

$$\pi'_{j_1}(x, n+1), \quad \pi'_{j_2}(x, n+1), \ldots, \pi'_{j\mu_j}(x, n+1)$$

tous les polygones de la classe j.

Passons à la construction de la fonction cherchée $P_{n+1}(x, \alpha)$; à cet effet nous divisons le segment $[j\beta, (j+1)\beta]$ en μ_j parties égales; soient

$$a_1^{(j)} = j\beta, \quad a_2^{(j)}, \ldots, \quad a_{\mu_j}^{(j)}$$

respectivement l'extrêmité gauche du segment considéré et les point de division; posons

$$P_{n+1}(x, a_k^{(j)}) = \pi'_{j_k}(x, n+1)$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots, \mu_j; \quad j = 0, 1, \ldots, \frac{1}{\beta} - 1\right)$$

$$P_{n+1}(x, 1) = \pi'_{j\mu_j}(x, n+1) \quad \text{où l'on pose} \quad j = \frac{1}{\beta} - 1.$$

On achève la définition de P_{n+1} en la faisant varier linéairement en suivant des droites perpendiculaires à l'axe des x dans les antres points du carré.

Il est évident que la fonction $P_{n+1}(x, \alpha)$ vérifie les trois conditions posées.

On construit ainsi en partant de la fonction $P_1(x, \alpha)$ une suite de fonctions

(3) $$P_1(x, \alpha), \quad P_2(x, \alpha), \ldots, \quad P_n(x, \alpha), \ldots$$

ayant les propriétés :

1°) quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée C_φ et quel que soit le nombre entier n, il existe un nombre α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, tel que $|P_n(x, \alpha_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_n$;

2°) quel que soit le nombre β_0, $0 \leq \beta_0 \leq 1$, et quel que soit le nombre entier m, il existe toujours une fonction $f(x)$ de la classe considérée C_φ telle que $|P_m(x, \beta_0) - f(x)| \leq 2\varepsilon_m$;

3°) $|P_n(x, \alpha) - P_{n+1}(x, \alpha)| \leq 4\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n+1}$.

Cela posé, supposons que la suite (1) soit telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ converge. Alors, en vertu de 3° la suite (3) converge uniformément. Posons

$$\Psi(x, \alpha) = \lim_{n \to \infty} P_n(x, \alpha).$$

D'après les propriétés de la suite (3) il est aisé de voir que la fonction construite Ψ est la fonction cherchée.

COROLLAIRE. *Etant donné une classe* $C_\varphi^{(a)}$ *de courbes absolument continues, on peut construire une fonction continue des deux variables* $\omega(x, \alpha)$ *ayant les propriétés suivantes :*

1°) *On obtient toutes les fonctions de la classe donnée en attribuant à* α *toutes les valeurs numériques possibles* $0 \leq \alpha_0 \leq 1$;

2°) *quelque soit le nombre* α_0, $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, *la fonction de* x, $\omega(x, \alpha_0)$ *appartient à la classe donnée* ([1]).

Nous passons maintenant à l'application du lemme fondamental au problème de l'existence d'un extrêmé absolu.

Considérons l'integrale

$$\int_0^1 F(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Supposons que certaines propriétés de la fonction F permettent de démontrer que s'il existe nne courbe extrémante pour l'intégrale (1) dans la classe des lignes $C^{(\alpha)}$, cette courbe appartient nécessairement à une classe $C_\varphi^{(\alpha)}$ ([2]).

Alors *le problème de l'existence d'une extrémante pour l'intégrale* (1) *se réduit au problème de l'existence d'un extrêmé pour une certaine fonction d'une variable.* En effet, en vertu du corollaire, la fonction

$$\Phi(\alpha) = \int_0^1 F[x, \omega(x, \alpha), \omega'_x(x, \alpha)]dx$$

résoud la question.

D'ailleurs, en raisonnant, comme le fait M. TONELLI ([3]), on démontre que dans l'hypothèse $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$ $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0\right)$ la fonction $\Phi(\alpha)$ est semicontinue inférieurement (supérieurement). On obtient ainsi le résultat de M. TONELLI : *avec*

([1]) On obtient une proposition analogue en considérant une classe de fonctions bornées dans leur ensemble et ayant des nombres dérivés bornés dans leur ensemble. On déduit d'ailleurs immédiatement du lemme fondamental, du corollaire et de la remarque faite les propositions connues de M. HILBERT et de M. ASCOLI sur l'existence des suites uniformément convergentes dans certaines classes de fonctions.

([2]) M. L. TONELLI a montré qu'il en est ainsi dans l'hypothèse

$$F(x, y, y') \geq |y'|^{1+\alpha} \ (\alpha > 0), \quad \text{pour} \quad |y'| \geq Y', \quad (\alpha \text{ et } Y' \text{ sont des constantes}),$$

loc. cit., t. II, p. 282.

([3]) Loc. cit., t. I, p. 397.

cette hypothèse complémentaire on peut affirmer que le minimé (maximé) *absolu existe.*

3. Exemple. — La construction de notre exemple [1] se fonde sur les deux lemmes suivants :

LEMME I. *Etant données deux courbes analytiques fermées,* f(x, y) = 0, φ(x, y) = 0, *sans points communs et telles que* φ = 0 *est contenue dans l'aire* D *limitée par* f(x, y) = 0, *on peut toujours construire une fonction* F(x, y) *ayant les propriétés suivantes :*

1°) F(x, y) < 0 *dans* D ;

2°) F(x, y) = 0 *sur* φ = 0 *et* = ε > 0 *sur* f = 0 ;

3°) F(x, y) *a des dérivées partielles des* n *premiers ordres continues par rapport a* x *et* y *et s'annullant sur* φ = 0 *et* f = 0 ;

4°) *quel que soit* η > 0, *pour* ε *assez petit la fonction* F(x, y) *et ses* n *premières derivés sont de module* < η *pour tous les points dans* D.

En effet, construisons la fonction

$$F(x,\ y) = \varepsilon\left[\frac{[f(x,\ y)]^{n+1}}{[\varphi(x,\ y)]^2 + [f(x,\ y)]^{n+1}}\right]^{2(n+1)}$$

on voit de suite que cette fonction vérifie toutes les propriétés indiqués.

LEMME II. *Etant donnée un segment de courbe continue* [y = f(x), 0 ≤ x ≤ 1], *on peut toujurs construire une fonction continue* Φ(x, y) *ayant les propriétés suivantes :*

1°) Φ(x, y) > 0, *si* y ≠ f(x), Φ(x, y) = 0 *pour* y = f(x) ;

2°) Φ(x, y) *a des dérivées continues des* m *premiers ordres.*

En effet construisons une suite de courbes analytiques fermées

$$f_1(x,\ y) = 0,\quad f_2(x,\ y) = 0,\ldots,\quad f_n(x,\ y) = 0,\ldots$$

deux à deux sans points communs et telles que :

1°) toutes les courbes $f_i(x,\ y) = 0$ sont contenues dans l'aire limitée par la coube $f_n(x,\ y)$ pour $i > n$, $(n = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$;

2°) la courbe donnée $y = f(x)$, $(0 \leq x \leq 1)$ est contenue dans l'aire limitée par la courbe $f_n(x,\ y) = 0$, $(n = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$.

Celà posé, construisons les fonctions (lemme I)

$$\Phi_n(x,\ y) = \varepsilon_n\left[\frac{[f_n(x,\ y)]^{m+1}}{[f_{n+1}(x,\ y)]^2 + [f_n(x,\ y)]^{m+1}} - 1\right]^{2(m+1)} + a - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k .$$

[1] Voir l'introduction.

On choisit les nombres positifs ε_n $(n=1, 2, 3,...)$ tels, qu'on a:

1°) $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = a < \infty$;

2°) Toutes les dérivées partielles de la fonction $\Phi_n(x, y)$ jusqu'à l'ordre m sont inférieures à η_n en valeur absolue, les nombres positifs η_n $(n=1, 2, 3,...)$ sont tels que $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$.

D'après le lemme I, la fonction cherchée sera donc définie par les conditions suivantes:

1°) $\Phi(x, y) = 0$ pour $y = f(x)$;

2°) $\Phi(x, y) = \Phi_n(x, y)$ pour les points situés dans l'aire limitée par les courbes $f_n(x, y) = 0$ et $f_{n+1}(x, y) = 0$.

Nous passons maintenant à la construction de l'exemple indiqué.

Soit $y = \psi(x)$ une courbe absolument continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble partout dense sur (0, 1). Construisons la fonction $\Phi(x, y)$ du lemme II pour cette courbe $y = \psi(x)$ et considérons l'intégrale

$$I = \int_0^1 \Phi(x, y)(1 + y'^2)dx.$$

En posant

$$\Phi(x, y) \cdot (1 + y'^2) = \Psi(x, y, y')$$

nous avons les propriétés suivantes de $\Psi(x, y, y')$:

1°) Ψ possède toutes les dérivés des m premiers ordres par rapport à x, y et y';

2°) $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} \geq 0$;

3°) Le minimum absolu de I est donné par la courbe $y = \psi(x)$, qui n'est pas une extrémale dans aucun intervalle.

4. Les courbes admissibles $C^{(a)}$ et C'. — Nous passons à la dernière question de ce Mémoire.

LEMME. *Soit* F(x, y, y') *une fonction continue et telle que* $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq M$ [1]. *Soit* f(x) $(0 \leq x \leq 1)$ *une fonction absolument continue* $0 < f(x) < 1$, $f(0) = y_1$, $f(1) = y_2$, *et telle que la fonction* F[x, f(x), f'(x)] *est sommable. Il existe alors,*

[1] *M* est une constante absolu.

quel que soit $\varepsilon > 0$, *une fonction* $\varphi(x)$ *ayant une dérivée continue et vérifiant les conditions suivantes :*

1°) $\varphi(0) = y_1$, $\varphi(1) = y_2$;

2°) $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$;

3°) $\left| \int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx - \int_0^1 F[x, \varphi(x), x'(x)]dx \right| < \varepsilon$.

Remarquons d'abord que pour démontrer le lemme il suffit de prouver qu'il existe une polygone $y = \bar{f}(x)$, vérifiant les mêmes conditions que la fonction $y = \varphi(x)$.

Pour construire un tel polygone faisons les conventions préliminaires suivantes. Désignons par N_r le maximé du module de $F(x, y, y')$ pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|y'| \leq r$. Soit P un ensemble parfait situé sur le segment $(0, 1)$ de l'axe des x, mes. $P = \frac{1}{2}$, et tel que $f(x)$ est continue sur P; nous désignons par R lé maximé du module de $f(x)$ sur P. Désignons enfin par h_ε un nombre inférieur à 1 et à $\frac{1}{M}$, tel qu'on a pour $|\Delta z| \leq h_\varepsilon$

$$(1) \qquad |F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ et pour toutes les valeurs des variables $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|z| \leq R + 1$.

Passons maintenant à la construction du polygone cherché.

Les fonctions $f'(x)$ et $F[x, f(x), f'(x)]$ étant mesurables et sommables, il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un ensemble parfait P_ε [1] tel qu'on a :

1°) mes. $P_\varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon}{24N_0}$, $P_\varepsilon \supset P$ pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$;

2°) $f'(x)$ est continue sur P_ε;

3°) $\left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), f'(x)]dx \right| < \frac{\varepsilon}{12}$ [2];

4°) $\int_{CP_\varepsilon} |f'(x)|\, dx < \frac{h_\varepsilon \varepsilon}{12}$.

En vertu de la propriété 2°, $f'(x)$ est bornée sur P_ε, soit $|f'(x)| < R_\varepsilon$ sur P_ε.

---

[1] Nous supposons que P_ε est situé sur le segment (0, 1).

[2] Nous prenons l'ensemble complémentaire par rapport au segment (0, 1).

$F(x, y, z)$ étant continue, il existe un nombre H_ε, $0 < H_\varepsilon < \varepsilon h_\varepsilon$, tel qu'on a pour $|\Delta z| < H_\varepsilon$

$$|F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{12} \tag{2}$$

pour toutes les valeurs des variables $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $|z| \leq R_\varepsilon + 1$. Cela posé, d'après la même condition 2° on peut diviser l'ensemble P_ε en un nombre fini de portions, deux à deux sans points communs,

$$P_\varepsilon = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_p$$

telles qu'on a

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon \tag{3}$$

si x_1 et x_2 appartiennent à une même portion π_i.

Soit $\psi(x)$ une fonction définie sur P_ε, constante dans chaque portion π_i et qui diffère de $f'(x)$ d'une quantité inférieure à $\frac{1}{12} H_\varepsilon$

$$\psi(x) = c_i \quad \text{pour tout} \quad x \subset \pi_i \tag{4}$$

$$|f'(x) - \psi(x)| < \frac{1}{12} H_\varepsilon. \tag{4'}$$

Désignons par $\tilde{\pi}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots p)$ p intervalles deux à deux sans points communs contenant respectivement les portions π_i, $\tilde{\pi}_i \supset \pi_i$, et soit

$$\pi_i = \tilde{\pi}_i - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{ik}$$

δ_{ik} étant des intervalles deux à deux sans points communs.

Soit η_i une quantité positive telle qu'on a

$$(N_{c_i} + |c_i|)\eta_i < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{24p}. \tag{5}$$

Désignons enfin par k_i un entier positif vérifiant l'inégalité

$$\sum_{k=k_i}^{\infty} \delta_{ik} < \eta_i. \tag{6}$$

Avec ces conventions, construisons dans l'intervalle (0, 1) une fonction $\bar{\psi}(x)$

$$\bar{\psi}(x) = c_i \quad \text{pour} \quad x \subset \pi_i \quad \text{ou} \quad x \subset \delta_{ik}, \quad k \geq k_i, \tag{7}$$

$$\bar{\psi}(x) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } x. \tag{7'}$$

On a

(8) $$|\overline{\psi}(x)| < R_\varepsilon .$$

Posons

(9) $$\overline{f}(x) = \int_0^x \overline{\psi}(x)dx + y_1 .$$

Il suit de la construction de la fonction $\overline{\psi}$, que la fonction $\overline{f}(x)$ représente un polygone : démontrons d'abord qu'on a

(10) $$|\overline{f}(x) - f(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon h_\varepsilon .$$

En effet, d'après le conditions $f(0) = y_1$ et (9), on a

$$|\overline{f}(x) - f(x)| = \left|\int_0^x \overline{\psi}(x)dx - \int_0^x f'(x)dx\right| \leq$$
$$\leq \int_{P_\varepsilon} |\overline{\psi}(x) - f'(x)|\,dx + \int_{CP_\varepsilon} |f'(x)|\,dx + \int_{CP_\varepsilon} |\overline{\psi}(x)|\,dx.$$

Considérons chacune de ces intégrales ; nous avons d'après (4′) et la définition de H_ε

(11) $$\int_{P_\varepsilon} |\overline{\psi}(x) - f'(x)|\,dx < \frac{1}{12} H_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}.$$

D'après la construction de l'ensemble P_ε (condition 4°) on a

(12) $$\int_{CP_\varepsilon} |f'(x)|\,dx < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}.$$

Enfin d'après les conditions (7), (7′), (6), (5)

(13) $$\int_{CP_\varepsilon} |\overline{\psi}(x)|\,dx \leq \sum_{i=1}^{p} |c_i| \sum_{k=k_i}^{\infty} \delta_{ik} < \sum_{i=1}^{p} |c_i|\,\eta_i < \frac{\varepsilon h_\varepsilon}{12}.$$

L'inégalité cherchée est une conséquence immédiate des trois dernières inégalités (11), (12) et (13).

Démontrons maintenant qu'on a

(14) $$\Delta = \left|\int_0^1 F[x,\ f(x),\ f'(x)]dx - \int_0^1 F[x,\ \overline{f}(x),\ \overline{f}'(x)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En effet, on a d'abord

$$\Delta_1 = \left| \int_0^1 F[x, f(x), f'(x)]dx - \int_0^1 F[x, f(x), \bar{f}'(x)]dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{P_\varepsilon} \{ F[x, f(x), f'(x)] - F[x, f(x), \bar{\psi}(x)] \} \, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), f'(x)]dx \right| + \left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), \bar{\psi}(x)]dx \right|$$

et d'après les inégalités (4'), (2)

$$\left| \int_{P_\varepsilon} \{ F[x, f(x), f'(x)] - F[x, f(x), \bar{\psi}(x)] \} \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

D'autre part, d'après la condition 3°

$$\left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), f'(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

Enfin d'après la condition 1°) et les inégalités (5), (6) on a

$$\left| \int_{CP_\varepsilon} F[x, f(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq N_0 \text{ mes. } CP_\varepsilon + \sum_{i=1}^{p} N_{c_i} + \sum_{k=k_i}^{\infty} \delta_{ik} \leq \frac{\varepsilon}{24} + \frac{\varepsilon}{24} = \frac{\varepsilon}{12}.$$

On a donc $\Delta_1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

D'autre part on a par hypothèse $\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq M$: il suit donc de l'inégalité (10) qu'on a

$$\Delta_2 = \left| \int_0^1 F[x, f(x), \bar{\psi}(x)]dx - \int_0^1 F[x, \bar{f}(x), \bar{\psi}(x)]dx \right| \leq \int_0^1 M \, | f(x) - \bar{f}(x) | \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On a ainsi

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous nous proposons maintenant de construire un poligone $y = \bar{\bar{f}}(x)$ tel que

(15) $$| \bar{\bar{f}}(x) - \bar{f}(x) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(16) $$\left| \int_0^1 F[x, \bar{f}(x), \bar{f}'(x)]dx - \int_0^1 F[x, \bar{\bar{f}}(x), \bar{\bar{f}}'(x)]dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(17) $$\bar{\bar{f}}(0) = y_1, \quad \bar{\bar{f}}(1) = y_2.$$

En vertu de (10) et (14), on voit de suite que ce polygone $y=\overline{\overline{f}}(x)$ est le polygone cherché.

Nous remarquons d'abord que, quel que soit $\varepsilon<\frac{1}{2}$, il existe toujours un ensemble E qui est la somme d'un nombres fini d'intervalles, dont la mesure est égale à $\frac{1}{2}$ et tel qu'on a

(18) $$|\overline{\psi}(x)|<R+1 \quad \text{pour tout} \quad x\subset E \text{ (}^1\text{)}.$$

Soit maintenant

(19) $$\overline{f}(1)-f(1)=\varepsilon'$$

d'apres (10) on a

(20) $$|\varepsilon'|<\frac{1}{4}h_\varepsilon\varepsilon.$$

Soit $\overline{\overline{\psi}}(x)$ une fonction vérifiant les conditions:

(21) $$\overline{\overline{\psi}}(x)=\overline{\psi} \quad \text{pour tout} \quad x\subset CE$$

(21′) $$\overline{\overline{\psi}}(x)=\overline{\psi}(x)+2\varepsilon' \quad \text{pour tout} \quad x\subset E.$$

Pour obtenir la fonction $\overline{\overline{f}}(x)$ cherchée, il suffit de poser

(22) $$\overline{\overline{f}}(x)=\int_0^x\overline{\overline{\psi}}(x)dx+y_1.$$

En effet, on a d'après (9), (21) et (21′)

(23) $$|\overline{\overline{f}}(x)-\overline{f}(x)|\leq\varepsilon';$$

on a de plus, d'une part, d'après (21), (21′), (20) et (1)

$$\Delta_1'=\left|\int_0^1 F[x,\ \overline{f}(x),\ \overline{f}'(x)]dx-\int_0^1 F[x,\ \overline{f}(x),\ \overline{\overline{f}}'(x)]dx\right|=$$
$$=\left|\int_E F[x,\ \overline{f}(x),\ \overline{\psi}(x)]dx-\int_E F[x,\ \overline{f}(x),\ \overline{\psi}(x)]dx\right|\leq\frac{\varepsilon}{4};$$

(1) Pour prouver l'existence d'un tel ensemble, il suffit de se rappeler (voir le commencement de ce §) que: 1°) $P_\varepsilon\supset P$; 2°) mes. $P=\frac{1}{2}$; 3°) $\overline{\psi}(x)$ est continue sur P_ε; 4°) l'inégalité (4′).

d'autre part, en vertu de la condition (23), (20) et de l'hypothèse $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$, on a

$$\Delta_2' = \left| \int_0^1 F[x, \bar{f}(x), \bar{\bar{f}}'(x)]dx - \int_0^1 F[x, \bar{\bar{f}}(x), \bar{f}'(x)]dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On obtient l'inégalité (16) en ajoutant Δ_1' à Δ_2'.

L'inégalité (15) et la formule (17) sont de conséquences immédiates respectivement des formules (23), (20) et (22), (21'), (20), (19).

On déduit de ce lemme les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *La fonction* F(x, y, y') *étant continue et* $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$, *la borne inférieure* (supérieure) *de l'integrale* $\int_0^1 F(x, y, y')dx$ *dans la classe* $C^{(a)}$ *est égale à la borne inférieure* (supérieure) *de la même integrale dans la classe* C'.

THÉORÈME II. *S'il existe dans la classe* C' *une courbe qui minime l'integrale* $\int_0^1 F(x, y, y')dx$ (la fonction $F(x, y, y')$ vérifiant les conditions du lemme), *il existe aussi un minimé pour cette intégrale dans la classe* $C^{(a)}$ *et ce minimé est donné par la même courbe.*

5. Dans les démonstrations du lemme et, par conséquent, des théorèmes du § 4 on suppose essentiellement que la dérivée de $F(x, y, y')$ par rapport à y est bornée. Il est intéressant de savoir si cette condition est nécessaire. Autrement dit, le théorème subsitera-t-il si l'on ne suppose plus $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M$? Et dans le cas où cette question se resoud négativement, est-il possible de remplacer cette restriction par l'hypothèse que toutes les dérivées partielles de F jusqu'à un certain ordre existent et sont continues? Nous nous proposons maintenant de répondre négativement aux deux questions posées.

A cet effet considérons la fonction

$$\Phi(x, y) = e^{-\frac{2}{(y-\sqrt{x})^2}}.$$

On voit de suite qu'elle jouit des propriétés suivantes :

1°) elle est continue ainsi que toutes ses dérivées pour $0 \leq x$;

2°) $\Phi(x, \sqrt{x}) = 0$; $\Phi(x, y) > 0$ pour $y \neq \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$;

3°) $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \geq 0$, $(1 \geq x \geq 0,\ 1 \geq y \geq 0)$.

Soit maintenant $f(y')$ une fonction continue ayant des dérivées de tous les ordres et telle qu' on ait

$$f(y') \geq 1, \quad \frac{d^2 f}{dy'^2} > 0, \quad \min. f(y') = f(0). \tag{I}$$

Considérons l' integrale

$$\int_0^1 \Phi(x, y) f(y') dx. \tag{1}$$

Supposons qu' on considère comme lignes admissibles toutes les courbes absolument continues qui passent par l' origine des coordonnées et le point (1, 1). Dans ce cas, quelque soit la fonction $f(y')$ vérifiant les conditions énoncés, le minimé de l' intégrale (1) existe toujours et est égal à zéro. Nous allons montrer qu' on peut tonjours construire $f(y')$ de telle façon, que la valeur de l' intégrale (1) soit > 1 pour toute courbe passant par les mêmes points et appartenant à la classe C'.

Considérons dans le plan x, y les courbes $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ et posons

$$\varphi(x, y) = \min. \int_x^1 \Phi(x, y) f(y') dx, \quad y(x) = y, \quad y(1) = 1, \tag{2}$$

on considère comme lignes admissibles les courbes de la classe C'. On a

$$\varphi(x, \sqrt{x}) = 0, \quad \varphi(x, y) > 0 \quad \text{pour} \quad y \neq \sqrt{x}$$
$$\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2) > 0 \quad \text{si} \quad y_1 < y_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq y_i \leq \sqrt{x} \ (i = 1, 2).$$

Soit $\varepsilon(x)$ le minimum de la fonction $\Phi(\xi, \eta)$ pour $1 \geq \xi \geq x$; $\frac{1}{2}\sqrt{\xi} \geq \eta \geq \frac{1}{4}\sqrt{\xi}$; on a $(1 \geq p > x)$

$$\varphi\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > \varepsilon(x) \min. \int_x^p f(y') dx, \quad y(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}, \quad y(p) = \frac{1}{2}\sqrt{p}.$$

On sait d' après la théorie classique que c' est une ligne droite qui est la courbe minimante pour la dernière intégrale. On a ainsi

$$(3)\qquad \begin{aligned}\varphi\left(x,\ \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > \varepsilon(x)\min_{(p)}.(p-x)f\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{p}-\frac{1}{4}\sqrt{x}}{p-x}\right] \geq \\ \geq \varepsilon(x)\min_{(p)}.(p-x)f\left[\frac{\frac{1}{4}\sqrt{x}}{p-x}\right].\end{aligned}$$

Nous choisissons la fonction $f(y')$ de telle façon qu'elle vérifie la condition

$$\text{(II)}\qquad \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\min.(p-x)f\left[\frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}{p-x}\right] > 1 \qquad \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\leq x<1\\ x<p\leq 1\end{array}\right\}.$$

On a donc, d'après (3) et (I)

$$(4)\qquad \varphi\left(x,\ \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > 1 \quad \text{pour} \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Considérons la tangente à la parabole $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ au point $\left(x,\ \frac{1}{4}\sqrt{x}\right)$ et soit $p(x)$ l'abscisse du second (en comptant de droite à gauche) point d'intersection de cette tangente avec la parabole $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Nous supposons maintenant que la fonction $f(y')$ vérifie la troisieme condition

$$\text{(III)}\qquad \varepsilon(x)\,[p(x)-x]\,f\left[\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{p(x)}-\sqrt{x})}{p(x)-x}\right] > 1 \qquad (0 < x \leq 1).$$

Il existent des fonctions, vérifiant cette condition car on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{p(x)}-\sqrt{x}}{p(x)-x} = +\infty.$$

Nous imposons enfin à $f(y')$ les deux conditions suivantes

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\varepsilon(x)}{4}\sqrt{x}\,f\left(\frac{1}{8\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{8\sqrt{x}}\right)^2}} > 1 \qquad (0 < x < 1)$$

$$\text{(V)}\qquad \frac{d}{dt}f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0 \qquad (t > 0).$$

Remarquons qu'il existe des fonctions f, vérifiant toutes les conditions (I)-(V). Démontrons maintenant, que dans ces hypothèses sur $f(y')$ on a

$$\varphi\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > 1 \qquad (0 < x < 1).$$

Dans ce but, définissons d'abord une suite de nombre positifs

(5) $$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad x_n, \ldots$$

de la maniere suivante : $x_1 = \frac{1}{2}$; en supposant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ déjà définis, on trouve x_{n+1} en rèsolvant l'équation $p(x_{n+1}) = x_n$. Il suit de la définition même, que la suite (5) est décroissante et qu'on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Il suit de la formule (4) qu'on a $\varphi\left(x, \frac{1}{4}\sqrt{x}\right) > 1$ pour $x \geq x_1$; supposons que l'inégalité cherch6e a lieu pour $x \geq x_n$ et démontrons qu'elle aura lieu pour $x \geq x_{n+1}$.

Soit donc $x_0 \geq x_{n+1}$. On a d'après (2)

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) = \min.\left[\int_{x_0}^{p(x_0)} \Phi(x, y) f(y') dx + \int_{p(x_0)}^{1} \Phi(x, y) f(y') dx\right]$$

$$\left(y(x_0) = \frac{1}{4}\sqrt{x_0}, \quad y[p(x_0)] = y_1, \quad y(1) = 1\right).$$

Il faut distinguer ici trois cas :

1°) $y_1 \leq \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}$.

Dans ce cas on a :

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min.\int_{p(x_0)}^{1} \Phi(x, y) f(y') dx = \varphi[p(x_0), y_1]$$

d'où, en vertu de 1° et des propriétés de la fonction φ, on a

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \varphi\left[p(x_0), \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}\right]$$

mais puisque $x_0 \geq x_{n+1}$, on a $p(x_0) \geq x_n$, donc

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > 1.$$

2°) $\frac{1}{2}\sqrt{p(x_0)} \geq y_1 \geq \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}$, $y(\xi) < \frac{1}{2}\sqrt{\xi}$ pour $x_0 \leq \xi \leq p(x_0)$ [1].

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min. \int_{x_0}^{p(x_0)} \Phi(x, y) f(y') dx \geq$$

$$\geq \min. \varepsilon(x_0)[p(x_0) - x_0] f\left[\frac{y_1 - \frac{1}{4}\sqrt{x_0}}{p(x_0) - x_0}\right].$$

Il s'en suit, d'après les conditions I, 2° et III, qu'on a

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \varepsilon(x_0)[p(x_0) - x_0] f\left[\frac{\frac{1}{4}(\sqrt{p(x_0)} - \sqrt{x_0})}{p(x_0) - x_0}\right] > 1.$$

3°) $y_1 > \frac{1}{2}\sqrt{p(x_0)}$, donc la courbe d'intégration $y = y(x)$ coupe la parabole $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ dans un point au moins, dont l'abscisse est $< p(x_0)$. Soit x' la plus petite de ces abscisses.

On a ainsi

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min. \int_{x_0}^{x'} \Phi(x, y) f(y') dx \geq$$

$$\geq \min. \varepsilon(x_0)(x' - x_0) f\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x'} - \frac{1}{4}\sqrt{x_0}}{x' - x_0}\right].$$

Posons

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x'} - \frac{1}{4}\sqrt{x_0}}{x' - x_0} = t.$$

On a alors

$$x' - x_0 > \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On a donc

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \min. \frac{\varepsilon(x_0)}{4}\sqrt{x_0}\, f(t)\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

---

[1] Dans le cas $\frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)} \geq y_1 \geq \frac{1}{4}\sqrt{p(x_0)}$ et $y(\xi) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\xi}$ pour un nombre ξ au moins $x_0 \leq \xi \leq p(x_0)$, voir les considérations du cas 3°.

D'ailleurs, en vertu de $x' > p(x_0)$ on a

$$t > \frac{d}{dx_0}\left(\frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) = \frac{1}{8\sqrt{x_0}}.$$

Donc, d'après V et IV on a

$$\varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > \frac{\varepsilon(x_0)}{4}\sqrt{x_0}\, f\left(\frac{1}{8\sqrt{x_0}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{8\sqrt{x_0}}\right)^2}} > 1.$$

Il est maintenant aisé de montrer que si la fonction $f(y')$ vérifie toutes les conditions (I)-(V), l'intégrale (1) surpasse 1 pour toute courbe qui passe par les points (0, 0) et (1, 1) et qui appartient à la classe C'.

En effet, soit $y = \psi(x)$ une courbe qui jouit des propriétés indiquées; x_0 étant un nombre positif assez petit, on a

$$\psi(x_0) < \frac{1}{4}\sqrt{x_0}$$

donc

$$\int_0^1 \Phi[x, \psi(x)] f[\psi'(x)]\, dx > \varphi\left(x_0, \frac{1}{4}\sqrt{x_0}\right) > 1.$$

14 février 1926.

Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier.

Memoria di LEONIDA TONELLI (a Bologna).

INTRODUZIONE

Lo studio della convergenza della serie di FOURIER di una funzione di due variabili — *serie doppia di Fourier* — è, come è noto, assai più complesso di quello relativo alla serie di FOURIER di una funzione di una variabile sola. La naturale maggiore complicazione che si presenta nel passare da una serie semplice ad una serie doppia, viene aggravata da un fatto nuovo che si verifica per le serie multiple di FOURIER. Mentre per una serie di FOURIER in una sola variabile la convergenza in un dato punto dipende (per un teorema di RIEMANN) *esclusivamente* dal comportamento della funzione generatrice nell'intorno di quel punto, altrettanto non può affermarsi per una serie doppia di FOURIER. Anzi, per una tale serie, avviene che la convergenza in un determinato punto può sempre farsi sparire cambiando opportunamente la funzione generatrice *soltanto al di là* di un intorno del punto stesso ([1]). Da ciò deriva che le condizioni di convergenza della serie doppia di FOURIER in un punto non possono limitarsi alle proprietà della funzione generatrice nell'intorno del punto stesso, e che perciò non possono ottenersi criteri di convergenza in un punto della stessa semplicità di quelli che si hanno per le serie di FOURIER in una sola variabile, pur anche prescindendo dal fatto

([1]) Vogliamo però osservare che, se si resta nel campo delle funzioni limitate, l'influenza, sulla convergenza in un dato punto, dei valori della funzione nei punti al di là di un intorno del punto considerato, si traduce in una semplice *indeterminazione del primo ordine*. Più precisamente, se f_1 e f_2 sono due funzioni limitate e integrabili, coincidenti in un intorno del punto $(\bar{x}, \bar{y})$, la serie doppia di FOURIER di $f_1 - f_2$ in $(\bar{x}, \bar{y})$ o converge allo zero o è indeterminata, ma sempre ha per somma lo zero se viene sommata col metodo della media aritmetica del CESARO. Perciò, se la serie della f_1 è convergente in $(\bar{x}, \bar{y})$, quella della f_2 o è convergente anche essa, ed allora ha la stessa somma di quella della f_1, oppure è sommabile col metodo della media aritmetica, fornendo ancora la stessa somma della serie della f_1. È noto poi che, sulla convergenza in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$, hanno influenza soltanto i valori della funzione generatrice relativi ai punti che hanno o l'ascissa prossima a $\bar{x}$ oppure l'ordinata prossima a $\bar{y}$.

che le condizioni nell'intorno del punto debbano essere necessariamente più complesse.

Per quanto poi riguarda le discontinuità della funzione generatrice, va notato che discontinuità di natura assai semplice possono essere sufficienti ad impedire la convergenza della serie doppia di FOURIER (²).

Il primo ad occuparsi della convergenza delle serie doppie di FOURIER sembra essere stato G. ASCOLI (³); Egli però considerò soltanto la convergenza per linee e per colonne della serie doppia, e non già la convergenza ordinaria nel senso moderno, precisato da STOLZ (⁴) e PRINGSHEIM (⁵). Dopo queste ricerche, un teorema di convergenza fu dato dal PICARD, nel suo *Traité d'Analyse* (⁶). Il metodo semplice ed elegante usato dal PICARD porta a stabilire la convergenza assoluta della serie doppia, ma richiede condizioni troppo restrittive, giacchè presuppone, per la funzione generatrice, l'esistenza, la continuità e la periodicità delle derivate parziali dei primi quattro ordini.

Arriviamo così al periodo delle ricerche moderne sulla convergenza delle serie doppie di FOURIER, iniziato da G. CERNI, nel 1901 (⁷). Il CERNI enunciò un criterio di convergenza molto notevole, in base al quale la convergenza è assicurata quando la funzione generatrice ha i rapporti incrementali, rispetto ad x e ad y, entrambi limitati; e benchè i ragionamenti del CERNI non siano privi di errori, il criterio dato è perfettamente valido, come risulterà da quanto dimostreremo nella presente Memoria.

Nel 1903, troviamo un lavoro di M. KRAUSE (⁸), nel quale è stabilita la convergenza della serie doppia di FOURIER per ogni funzione $f(x, y)$ tale che il quadrato $Q \equiv [0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$ possa essere diviso in un numero finito di rettangoli a lati paralleli agli assi x e y, in ognuno dei quali ciascuna delle espressioni $f(x', y) - f(x, y)$, $f(x, y') - f(x, y)$, $f(x', y') - f(x', y) - f(x, y') + f(x, y)$, dove è $x' > x$ e $y' > y$, conservi un segno costante. Questo criterio risulta un caso particolare di un altro, dato nel 1906 da

(²) Così, per es., se la funzione generatrice nell'intorno del punto (0, 0) ha sempre il valore 0, salvo nei punti di un angolo minore di 90°, avente il vertice in (0, 0), nei quali supponiamo che abbia il valore 1, la serie doppia di FOURIER *non* è convergente in (0, 0).

(³) Memorie della R. Accademia dei Lincei, s. 3, vol. IV (1879), pp. 253-300; vol. VIII (1880), pp. 263-319.

(⁴) Math. Annalen, B. 24 (1884), p. 157.

(⁵) Sitzgsb. Akad. München, B. 27 (1897), pp. 100-152.

(⁶) T. I (1ª ediz. 1891), pp. 270-271.

(⁷) Rend. R. Istit. Lomb. Scienze e Lettere, s. 2, vol. XXXIV (1901), pp. 921-956.

(⁸) Leipzig Berichte, B. 55 (1903), pp. 164-197.

G. H. HARDY (9), che assicura la convergenza per ogni funzione *a variazione doppia finita* (secondo la terminologia da noi adottata (10)) e tale che, sia come funzione della sola x, sia come funzione della sola y, risulti sempre a variazione limitata. Di un altro caso particolare del criterio di HARDY, si occupò, nel 1910, A. VERGERIO (11), dal cui lavoro, qualora fosse scevro da errori, si potrebbe trarre anche la convergenza della serie doppia di FOURIER per ogni funzione continua mai decrescente nel verso positivo degli assi, il che in fatto avviene, come risulterà da quanto qui dimostreremo.

Estendendo una condizione data dal DE LA VALLÉE POUSSIN per le serie semplici di FOURIER, W. H. YOUNG, nel 1912 (12), dimostrò la convergenza della serie doppia di FOURIER della funzione $f(x, y)$ nel punto (x, y), sotto la condizione che l'espressione $\operatorname{cosec} u \operatorname{cosec} v \int_{-u}^{u}\int_{-v}^{v} f(x+u,\ y+v)\,du\,dv$ sia, nel campo $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq \pi$, una funzione di (u, v) a variazione doppia finita e tale da risultare a variazione limitata tanto come funzione della sola u quanto come funzione della sola v.

Della convergenza della serie doppia di FOURIER si occuparono anche W. W. KÜSTERMANN, nel 1913 (13), e H. GEIRINGER, nel 1918 (14), presentando alcune osservazioni al riguardo, ma senza giungere a criteri veramente utilizzabili.

Dobbiamo menzionare, infine, un risultato recentissimo di E. W. HOBSON (15), il quale stabilisce la convergenza della serie doppia di FOURIER per ogni funzione limitata, monotona tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y, e tale che il suo rapporto incrementale rispetto alla x (oppure rispetto alla y) risulti limitato.

Nella presente Memoria, diamo un teorema generale di convergenza per la serie doppia di FOURIER, utilizzando il concetto di *funzione di due variabili a variazione limitata*, da noi introdotto recentemente, a proposito di alcune ricerche sulla quadratura delle superficie (16). Indicate con $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$, considerata rispettivamente come

(9) Quart. Journ., vol. XXXVII (1906), pp. 53-79.
(10) Vedi n.° 25.
(11) Giornale di Matem. del Battaglini, vol. XLIX (1911), pp. 181-206.
(12) Proc. London Math. Soc., s. 2, vol. XI (1912), pp. 133-184.
(13) Inaugural-Dissertation, München (1913), pp. 1-60.
(14) Monatshefte f. Math. u. Phys, B. XXIX (1918), pp. 65-144.
(15) *The theory of functions of a real variable....* (Second Edition, 1926), vol. II, p. 710.
(16) Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. III (1926), p. 357.

funzione della sola x e della sola y, dimostriamo che « *se la $f(x, y)$ è integrabile e a variazione limitata, in ogni punto (x, y) in cui valgono le quattro uguaglianze*

$$\lim_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x \pm u, y + v) - V_{(x)}(x \pm 0, y + v) \} = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x + u, y \pm v) - V_{(y)}(x + u, y \pm 0) \} = 0,$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso il valore

$$\frac{1}{4} \{ f(x+0, y+0) + f(x-0, y+0) + f(x-0, y-0) + f(x+0, y-0) \} \text{ ».}$$

Da questo teorema deduciamo poi numerosi criteri di convergenza, ritrovando, in particolare, tutti quelli sino ad ora conosciuti, ad eccezione del criterio dato da W. H. YOUNG. Per ragione di spazio, non ci siamo occupati qui di tale criterio; ma in altro lavoro dedurremo dal teorema sopra enunciato una condizione di convergenza che contiene come caso particolare quella di YOUNG.

Fra i nuovi criteri che qui stabiliamo ci limitiamo a rammentare quelli che assicurano la convergenza in un dato punto della serie doppia di FOURIER:

se la funzione generatrice è limitata, e sempre monotona come funzione della sola x e pure sempre monotona come funzione della sola y, e se, inoltre, esistono i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$;

oppure se, essendo limitata e integrabile, la $f(x, y)$, come funzione della sola x e pure come funzione della sola y, compie un numero di oscillazioni sempre inferiore ad un numero fisso, ed inoltre esistono ancora i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$;

oppure se la $f(x, y)$ è, come funzione della sola x, sempre assolutamente continua, e pure assolutamente continua come funzione della sola y, e se, inoltre, esistono due numeri positivi σ e N, tali che sia sempre

$$\int_0^{2\pi} | f'_x |^{1+\sigma} dx < N, \qquad \int_0^{2\pi} | f'_y |^{1+\sigma} dy < N.$$

Diamo poi delle condizioni di convergenza indipendenti dal teorema generale di cui abbiamo già parlato e che si riattaccano alle osservazioni del KÜSTERMANN e della GEIRINGER, e ne deduciamo un criterio (n.° 26) che ci sembra la più naturale estensione a due variabili del noto criterio di LIPSCHITZ.

Insieme con la convergenza in un dato punto, studiamo anche la convergenza uniforme in un dato campo; e terminiamo il lavoro con lo stabilire delle condizioni affinchè la serie doppia di FOURIER sia sommabile per linee o per colonne. Dimostriamo che, in tutti i casi di convergenza della serie doppia considerati nella presente Memoria, la serie si può comunque sommare per linee o per colonne, giungendo sempre allo stesso risultato; e ritroviamo, in particolare, quanto, a questo proposito, provò l'ASCOLI nelle ricerche di cui abbiamo già fatto cenno.

I. **Preliminari.**

1. Secondo una definizione già posta altrove ([17]), diremo che la funzione $f(x, y)$, supposta definita nel quadrato $Q \equiv [0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$, è *a variazione limitata in* Q, se:

1°) per quasi tutti i valori di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$ in $(0, 2\pi)$, $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ sono funzioni, rispettivamente di y e di x, a variazione limitata in $(0, 2\pi)$;

2°) le variazioni totali di $f(\bar{x}, y)$ e di $f(x, \bar{y})$, in $(0, 2\pi)$, sono delle funzioni integrabili (nel senso del LEBESGUE), rispettivamente di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$, in $(0, 2\pi)$.

Indicheremo, nel seguito, con $V_{(x)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, x)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x; e con $V_{(y)}(x, y)$ la variazione totale, nell'intervallo $(0, y)$, della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y. Se la $f(x, y)$ è *a variazione limitata* in Q, le funzioni $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ esistono finite per quasi tutti i valori di y e x, rispettivamente, in $(0, 2\pi)$, ed esistono (finiti) ambedue gli integrali

$$\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)dy, \quad \int_0^{2\pi} V_{(y)}(x, 2\pi)dx.$$

2. Sia $f(x, y)$ una funzione definita in tutto il piano (x, y) e periodica, di periodo 2π, tanto rispetto alla x quanto rispetto alla y. Se questa funzione è *a variazione limitata* nel quadrato Q, essa risulta a variazione limitata anche in ogni altro quadrato o rettangolo a lati paralleli agli assi x e y; diremo allora, senz'altro, che essa è *a variazione limitata*. In questo caso,

([17]) V. loc. cit. ([16]).

intenderemo che le funzioni $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ siano definite in tutto il piano (x, y), la loro definizione essendo dedotta, da quella già data in Q, per mezzo della periodicità, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y. A tale scopo, cambieremo il valore della $V_{(x)}(x, y)$ per $x = 0$, ponendolo uguale a $V_{(x)}(2\pi, y)$; ed analogamente, il valore di $V_{(y)}(x, y)$ per $y = 0$ sarà sostituito con $V_{(y)}(x, 2\pi)$.

Inoltre, se la $f(x, y)$ è integrabile (nel senso del LEBESGUE) in Q, essa risulta integrabile anche in ogni altro quadrato o rettangolo; e diremo, senz'altro, che tale funzione è integrabile.

3. Data una funzione $f(x, y)$ in un certo campo C, consideriamo un punto (x, y) *interno* a C. Diremo che esiste finito il limite $\lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x+h, y+k)$ se esiste un numero finito, che indicheremo con $f(x+0, y+0)$, tale che, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, si possa poi sempre determinare un $\delta > 0$, in modo che, per ogni coppia h, k, soddisfacente alle disuguaglianze $0 < h < \delta$, $0 < k < \delta$, sia

$$f(x+0, y+0) - f(x+h, y+k) < \sigma.$$

Analogamente si definiranno i limiti $f(x-0, y+0) = \lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x-h, y+k)$, $f(x-0, y-0) = \lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x-h, y-k)$ e $f(x+0, y-0) = \lim\limits_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} f(x+h, y-k)$.
Definiremo poi il limite $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to +0}} f(x+h, y+k)$ come quel numero (se esiste) tale che, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, si possa poi sempre determinare un $\delta > 0$, in modo che, per ogni coppia h, k, soddisfacente alle $0 < |h| < \delta$, $0 < k < \delta$, sia

$$\Big|\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to +0}} f(x+h, y+k) - f(x+h, f(x+k)\Big| < \sigma.$$

4. Data una funzione $f(x, y)$ in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto ad entrambe le variabili x e y, e integrabile, dicesi *serie doppia di Fourier* ad essa corrispondente, la serie doppia

$$(1) \qquad \sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} \lambda_{m,n}[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny +$$
$$+ c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

dove è

$$(2) \qquad \lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se} \quad m = n = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad m = 0,\ n > 0; \quad \text{oppure se} \quad m > 0,\ n = 0; \\ 1, & \text{se} \quad m > 0,\ n > 0; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \left. \begin{matrix} a_{m,n} \\ b_{m,n} \\ c_{m,n} \\ d_{m,n} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \left\{ \begin{matrix} \cos m\alpha \cos n\beta \\ \operatorname{sen} m\alpha \cos n\beta \\ \cos m\alpha \operatorname{sen} n\beta \\ \operatorname{sen} m\alpha \operatorname{sen} n\beta \end{matrix} \right\} d\alpha d\beta.$$

Posto

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{m,n} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny +$$
$$+ c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

diremo, con STOLZ e PRINGSHEIM, che nel punto (x, y) la serie doppia (1) è convergente ed ha per *somma* il numero $S(x, y)$ se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di determinare un numero $N > 0$, tale che, per tutte le coppie μ, ν, di numeri entrambi maggiori di N, sia

$$| S(x, y) - s_{\mu,\nu}(x, y) | < \varepsilon.$$

La somma $s_{\mu,\nu}$ può essere espressa con un unico integrale. Abbiamo, infatti, tenendo conto delle (2) e (3),

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\mu} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_{m,n} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \cos m(x - \alpha) \cos n(y - \beta) d\alpha d\beta$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\mu} \cos m(x - \alpha) \right\} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\nu} \cos n(y - \beta) \right\} d\alpha d\beta,$$

e per essere

$$\frac{1}{2} + \cos \omega + \cos 2\omega + \dots + \cos r\omega = \operatorname{sen} \frac{2r + 1}{2} \omega : 2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{2},$$

$$s_{\mu,\nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta) \frac{\operatorname{sen} \frac{2\mu + 1}{2} (x - \alpha) \operatorname{sen} \frac{2\nu + 1}{2} (y - \beta)}{\operatorname{sen} \frac{x - \alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{y - \beta}{2}} d\alpha d\beta.$$

In virtù della periodicità della funzione integranda, possiamo scrivere

$$s_{\mu,\nu}(x,\ y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi}\int\limits_{y-\pi}^{y+\pi} f(\alpha,\ \beta)\frac{\operatorname{sen}\frac{2\mu+1}{2}(x-\alpha)\operatorname{sen}\frac{2\nu+1}{2}(y-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{y-\beta}{2}}\,d\alpha d\beta,$$

ed anche, ponendo $x-\alpha=-2u,\ y-\beta=-2v$,

$$s_{\mu,\nu}(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u,\ y+2v)\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u\operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}\,dudv.$$

Se ora poniamo

$$\Phi(x+2u,\ y+2v)=f(x+2u,\ y+2v)+f(x-2u,\ y+2v)+$$
$$+f(x-2u,\ y-2v)+f(x+2u,\ y-2v),$$

abbiamo

$$(4)\qquad s_{\mu,\nu}(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(x+2u,\ y+2v)\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)u\operatorname{sen}(2\nu+1)v}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}\,dudv.$$

5. Ci saranno utili nel seguito due disuguaglianze che qui ora stabiliremo. Sia $\varphi(z)$ una funzione a variazione limitata, data in un intervallo $(0,\ a)$, con $0<a\leq\frac{\pi}{2}$, e indichiamo rispettivamente con $p(z)$, $n(z)$ e $V(z)$ le sue variazioni positiva, negativa e totale, in $(0,\ z)$. È allora

$$\varphi(z)=\varphi(0)+p(z)-n(z),$$
$$p(z)+n(z)=V(z),$$

e $p(z)$, $n(z)$ e $V(z)$ sono funzioni non negative e non decrescenti. Dalle uguaglianze scritte segue

$$\varphi(+0)=\varphi(0)+p(+0)-n(+0)$$

e perciò

$$\varphi(z)=\varphi(+0)+\{p(z)-p(+0)\}-\{n(z)-n(+0)\}.$$

Se dunque consideriamo l'integrale

$$\int\limits_0^a\{\varphi(z)\quad\varphi(+0)\}\frac{\operatorname{sen}kz}{\operatorname{sen}z}\,dz,$$

dove k è un intero positivo, questo integrale possiamo decomporlo nella differenza

$$\int_0^a \{ p(z) - p(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz - \int_0^a \{ n(z) - n(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz,$$

vale a dire, possiamo scriverlo, applicando il secondo teorema della media,

$$\{ p(a) - p(+0) \} \int_{a_1}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz - \{ n(a) - n(+0) \} \int_{a_2}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz,$$

dove a_1 e a_2 sono due numeri convenienti dell'intervallo $(0, a)$. Gli integrali ora scritti sono ambedue minori, in modulo, di $\pi^2 : 2$ ([18]) e si ha, pertanto,

$$\left| \int_0^a \{ \varphi(z) - \varphi(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{\pi^2}{2} \{ p(a) - p(+0) + n(a) - n(+0) \}$$

ossia

$$\left| \int_0^a \{ \varphi(z) - \varphi(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz \right| < \frac{\pi^2}{2} \{ V(a) - V(+0) \}. \tag{5}$$

Analogamente, si ha, per $0 < \delta < a$,

$$\int_\delta^a \{\varphi(z) - \varphi(+0)\} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz = \{p(a) - p(+0)\} \int_{a'}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz - \{n(a) - n(+0)\} \int_{a''}^a \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz,$$

con a' e a'' punti dell'intervallo (δ, a). Ma ciascuno degli integrali del secondo membro è, per $k > \frac{2\pi}{\delta}$, minore, in modulo, di $\pi : k \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}$ ([19]); è perciò, qua-

---

([18]) Ciò è evidente se è $k = 1$; se è $k \geq 2$, si ha $\int_{a_1}^a = \int_0^a - \int_0^{a_1}$ e i due termini di questa differenza sono entrambi non negativi e non maggiori di

$$\int_0^{\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz < k \int_0^{\pi/k} \frac{z}{\operatorname{sen} z} dz < \frac{k\pi}{2} \int_0^{\pi/k} dz = \frac{\pi^2}{2}.$$

([19]) Ed infatti, se h è il minimo intero tale che $\frac{h}{k} \pi \geq \frac{\delta}{2}$, ciascuno degli integrali indicati è, in modulo, minore di $\int_{h\pi/k}^{(h+1)\pi/k} \left| \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} \right| dz < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\delta}{2}} \int_{h\pi/k}^{(h+1)\pi/k} dz = \pi : k \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}$.

lunque sia k,

$$(6)\qquad \left|\int_\delta^a \{ \varphi(z) - \varphi(+0) \} \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} z} dz\right| < \frac{C_\delta}{1+k} \{ V(a) - V(+0) \},$$

dove C_δ è una costante dipendente da δ, ma indipendente da a $\left(\text{purchè } 0 < \delta < a \leq \frac{\pi}{2}\right)$ e dalla funzione $\varphi(z)$.

II. La convergenza semplice.

6. Ci proponiamo di dimostrare la seguente proposizione:

Sia $f(x, y)$ una funzione data in tutto il piano (x, y), periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle due variabili x e y, integrabile e a variazione limitata. Se nel punto (x, y) valgono le quattro uguaglianze

$$(7)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x+u,\ y+v) - V_{(x)}(x+0,\ y+v) \} = 0, \\ \lim\limits_{\substack{u \to +0 \\ v \to 0}} \{ V_{(x)}(x-u,\ y+v) - V_{(x)}(x-0,\ y+v) \} = 0, \\ \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x+u,\ y+v) - V_{(y)}(x+u,\ y+0) \} = 0, \\ \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ v \to +0}} \{ V_{(y)}(x+u,\ y-v) - V_{(y)}(x+u,\ y-0) \} = 0, \end{cases}$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge, in tale punto, verso

$$(8)\qquad \frac{1}{4}\{ f(x+0,\ y+0) + f(x-0,\ y+0) + f(x-0,\ y-0) + f(x+0,\ y-0) \}.$$

Se la funzione $f(x, y)$ è continua nel punto (x, y), il valore (8) coincide evidentemente con $f(x, y)$.

7. Senza ledere la generalità del teorema che vogliamo dimostrare, possiamo supporre, per semplicità di scrittura, che il punto (x, y) considerato sia $(0, 0)$.

Decomponiamo l'integrale che esprime la somma $s_{\mu,\nu}(0, 0)$ in tre parti, corrispondenti ai tre rettangoli di vertici opposti $(0, 0)$ e (δ, δ); $(\delta, 0)$ e

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $(0, \delta)$ e $\left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$; dove supponiamo $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Avremo così decomposto $s_{\mu,\nu}(0, 0)$ in tre parti, che indicheremo con $s^{(1)}_{\mu,\nu}$, $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, $s^{(3)}_{\mu,\nu}$.

Occupiamoci subito di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$. Abbiamo, ponendo $2\mu + 1 = h$, $2\nu + 1 = k$,

$$s^{(2)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_0^{\pi/2} \Phi(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv;$$

e siccome è

$$\Phi(2u, 2v) = f(2u, 2v) + f(-2u, 2v) + f(-2u, -2v) + f(2u, -2v),$$

possiamo scomporre $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ in quattro parti, corrispondenti ai quattro addendi che formano $\Phi(2u, 2v)$. Consideriamo la prima di queste parti, vale a dire

$$\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_0^{\pi/2} f(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv.$$

Osserviamo qui che, essendo la $f(x, y)$, come funzione della sola y, a variazione limitata su quasi tutte le parallele all'asse delle y (n.° 1), esiste finito, per quasi tutti i valori di u, il limite $f(2u, +0)$, e questo limite risulta una funzione quasicontinua (misurabile), perchè la $f(2u, 2v)$ è quasi continua, rispetto ad u per quasi tutti i valori di v, in forza dell'ipotesi che la $f(x, y)$ sia integrabile. Inoltre, se è $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ e se $\bar{v}$ è un valore dell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tale che la $f(2u, 2\bar{v})$ risulti integrabile rispetto ad u [20], si ha

$$| f(2u, 2\bar{v}) - f(2u, 2v) | \leq V_{(y)}(2u, 2\pi)$$

donde

$$| f(2u, 2v) | \leq | f(2u, 2\bar{v}) | + V_{(y)}(2u, 2\pi);$$

e siccome $| f(2u, 2v) |$ è integrabile rispetto ad u e tale è anche la $V_{(y)}(2u, 2\pi)$, per l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata, ne viene che, se per

---

[20] In virtù dell'integrabilità superficiale della $f(x, y)$, questa funzione risulta linearmente integrabile rispetto ad x per quasi tutti i valori di y, per un noto teorema del Fubini.

uno dei v considerati la $f(2u,\ 2v)$ è quasi continua rispetto ad u, essa è anche integrabile. Dall'ultima disuguaglianza scritta e da un noto teorema di integrazione per serie segue anche che $f(2u,\ +0)$ è essa pure integrabile rispetto ad u. Indicando con δ_1 un numero >0 e $<\frac{\pi}{2}$, che fra poco determineremo, possiamo dunque scrivere

$$
\begin{aligned}
s^{(2)}_{\mu,\,\nu} = {} & \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\delta_1}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\int_\delta^{\pi/2} f(2u,\ +0)\,\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du + \\
(9) \qquad & + \frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^{\delta_1}\{\,f(2u,\ 2v) - f(2u,\ +0)\,\}\,\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv + \\
& + \frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_{\delta_1}^{\pi/2} f(2u,\ 2v)\,\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv.
\end{aligned}
$$

Per qualunque valore di v, è

$$\left|\int_0^{\delta_1}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\right| < \frac{\pi^2}{2};$$

e per $h \to \infty$ è

$$\int_\delta^{\pi/2} f(2u,\ +0)\,\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du \to 0,$$

in virtù di un noto teorema di Riemann-Lebesgue della teoria delle serie di Fourier per le funzioni di una sola variabile. Pertanto la prima parte del secondo membro di (9) tende a zero per $h \to \infty$.

Per vedere come si comporta il secondo termine del secondo membro di (9), osserviamo che, per quasi tutti i valori di u, $V_{(y)}(2u,\ 2v)$ tende, per $v \to +0$, al valore finito $V_{(y)}(2u,\ +0)$; perciò, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, possiamo supporre di aver determinato δ_1 in modo che lo pseudointervallo dei valori di u di $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ per i quali non è $V_{(y)}(2u,\ 2\delta_1) - V_{(y)}(2u,\ +0) < \sigma$, sia di misura (piccola quanto vuolsi e quindi) tale che l'integrale di $V_{(y)}(2u,\ 2\pi)$, ad esso esteso, risulti $<\sigma$ [21]. Applicando allora la (5), avremo

$$\left|\int_0^{\delta_1}\{f(2u,\,2v)-f(2u,\,+0)\}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\right|<\frac{\pi^2}{2}\{V_{(y)}(2u,\,2\delta_1)-V_{(y)}(2u,\,+0)\},$$

e perciò

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^{\delta_1}\{f(2u,\,2v)-f(2u,\,+0)\}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\right|<\frac{1}{2\operatorname{sen}\delta}\left(\sigma\,\frac{\pi}{2}+\sigma\right)<\frac{2\sigma}{\operatorname{sen}\delta}.$$

Concludiamo dunque che, fissato il δ, si può scegliere δ_1 in modo da rendere la seconda parte del secondo membro di (9) minore, in modulo, di un numero positivo arbitrariamente prefissato, e ciò indipendentemente da h e k.

L'ultimo termine della (9) tende poi allo zero, per $\left.\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right\}\to\infty$, in virtù del teorema di RIEMANN-LEBESGUE, esteso alle funzioni di due variabili.

Risulta così $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}\to 0$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\\nu\end{matrix}\right\}\to\infty$.

In modo analogo si dimostra che tendono a zero anche le altre tre parti di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, quando μ e ν si facciano tendere entrambi e contemporaneamente all'infinito. È dunque $s^{(2)}_{\mu,\nu}\to 0$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\\nu\end{matrix}\right\}\to\infty$.

Nello stesso modo si prova anche la $s^{(3)}_{\mu,\nu}\to 0$.

8. Veniamo ora allo studio di

$$s^{(1)}_{\mu,\nu}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta\Phi(2u,\,2v)\frac{\operatorname{sen} hu\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\,du\,dv.$$

[21] Possiamo sempre supporre che $V_{(y)}(x,\,y)$ sia, per ogni y, quasi continua (misurabile) come funzione della sola x. Ciò è sicuramente vero se la $f(x,\,y)$ è continua rispetto alla y, ed anche se è, per quasi tutti gli x e per tutti gli y, $f(x,\,y-0)\leq f(x,\,y)\leq f(x,\,y+0)$. In caso contrario, nei punti di discontinuità che non soddisfano a questa condizione e che si trovano su quelle parallele all'asse delle y sulle quali la $f(x,\,y)$ è a variazione limitata, come funzione della sola y, — punti che su ciascuna delle parallele indicate sono al massimo in un'infinità numerabile — si cambierà il valore della $f(x,\,y)$, che figura nell'espressione di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, in modo da verificare la doppia disuguaglianza scritta. Con ciò, invece di $V_{(y)}(x,\,y)$, si avrà una variazione totale $\bar{V}_{(y)}(x,\,y)$ tale che $\bar{V}_{(y)}(x,\,y)\leq V_{(y)}(x,\,y)$. Questa $V_{(y)}$ risulta quasi-continua e integrabile su ogni parallela all'asse delle x, in virtù della $V_{(y)}(x,\,y)\leq V_{(y)}(x,\,2\pi)$ e per l'integrabilità della $V_{(y)}(x,\,2\pi)$. Ed allora basterà sostituire, nel ragionamento che andiamo facendo, la $V_{(y)}$ con la $\bar{V}_{(y)}$.

Decomponiamo anche $s_{\mu,\nu}^{(1)}$ in quattro parti, corrispondenti ai quattro addendi di $\Phi(2u,\ 2v)$, e consideriamo la prima di esse, vale a dire

$$s_{\mu,\nu}^{(1)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,dudv.$$

Osserviamo, prima di proseguire, che, dalle ipotesi (7), ammesse per il punto $x=0$, $y=0$, segue l'esistenza del limite $f(+0,\ +0)$. Ed infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo determinare un l positivo in modo che, dalla $0 < x \leq l$, segua $|\,V_{(x)}(l,\ l) - V_{(x)}(x,\ l)\,| < \varepsilon$, e dalle $0 < x \leq l$, $0 < y \leq l$, segua $|\,V_{(y)}(x,\ l) - V_{(y)}(x,\ y)\,| < \varepsilon$. Per gli stessi x e y, è allora, $|\,f(l,\ l) - f(x,\ l)\,| < \varepsilon$, $|\,f(x,\ l) - f(x,\ y)\,| < \varepsilon$, e perciò $|\,f(l,\ l) - f(x,\ y)\,| < 2\varepsilon$. E ciò prova l'esistenza di $f(+0,\ +0)$, e la sua finitezza.

Possiamo scrivere allora

$$(10)\qquad \begin{aligned} \bar{s}_{\mu,\nu}^{(1)} &= \frac{1}{\pi^2} f(+0,\ +0)\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_0^\delta\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\ + \\ &+ \frac{1}{\pi^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \{\, f(2u,\ 2v) - f(+0,\ +0)\,\}\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,dudv, \end{aligned}$$

e il primo termine di questa somma tende a $\frac{1}{4}f(+0,\ +0)$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, perchè è

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Vogliamo dimostrare che, scegliendo δ sufficientemente piccolo, il secondo termine della somma (10) può rendersi minore, in modulo, di un numero positivo arbitrariamente prefissato, contemporaneamente per tutti gli h e k.

Posto

$$I_{r,s} = \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int_{s\pi/k}^{(s+1)\pi/k}\{\, f(2u,\ 2v) - f(+0,\ +0)\,\}\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv,$$

e indicati con p e q i massimi interi tali che sia $p\pi/h < \delta$, $q\pi/k < \delta$, il secondo termine della (10) si scrive

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{r=0}^{p}\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{s=0}^{q}\sum_{r\ s+1}^{p} I_{r,s}, \tag{11}$$

intendendo che negli integrali $I_{p,s}(s=0, 1,\dots q)$ e $I_{r,q}(r=0, 1,\dots p)$ il campo di integrazione sia limitato a quella parte che si trova nel quadrato di vertici opposti (0, 0) e (δ, δ).

Cominciamo col prendere in esame la somma $\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}$.

La funzione $f(x, y)$, essendo a variazione limitata in Q, è, su quasi tutte le parallele all'asse delle y, a variazione limitata come funzione della sola y. Perciò, se, per ogni punto (x, y) del quadrato di vertici opposti (0, 0) e $(2\delta, 2\delta)$, indichiamo con $P_{(y)}(x, y)$ e $N_{(y)}(x, y)$ le variazioni positive e negative della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y, nell'intervallo $(y, 2\delta)$, abbiamo, per quasi tutti i valori di x di $(0, 2\delta)$,

$$\begin{aligned} &f(x, y)=f(x, 2\delta)-P_{(y)}(x, y)+N_{(y)}(x, y),\\ &P_{(y)}(x, y)+N_{(y)}(x, y)=V_{(y)}(x, 2\delta)-V_{(y)}(x, y), \end{aligned} \tag{12}$$

e $P_{(y)}(x, y)$ e $N_{(y)}(x, y)$ sono funzioni non negative e non crescenti col crescere di y nell'intervallo $(0, 2\delta)$. Abbiamo perciò, per quasi tutti gli x di $(0, 2\delta)$ e per ogni y di $(0, 2\delta)$,

$$\begin{aligned} f(x, y)-f(+0, +0)=&\{f(x, 2\delta)-f(+0, +0)\}\\ &-P_{(y)}(x, y)+N_{(y)}(x, y). \end{aligned} \tag{13}$$

Preso ad arbitrio un numero $\varepsilon>0$, possiamo supporre δ sufficientemente piccolo in modo da avere, per ogni coppia x, y di numeri positivi e $\leq 2\delta$,

$$|f(x, y)-f(+0, +0)|<\varepsilon, \tag{14}$$

ed anche, per le (7),

$$V_{(y)}(x, y)-V_{(y)}(x, +0)<\varepsilon.$$

È allora, se $0<x\leq 2\delta$, $0<y\leq 2\delta$,

$$V_{(y)}(x, 2\delta)-V_{(y)}(x, y)<\varepsilon,$$

e per la (12)

$$P_{(y)}(x, y)<\varepsilon, \tag{15}$$

$$N_{(y)}(x, y)<\varepsilon. \tag{16}$$

Indicando con $I'_{r,s}$, $I''_{r,s}$ e $I'''_{r,s}$ gli integrali che si ottengono sostituendo a $f(2u, 2v) - f(+0, +0)$, nell'espressione di $I_{r,s}$, rispettivamente $f(2u, 2\delta) - f(+0, +0)$, $P_{(y)}(2u, 2v)$ e $N_{(y)}(2u, 2v)$, abbiamo, in virtù della (13)

$$I_{r,s} = I'_{r,s} - I''_{r,s} + I'''_{r,s},$$

e perciò

$$\sum_{s=r}^{q} I_{r,s} = \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} - \sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} + \sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}.$$

Ora è

$$\sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} = \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \{f(2u, 2\delta) - f(+0, +0)\} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \sum_{s}^{q} \int_{s\pi/k}^{(s+1)\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

e per la (14) e per il fatto che i termini della somma che figura al secondo membro sono a segni alternati e in modulo decrescenti (da cui segue che il modulo della somma è non maggiore del modulo del primo termine)

$$\left| \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} \right| < \varepsilon \left| \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| \left| \int_{r\pi/k}^{(r+1)\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \right|$$

e perciò

$$\left| \sum_{s=0}^{q} I'_{0,s} \right| < \varepsilon \frac{\pi^4}{4},$$

e per $r > 0$, essendo

$$\left| \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{r\pi}{h}} \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} du < \frac{\pi}{2r},$$

$$\left| \sum_{s=r}^{q} I'_{r,s} \right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

È poi

$$\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s} = \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \sum_{s=r}^{q} \int_{s\pi/k}^{(s+1)\pi/k} P_{(y)}(2u, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

e siccome $P_{(y)}(2u, 2v) : \operatorname{sen} v$ è funzione non negativa e non crescente al crescere di v, i termini della somma che figura al secondo membro sono anch' essi a segni alternati e in modulo non crescenti, e si ha

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi/k}^{(r+1)\pi/k} P_{(y)}(2u,\ 2v)\, \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

e per la (15)

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \varepsilon \int_{r\pi/h}^{(r+1)\pi/h} \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\, du \int_{r\pi/k}^{(r+1)\pi/k} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\, dv,$$

onde

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I''_{0,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^4}{4},$$

e per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I''_{r,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

Analogamente si ha

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I'''_{0,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^4}{4},$$

e per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I'''_{r,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{4r^2}.$$

È perciò

$$\left|\sum_{s=0}^{q} I_{0,s}\right| < \varepsilon\pi^4,$$

e per $r > 0$,

$$\left|\sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\right| < \varepsilon \frac{\pi^2}{r^2},$$

e quindi

(17) $$\left|\sum_{r=0}^{p} \sum_{s=r}^{q} I_{r,s}\right| < \varepsilon\pi^4\left(1 + \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r^2}\right) < \varepsilon\pi^4\left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\right).$$

Resta da esaminare la somma $\sum_{s=0}^{q} \sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s}$.

Per essere la $f(x,\ y)$ a variazione limitata in Q, tale funzione è anche a variazione limitata rispetto alla sola x, su quasi tutte le parallele all' asse delle x. Indicando perciò, per ogni punto (x, y) del quadrato di vertici opposti $(0, 0)$ e $(2\delta, 2\delta)$, con $P_{(x)}(x, y)$ e $N_{(x)}(x, y)$ le variazioni positive e negative della $f(x, y)$, considerata come funzione della sola x, nell'intervallo $(x, 2\delta)$, abbiamo, per quasi tutti gli y di $(0, 2\delta)$,

$$f(x, y) = f(2\delta, y) - P_{(x)}(x, y) + N_{(x)}(x, y),$$
$$P_{(x)}(x, y) + N_{(x)}(x, y) = V_{(x)}(2\delta, y) - V_{(x)}(x, y);$$

e ragionando come dianzi e supponendo δ tale che, per ogni coppia x, y di numeri positivi e $\leq 2\delta$, sia anche

$$V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(+0, y) < \varepsilon,$$

otteniamo

$$\left| \sum_{s=0}^{q} \sum_{r=s+1}^{p} I_{r,s} \right| < \varepsilon\pi^4 \left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s^2}\right).$$

Concludiamo che il secondo termine della somma (10), vale a dire l'espressione (11), soddisfa alla disuguaglianza

$$(18) \qquad \left| \frac{1}{\pi^2} \int_0^\delta \int_0^\delta \{ f(2u, 2v) - f(+0, +0) \} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du dv \right| < 2\varepsilon\pi^2 \left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\right),$$

ed è perciò piccolo a piacere, contemporaneamente per tutti gli h e k. Resta così dimostrato che, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, si può scegliere δ in modo che, per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi, sia

$$\left| \bar{s}_{\mu,\nu}^{(1)} - \frac{1}{4} f(+0, +0) \right| < \eta.$$

Trattando nello stesso modo le altre tre parti di $s_{\mu,\nu}^{(1)}$, otteniamo, infine, che, preso ad arbitrio $\eta > 0$, è possibile scegliere δ in modo che sia

$$\left| s_{\mu,\nu}^{(1)} - \frac{1}{4} \{ f(+0, +0) + f(-0, +0) + f(-0, -0) + f(+0, -0) \} \right| < \eta,$$

per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi.

E siccome $s_{\mu,\nu}^{(2)}$ e $s_{\mu,\nu}^{(3)}$ tendono a zero, come già abbiamo dimostrato nel n.° precedente, ne risulta

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu}\}\to\infty} s_{\mu,\nu} = \frac{1}{4}\{f(+0,\ +0)+f(-0,\ +0)+f(-0,\ -0)+f(+0,\ -0)\},$$

e il teorema enunciato nel n.° 6 è completamente dimostrato.

9. *Osservazione I.* Se, nella dimostrazione data del teorema del n.° 6, invece di scindere ciascuna delle tre somme $s^{(1)}_{\mu,\nu}$, $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ e $s^{(3)}_{\mu,\nu}$ nelle quattro parti corrispondenti ai quattro termini di $\Phi(2u,\ 2v)$, ragioniamo direttamente sulle intere somme, otteniamo che il teorema stabilito vale anche se le (7) si sostituiscono con le uguaglianze

$$\lim_{\substack{u\to+0\\ v\to+0}} \{ W_{(x)}(x+u,\ y+v) - W_{(x)}(x+0,\ y+v)\} = 0,$$
$$\lim_{\substack{u\to+0\\ v\to+0}} \{ W_{(y)}(x+u,\ y+v) - W_{(y)}(x+u,\ y+0)\} = 0,$$

dove $W_{(x)}(u,\ v)$ e $W_{(y)}(u,\ v)$ rappresentano le variazioni totali della $\Phi(x+2u,\ y+2v)$ considerata rispettivamente come funzione della sola u e della sola v. In questo caso, la somma $s_{\mu,\nu}$ tende, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, al valore $\frac{1}{4}\Phi(x+0,\ y+0)$, vale a dire, la somma della serie doppia di FOURIER è data da

$$\frac{1}{4}\lim_{\substack{u\to+0\\ v\to+0}} \{f(x+u,\ y+v)+f(x-u,\ y+v)+f(x-u,\ y-v)+f(x+u,\ y-v)\}.$$

10. *Osservazione II.* Dalla dimostrazione data del teorema del n.° 6, risulta che tale teorema conserva la sua piena validità se, invece di supporre la $f(x,\ y)$ a variazione limitata in tutto il quadrato Q, si fa l'ipotesi che essa sia a variazione limitata soltanto nel campo costituito dai punti $(x',\ y')$ per i quali vale almeno una delle due disuguaglianze

$$|x'-x| \leq \delta, \quad |y'-y| \leq \delta,$$

dove δ è un numero positivo che può essere fissato comunque piccolo.

11. Se le funzioni $V_{(x)}(2\pi,\ y)$ e $V_{(y)}(x,\ 2\pi)$ restano limitate, in tutto il quadrato Q, la dimostrazione data nel n.° 7, della tendenza a zero di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$ e $s^{(3)}_{\mu,\nu}$, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, può essere sostituita da un ragionamento analogo a quello usato nel n.° 8, relativamente alla $s^{(1)}_{\mu,\nu}$.

Ed infatti, ripresa l'espressione $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}$, decomponiamola in due parti, nel seguente modo

$$\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}} f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}\,du\,dv +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int\limits_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv.$$

La prima di queste parti tende a zero, per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}\to\infty$, in virtù del teorema di RIEMANN-LEBESGUE, esteso alle funzioni di due variabili; resta così da studiare soltanto la seconda parte, ossia

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int\limits_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv. \tag{19}$$

Dall'ipotesi qui fatta che $V_{(x)}(2\pi,\ y)$ e $V_{(y)}(x,\ 2\pi)$ siano limitate in tutto Q, segue che esiste un numero positivo M tale che sia $V_{(x)}(2\pi,\ y) < M$, $V_{(y)}(x,\ 2\pi) < M$ e $|f(x,\ y)| < M$, in tutto Q. Allora, procedendo come abbiamo fatto al n.° 8 per lo studio della seconda parte di (10), decomponiamo (19) in due parti analoghe alle due che formano l'espressione (11) del n.° ricordato. Ciascuna di queste due parti risulta (sostituendo al ε del n.° 8 il numero M) minore, in modulo, di

$$M\pi^4\left(\frac{1}{p}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(p+r)r}\right),$$

dove p è ancora il massimo intero tale che $\frac{p\pi}{h}<\delta$. Dunque per h sufficientemente grande, in modo che sia

$$\frac{1}{p}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(p+r)r}<\varepsilon, \tag{20}$$

ciascuna di tali parti risulta in modulo minore di $M\pi^4\varepsilon$. Si ha così

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\delta^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u}\,du\int\limits_0^\delta f(2u,\ 2v)\frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v}\,dv\right| < 2M\pi^4\varepsilon,$$

qualunque sia k e per tutti gli h maggiori di un certo h tale che per esso risulti soddisfatta la (20).

12. *Il teorema del n.° 6 sussiste anche se invece delle* (7) *si suppone che, per un* $\delta > 0$, *le quattro funzioni di* (u, v)

$$\frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y+0) - f(x+0, y+v) + f(x+0, y+0)}{uv},$$

$$\frac{f(x-u, y+v) - f(x-u, y+0) - f(x-0, y+v) + f(x-0, y+0)}{uv},$$

$$\frac{f(x-u, y-v) - f(x-u, y-0) - f(x-0, y-v) + f(x-0, y\quad 0)}{uv},$$

$$\frac{f(x+u, y-v) - f(x+u, y-0) - f(x+0, y-v) + f(x+0, y-0)}{uv},$$

risultino tutte integrabili nel quadrato di vertici opposti (0, 0) *e* (δ, δ), *e che degli 8 integrali*

$$\int_0^\delta f(x \pm u, y \pm 0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du, \quad \int_0^\delta f(x \pm 0, y \pm v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

tanto i primi quattro quanto gli altri quattro tendano, per $h \to \infty$ *e* $k \to \infty$, *rispettivamente ai valori* $\frac{\pi}{2} f(x \pm 0, y \pm 0)$, *supposti esistenti.*

Per provare l'asserto, basta dimostrare che la seconda parte della somma (10), e cioè $\left(\text{tralasciando il fattore } \frac{1}{\pi^2}\right)$

$$\int_0^\delta \int_0^\delta \{f(2u, 2v) - f(+0, +0)\} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du dv, \tag{21}$$

può rendersi, in modulo, minore di un ε prefissato, per tutti gli h e k sufficientemente grandi. L'espressione ora scritta può porsi nella forma

$$\int_0^\delta \int_0^\delta \{f(2u, 2v) - f(2u, +0) - f(+0, 2v) + f(+0, +0)\} \frac{\operatorname{sen} hu \operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} du dv +$$

$$+ \int_0^\delta f(2u, +0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv + \int_0^\delta f(+0, 2v) \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du - \tag{22}$$

$$- 2f(+0, +0) \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv,$$

il cui primo termine è, in modulo, minore di

$$4\int_0^\delta\int_0^\delta \left|\frac{f(2u,2v)-f(2u,+0)-f(+0,2v)+f(+0,+0)}{2u\cdot 2v}\right|\left|\frac{u}{\operatorname{sen} u}\right|\left|\frac{v}{\operatorname{sen} v}\right| du dv <$$

$$< \pi^2\int_0^\delta\int_0^\delta \left|\frac{f(2u,2v)-f(2u,+0)-f(+0,2v)+f(+0,+0)}{2u\cdot 2v}\right| du dv,$$

espressione che, per l'ipotesi qui fatta, resta minore di $\frac{\varepsilon}{2}$, per tutti i δ sufficientemente piccoli. Siccome poi è

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du = \frac{\pi}{2},$$

la somma degli ultimi tre termini di (22) tende allo zero quando $h\to\infty$ e $k\to\infty$. Dunque, se δ è scelto convenientemente, per tutti gli h e k sufficientemente grandi il modulo di (21) è minore di ε.

13. Il teorema del n.° 6 (anche con la variante indicata nel n.° precedente) conserva la sua validità se, invece dell'ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata, si suppone che:

1°) i limiti $f(x', y\pm 0)$ e $f(x\pm 0, y')$ esistano finiti, i primi per quasi tutti gli x' ed i secondi per quasi tutti gli y', e che essi siano integrabili, rispettivamente come funzioni della x' e della y';

2°) per ogni $\delta > 0$ e $< \frac{\pi}{2}$, si possa sempre trovare un $\sigma > 0$ tale che le funzioni di (u, v)

$$\frac{f(x+u, y+v)-f(x+u, y+0)}{v},$$

$$\frac{f(x+u, y-v)-f(x+u, y-0)}{v},$$

risultino entrambe integrabili nei due rettangoli $\left[\delta\le u\le\frac{\pi}{2},\ 0\le v\le\sigma\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}\le u\le-\delta,\ 0\le v\le\sigma\right]$, e che le

$$\frac{f(x+u, y+v)-f(x+0, y+v)}{u},$$

$$\frac{f(x-u, y+v)-f(x-0, y+v)}{u},$$

risultino entrambe integrabili nei rettangoli $\left[0 \leq u \leq \sigma, \quad \delta \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0 \leq u \leq \sigma, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq -\delta\right]$.

Ed infatti, ripresa l'espressione di $s^{(2)}_{\mu,\nu}$, data dalla (9), si osservi che il primo e l'ultimo termine di tale somma tendono a zero per μ e ν tendenti a ∞, e che il secondo termine, supposto $\delta_1 < \sigma$, è inferiore, in modulo, a

$$\frac{2}{\pi^2 \operatorname{sen} \delta} \int_\delta^{\pi/2} du \int_0^{\delta_1} \left| \frac{f(2u, 2v) - f(2u, +0)}{2v} \right| \left| \frac{v}{\operatorname{sen} v} \right| dv <$$

$$< \frac{1}{\pi \operatorname{sen} \delta} \int_\delta^{\pi/2} du \int_0^{\delta_1} \left| \frac{f(2u, 2v) - f(2u, +0)}{2v} \right| dv,$$

espressione che è piccola come vuolsi con δ_1. Dunque $\bar{s}^{(2)}_{\mu,\nu}$ si può rendere minore di un ε prefissato, per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi.

III. **La convergenza uniforme.**

14. Diremo che in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ è verificata la condizione α) se la $V_{(x)}(x, y)$ è, per tutti gli y, uniformemente continua come funzione della sola x, nel punto $x = \bar{x}$ ([22]), e la $V_{(y)}(x, y)$ è, per tutti gli x, uniformemente continua come funzione della sola y, nel punto $y = \bar{y}$.

Diremo, invece, che è verificata ovunque la condizione β) se le $V_{(x)}(2\pi, y)$, $V_{(y)}(x, 2\pi)$ sono limitate in tutto il quadrato Q.

15. Dimostriamo la seguente proposizione:

Se la funzione $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), è periodica, di periodo 2π, rispetto a ciascuna delle due variabili x e y, integrabile e a variazione limitata;

se, nell'intorno di ciascun punto di un insieme chiuso E, le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono funzioni uniformemente continue, rispettivamente della sola x e della sola y;

([22]) Vale a dire, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può determinare un $\lambda > 0$, tale che, per ogni x soddisfacente alla $|x - \bar{x}| \leq \lambda$, e per *tutti gli* y sia $|V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(\bar{x}, y)| < \varepsilon$. Nel caso in cui sia $\bar{x} = 0$ (opp. $\bar{x} = 2k\pi$) si intenderà che si abbia, per $0 < x - \bar{x} \leq \lambda$, $V_{(x)}(x, y) < \varepsilon$, e per $0 > x - \bar{x} \geq -\lambda$, $|V_{(x)}(x, y) - V_{(x)}(2\pi, y)| < \varepsilon$.

se, infine, in tutti i punti di E è verificata la condizione α), oppure è ovunque verificata la condizione β);

allora la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge uniformemente, su tutto E, verso $f(x, y)$.

Osserviamo, in primo luogo, che, dalla supposta uniforme continuità, nell'intorno di ciascun punto di E, delle $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$, considerate come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, segue che nei punti di E la $f(x, y)$ è funzione continua di (x, y). Pertanto, preso ad arbitrio un ε, si può determinare il numero δ, richiesto per la validità della (18), in modo che esso valga per tutti i punti di E. Inoltre, poichè la $f(x, y)$ risulta limitata su E, il primo termine della somma (10) tende al suo limite uniformemente su tutto E, al tendere di μ e ν all'infinito. Dunque, preso ad arbitrio un $\eta > 0$, è possibile scegliere δ in modo che sia

$$| s_{\mu,\nu}^{(1)} - f(x, y) | < \eta,$$

per tutti i valori di μ e ν sufficientemente grandi, e per tutti i punti (x, y) di E.

Per dimostrare la convergenza uniforme allo zero di $s_{\mu,\nu}^{(2)}$ e $s_{\mu,\nu}^{(3)}$, bisogna fare appello ad una delle condizioni α) o β).

Se è verificata la α), il numero δ_1, determinato nel n.° 7, si può prendere in modo che valga per tutti i punti di E, e perciò il secondo termine della somma (9) può farsi piccolo a piacere indipendentemente da h e k, contemporaneamente per tutti i punti di E. Il primo termine del secondo membro di (9) è poi il prodotto di $\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\delta_1} \frac{\operatorname{sen} kv}{\operatorname{sen} v} dv$ [che resta in modulo inferiore ad un numero fisso, qualunque sia k], per l'integrale

$$\int_\delta^{\pi/2} f(2u, +0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du.$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di E, e (x, y) è un altro punto qualsiasi, si ha

$$\left| \int_\delta^{\pi/2} f(x + 2u, y + 0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| < \left| \int_\delta^{\pi/2} f(x + 2u, \bar{y} + 0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| + \tag{23}$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} \int_\delta^{\pi/2} | f(x + 2u, y + 0) - f(x + 2u, \bar{y} + 0) | du.$$

Ora, per $h \to \infty$, l'integrale

$$\int_{\delta}^{\pi/2} f(x+2u,\ \bar{y}+0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du$$

tende a zero uniformemente per tutti gli x, come è noto dalla teoria delle serie di FOURIER di una sola variabile; e l'ultimo termine di (23) tende a zero, per $y \to \bar{y}$, perchè, dalla condizione α), segue che $f(x, y)$ è funzione continua di y, per $y = \bar{y}$, uniformemente rispetto a tutti gli x. Si ha, dunque, che preso un $\varepsilon > 0$, si possono determinare due numeri positivi λ e $\bar{h}$, tali che, per tutti i punti (x, y) soddisfacenti alla $|y - \bar{y}| \leq \lambda$ e per tutti gli $h > \bar{h}$, sia

$$\left| \int_{\delta}^{\pi/2} f(x+2u,\ y+0) \frac{\operatorname{sen} hu}{\operatorname{sen} u} du \right| < \varepsilon.$$

Da ciò segue che l'integrale qui scritto tende, per $h \to \infty$, uniformemente allo zero su tutto l'insieme chiuso E. Altrettanto può quindi asserirsi del primo termine del secondo membro della (9).

Questo stesso fatto si presenta, infine, per il terzo termine del secondo membro della (9), in virtù dell'estensione a due variabili di una nota proposizione.

Con ciò resta dimostrato che $s_{\mu,\nu}^{(2)}$ e così anche $s_{\mu,\nu}^{(3)}$, tendono uniformemente a zero su tutto E, per μ e ν tendenti all'infinito.

Se, invece della α) è verificata la condizione β), questa conclusione è conseguenza immediata della dimostrazione data nel n.° 11 della convergenza allo zero di $s_{\mu,\nu}^{(2)}$ per $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \to \infty$.

16. Dal teorema del n.° precedente segue, in particolare:

Se la $f(x, y)$ è una funzione ovunque continua, periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y, e a variazione limitata, e se le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono ovunque uniformemente continue ([23]) *come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque uniformemente verso la $f(x, y)$ stessa.*

([23]) Nel senso indicato in ([22]), per quanto riguarda i punti che si trovano sulle rette $x = 2k\pi$, per la prima, e $y = 2k\pi$, per la seconda.

Si ha pure:

Se la $f(x, y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y, integrabile, a variazione limitata; se le $V_{(x)}(x, y)$ e $V_{(y)}(x, y)$ sono limitate in tutto il quadrato Q, ed, inoltre, esse sono, in ogni campo chiuso interno a Q, funzioni uniformemente continue, rispettivamente della sola x e della sola y; la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge uniformemente verso la $f(x, y)$, in ogni campo chiuso interno a Q.

Altre condizioni di convergenza uniforme possono poi dedursi dai risultati dei n.^{i} 12 e 13.

IV. **Criteri particolari di convergenza.**

17. Ci proponiamo ora di dedurre, dai risultati generali dei n.^{i} precedenti, dei criteri di convergenza particolari, che ci sembrano notevoli per la loro facile e larga applicazione.

Premettiamo che, avendo chiamato Q il quadrato $[0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi]$, chiameremo Q' il campo definito dalle disuguaglianze $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$.

Premetteremo anche la seguente definizione. Diremo che una funzione $f(x, y)$ è *monotona* nel campo C in cui viene considerata, se, in tale campo, essa è sempre monotona, e nello stesso senso, come funzione della sola x (intendendo che, per tutti gli y ammessi, essa sia sempre non crescente oppure sempre non decrescente) e pure monotona e nello stesso senso (non necessariamente uguale al precedente) come funzione della sola y. Si hanno così quattro classi di funzioni $f(x, y)$ monotone:

1^a) per ogni coppia (x_1, y) (x_2, y), di punti appartenenti a C, con $x_1 < x_2$ è sempre $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$, e per ogni coppia (x, y_1), (x, y_2) di punti pure di C con $y_1 < y_2$ è sempre $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$;

2^a) valgono sempre le disuguaglianze contrarie di quelle ora scritte;

3^a) per tutte le coppie di punti indicate, è sempre $f(x_1, y) \leq f(x_2, y)$, $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$;

4^a) valgono sempre le disuguaglianze contrarie di queste ultime.

Le funzioni della 1^a e 2^a classe le diremo *monotone concordi*; quelle della 3^a e 4^a classe, *monotone discordi* ([24]).

([24]) Avvertiamo che alcuni Autori (V. per es. HOBSON, loc. cit. ([15]), vol. I, p. 322) chiamano *monotone* soltanto quelle funzioni $f(x, y)$ che noi chiamiamo *monotone concordi*.

Intenderemo poi che le funzioni $f(x, y)$, che considereremo nel presente §, siano sempre definite in tutto il piano e sempre periodiche, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y.

18. *Se la $f(x, y)$ è limitata e monotona nel campo Q' e se nel punto (x, y) esistono i quattro limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge in (x, y), ed ha per somma*

$$(24)\qquad \frac{1}{4}\{f(x+0, y+0)+f(x-0, y+0)+f(x-0, y-0)+f(x+0, y-0)\}.$$

In particolare, dove la $f(x, y)$ è continua, questa somma è data dalla $f(x, y)$ stessa.

Ed infatti, la $f(x, y)$, per essere limitata e monotona in Q', è integrabile e a variazione limitata; inoltre, per la monotonia e per l'esistenza dei limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$, risultano verificate in (x, y) le uguaglianze (7). Le condizioni del teorema del n.° 6 sono pertanto tutte soddisfatte.

Una condizione sufficiente affinchè la $f(x, y)$, supposta limitata e monotona in Q', *ammetta sempre i quattro limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$, è che essa come funzione della sola x (opp. della sola y) sia in Q' uniformemente continua* o, più restrittivamente, *a rapporto incrementale limitato* [25].

19. *Se la $f(x, y)$ è limitata, continua e monotona nel campo $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$, la sua serie doppia di Fourier converge uniformemente in ogni campo chiuso interno al campo indicato.*

Ciò è una conseguenza immediata della seconda proposizione del n.° 16.

---

[25] È dunque un caso particolare del criterio qui dato quello dimostrato da HOBSON (loc. cit. [15]) e cioè che, se la $f(x, y)$ è in Q' limitata e monotona e a rapporto incrementale rispetto alla x limitato, la sua serie doppia di FOURIER converge verso il valore (24). Va tuttavia osservato che la dimostrazione dell'HOBSON, fondata sulla sostituzione dell'integrale $\iint f(xy)\frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}\,dxdy$ con $\iint f(xy)\frac{\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny}{xy}\,dxdy$, non è corretta. perchè, contrariamente a quanto l'HOBSON afferma (l. c., p. 700), la funzione $\frac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} - \frac{1}{xy}$ non è limitata e integrabile nell'intorno di $(0, 0)$. L'HOBSON enuncia anche la seguente proposizione: « se la $f(x, y)$, supposta integrabile, è a variazione limitata secondo la definizione di ARZELÀ, o più generalmente se è la differenza di due funzioni monotone concordi, e se di più è a rapporto incrementale, rispetto alla x, limitato, allora la sua serie doppia di FOURIER converge verso (24) ». Per altro le considerazioni svolte dall'HOBSON non sono sufficienti a dimostrare tale proposizione.

20. Il criterio del n.° 18 si estende senz'altro al caso della somma di un numero qualsiasi (finito) di funzioni soddisfacenti tutte alle condizioni ivi indicate per la $f(x, y)$. Altrettanto dicasi per la proposizione del n.° 19. Si ha inoltre:

Se la $f(x, y)$ è la somma di un numero qualsiasi (finito) di funzioni continue e monotone in tutto Q ([26]), *la sua serie doppia di Fourier converge verso di essa ovunque uniformemente.*

Ciò si deduce dalla prima delle due proposizioni del n.° 16, tenendo presente che, per l'ipotesi ora fatta, la $f(x, y)$ risulta a variazione limitata e le sue variazioni $V_{(x)}(x, y)$, $V_{(y)}(x, y)$ sono uniformemente continue, rispettivamente come funzioni della sola x e della sola y, per essere tali le variazioni corrispondenti dei termini della somma che costituisce la $f(x, y)$.

21. *Se la $f(x, y)$ è in Q' limitata ed ha ivi il rapporto incrementale relativo alla x limitato in un senso, ed ha pure limitato in un senso (non necessariamente lo stesso del precedente) il rapporto incrementale relativo alla y, la sua serie doppia di Fourier converge verso il valore* (24) *in ogni punto (x, y) in cui esistono tutti e quattro i limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$.*

Ed infatti, se per es. il rapporto incrementale relativo alla x è sempre minore di un numero positivo A e quello relativo alla y è sempre maggiore di un numero negativo $-B$, posto

$$f(x, y) = \{ f(x, y) - Ax + By \} + \{ Ax - By \}, \tag{25}$$

la funzione $f(x, y) - Ax + By$ risulta monotona in Q' (decrescente rispetto alla x e crescente rispetto alla y) e pure monotona risulta la $Ax - By$ (crescente rispetto alla x, decrescente rispetto alla y); e ciascuna di tali funzioni ammette i quattro limiti corrispondenti a $f(x \pm 0, y \pm 0)$, in ogni punto (x, y) in cui questi ultimi esistono. Non vi è dunque che sfruttare quanto si è detto nel n.° 20.

Nello stesso modo si ha che, *se la $f(x, y)$, oltre alle condizioni qui poste, è continua in ogni punto interno a Q, la convergenza della sua serie doppia di Fourier è uniforme in ogni campo chiuso interno al quadrato Q.*

22. Dalla (24) e sfruttando ancora quanto si è detto nel n.° 20, si ha pure:

Se la $f(x, y)$ è, in tutto il quadrato Q, continua, con rapporto incrementale relativo ad x limitato in un senso, e con rapporto incrementale

---

([26]) Non necessariamente periodiche; periodica invece deve essere la $f(x, y)$ (cfr. n.° 19).

relativo ad y pure limitato in un senso (non necessariamente lo stesso del precedente), la sua serie doppia di Fourier converge ovunque uniformemente.

Da questa proposizione e dall'ultima del n.° precedente si ha, come caso particolare, il criterio del CERNI [27]: *se la $f(x, y)$ ha nell'interno di Q (opp. in Q) i rapporti incrementali, rispetto a x e rispetto a y, limitati, la sua serie doppia di Fourier converge uniformemente in ogni campo chiuso interno a Q (opp. in tutto Q).*

23. *Se la $f(x, y)$ è limitata e integrabile in Q, e se esiste un numero N tale che per ciascun $\bar{y}$ interno a* $(0, 2\pi)$, *l'intervallo* $(0, 2\pi)$ *(considerato eventualmente aperto) può essere diviso in un numero non superiore ad N di intervalli parziali in ciascuno dei quali la $f(x, \bar{y})$ come funzione della sola x risulti monotona, e se altrettanto avviene per ogni $\bar{x}$ interno a* $(0, 2\pi)$, *relativamente alla funzione, della sola y, $f(\bar{x}, y)$, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso il valore* (24), *in ogni punto* (x, y) *in cui esistono i quattro limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$.*

La funzione qui considerata risulta immediatamente a variazione limitata; inoltre, osservando che la variazione totale della funzione della sola x, $f(x, \bar{y})$ in un intervallo (α, β) di $(0, 2\pi)$ è al più uguale alla oscillazione della $f(x, y)$ in tale intervallo, moltiplicata per N, ne viene, per la supposta esistenza dei limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$, che valgono anche le (7). È dunque applicabile il teorema del n.° 6.

Se, alle condizioni del criterio ora dimostrato, si aggiunge l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia continua in tutti i punti di Q (opp. in tutti i punti interni a Q), allora la convergenza della serie di Fourier della $f(x, y)$ è uniforme ovunque (opp. in ogni campo chiuso interno a Q).

Ciò segue immediatamente dal n.° 16.

24. *Se la $f(x, y)$, come funzione della sola x, è sempre assolutamente continua, e pure tale è come funzione della sola y, e se esistono due numeri N e σ maggiori di zero, tali che sia, per ogni y di* $(0, 2\pi)$,

$$\int_0^{2\pi} | f'_x |^{1+\sigma} dx < N,$$

(27) Loc. cit. (7).

e, per ogni x di $(0,\ 2\pi)$,

$$\int_0^{2\pi} |f_y'|^{1+\sigma} dy < N \quad [28],$$

la serie doppia di Fourier della $f(x,\ y)$ converge ovunque uniformemente verso $f(x,\ y)$.

Si osservi che, per ogni intervallo $(\alpha,\ \beta)$ interno a $(0,\ 2\pi)$, è

$$V_{(x)}(\beta,\ y) - V_{(x)}(\alpha,\ y) = \int_\alpha^\beta |f_x'|\, dx,$$

e, per la disuguaglianza di SCHWARZ generalizzata,

$$\int_\alpha^\beta |f_x'|\, dx \leq \left[\int_0^{2\pi} |f_x'|^{1+\sigma} dx\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} (\beta - \alpha)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}};$$

è dunque

$$V_{(x)}(\beta,\ y) - V_{(x)}(\alpha,\ y) \leq N^{\frac{1}{1+\sigma}} (\beta - \alpha)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}},$$

e la $V_{(x)}(x,\ y)$ risulta così uniformemente continua rispetto ad x, in Q. Analogamente, si ha l'uniforme continuità della $V_{(y)}(x,\ y)$ rispetto ad y. Da ciò segue anche che la $f(x,\ y)$ è funzione continua di $(x,\ y)$, in tutto Q. È quindi applicabile il primo teorema del n.° 16.

Se la $f(x,\ y)$ fosse priva della periodicità rispetto ad x e ad y, ma, considerata soltanto in Q, soddisfacesse alle condizioni del criterio qui dimostrato, la convergenza uniforme della sua serie doppia di FOURIER avverrebbe soltanto in ogni campo chiuso interno a Q. Nei punti del contorno di Q la serie sarebbe convergente verso il limite (24).

25. Diremo che la funzione $f(x,\ y)$ *è a variazione doppia finita* se, per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0,\ 2\pi)$ dell'asse delle x, in parti, me-

---

[28] Invece di questa e della disuguaglianza precedente, si possono porre le

$$\int_0^{2\pi} |f_x'| \log \{1 + |f_x'|\}\, dx < N, \quad \int_0^{2\pi} |f_y'| \log \{1 + |f_y'|\}\, dy < N.$$

diante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_m = 2\pi$, e per qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, 2\pi)$ dell'asse delle y mediante i punti $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < ...$ $... < y_n = 2\pi$, la somma

$$\Sigma \,| f(x_r, y_s) - f(x_{r-1}, y_s) - f(x_r, y_{s-1}) + f(x_{r-1}, y_{s-1}) |,$$

estesa a tutti i valori $r = 1, 2,..., m$, e $s = 1, 2,..., n$, resta sempre inferiore ad un numero fisso, indipendente dalla suddivisione considerata [29].

È facile mostrare [30] che, se la $f(x, y)$ è a variazione doppia finita in Q, si può scrivere, in tutto Q,

$$f(x, y) = -f(0, 0) + f(x, 0) + f(0, y) + P(x, y) - N(x, y), \tag{26}$$

con $P(x, y)$ e $N(x, y)$ non negative, non decrescenti, sia come funzioni della sola x, sia come funzioni della sola y, e tali, inoltre, che per $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, sia sempre

$$P(x_2, y_2) - P(x_1, y_2) - P(x_2, y_1) + P(x_1, y_1) \geq 0,$$
$$N(x_2, y_2) - N(x_1, y_2) - N(x_2, y_1) + N(x_1, y_1) \geq 0.$$

Per le funzioni $P(x, y)$ e $N(x, y)$ esistono sempre [31] tutti i limiti $P(x \pm 0, y \pm 0)$, $N(x \pm 0, y \pm 0)$. Se perciò supponiamo che $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ siano funzioni, rispettivamente della x e della y, a variazione limitata, per la funzione a variazione doppia finita $f(x, y)$ esistono sempre i limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$.

E siccome ogni funzione di una variabile a variazione limitata si può sempre scomporre nella differenza di due funzioni non decrescenti, dalla (26) si deduce, applicando quanto si è detto nel n.° 20, che:

Se la $f(x, y)$ è a variazione doppia finita in Q, e se $f(x, 0)$ e $f(0, y)$ sono funzioni, rispettivamente della x e della y, a variazione limitata, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge ovunque verso il limite (24) [32].

---

[29] Le funzioni *a variazione doppia finita* non sono altro che le funzioni *a variazione limitata del Vitali.*

[30] Vedi l. c. [9] od anche l. c. [15], vol. I, p. 325.

[31] R. C. YOUNG, *L' Enseignement Math.*, 1925, pp. 79-84.

[32] Questo teorema fu dato da HARDY in l. c. [9]. L'HARDY suppone che la $f(x, y)$ sia anche a variazione limitata su ogni parallela all'asse delle x e su ogni parallela all'asse delle y; ma, come ha osservato W. H. YOUNG, e come del resto risulta immediatamente dalla (26), ciò è una conseguenza delle ipotesi da noi fatte.

Se alle ipotesi ora ammesse aggiungiamo quella della continuità della $f(x, y)$, i cinque termini del secondo membro di (26) risultano tutti funzioni continue ([33]); perciò abbiamo, sempre per quanto dimostrammo nel n.° 20:

Se, oltre alle condizioni della proposizione precedente, supponiamo la $f(x, y)$ ovunque continua, la serie doppia di Fourier di tale funzione converge verso di essa ovunque uniformemente.

Nel caso in cui le condizioni poste nelle due proposizioni qui stabilite valgano per la $f(x, y)$ considerata soltanto in Q e senza la periodicità, la prima proposizione continua ancora a sussistere, purchè sul contorno di Q si dia ai limiti $f(x \pm 0,\ y \pm 0)$ lo stesso significato che essi hanno quando si ammette la periodicità, mentre la seconda si riduce ad affermare la convergenza uniforme in ogni campo chiuso interno a Q.

26. *Se esistono due numeri maggiori di zero, K e α, tali che, per ogni coppia di punti di Q, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), sia*

$$(27) \qquad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K \{ |x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha \},$$

la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ converge verso questa funzione in ogni punto (x_0, y_0) per il quale si possano determinare un intorno e due numeri positivi H e β, in modo da aversi, in tutto l'intorno,

$$(28) \quad |f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)| \leq H |x - x_0|^\beta |y - y_0|^\beta.$$

Ciò segue immediatamente, per cose note dalla teoria delle serie di FOURIER delle funzioni di una sola variabile, da quanto si è provato nei n.i 12 e 13.

Se poi la (28) è verificata per ogni coppia di punti di Q, (x_0, y_0) e (x, y) (H e β restando sempre gli stessi), e sempre supponendo verificata la (27), la convergenza della serie doppia di Fourier verso la $f(x, y)$ è ovunque uniforme.

Questo risulta facilmente dalle dimostrazioni dei n.i 12 e 13.

([33]) Ciò si dimostra facilmente utilizzando un lemma dato da W. H. YOUNG in l. c. ([12]), p. 143.

V. Sommabilità per linee e per colonne.

27. Posto

$$A_{m,n} = \lambda_{m,n}[a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \operatorname{sen} mx \cos ny + \\ + c_{m,n} \cos mx \operatorname{sen} ny + d_{m,n} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny],$$

la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ si scriverà nella forma

$$\sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} A_{m,n}, \tag{29}$$

ed anche

$$\begin{array}{l} A_{0,0} + A_{1,0} + A_{2,0} + \ldots + A_{m,0} + \ldots \\ + A_{0,1} + A_{1,1} + A_{2,1} + \ldots + A_{m,1} + \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_{0,n} + A_{1,n} + A_{2,n} + \ldots + A_{m,n} + \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Diremo che la serie doppia (29) *è sommabile per linee,* in un punto (x, y), se, in tale punto, tutte le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sono convergenti e se, inoltre, risulta convergente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$. Il valore di questa serie si dirà allora *somma per linee* della serie doppia (29).

Analogamente si definirà la *sommabilità per colonne.*

È noto che una serie doppia può essere convergente senza essere sommabile per linee o per colonne ([34]). È anche noto che una serie doppia può

([34]) Per es. la serie doppia

$$\begin{array}{r} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots. \\ -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots. \\ 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots. \\ -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ldots. \\ 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots. \\ -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

è convergente ed ha per somma 0, mentre nessuna delle sue linee e delle sue colonne è convergente.

essere sommabile tanto per linee quanto per colonne, ed avere le due somme uguali, senza essere convergente [35]. Si sa poi che, se la serie doppia (29) è convergente, e se la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$, è convergente per tutti i valori di n, allora la (29) è sommabile per linee, ed è

$$\sum_{\substack{m \\ n}\Big\}=0}^{\infty} A_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \ [36].$$

E analogamente, scambiando le linee con le colonne.

La (29) si dirà *uniformemente sommabile per linee* su un insieme E di punti (x, y), se, per ciascun valore di n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniformemente convergente su E, e se, inoltre, è uniformemente convergente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$.

Analoga definizione, per *l'uniforme sommabilità per colonne*.

---

[35] Per es. la serie doppia

$$\begin{array}{r}
1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots \\
-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots \\
-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ldots \\
\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 + \ldots \\
-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

è sommabile per linee, con somma 0, è sommabile per colonne, con somma 0, ma non è convergente.

[36] Ed infatti, se S è la somma della (29), preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, si possono determinare due numeri positivi μ_1 e ν_1 tali che, per $\mu > \mu_1$ e $\nu > \nu_1$, sia sempre

$$\left| S - \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n} \right| < \varepsilon.$$

Passando al limite, per $\mu \to \infty$, si ha

$$\left| S - \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right| < \varepsilon,$$

per ogni $\nu > \nu_1$. Di qui segue, per essere ε arbitrario, che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è convergente e che la sua somma è S.

28. Vogliamo dimostrare che:

Se la $f(x, y)$, data in tutto il piano (x, y), è periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili x e y, è integrabile e a variazione limitata, indicata con $\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}$ la sua serie doppia di Fourier, tutte le serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

sono convergenti in ogni punto (x, y) (le prime convergendo, in ciascun punto (x, y), uniformemente rispetto ad n, e le seconde rispetto ad m), ed è

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\ \beta) + f(x-0,\ \beta)}{2} \cos n(\beta - y) d\beta, \tag{30}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} = \frac{2\lambda_{m,0}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha,\ y+0) + f(\alpha,\ y-0)}{2} \cos m(\alpha - x) d\alpha. \tag{31}$$

Consideriamo, infatti, la funzione di x

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x,\ \beta) \cos n\beta d\beta, \tag{32}$$

e mostriamo che essa è a variazione limitata in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$. Diviso tale intervallo in parti, mediante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_R = 2\pi$, abbiamo

$$\sum_{r=0}^{R} |\psi_n(x_{r+1}) - \psi_n(x_r)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{R} |f(x_{r+1},\ \beta) - f(x_r,\ \beta)\ d\beta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi,\ \beta) d\beta.$$

Dunque la variazione totale di $\psi_n(x)$ in $(0, 2\pi)$ è inferiore ad un numero fisso (indipendente da n), vale a dire $\psi_n(x)$ è a variazione limitata in $(0, 2\pi)$. Ne segue che la serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ è convergente in ogni punto, ed ha sempre per somma

$$\frac{\psi_n(x+0) + \psi_n(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{u \to +0} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+u,\ \beta) + f(x-u,\ \beta)}{2} \cos n\beta d\beta.$$

Ma è, per quasi tutti i valori di β, di $(0, 2\pi)$,

$$\lim_{u \to +0} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} = \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2},$$

e siccome, per un'osservazione già fatta ([37]), le funzioni di β, $f(x+u, \beta)$ e $f(x-u, \beta)$ restano, in modulo, inferiori ad una funzione integrabile, indipendente da u, si ha, secondo un noto teorema di integrazione per serie,

$$\lim_{u \to +0} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+u, \beta) + f(x-u, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta = \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta.$$

Ora la serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ è

$$\frac{1}{2\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \cos n\beta d\alpha d\beta + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos mx}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \cos m\alpha \cos n\beta d\alpha d\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} mx}{\pi^2} \iint_Q f(\alpha, \beta) \operatorname{sen} m\alpha \cos n\beta d\alpha d\beta \right\},$$

vale a dire

$$\frac{1}{2\lambda_{0,n}} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx).$$

Dunque questa serie è sempre convergente, ed è

$$(33) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \cos n\beta d\beta.$$

Analogamente, ragionando sulla funzione

$$(34) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x, \beta) \operatorname{sen} n\beta d\beta,$$

si ha

$$(35) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{m,n}(c_{m,n} \cos mx + d_{m,n} \operatorname{sen} mx) = \frac{2\lambda_{0,n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+0, \beta) + f(x-0, \beta)}{2} \operatorname{sen} n\beta d\beta.$$

([37]) Cfr. n.° 7.

Da (33) e (35) si deduce che è sempre convergente la serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$, e che vale la (30).

Proviamo che la convergenza della serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è uniforme rispetto ad n. A tale scopo riprendiamo a considerare la serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ e indichiamo con $\sigma_{\mu,n}$ la sua somma parziale, cioè poniamo

$$\sigma_{\mu,n} = \sum_{m=0}^{\mu} \lambda_{m,n}(a_{m,n} \cos mx + b_{m,n} \operatorname{sen} mx).$$

Abbiamo, come è noto,

$$\sigma_{\mu,n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{ \psi_n(x+2z) + \psi_n(x-2z) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz$$

e perciò

$$\sigma_{\mu,n} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+0,\beta)+f(x-0,\beta)}{2} \cos n\beta d\beta = \sigma_{\mu,n} - \frac{\psi_n(x+0)+\psi_n(x-0)}{2} =$$

$$(36) \qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{ \psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{ \psi_n(x-2z) - \psi_n(x-0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz.$$

Indicando con $W_n(x)$ la variazione totale di $\psi_n(x)$, nell'intervallo $(0, x)$, e con δ un numero positivo $< \pi/2$, abbiamo, per le disuguaglianze (5) e (6),

$$\left| \int_0^{\pi/2} \{ \psi_n(x+2z) - \psi_n(x+0) \} \frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z} dz \right| \leq \left| \int_0^{\delta} \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi/2} \right| <$$

$$< \frac{\pi^2}{2} \{ W_n(x+2\delta) - W_n(x+0) \} + \frac{C_\delta}{2(\mu+1)} \{ W_n(x+\pi) - W_n(x+0) \}.$$

Ma ripetendo per l'intervallo $(x+\delta_1, x+2\delta)$, con $0 < \delta_1 < \delta$, il ragionamento fatto in principio di questo n.° per l'intervallo $(0, 2\pi)$, abbiamo

$$W_n(x+2\delta) - W_n(x+\delta_1) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x+2\delta, \beta) - V_{(x)}(x+\delta_1, \beta) \} d\beta$$

e quindi

$$W_n(x+2\delta)-W_n(x+0)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+2\delta,\beta)-V_{(x)}(x+0,\beta)\}\,d\beta.$$

E, analogamente,

$$W_n(x+\pi)-W_n(x+0)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+\pi,\beta)-V_{(x)}(x+0,\beta)\}\,d\beta.$$

Se ne deduce

$$\left|\int_0^{\pi/2}\{\psi_n(x+2z)-\psi_n(x+0)\}\frac{\operatorname{sen}(2\mu+1)z}{\operatorname{sen} z}\,dz\right|\leq$$

$$\begin{aligned}(37)\qquad &\leq\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+2\delta,\beta)-V_{(x)}(x+0,\beta)\}\,d\beta+\\ &+\frac{C_\delta}{2(\mu+1)\pi}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+\pi,\beta)-V_{(x)}(x+0,\beta)\}\,d\beta\leq\end{aligned}$$

$$\leq\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\{V_{(x)}(x+2\delta,\beta)-V_{(x)}(x+0,\beta)\}\,d\beta+\frac{C_\delta}{2(\mu+1)\pi}\int_0^{2\pi}V_{(x)}(2\pi,\beta)d\beta.$$

Ma per $\delta\to+0$, $V_{(x)}(x+2\delta,\beta)$ converge, per quasi tutti i β di $(0, 2\pi)$, verso $V_{(x)}(x+0,\beta)$, sempre non crescendo, e pertanto, in virtù di un teorema di integrazione per serie di B. LEVI, è, per $\delta\to+0$,

$$\int_0^{2\pi}V_{(x)}(x+2\delta,\beta)d\beta\to\int_0^{2\pi}V_{(x)}(x+0,\beta)d\beta.$$

Se dunque scegliamo δ convenientemente piccolo e poi $\bar{\mu}$ sufficientemente grande, la (37) mostra che l'integrale del suo primo membro resta, per ogni $\mu>\bar{\mu}$ e per tutti gli n, minore, in modulo, di un numero positivo ε, prefissato ad arbitrio. E siccome altrettanto può dirsi dell'ultimo integrale della (36), se ne conclude, per la (36) stessa, che $\sigma_{\mu,n}$ tende al suo limite uniformemente rispetto a n.

È così provato che la serie (33) converge uniformemente rispetto ad n; e poichè lo stesso avviene per la (35), resta provata anche la convergenza uniforme di $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_{m,n}$.

In modo analogo si dimostra la convergenza uniforme, rispetto ad m, di $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$.

Osservazione. Per la dimostrazione della convergenza della serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ non si è fatto uso, in quanto precede, dell'intera ipotesi che la $f(x, y)$ sia a variazione limitata; si è soltanto utilizzato il fatto che l'integrale $\int_0^{2\pi} V_{(x)}(2\pi, y)dy$ è finito.

29. Dalla proposizione dimostrata nel n.° precedente e da quanto si è rammentato nel n.° 27, risulta che:

Se la funzione $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è integrabile e a variazione limitata, la sua serie doppia di Fourier, in ogni punto in cui è convergente, è anche sommabile per linee e per colonne, e le somme così ottenute coincidono con la somma della serie stessa.

Come corollario si ha:

Nelle condizioni del teorema del n.° 6, la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$ è, nel punto (x, y), sommabile tanto per linee quanto per colonne, con somme entrambe uguali alla somma della serie stessa.

30. Le uguaglianze (30) e (31) valgono anche se la $f(x, y)$, invece di essere a variazione limitata, soddisfa alla condizione espressa dalla (27). Ed infatti, in tale ipotesi, la funzione $\psi_n(x)$ definita dalla (32) verifica, per ogni coppia x_1, x_2 di punti di $(0, 2\pi)$, la disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
|\psi_n(x_1) - \psi_n(x_2)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x_1, \beta) - f(x_2, \beta)|\, d\beta, \\
&\leq 2K|x_1 - x_2|^{\alpha},
\end{aligned}
\tag{38}
$$

vale a dire soddisfa alla condizione di LIPSCHITZ di ordine α, ed è perciò sviluppabile in serie di FOURIER ovunque convergente. Ripetendo allora le considerazioni svolte nel n.° 28, si ha, anche qui, la validità delle (30) e (31).

Possiamo, dopo di ciò, affermare che, *nelle condizioni di uno qualunque dei criteri di convergenza dati nel* § IV, *la serie doppia di Fourier della*

$f(x, y)$ è, nel punto (x, y), sommabile tanto per linee quanto per colonne, fornendo sempre somme uguali alla somma della serie stessa.

31. *Se alle ipotesi del teorema del n.° 28 si aggiunge la continuità della $f(x, y)$ rispetto ad x ed anche rispetto ad y, la convergenza delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ risulta uniforme rispetto a tutti i punti del piano (x, y) (e ciò indipendentemente da n, per la prima, da m, per la seconda).*

Nel caso attuale, $V_{(x)}(x, y)$, come funzione della sola x, è sempre continua e l'integrale $\int_0^{2\pi} V_{(x)}(x, y)dy$ è pure funzione continua della x, in virtù del teorema d'integrazione per serie del LEVI. Pertanto l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x + 2\delta, \beta) - V_{(x)}(x + 0, \beta) \} d\beta,$$

che figura nella (37) e che ora può scriversi

$$\int_0^{2\pi} \{ V_{(x)}(x + 2\delta, \beta) - V_{(x)}(x, \beta) \} d\beta,$$

può rendersi minore di un ε prefissato, per tutti i δ sufficientemente piccoli, e ciò indipendentemente da x. Il ragionamento fatto alla fine del n.° 28 mostra perciò che, preso ad arbitrio un ε positivo, si può determinare un $\bar{\mu}$ tale che, per ogni $\mu > \bar{\mu}$, sia

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} - \sum_{m=0}^{\mu} A_{m,n} \right| < \varepsilon,$$

per tutti i punti (x, y) e per tutti gli n.

Analogamente per $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$.

32. *Se la $f(x, y)$ — sempre supposta periodica — invece di essere a variazione limitata, soddisfa alla condizione* (27), *la convergenza delle serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}$ è ancora uniforme rispetto a tutti i punti del* *piano* (x, y). Ciò risulta dal fatto che, in forza della (38), la convergenza della serie di FOURIER della $\psi_n(x)$ è uniforme ovunque.

33. Alle condizioni di sommabilità per linee e per colonne già date nei n.[i] 29 e 30, possiamo aggiungerne qualche altra.

Osserviamo, in primo luogo, che, se alle ipotesi del teorema del n.° 28 aggiungiamo l'altra che per un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ esista un $\delta > 0$ tale che, in quasi tutto l'intervallo $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, la $\dfrac{f(\bar{x} + 0, y) + f(\bar{x} - 0, y)}{2}$ coincida con una funzione $\varphi(y)$ a variazione limitata, allora la serie doppia $\sum\limits_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n}$ è sommabile per linee nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$, e la sua somma per linee è data da $\dfrac{\varphi(\bar{y} + 0) + \varphi(\bar{y} - 0)}{2}$. Ed infatti la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, per la (30), la serie di FOURIER della funzione, di y, $\dfrac{f(\bar{x} + 0, y) + f(\bar{x} - 0, y)}{2}$, e tale serie converge, nel punto $y = \bar{y}$, in virtù della condizione ora aggiunta, verso la somma della serie di FOURIER della $\varphi(y)$.

La condizione ora aggiunta è verificata se, per ogni y di $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, la $f(x, y)$ è funzione continua di x nel punto $x = \bar{x}$, e se, in $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, la $f(\bar{x}, y)$ è a variazione limitata. La somma per linee della serie doppia $\sum\limits_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, in questo caso, $\dfrac{f(\bar{x}, \bar{y} + 0) + f(\bar{x}, y - 0)}{2}$.

La stessa condizione è anche verificata se, per ogni x di $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, la funzione, della sola y, $f(x, y)$ ha, nell'intervallo $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$, una variazione totale inferiore ad un numero fisso indipendente da x, e se i limiti $f(\bar{x} + 0, y)$ e $f(\bar{x} - 0, y)$ esistono per ogni y di $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$. La somma per linee della serie doppia $\sum\limits_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n}$ è, in questo caso,

$$\frac{1}{4} \lim_{\delta \to +0} \{ f(\bar{x} + 0, \bar{y} + \delta) + f(\bar{x} - 0, \bar{y} + \delta) + f(\bar{x} + 0, \bar{y} - \delta) + f(\bar{x} - 0, \bar{y} - \delta) \}.$$

Da quanto precede deduciamo la seguente proposizione:

Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad x e ad y, è integrabile; se le variazioni totali $V_{(x)}(2\pi, y)$ e $V_{(y)}(x, 2\pi)$ sono limitate in Q; la serie doppia di Fourier della $f(x, y)$, $\sum\limits_{\substack{m \\ n}\}=0}^{\infty} A_{m,n}$, è ovunque sommabile per *linee ed anche per colonne; la somma per linee è*

$$(39)\quad \frac{1}{4}\lim_{\delta\to+0}\{f(x+0,\,y+\delta)+f(x-0,\,y+\delta)+f(x+0,\,y-\delta)+f(x-0,\,y-\delta)\},$$

e la somma per colonne

$$(40)\quad \frac{1}{4}\lim_{\to+0}\{f(x+\delta,\,y+0)+f(x+\delta,\,y-0)+f(x-\delta,\,y+0)+f(x-\delta,\,y-0)\},$$

Se, di più, le $V_{(x)}(x,\,y)$ e $V_{(y)}(x,\,y)$ sono ovunque uniformemente continue, come funzioni rispettivamente della sola x e della sola y ([38]), la serie doppia è ovunque uniformemente sommabile per linee e per colonne, e le due somme (39) e (40) sono entrambe uguali a $f(x,\,y)$,

La prima parte di questo enunciato è conseguenza immediata di quanto si è detto più sopra e del teorema del n.° 28. Per dimostrare la seconda parte, osserviamo, in primo luogo, che dalla ammessa continuità di $V_{(x)}(x,\,y)$ rispetto ad x, segue che la $f(x,\,y)$ è anch'essa continua rispetto ad x; e per ragione analoga tale funzione è continua anche rispetto ad y. Il teorema del n.° 31 assicura allora che le serie $\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\,n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,\,n}$ convergono uniformemente, ovunque. Osserviamo poi che, per la (30), la $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\,n}$ è la serie di FOURIER della funzione, della sola y, $f(x,\,y)$. Occorre provare che questa serie è ovunque uniformemente convergente. Posto

$$\sigma_\nu = \sum_{n=0}^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\,n} = \sum_{n=0}^{\nu}\frac{2\lambda_{0,\,n}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x,\,\beta)\cos n(\beta-y)d\beta,$$

basta ragionare su σ_ν come abbiamo fatto sulla $\sigma_{\mu,\,n}$ nel n.° 28.

Un corollario della proposizione ora dimostrata è il seguente risultato, dovuto a G. ASCOLI ([39]):

Se la $f(x,\,y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto ad ambedue le variabili, ovunque continua e tale che il numero delle oscillazioni da essa compiute nel quadrato Q su ciascuna parallela all'asse delle x e su ciascuna parallela all'asse delle y, resti sempre inferiore ad uno stesso numero N, la sua serie doppia di Fourier è ovunque uniformemente sommabile per linee e per colonne, con somme sempre uguali a $f(x,\,y)$.

([38]) Si tenga presente quanto si è detto in ([22]).

([39]) L. c. ([3]).

34. Abbiamo anche facilmente, dopo quanto è già stato detto:
Se la $f(x, y)$, periodica, di periodo 2π, rispetto alla x ed alla y, soddisfa per qualsiasi coppia (x_1, y_1), (x_2, y_2) di punti di Q, alla

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha\},$$

con K e α numeri positivi fissi, la sua serie doppia di Fourier è ovunque uniformemente sommabile per linee e per colonne, con somme sempre uguali a $f(x, y)$.

35. Si possono dare facilmente esempi di funzioni $f(x, y)$ con serie doppia di FOURIER sommabile per linee e per colonne, in un punto, ma non convergente.

a) Sia $f(x, y) = 0$ nel campo $[-\pi \leq x \leq \pi,\ y^2 \leq x^2]$ e $f(x, y) = 1$ in $[-\pi \leq x \leq \pi,\ x^2 < y^2 \leq \pi^2]$. Si definisca poi altrove la $f(x, y)$ mediante la periodicità rispetto ad x e ad y, di periodo 2π. Per questa funzione, sono verificate le condizioni della prima parte del teorema del n.° 33, e perciò la sua serie doppia di FOURIER è sempre sommabile tanto per linee quanto per colonne. Nel punto (0, 0) la somma per linee è 1 e quella per colonne è 0. Ciò basta ([40]) per poter asserire che la serie doppia di FOURIER della $f(x, y)$ non converge nel punto (0, 0).

Nei vertici del quadrato $\Omega \equiv [-\pi \leq x \leq \pi,\ -\pi \leq y \leq \pi]$, la serie considerata ha come somma per linee 0 e come somma per colonne 1. Quindi anche in tali punti la serie non converge.

In tutti gli altri punti di Ω, soddisfacenti alla $y^2 < x^2$, la serie doppia è convergente (per il teorema del n.° 23) ed ha per somma 0; in quelli soddisfacenti alla $y^2 > x^2$ la serie doppia converge verso 1; nei punti delle due diagonali di Ω, distinti dal centro e dai vertici, la serie è convergente per l'osservazione del n.° 9, ed ha per somma 1:2.

b) Sia $f(x, y) = 0$ in tutti i punti di Ω eccettuati quelli soddisfacenti alle disuguaglianze $\mathrm{tg}\, 30' < \left|\frac{y}{x}\right| < \mathrm{tg}\, 60^\circ$, ove sia invece $f(x, y) = 1$. La serie doppia di FOURIER di questa funzione è ovunque sommabile per linee e per colonne (n.° 33). Nel punto (0, 0), le somme per linee e per colonne sono ambedue uguali a 0; ma la serie doppia non è convergente.

([40]) Cfr. n.° 27.

Ed infatti, se essa fosse convergente, dovrebbe avere per somma 0, mentre la sua somma parziale $s_{\mu,\nu}(0, 0)$, quando si facciano tendere μ e ν all'∞ in modo che $\frac{\mu}{\nu} \to \sqrt{3}$, tende a ([41])

$$\frac{2}{\pi^2}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{t},$$

che è $\neq 0$. Nei punti $x = \pm\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, la serie doppia di FOURIER ha, come somma per linee, $1:2$, e come somma per colonne, 1; la serie non è perciò convergente. Analogamente, nei punti $y = \pm\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, la somma per linee è 1, e quella per colonne $1:2$, e la serie non converge. In tutti gli altri punti di Ω la somma per linee è sempre uguale a quella per colonne, e la serie è convergente con somma 0, se è $\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $\left|\frac{y}{x}\right| > \sqrt{3}$ (n.° 23); è convergente con somma 1, se è $\frac{1}{\sqrt{3}} < \left|\frac{y}{x}\right| < \sqrt{3}$ (n.° 23); è convergente con somma $\frac{1}{2}$, se è $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure $\left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{3}$ (n.° 9).

([41]) Ciò si vede subito applicando una formula stabilita da E. C. TITCHMARSH (*The Double Fourier Series of a Discontinuous Function*, Proc. Royal Society, Series A, vol. 106 (1924), (pp. 299-314), p. 302).

Teoria delle sostituzioni che operano su una infinità numerabile di elementi.

Memoria di Luigi Onofri (a Bologna).

La teoria delle sostituzioni su infiniti elementi è stata trattata una prima volta, dieci anni or sono, dal prof. Giulio Andreoli [1] che, tracciandone uno schema generale, ne fece conoscere molti risultati interessanti.

L'opera così felicemente iniziata non ha trovato però, a quanto a me consta, alcun continuatore: ciò forse per la impostazione troppo generale ed estensiva data alla teoria dall'Andreoli, per la novità dei vocaboli, e per il rapido trapasso a conclusioni inaspettate che avrebbero richiesto un più vasto svolgimento.

Tale svolgimento forma appunto oggetto della presente Memoria. Anzitutto debbo avvertire che ho modificato opportunamente le ipotesi dell'Andreoli supponendo che gli insiemi I di elementi su cui operano le sostituzioni da me studiate siano numerabili ed assumendo una definizione di sostituzione che permetta di affermare in ogni caso l'esistenza della inversa s^{-1} di una qualsiasi operazione s.

Queste modificazioni, atte a rendere più stretto il legame di questa teoria con quella dei gruppi finiti, mi hanno dimostrato più tardi, nel corso dello studio, tutta la loro efficacia ed utilità permettendomi di affermare ed estendere le proposizioni esposte dall'Andreoli, di portare a fondo lo studio di certe questioni che nel caso generale avrebbero potuto appena essere sfiorate, ed infine di stabilire risultati nuovi che ora riassumerò brevemente.

L'insieme delle sostituzioni che operano sugli elementi di un aggregato numerabile ha *la potenza del continuo.*

Data una infinità numerabile di tali sostituzioni:

$$(a) \qquad s_1, \quad s_2, \ldots, \quad s_r, \ldots,$$

---

[1] G. Andreoli: *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XL, anno 1915).

si dice *prodotto infinito* di esse il procedimento mediante il quale dalla (*a*) si passa alla successione:

$$(b) \qquad s_1, \quad s_1 \cdot s_2, \dots, \quad s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_r, \dots .$$

Affinchè questo procedimento conduca ad un risultato concreto (cioè affinchè il prodotto infinito sia *convergente*) occorre che la (*b*) *tenda* verso una sostituzione limite ben determinata. Si presenta dunque sin da principio la necessità di introdurre il concetto di *limite di una successione di sostituzioni*, di cercarne le condizioni per l'esistenza e di dedurre quelle proposizioni necessarie per ogni ulteriore svolgimento.

Ho potuto così facilmente estendere vari teoremi sui gruppi finiti e precisare il concetto di *periodo* di una sostituzione. È noto che una operazione θ dicesi a *periodo finito* quando esiste una sua potenza θ^m eguale alla unità.

Fra le sostituzioni su infiniti elementi ve ne sono alcune aventi periodo finito, ed altre invece per le quali non esiste alcuna potenza θ^m eguale alla unità.

Volendo dare una definizione di periodo per le sostituzioni di questa seconda categoria si è condotti a studiare il comportamento dei prodotti infiniti formati con le potenze di θ: $\theta^{r_1} \cdot \theta^{r_2} \cdot \dots \cdot \theta^{r_n} \cdot \dots$. Se esiste almeno uno di questi prodotti infiniti avente per valore 1, l'operazione θ vien detta a *periodo infinito*, ed in virtù della equazione $\theta^{r_1} \cdot \theta^{r_2} \cdot \dots \cdot \theta^{r_n} \cdot \dots = 1$ si può esprimere qualsiasi potenza positiva o negativa di θ mediante un prodotto infinito di potenze positive. Nel caso contrario è facile dimostrare che le operazioni θ, θ^{-1} vanno considerate come tra loro indipendenti. Una tale operazione θ si dirà *senza periodo*.

I complessi di sostituzioni da me considerati soddisfano alla condizione posta a definizione dei gruppi finiti, cioè contengono il prodotto di due loro operazioni qualsiasi, e si distinguono in *gruppi* e *pseudogruppi*. I primi contengono l'inversa di ogni loro operazione, i secondi invece non contengono le inverse di alcune o di tutte le loro operazioni.

Ai gruppi e pseudogruppi si può, in alcuni casi, estendere anche il concetto di *indice* di un complesso $\mathfrak{C}$ in un complesso $\mathfrak{G}$ che lo contiene. Tale estensione è subordinata alla possibilità di decomporre $\mathfrak{G}$ in un insieme K (o K') di complessi del tipo $g \cdot \mathfrak{C}$ (o $\mathfrak{C} \cdot g$) senza operazioni comuni; inoltre poichè, a differenza di quanto avviene per i gruppi finiti, gli insiemi K, K' non avendo generalmente egual potenza si rende necessaria la distinzione fra *l'indice a destra* e *l'indice a sinistra*.

Nello studio della *trasformazione dei complessi* ho introdotto, insieme al noto concetto di *invarianza*, quelli nuovi di *riducibilità* e di *ampliabilità*, intendendo per *riducibile* (*ampliabile*) un complesso $\mathfrak{C}$ che può essere trasformato da una operazione t in una sua parte propria $\mathfrak{C}'$ (in un complesso $\mathfrak{C}''$ che lo contiene).

A questo studio si collega la determinazione delle *serie di composizione.* Per esse ho assunto definizione analoga a quella che si dà per i gruppi finiti non sembrandomi nè necessario nè opportuno l'adottare quella proposta dall'ANDREOLI. È da osservare peraltro che non è sempre possibile, nè con l'ordinaria definizione, nè con quella proposta dall'ANDREOLI, costruire una serie di composizione per un complesso di infinite sostituzioni.

Parecchi teoremi relativi alle serie di composizione dei gruppi finiti si possono facilmente estendere ai complessi infiniti; fra essi voglio ricordare quello di JORDAN-HÖLDER *che assicura l'invarianza dei fattori di composizione e l'isomorfismo dei gruppi fattoriali in due diverse serie di composizione.*

Questo teorema vero, anche nel caso da me studiato, per quei complessi che hanno serie formate da un numero finito di termini, può cadere in difetto per i complessi che possiedono serie infinite.

Il concetto di *isomorfismo* si può estendere alle operazioni da me considerate senza bisogno di introdurre restrizioni essenziali; però la teoria che ne deriva è più ampia e complicata, e specie nell'isomorfismo meriedrico presenta casi particolari assai interessanti. Esistono, ad esempio, degli isomorfismi fra due pseudogruppi $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{C}$ tali che il numero delle operazioni di $\mathfrak{C}$ che corrispondono ad ogni operazione g di $\mathfrak{G}$ varia al variare di g in $\mathfrak{G}$.

Nell'ultima parte di questo studio sono trattate la *transitività* e *l'intransitività* dei gruppi e degli pseudogruppi.

Per gli pseudogruppi possono aver anche luogo delle intransitività del tutto diverse da quella ordinariamente conosciuta.

Queste speciali intransitività, che ho particolarmente studiate, dipendono dall'assenza, in detti complessi, delle inverse delle loro operazioni.

I teoremi noti in proposito per i gruppi finiti conservano nel caso attuale, opportunamente modificati, la loro piena validità; ad esempio il teorema: *un gruppo di sostituzioni su* n *elementi che non coincide con l'alterno o col totale non può avere transitività di grado maggiore del massimo intero contenuto in* $\frac{n}{2}$, si modifica nel seguente modo:

Il gruppo totale è l'unico gruppo avente transitività di grado infinito.

La presente Memoria contiene quella parte della teoria che si riferisce alle proprietà generali delle sostituzioni e dei gruppi e pseudogruppi, riservandomi di trattare, in un successivo lavoro, l'isomorfismo, le serie di composizione e la transitività.

CAPITOLO I.

GENERALITÀ SULLE SOSTITUZIONI

A) Definizioni.

1. Sia I un dato insieme numerabile di elementi che, per semplicità, rappresenteremo con la serie dei numeri naturali:

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad n, \ldots.$$

Chiameremo *sostituzione sull'insieme* I qualunque operazione s che sostituisce ad ogni elemento di I un elemento di I stesso e che soddisfa alle seguenti condizioni:

a) se m, n sono due elementi distinti di I siano pure distinti gli elementi $s(m)$, $s(n)$ che la s ad essi sostituisce, se m, n coincidono anche $s(m)$, $s(n)$ coincidano;

b) se n è un elemento qualunque di I, esista un altro elemento m di I al posto del quale la s porti n.

L'operazione s così definita verrà rappresentata col simbolo:

$$s = \binom{n}{s(n)},$$

dove $s(n)$ è l'elemento che la s sostituisce al generico elemento n.

2. Alle sostituzioni che si sono così definite si possono estendere, senza alcuna variante, i concetti di sostituzione identica, sostituzione inversa, prodotto, potenza ed anche le relative proprietà note per le ordinarie sostituzioni. Si può così affermare che il prodotto di più sostituzioni gode della *proprietà associativa* ma non sempre di quella *commutativa*, che le potenze di una stessa operazione sono tra loro commutabili e che per esse valgono le formole:

$$s^m \cdot s^\mu = s^{m+\mu}, \quad (s^m)^\mu = s^{m\mu}$$

per m, μ interi positivi e negativi.

È infine da osservare che per il prodotto u di due sostituzioni s, t si deve avere (in base alle notazioni introdotte al n.° 1):

$$u(n) = s \cdot t(n) = t[s(n)]$$

qualunque sia l'elemento n di I.

3. Fra le operazioni su I hanno una particolare importanza le sostituzioni cicliche che si distinguono in *cicli aperti* e *cicli chiusi.*

Il ciclo aperto opera su infiniti elementi che si possono ordinare in una successione infinita nei due sensi:

$$\ldots.,\quad -n,\quad -n+1,\ldots.,\quad -2,\quad -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots.,\quad n-1,\quad n,\ldots.$$

in modo che ciascun elemento sia sostituito dal seguente.

Il ciclo aperto k si indica così:

$$k = (\ldots.,\ -n,\ -n+1,\ldots.,\ -1,\ 0,\ 1,\ldots.,\ n-1,\ n,\ldots.);$$

esso si presenta come la naturale estensione del ciclo ordinario (*ciclo chiuso*) quando si passa da un numero finito ad una infinità numerabile di elementi.

B) Limite di una successione di sostituzioni.

4. Sia:

(α) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ldots.,\ s_r,\ldots.$$

una successione di sostituzioni su I e sia:

$$s_r = \begin{pmatrix} n \\ s_r(n) \end{pmatrix}.$$

Diremo che la successione (α) *ha per limite una sostituzione* s *quando:*

a) *La* s *opera sui soli elementi di* I*;*

b) *in corrispondenza di un elemento qualunque* n *di* I *si può determinare un numero* R_n *tale che per* $r > R_n$ *sia* $s(n) = s_r(n)$, *od in altri termini, tutte le* s_r *sostituiscano ad* n *l'elemento* s(n).

Per indicare che s è il limite di (α) scriveremo: $s = \lim\limits_{r \to \infty} s_r$.

Una successione (α) non può tendere a due limiti diversi s ed s': ciò discende dalla suddetta definizione.

5. *Affinchè una successione* (α) *abbia limite occorre e basta che, in corrispondenza di un elemento* n *arbitrario, esista un numero* R_n *tale che per:*

$$r_1 > R_n, \quad r_2 > R_n \quad \textit{sia} \quad s_{r_1} \cdot s_{r_2}^{-1}(n) = n, \quad s_{r_1}^{-1} \cdot s_{r_2}(n) = n.$$

La condizione è necessaria.

Sia $s = \lim\limits_{r \to \infty} s_r$; in corrispondenza di un elemento n qualunque esistono due elementi m e ν per i quali si ha: $s(n) = m$, $s(\nu) = n$, ed in corrispondenza di n e ν si possono determinare due numeri R_n' e R_ν' tali che:

$$\text{per } r > R_n' \quad \text{sia} \quad s_r(n) = s(n) = m,$$
$$\text{per } r > R_\nu' \quad \text{sia} \quad s_r(\nu) = s(\nu) = n.$$

Detto R_n il maggiore dei due numeri R_n' e R_ν', si ha per $r_1 > R_n$ e $r_2 > R_n$:

$$s_{r_1} \cdot s_{r_2}^{-1}(n) = s_{r_2}^{-1}[s_{r_1}(n)] = s_{r_2}^{-1}(m) = n$$
$$s_{r_1}^{-1} \cdot s_{r_2}(n) = s_{r_2}[s_{r_1}^{-1}(n)] = s_{r_2}(\nu) \quad = n.$$

La condizione è sufficiente.

Dalle due eguaglianze:

$$s_{r_1} \cdot s_{r_2}^{-1}(n) = n, \quad s_{r_1}^{-1} \cdot s_{r_2}(n) = n, \quad r_1 \text{ e } r_2 > R_n,$$

si ricavano rispettivamente le altre:

$$(o) \qquad s_{r_1}(n) = s_{r_2}(n) = \mu_n,$$
$$s_{r_1}^{-1}(n) = s_{r_2}^{-1}(n) = m_n$$

ossia:

$$(\omega) \qquad s_{r_1}(m_n) = s_{r_2}(m_n) = n.$$

Ciò premesso, facciamo corrispondere all'elemento generico n di I quell'elemento μ_n che le s_r, per $r > R_n$, portano al posto di n; otteniano in tal guisa una successione:

$$\mu_1, \quad \mu_2, \ldots, \quad \mu_n, \ldots$$

in cui figurano, in virtù delle (o) e (ω), tutti e soli gli elementi di I e ciascuno una sol volta.

Consideriamo ora quell'operazione s che a 1 sostituisce μ_1, a 2 sostituisce μ_2, a n, μ_n ecc....; essa soddisfa alle condizioni *a)* e *b)* del n.° 1, ed è pertanto una sostituzione sull'insieme I.

La s risulta poi, per il modo stesso con cui è stata costruita, il limite di (α).

6. La successione:

$$(1,\ 2),\quad (2,\ 3),\quad (3,\ 4),\ldots,\quad (n,\ n+1),\quad (n+1,\ n+2),\ldots$$

ha per limite l'identità perchè per $r > n$ si ha:

$$s_r(n) = n.$$

La successione:

$$(1,\ 2),\quad (1,\ 2,\ 3),\ldots,\quad (1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n),\ldots$$

non ha limite perchè $s_{r_1}^{-1} \cdot s_{r_2}(1) = r_1 + 2$ per $r_2 > r_1$.

7. TEOREMA I. *Se*

$$\lim_{r \to \infty} s_r = s, \quad \lim_{r \to \infty} t_r = t$$

si ha:

$$\lim_{r \to \infty} s_r \cdot t_r = s \cdot t.$$

Posto $s(n) = m$ si ha per $r > R_n$:

$$s_r(n) = s(n) = m,$$

e per $r > R_m$:

$$t_r(m) = t(m).$$

Dunque per r maggiore di entrambi i numeri R_n, R_m si avrà:

$$t_r[s_r(n)] = t[s(n)] \quad \text{cioè} \quad s_r \cdot t_r(n) = s \cdot t(n).$$

COROLLARIO. Se

$$\lim_{r \to \infty} s_r = s \quad \text{sarà} \quad \lim_{r \to \infty} s_r^{-1} = s^{-1}.$$

TEOREMA II. *Se*

$$(K) \qquad \begin{cases} s_{11}, & s_{12},\ldots, & s_{1r},\ldots \\ s_{21}, & s_{22},\ldots, & s_{2r},\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{q1}, & s_{q2},\ldots, & s_{qr},\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

è una infinità numerabile di successioni di sostituzioni, e se la successione dei rispettivi limiti:

$$s_1,\quad s_2,\quad s_3,\ldots,\quad s_q,\ldots,$$

tende ad una sostituzione s, *è possibile estrarre dal quadro* (K) *una successione:*

$$s_{q_0 r_0},\quad s_{q_1 r_1},\ldots,\quad s_{q_m r_m},\ldots,$$

che ha per limite s.

In corrispondenza dei primi n elementi di I: 1, 2, 3,.... n, possiamo determinare, per essere $s = \lim\limits_{q \to \infty} s_q$, un numero q_0 per cui si abbia ad un tempo:

$$s(1) = s_{q_0}(1),\quad s(2) = s_{q_0}(2),\ldots,\quad s(n) = s_{q_0}(n).$$

Inoltre, poichè è $\lim\limits_{r \to \infty} s_{q_0 r} = s_{q_0}$, si può trovare un altro numero r_0 tale che:

$$s(1) = s_{q_0 r_0}(1),\quad s(2) = s_{q_0 r_0}(2),\ldots,\quad s(n) = s_{q_0 r_0}(n).$$

Ripetendo questo procedimento per gli insiemi:

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n+1;\quad 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n+2;\ldots;\quad 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n+m;\ldots$$

otteniamo una successione di sostituzioni appartenenti a (K):

$$s_{q_0 r_0},\quad s_{q_1 r_1},\quad s_{q_2 r_2},\ldots,\quad s_{q_m r_m},\ldots$$

il cui limite è s.

C) I prodotti infiniti di sostituzioni.

8. Sia data la successione di sostituzioni:

$$(\alpha)\qquad s_1,\quad s_2,\quad s_3,\ldots,\quad s_r,\ldots,$$

e con questa si formi la nuova successione:

$$(\beta)\qquad s_1 = \sigma_1,\quad s_1 \cdot s_2 = \sigma_2,\ldots,\quad s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_r = \sigma_r,\ldots.$$

Il procedimento mediante il quale dalla successione (α) si passa alla (β) si chiamerà *prodotto infinito di sostituzioni* e verrà indicato con $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots \cdot s_r \cdot \ldots$ o più semplicemente con $\prod\limits_{r=1}^{\infty} s_r$.

Si dirà poi che il prodotto infinito è *convergente* quando la (β) ha un limite σ, e tale limite sarà detto *valore* del prodotto infinito. In questo caso il simbolo $\prod\limits_{r=1}^{\infty} s_r$ servirà anche a rappresentare il valore del prodotto stesso.

9. Le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di un prodotto infinito discendono da quelle date al n.° 5, per l'esistenza del limite di una successione.

Ammettiamo dapprima che il prodotto $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ sia convergente; la successione:

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots, \quad \sigma_r, \ldots,$$

ha perciò limite e quindi preso l'elemento n si ha per $r_1 \geq R_n$, $r_2 \geq R_n$:

$$\sigma_{r_1}^{-1} \cdot \sigma_{r_2}(n) = n, \quad \sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2}^{-1}(n) = n.$$

Facendo $r_1 = R_n$ otteniamo le eguaglianze:

$$(o) \qquad \sigma_{R_n}^{-1} \cdot \sigma_{r_2} = s_{R_n+1} \cdot \ldots \cdot s_{r_2}$$

$$(\omega) \qquad \sigma_{R_n} \cdot \sigma_{r_2}^{-1} = \sigma_{R_n} \cdot \left(s_{r_2}^{-1} \cdot \ldots \cdot s_{R_n+1}^{-1}\right) \cdot \sigma_{R_n}^{-1},$$

dalle quali, dando alla r_2 i successivi valori $R_n + 1$, $R_n + 2, \ldots$, deduciamo che:

a) *le sostituzioni:*

$$s_r, \quad u_r = \sigma_{R_n} \cdot s_r \cdot \sigma_{R_n}^{-1}$$

per $r > R_n$ *lasciano fermo l'elemento* n.

Vediamo ora se queste condizioni sono sufficienti per la convergenza di $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$. Considerata la successione dei prodotti parziali:

$$(\beta) \qquad \sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots, \quad \sigma_r, \ldots,$$

si formino le due sostituzioni:

$$\sigma_{r_1}^{-1} \cdot \sigma_{r_2} = \left(s_{r_1}^{-1} \cdot \ldots \cdot s_{R_n+1}^{-1}\right) \cdot \left(s_{R_n+1} \cdot \ldots \cdot s_{r_2}\right)$$

$$\sigma_{r_1} \cdot \sigma_{r_2}^{-1} = u_{R_n+1} \cdot u_{R_n+2} \cdot \ldots \cdot u_{r_1} \cdot u_{r_2}^{-1} \cdot \ldots \cdot u_{R_n+1}^{-1},$$

che, in virtù della *a)*, per $r_1 > R_n$, $r_2 > R_n$ lasciano fermo l'elemento n. La successione (β) ha perciò limite e quindi $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ è convergente.

OSSERVAZIONE I. Se, in particolare, tutte le s_r sono commutabili, si ha $u_r = s_r$, e quindi per la convergenza di $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ occorre e basta che la successione (α) tenda a 1.

OSSERVAZIONE II. Se ciascuna s_r opera su elementi diversi da quelli su cui operano le altre s, è $\lim_{r\to\infty} s_r = 1$ onde $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ è convergente.

OSSERVAZIONE III. La ricerca del limite di una successione: $s_1, s_2, \ldots, s_r, \ldots$, si riconduce alla ricerca del valore del prodotto infinito: $s_1 \cdot \prod_{r=1}^{\infty}(s_r^{-1} \cdot s_{r+1})$ e viceversa.

10. Il prodotto:

$$(1,\ 2)\cdot(3,\ 4)\cdot(5,\ 6)\cdot\ldots\cdot(2n-1,\ 2n)\cdot\ldots$$

è convergente per l'Osservazione II, ed il suo valore è la sostituzione:

$$s = \begin{pmatrix} 2n, & 2n-1 \\ 2n-1, & 2n \end{pmatrix}.$$

Invece il prodotto:

$$(1,\ 2)\cdot(2,\ 3)\cdot(3,\ 4)\cdot\ldots\cdot(n,\ n+1)\cdot(n+1,\ n+2)\cdot\ldots$$

non converge perchè considerato il prodotto parziale n^{simo} σ_n ed il ciclo $c = (n+1,\ n+2)$, si ha $\sigma_n \cdot c \cdot \sigma_n^{-1}(1) = n+2$, cioè la condizione *a)* non è soddisfatta.

11. Se $s = \prod_{r=1}^{\infty} s_r$, $\sigma = \prod_{r=1}^{\infty} \sigma_r$ sono due prodotti convergenti si può costruire con essi un prodotto infinito di valore $s \cdot \sigma$.

Infatti da $s = \lim_{r\to\infty}(s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_r)$, $\sigma = \lim_{r\to\infty}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_r)$, si deduce:

$$\lim_{r\to\infty}(s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_r \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_r) = s \cdot \sigma$$

e quindi il prodotto infinito:

$$(s_1 \cdot \sigma_1)\cdot(\sigma_1^{-1} \cdot s_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)\cdot(\sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1^{-1} \cdot s_3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3)\cdot\ldots$$

ha per valore $s \cdot \sigma$.

Se in questo prodotto si scambia s_r con σ_r si ottiene un prodotto di valore $\sigma \cdot s$, e se le s_r sono commutabili con tutte le σ_r si ha: $s \cdot \sigma = \prod_{r=1}^{\infty}(s_r \cdot \sigma_r) = \prod_{r=1}^{\infty}(\sigma_r \cdot s_r) = \sigma \cdot s$, onde anche s e σ sono commutabili.

In modo analogo, dati m prodotti convergenti i cui valori siano $s, \sigma, \ldots, t$, si può costruire un prodotto infinito di valore $s \cdot \sigma \cdot \ldots \cdot t$.

Si abbia infine una successione di prodotti infiniti convergenti:

$$s_1 = \prod_{r=1}^{\infty} s_{1r}, \quad s_2 = \prod_{r=1}^{\infty} s_{2r}, \ldots, \quad s_q = \prod_{r=1}^{\infty} s_{qr}, \ldots,$$

tali che il prodotto $\prod_{q=1}^{\infty} s_q$ sia convergente e di valore s.

Allora è possibile costruire un prodotto infinito convergente di valore s, $s = \prod_{\rho=1}^{\infty} p_\rho$, in cui ciascun p_ρ sia della forma:

$$(\tau) \qquad p_\rho = s_{q_1 r_1}^{\varepsilon_1} \cdot s_{q_2 r_2}^{\varepsilon_2} \cdot \ldots \cdot s_{q_m r_m}^{\varepsilon_m} \quad \text{con} \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \quad \varepsilon_m = \pm 1.$$

Invero è possibile costruire una infinità numerabile di successioni i cui limiti siano s_1, $s_1 \cdot s_2, \ldots$, $s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_q, \ldots$, e da esse, per il Teorema II del n.° 7, si può estrarre una successione tendente ad s: σ_1, $\sigma_2, \ldots$, $\sigma_n, \ldots$, in cui σ_n sia del tipo: $\sigma_n = s_{q_1 r_1} \cdot s_{q_2 r_2} \cdot \ldots \cdot s_{q_\nu r_\nu}$.

Da ciò consegue che il prodotto $\prod_{\rho=1}^{\infty} p_\rho$, con $p_\rho = \sigma_{\rho-1}^{-1} \cdot \sigma_\rho$, ha per valore s e che ciascun p_ρ è della forma (τ).

12. Assieme al prodotto infinito $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ si possono considerare i prodotti: $\prod_{r=2}^{\infty} s_r$, $\prod_{r=3}^{\infty} s_r, \ldots$, $\prod_{r=\rho}^{\infty} s_r, \ldots$, che chiameremo *resti* del prodotto iniziale $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$. Mediante facilissime considerazioni si dimostrano le proposizioni seguenti;

a) *Se* $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ *converge, anche* $\prod_{r=\rho}^{\infty} s_r$ *converge e viceversa.*

b) *Fra i prodotti* $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ *e* $\prod_{r=\rho}^{\infty} s_r$ *intercede la relazione:*

$$\prod_{r=1}^{\infty} s_r = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{\rho-1} \cdot \prod_{r=\rho}^{\infty} s_r.$$

c) *La successione dei resti tende alla identità.*

13. Consideriamo i due prodotti infiniti:

$$(0, 1) \cdot (0, -1) \cdot (-1, 2) \cdot (-1, \quad 2) \cdot (-2, 3) \cdot (-2, -3) \cdot \ldots \cdot (-n, n+1) \cdot (-n, -n-1) \cdot \ldots,$$

$$(0, -1) \cdot (0, 1) \cdot (-1, -2) \cdot (-1, 2) \cdot (-2, -3) \cdot (-2, 3) \cdot \ldots \cdot (-n, -n-1) \cdot (-n, n+1) \cdot \ldots,$$

nei quali figurano le medesime sostituzioni prese però in ordine diverso.

Il primo prodotto ha evidentemente per valore il ciclo aperto

$$c = (\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots),$$

mentre il secondo non è convergente perchè i successivi prodotti parziali portano al posto di 0 gli elementi: $-1, -2, -3, \ldots$.

Questo semplice esempio mostra come la convergenza di un prodotto sia generalmente condizionata all'ordine in cui si prendono i fattori; quando però accade che un prodotto resta convergente pur mutando a piacimento l'ordine dei fattori, e per di più conserva lo stesso valore, si dirà che è *incondizionatamente convergente.*

Cerchiamo le condizioni per la convergenza incondizionata.

Sia $s = \prod_{r=1}^{\infty} s_r$ un prodotto incondizionatamente convergente, e siano s_r e s_ρ due suoi fattori qualsiasi. Per ipotesi deve essere:

$$s = s_r \cdot s_\rho \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{r-1} \cdot s_{r+1} \cdot \ldots \cdot s_{\rho-1} \cdot s_{\rho+1} \cdot \ldots$$

$$s = s_\rho \cdot s_r \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{r-1} \cdot s_{r+1} \cdot \ldots \cdot s_{\rho-1} \cdot s_{\rho+1} \cdot \ldots,$$

e quindi $s_r \cdot s_\rho = s_\rho \cdot s_r$ cioè: *i fattori di* $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ *debbono essere fra loro commutabili.*

Vediamo ora se questa condizione, insieme all'essere:

$$(o) \qquad \lim_{r \to \infty} s_r = 1,$$

è sufficiente per la convergenza incondizionata di $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$.

Per l'*Oss. I.* del n.° 9, il prodotto $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ è convergente; posto $s = \prod_{r=1}^{\infty} s_r$ prendiamo un elemento n ad arbitrio e consideriamo l'elemento $s(n)$ che la s sostituisce ad n.

In corrispondenza di $s(n)$, per la (o), possiamo determinare un numero R_n tale che, per $r > R_n$, sia:

$$(\omega) \qquad s_r[s(n)] = s(n),$$

e quindi:

$$s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_r(n) = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{R_n}(n) = s(n).$$

Sia poi $\prod_{r=1}^{\infty} s_{t(r)}$ un prodotto infinito ottenuto da $\prod_{r=1}^{\infty} s_r$ mediante la sostituzione sulle s_r:

$$t = \begin{pmatrix} s_r \\ s_{t(r)} \end{pmatrix}$$

e sia p un qualsiasi prodotto parziale di $\prod\limits_{r=1}^{\infty} s_{t(r)}$ che contenga fra i suoi fattori le sostituzioni $s_1, s_2, \ldots, s_{R_n}$.

Per la supposta commutabilità delle s_r il prodotto p si può scrivere nella forma seguente:

$$p = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{R_n} \cdot s_{t(r_1)} \cdot s_{t(r_2)} \cdot \ldots \cdot s_{t(r_m)},$$

e poichè gli indici $t(r_1)$, $t(r_2), \ldots, t(r_m)$ sono $> R_n$ si avrà, per la (ω), l'eguaglianza:

$$p(n) = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_{R_n}(n) = s(n).$$

Il prodotto $\prod\limits_{r=1}^{\infty} s_{t(r)}$ è dunque convergente ed ha per valore s.

14. Una importante applicazione dei precedenti risultati ci è data dal seguente teorema:

Qualunque sostituzione si può rappresentare mediante un prodotto finito od infinito di sostituzioni cicliche su elementi diversi.

Data la sostituzione s su I prendiamo un elemento n a piacere e formiamo la successione:

$$(\alpha) \qquad \ldots, \; s^{-r}(n), \ldots, \; s^{-2}(n), \; s^{-1}(n), \; s^0(n) = n, \; s^1(n), \; s^2(n), \ldots, \; s^r(n), \ldots$$

Il termine generico $s^r(n)$ di (α) si può scrivere: $s^r(n) = s[s^{r-1}(n)]$, e quindi esso rappresenta l'elemento che la s porta al posto del precedente $s^{r-1}(n)$.

Se gli elementi di (α) sono tutti distinti la s produce su di essi il medesimo effetto del ciclo aperto:

$$c_n = [\ldots, \; s^{-r}(n), \ldots, \; s^{-1}(n), \; n, \; s^1(n), \ldots, \; s^r(n), \ldots].$$

Se invece in (α) vi sono degli elementi eguali, ad esempio: $s^r(n) = s^\rho(n)$ ($r > \rho$), è anche $s^{r-\rho}(n) = n$, e per conseguenza in (α) figurano i soli elementi distinti:

$$s^0(n) = n, \quad s^1(n), \quad s^2(n), \ldots, \quad s^{p-1}(n),$$

dove p è il più piccolo numero positivo per il quale $s^p(n) = n$.

La s ha pertanto su questi elementi il medesimo effetto del ciclo chiuso:

$$c_n' = [s^0(n), \; s^1(n), \ldots, \; s^{p-1}(n)].$$

Ripetendo per tutti gli elementi di I quel che si è fatto per n si viene ad ottenere una successione di cicli:

$$(\delta) \qquad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \ldots, \quad k_n, \ldots,$$

nella quale vi sono (tolto il caso di $s = 1$) dei cicli fra loro eguali, perchè se due cicli k_ν, k_n hanno un elemento in comune debbono averli tutti e per conseguenza sono eguali fra loro.

Dalla (δ) si estragga poi la successione:

$$(\delta') \qquad k_{\nu_1}, \quad k_{\nu_2}, \ldots, \quad k_{\nu_\mu}, \ldots,$$

formata con tutti e soli i cicli fra loro diversi che figurano in (δ); se in (δ') vi è un numero finito μ di cicli, il prodotto $k_{\nu_1} \cdot k_{\nu_2} \cdot \ldots \cdot k_{\nu_\mu}$ è eguale a s, se invece i cicli di (δ') sono in numero infinito, il prodotto $\prod_{\mu=1}^{\infty} k_{\nu_\mu}$ è convergente (Oss. II, n.° 9) ed ha evidentemente per valore s.

Il prodotto finito od infinito che si è così determinato si dirà che *rappresenta la* s *decomposta nei suoi cicli*; tale rappresentazione è unica, salvo l'ordine dei cicli componenti che, in virtù della convergenza incondizionata del prodotto stesso, può essere scelto a piacere.

D) Periodo di una sostituzione.

15. Consideriamo una sostituzione s su I e formiamo la successione delle sue potenze positive:

$$(\alpha) \qquad s, \quad s^2, \quad s^3, \ldots, \quad s^r, \ldots.$$

Se in questa successione esistono due potenze s^r, s^ρ ($r > \rho$) tra loro uguali esiste anche una potenza positiva $s^{r-\rho} = 1$, la s possiede pertanto *periodo finito*, intendendo per *periodo* il più piccolo numero positivo μ per il quale è $s^\mu = 1$.

Se invece le sostituzioni di (α) sono tutte diverse, non esiste alcuna potenza positiva o negativa di s eguale a 1; può esistere però un prodotto infinito i cui fattori appartengano ad (α) ed il cui valore sia 1: se ciò avviene, si dirà che la s ha *periodo infinito*, altrimenti si dirà che è *senza periodo*.

16. Se s ha periodo infinito, esiste, per la sua stessa definizione, una successione di potenze positive e crescenti di s:

$$s^{\mu_1}, \quad s^{\mu_1+\mu_2}, \ldots, \quad s^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_r}, \ldots,$$

tendente a 1 e viceversa.

17. *Una potenza* s^n *qualunque di una operazione* s *a periodo infinito si può sempre rappresentare mediante un prodotto infinito di potenze positive.*

Infatti da $\prod_{r=1}^{\infty} s^{\mu_r} = 1$ si deduce $\prod_{r=1}^{\infty} s^{k\mu_r} = 1$, essendo k un numero intero positivo qualsiasi, e quindi, scelto k in modo che $|n| < k\mu_1$, si ha:

$$s^{k\mu_1+n} \cdot s^{k\mu_2} \cdot \ldots \cdot s^{k\mu_r} \cdot \ldots = s^n \cdot \prod_{r=1}^{\infty} s^{k\mu_r} = s^n.$$

18. Il prodotto:

$$s \cdot s \cdot s \cdot \ldots \cdot s \cdot \ldots$$

non può mai essere convergente, salvo il caso di $s = 1$, perchè se esso avesse un valore t, il nuovo prodotto:

$$s^2 \cdot s \cdot s \cdot \ldots \cdot s \cdot \ldots$$

avrebbe simultaneamente i due valori $s \cdot t$ e t, onde:

$$s \cdot t = t, \quad s = 1.$$

19. *Se l'operazione* s *è senza periodo, non può esistere alcun prodotto infinito convergente i cui fattori siano potenze positive o negative di* s.

Supponiamo che il prodotto $\prod_{r=1}^{\infty} s^{\rho_r}$ sia convergente; per la condizione del n.° 9, deve essere: $\lim s^{\rho_r} = 1$ e quindi anche $\lim s^{|\rho_r|} = 1$, $\lim s^{|\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_r|} = 1$.

Da questa eguaglianza si deduce che il prodotto infinito:

$$s^{|\rho_1|} \cdot s^{|\rho_1\rho_2| - |\rho_1|} \cdot \ldots \cdot s^{|\rho_1\rho_2\ldots\rho_r| - |\rho_1\rho_2\ldots\rho_{r-1}|} \cdot \ldots,$$

i cui fattori appartengono ad (α), ha per valore 1, la qualcosa è impossibile essendo s senza periodo.

20. La sostituzione:

$$s_1 = (1,\ 2) \cdot (3,\ 4) \cdot \ldots \cdot (2n-1,\ 2n) \cdot \ldots$$

ha periodo 2.

La sostituzione:

$$s_2 = (1,\ 2) \cdot (3,\ 4,\ 5) \cdot (6,\ 7,\ 8,\ 9) \cdot \ldots$$

ha periodo infinito perchè $\lim_{r \to \infty} s_2^{r!} = 1$.

Infine il ciclo aperto:

$$s_3 = (\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots)$$

è senza periodo perchè i termini di una qualunque successione di potenze positive e crescenti di s_3:

$$s_3^{\rho_1}, \quad s_3^{\rho_2}, \ldots, \quad s_3^{\rho_r}, \ldots,$$

portano al posto dell'elemento n gli elementi tutti diversi:

$$n + \rho_1, \quad n + \rho_2, \ldots, \quad n + \rho_r, \ldots$$

21. Per determinare il periodo di una sostituzione, torna molto utile la decomposizione in cicli fatta al n.° 14.

Sia s una sostituzione già decomposta nei suoi cicli:

$$s = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r \cdot \ldots;$$

se i cicli k_r sono tutti chiusi e se detta:

$$(\tau) \qquad \nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \quad \nu_r, \ldots$$

la successione dei loro periodi esiste un numero $\mu \geq$ di ciascun ν_r, la sostituzione s ha, evidentemente, per periodo il m. c. m. ν di tutti i numeri fra loro diversi che appartengono a (τ).

Se invece in (τ) esiste, in corrispondenza di un numero arbitrario m, qualche $\nu_r > m$, la s non ha periodo finito, però la successione s^{ν_1}, $s^{\nu_1 \nu_2}, \ldots$, $s^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r}, \ldots$, tende a 1 e quindi s ha periodo infinito.

Se infine qualche ciclo k_r è aperto, non esiste (n.° 20) alcuna successione $s^{\rho_1}, \ldots$, $s^{\rho_r}, \ldots$, tendente a 1 e quindi s è senza periodo.

E) Trasformazione delle sostituzioni.

22. Date due sostituzioni s, t si dice, com'è noto, *trasformata di s mediante t* l'operazione $s_1 = t^{-1} \cdot s \cdot t$.

Le sostituzioni *simili* od *affini* s, s_1 sono eguali nel solo caso che s e t siano commutabili.

23. *La trasformata di un prodotto infinito è data dal prodotto infinito delle trasformate dei fattori.*

La proposizione è nota per i prodotti finiti.

Se $\sigma = \prod_{r=1}^{\infty} s_r$. si ha $\sigma = \lim_{r \to \infty} s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_r$, $t^{-1} \cdot \sigma \cdot t = \lim_{r \to \infty} t^{-1} \cdot (s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_r) \cdot t$, onde $t^{-1} \cdot \sigma \cdot t = \prod_{r=1}^{\infty} t^{-1} \cdot s_r \cdot t$.

24. Se s è il ciclo aperto $(\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ e t una sostituzione qualunque:

$$t = \begin{pmatrix} \ldots, & -n, \ldots, & -1, & 0, & 1, \ldots, & n, \ldots; & a_1, & a_2, \ldots, & a_r, \ldots \\ \ldots, & t(-n), \ldots, & t(-1), & t(0), & t(1), \ldots, & t(n), \ldots; & t(a_1), & t(a_2), \ldots, & t(a_r), \ldots \end{pmatrix}$$

si ha:

$$t^{-1} \cdot s \cdot t[t(n)] = s \cdot t(n) = t(n+1), \quad t^{-1} \cdot s \cdot t[t(a_r)] = s \cdot t(a_r) = t(a_r),$$

e quindi:

$$t^{-1} \cdot s \cdot t = [\ldots, t(-n), \ldots, t(-1), t(0), t(1), \ldots, t(n), \ldots].$$

Analogamente si ha per un ciclo chiuso, cosicchè valendoci di questo risultato e della proposizione precedente possiamo affermare che:

Per ottenere la trasformata di una sostituzione s *mediante* t *si può decomporre la* s *nei suoi cicli ed eseguire su gli elementi di ciascuno di essi la sostituzione* t.

Da ciò risulta che:

Due sostituzioni simili sono, rispetto al periodo, della medesima specie, e cioè: o hanno egual periodo finito, o sono entrambe senza periodo, oppure hanno periodo infinito.

CAPITOLO II.

I GRUPPI E GLI PSEUDOGRUPPI

A) **Definizioni e proprietà generali.**

25. Una classe $\mathcal{C}$ di sostituzioni su un insieme I numerabile di elementi costituisce un *gruppo* quando:

a) *Il prodotto di due qualsiasi operazioni di $\mathcal{C}$ è una operazione di $\mathcal{C}$.*

b) *L'inversa* s^{-1} *di una qualunque operazione* s *di $\mathcal{C}$ appartiene a $\mathcal{C}$.*

La seconda condizione è superflua se le operazioni di $\mathcal{C}$ sono in numero finito perchè, in tal caso, esse hanno periodo finito e quindi le loro inverse sono esprimibili mediante potenze positive. Per un insieme $\mathcal{C}$ formato di infinite operazioni può invece essere soddisfatta la prima condizione e non la seconda, ciò accade, ad esempio, per le classi:

$$\mathcal{C}' = [g, g^2, g^3, \ldots, g^r, \ldots], \quad \mathcal{C}'' = [1, g, g^2, g^3, \ldots, g^r, \ldots]$$

essendo g una sostituzione che non ha periodo finito.

Noi ci occuperemo, oltre che dei gruppi, anche di quelle classi, del tipo di $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$, che soddisfano alla sola condizione a) e che chiameremo *pseudogruppi.*

Gli pseudogruppi si distinguono in *semplici* e *composti*: i primi non contengono l'inversa di nessuna loro operazione (ad es. $\mathcal{C}'$), i secondi invece contengono l'inversa di qualche loro operazione ma non di tutte e perciò contengono l'identità (ad es. $\mathcal{C}''$).

26. NOTA. Per rappresentare un gruppo useremo le lettere maiuscole A, $B, \ldots, G, \Gamma, \ldots$; per rappresentare uno pseudogruppo aggiungeremo a queste lettere un apice o due secondo che esso è semplice o composto; infine per indicare un complesso qualunque, del quale non è specificata la natura, useremo le lettere maiuscole rotonde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}, \ldots$.

27. Per *ordine* di un complesso $\mathcal{C}$ intenderemo la potenza dell'insieme formato da tutte le sostituzioni di $\mathcal{C}$.

L'ordine di un gruppo può essere finito o no, mentre l'ordine di uno pseudogruppo $\mathcal{G}$ non è mai finito, perchè esso contiene le sostituzioni $g, g^2, g^3, \ldots, g^r, \ldots$, essendo g una di quelle operazioni di $\mathcal{G}$ che non hanno l'inversa in $\mathcal{G}$.

L'ordine di un complesso è in generale diverso dalla potenza dell'insieme degli elementi su cui operano le sue sostituzioni; ad esempio: *l'ordine del gruppo* G *formato con tutte le sostituzioni su* I *(gruppo totale) è la potenza del continuo.*

Sia infatti:

$$\eta = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \ldots$$

un numero positivo qualunque < 1, ad esso si faccia corrispondere la sostituzione su I:

$$s_\eta = (1, 2, \ldots, \alpha_1) \cdot (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot \ldots,$$

con l'avvertenza che se $\alpha_r = 0$ il ciclo corrispondente sia formato di dieci elementi. A due numeri diversi η, ζ corrispondono in tal guisa due sostituzioni diverse s_η, s_ζ, e quindi una parte di G ha la potenza del continuo.

Poi, presa una sostituzione qualunque s di G e scritti i numeri $s(n)$ in forma decimale: $s(n) = \alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{nr_n}$, si faccia corrispondere ad s il numero:

$$\eta_s = 0,\ \alpha_{11} \dots \alpha_{1r_1};\ \alpha_{21} \dots \alpha_{2r_2};\ \alpha_{31} \dots \alpha_{3r_3}; \dots .$$

Con ciò a due sostituzioni diverse s, t di G corrispondono due numeri diversi η_s, η_t, e quindi la potenza di G è quella di una parte del continuo.

Riunendo questi due risultati si conclude che G ha la potenza del continuo.

28. Due complessi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ si dicono *eguali* quando ogni operazione di $\mathfrak{A}$ appartiene a $\mathfrak{B}$ e ogni operazione di $\mathfrak{B}$ appartiene ad $\mathfrak{A}$. Scriveremo $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

29. Per *somma* di un insieme finito od infinito (E) di complessi $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \dots$, s'intende il complesso $\mathfrak{C}$ di tutte le sostituzioni che appartengono ad almeno uno dei complessi di (E). Scriveremo $\mathfrak{C} = \Sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots$.

30. *Uno pseudogruppo composto* G″ *è la somma di un gruppo* G *e di uno pseudogruppo semplice* G′.

Dalla identità: $(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$ si deduce che l'operazione $(g_1 \cdot g_2)^{-1}$ appartiene a G'' se e solo se g_1^{-1}, g_2^{-1} appartengono a G''; onde il complesso di tutte le operazioni di G'' che hanno l'inversa in G'' è un gruppo G, ed il complesso delle operazioni di G'' che non hanno l'inversa in G'' è uno pseudogruppo semplice G'. Segue da ciò: $G'' = G + G'$.

31. Diremo *prodotto* dei complessi $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_r$, il complesso $\mathfrak{C}$ di tutte le sostituzioni del tipo $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$, dove a_1, $a_2, \dots, a_r$ appartengono rispettivamente ad $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_r$. Segneremo $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{A}_r$.

Due complessi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ si diranno *commutabili* quando $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$.

La definizione di prodotto si può estendere al caso di una infinità numerabile $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_r, \dots$, di complessi, intendendo per *prodotto infinito* di essi l'insieme $\mathfrak{S}$ dei prodotti infiniti convergenti del tipo $\prod_{r=1}^{\infty} a_r$.

L'insieme $\mathfrak{S}$ non esiste quando tutti i prodotti Πa_r sono non convergenti.

32. Dalle precedenti definizioni seguono le eguaglianze:

$$\mathfrak{C} \cdot \Sigma(\mathfrak{A}) = \Sigma(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}).$$

La proprietà associativa non è generalmente vera per i prodotti d'infiniti complessi perchè se il prodotto $\prod_{r=1}^{\infty} a_r$ ha per valore p, anche il prodotto: $(a_1 \cdot .... \cdot a_r) \cdot (a_{r+1} \cdot .... a_s) \cdot (....) \cdot ....$ ha per valore p, ma non viceversa.

33. Sia $\mathfrak{K}$ un gruppo od uno pseudogruppo e sia $\mathfrak{C}$ un complesso contenuto in $\mathfrak{K}$, se in $\mathfrak{C}$ figura una operazione c che ha l'inversa in $\mathfrak{K}$ si ha: $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{K} = \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{K}$.

Invero una operazione qualunque k di $\mathfrak{K}$ può scriversi nella forma: $k = c \cdot (c^{-1} \cdot k) = (k \cdot c^{-1}) \cdot c$.

L'ipotesi fatta si verifica quando $\mathfrak{K}$ è un gruppo od uno pseudogruppo composto $G + G'$ purchè, in questo secondo caso, nel complesso $\mathfrak{C}$ vi sia qualche operazione di G.

Se invece $\mathfrak{C}$ è formato con tutte operazioni di G', oppure se $\mathfrak{K}$ è uno pseudogruppo semplice, i prodotti $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{K}$ e $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{C}$ riproducono $\mathfrak{K}$ od una sua parte propria.

Ad esempio posto $\mathfrak{K} = [1, g, g^2, ..., g^r, ...]$ e $\mathfrak{C} = g$ si ha:

$$\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{K} = [g, g^2, ..., g^r, ...].$$

34. Il complesso $\mathfrak{C}$ formato con le operazioni comuni ad un insieme *(E)* di complessi $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_r, ...$, verrà indicato con: $|\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_r, ...|$, o più semplicemente con $|\mathfrak{A}|$.

Specificando la natura dei complessi $\mathfrak{A}$ si possono enunciare le proposizioni seguenti d'immediata dimostrazione:

a) *Se tutti i complessi $\mathfrak{A}$ sono gruppi anche $|\mathfrak{A}|$ è un gruppo.*

b) *Se uno almeno dei complessi $\mathfrak{A}$ è uno pseudogruppo semplice anche $|\mathfrak{A}|$ è uno pseudogruppo semplice.*

c) *Se i complessi $\mathfrak{A}$ sono in parte gruppi ed in parte pseudogruppi composti:* $G + G'$, *e se ciascun* G' *non ha operazioni comuni con tutti gli altri $\mathfrak{A}$, il complesso $|\mathfrak{A}|$ è un gruppo altrimenti è uno pseudogruppo composto.*

Notiamo che nei casi *a*) e *c*) l'esistenza di $|\mathfrak{A}|$ ci è assicurata dalla presenza della identità in tutti i complessi $\mathfrak{A}$, mentre nel caso *b*) il complesso $|\mathfrak{A}|$ può mancare.

35. Un complesso $\mathfrak{C}$ contenuto in un complesso $\mathfrak{K}$ si dirà, secondo la sua specie, *sottogruppo* o *sottopseudogruppo* di $\mathfrak{K}$.

Un gruppo G di ordine infinito contiene infiniti sottogruppi, ad esempio contiene i gruppi ciclici generati dalle sue singole operazioni, e se esso possiede qualche operazione g non avente periodo finito contiene anche infiniti sottopseudogruppi del tipo:

$$G' = [g,\ g^2, \ldots, g^r, \ldots], \quad G'' = [1,\ g,\ g^2, \ldots, g^r, \ldots].$$

Uno pseudogruppo semplice G' non può contenere sottogruppi nè sottopseudogruppi composti perchè le sue operazioni sono senza inversa in G', contiene invece infiniti sottopseudogruppi semplici del tipo:

$$H_r' = [g^r,\ g^{2r}, \ldots, g^{nr}, \ldots] \qquad r > 1.$$

Uno pseudogruppo composto G'', potendosi porre sotto la forma $G'' = G + G'$, contiene sottogruppi e sottopseudogruppi semplici e composti.

36. Dato un complesso $\mathcal{K}$ di sostituzioni consideriamo l'insieme $\mathcal{C}$ delle sostituzioni di $\mathcal{K}$ e di tutti i loro possibili prodotti finiti. Tale insieme $\mathcal{C}$ verrà rappresentato con $(\mathcal{K})$.

Consideriamo poi i valori di tutti i prodotti infiniti convergenti formati con le operazioni di $\mathcal{C}$, l'insieme $\mathcal{D}$ di questi valori e delle operazioni di $\mathcal{C}$ verrà indicato con $\{\mathcal{K}\}$.

Il complesso $(\mathcal{K})$, per la sua stessa definizione, soddisfa sempre alla condizione *a)* del n.° 25, ed affinchè sia un gruppo occorre e basta che in esso figurino le inverse di tutte le operazioni di $\mathcal{K}$.

Il secondo complesso $\{\mathcal{K}\}$ non soddisfa generalmente alla suddetta cond. *a)* perchè se $d_1 = \prod_{r=1}^{\infty} c_r$, $d_2 = \prod_{r=1}^{\infty} \gamma_r$, la sostituzione $d_1 \cdot d_2$ è data dal prodotto:

$$(c_1 \cdot \gamma_1) \cdot (\gamma_1^{-1} \cdot c_2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \ldots,$$

i cui fattori non appartengono, in generale, a $(\mathcal{K})$.

Dimostreremo in proposito che:

o) *Se il complesso* $c^{-1} \cdot \mathcal{K} \cdot c$ *appartiene a* $(\mathcal{K})$, *qualunque sia l'operazione* c *di* $(\mathcal{K})$, *il complesso* $\{\mathcal{K}\}$ *contiene tutti i prodotti finiti ed infiniti formati con le sue operazioni.*

ω) *Se, inoltre, in* $\{\mathcal{K}\}$ *figurano tutte le inverse delle operazioni di* $\mathcal{K}$, *il complesso* $\{\mathcal{K}\}$ *è un gruppo.*

Nella ipotesi o) i fattori del prodotto $d_1 \cdot d_2 = (c_1 \cdot \gamma_1) \cdot (\gamma_1^{-1} \cdot c_2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2) \ldots$ appartengono a $(\mathcal{K})$ e quindi $\{\mathcal{K}\}$ è un gruppo od uno pseudogruppo.

Sia poi $\delta = \prod\limits_{r=1}^{\infty} d_r$ un prodotto infinito convergente formato con operazioni di $\{\mathcal{H}\}$; ciascuna d_r si può considerare, alla sua volta, come il valore di un prodotto finito od infinito di operazioni di $(\mathcal{H})$, onde, per la prop. del n.° 11, e per l'ipotesi o), esiste un prodotto $\prod\limits_{r-1}^{\infty} c_r$ formato con operazioni di $(\mathcal{H})$ ed il cui valore è δ.

Se, oltre alla o), è soddisfatta anche la ω), l'inversa d^{-1} di una qualunque operazione $d = \prod\limits_{r=1}^{\infty} c_r$ di $\{\mathcal{H}\}$ appartiene a $\{\mathcal{H}\}$ perchè essa è data dal prodotto:

$$c_1^{-1} \cdot (c_1 \cdot c_2^{-1} \cdot c_1^{-1}) \cdot (c_1 \cdot c_2 \cdot c_3^{-1} \cdot c_2^{-1} \cdot c_1^{-1}) \cdot \ldots\ldots$$

i cui fattori appartengono a $\{\mathcal{H}\}$.

37. ESEMPIO I. Se g è una operazione senza periodo si ha:

$$\begin{array}{lll} (g) & = [g,\ g^2,\ g^3, \ldots, \ g^r, \ldots] & \text{(pseudogruppo semplice)} \\ (1,\ g) & = 1 + (g) & \text{(pseudogruppo composto)} \\ (g,\ g^{-1}) & = (g) + (g^{-1}) & \text{(gruppo).} \end{array}$$

Si ha inoltre $\{g\} = (g)$ perchè non esiste alcun prodotto infinito convergente formato con operazioni di (g) (vedi n.° 19).

ESEMPIO II. Se h è una operazione a periodo infinito, si ha:

$$(h) = [h,\ h^2,\ h^3, \ldots, \ h^r, \ldots]$$

e poichè le condizioni o) e ω) del n.° 36, sono soddisfatte, il complesso $\{h\}$ è un gruppo.

ESEMPIO III. Sia $\mathcal{H}$ il complesso seguente:

$$g = (\ldots, \ -n, \ldots, \ -1,\ 0,\ 1, \ldots, \ n, \ldots),$$
$$h_1 = (3,\ 4), \quad h_2 = (5,\ 6), \ldots, \quad h_{n-1} = (2n-1,\ 2n), \ldots.$$

Nel complesso $\{\mathcal{H}\}$ figurano le sostituzioni g e $d = \prod\limits_{r\ 1}^{\infty} h_r$; vogliamo dimostrare che in $\{\mathcal{H}\}$ non figura il prodotto $d \cdot g$ e che quindi $\{\mathcal{H}\}$ non è un gruppo e nemmeno uno pseudogruppo.

Supponiamo infatti che esista un prodotto $\prod\limits_{r=1}^{\infty} c_r$ di operazioni di $(\mathcal{H})$ avente per valore la sostituzione:

$$d \cdot g = \begin{pmatrix} \ldots, & -n & , \ldots, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, \ldots, & 2n, & 2n+1, \ldots \\ \ldots, & -n+1, & \ldots, & 0, & 1, & 2, & 3, & 5, \ldots, & 2n, & 2n+3, \ldots \end{pmatrix}.$$

Per la convergenza di $\prod_{r=1}^{\infty} c_r$ si può determinare un indice R tale che per $r > R$ tutte le c_r non contengano più il ciclo g; inoltre, poichè $d \cdot g(0) = 1$, deve essere $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_R(0) = 1$, e perciò il prodotto $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_R$ deve presentarsi sotto la forma:

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_R = h_{m_1} \cdot h_{m_2} \cdot \ldots \cdot h_{m_s} \cdot g \cdot h_{\mu_1} \cdot h_{\mu_2} \cdot \ldots \cdot h_{\mu_\sigma}.$$

Poichè le sostituzioni h che figurano in questo prodotto sono in numero finito, si può determinare un elemento $2n+1$ che non sia spostato dalle predette h: allora al posto di $2\bar{n}+1$ il prodotto $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_R$ porta $2\bar{n}+2$ ed i prodotti parziali successivi al posto del medesimo elemento potranno portare $2\bar{n}+1$ o $2n+2$, la qual cosa contraddice l'ipotesi che $\prod_{r=1}^{\infty} c_r$ abbia per valore $d \cdot g$.

38. Un gruppo o pseudogruppo $\mathcal{C}$ si dice *chiuso* quando contiene i valori di tutti i prodotti infiniti convergenti formati con le sue operazioni, oppure quando tutti i suddetti prodotti sono non convergenti. Si dice invece *aperto* in tutti gli altri casi.

Dalla definizione dell'insieme $\{\mathcal{C}\}$ risulta che:

Un gruppo o pseudogruppo $\mathcal{C}$ è chiuso quando e solo quando $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}\}$.

Il gruppo totale è evidentemente chiuso, come è pure chiuso, per la prop. o) del n.° 36, il gruppo dell'esempio II, n.° 37.

È invece aperto il gruppo $H = (h, h^{-1})$ generato dalla operazione $h = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_r \cdot \ldots$, i cui cicli $c_1, c_2, \ldots, c_r, \ldots$ hanno i periodi 2, 3, 3^2, $3^3, \ldots, 3^{r-1}, \ldots$, perchè il prodotto:

$$c_1 = h^3 \cdot h^6 \cdot h^{18} \cdot \ldots \cdot h^{2 \cdot 3^{r-1}} \cdot \ldots$$

non appartiene ad H.

39. Dato un gruppo o pseudogruppo aperto $\mathcal{C}$ di sostituzioni su I, è sempre possibile trovare dei complessi chiusi $\mathcal{H}_1$ contenenti per intero $\mathcal{C}$. Ad esempio si può, in ogni caso, prendere per $\mathcal{H}_1$ il gruppo totale su I.

Sia $\mathcal{H}$ il complesso comune a tutti gli $\mathcal{H}_1$ e sia $k = \prod_{r=1}^{\infty} h_r$ un prodotto convergente formato con le operazioni di $\mathcal{H}$. Poichè le h_r appartengono a tutti i complessi chiusi $\mathcal{H}_1$, l'operazione k appartiene ad $\mathcal{H}$ e quindi questo complesso è *chiuso*.

Inoltre, per la sua stessa definizione, *il complesso $\mathcal{H}$ non può contenere alcun complesso chiuso che alla sua volta contenga $\mathcal{C}$.*

Se $\{\mathcal{C}\}$ è chiuso, si ha $\mathcal{H} = \{\mathcal{C}\}$; ciò avviene, ad esempio, quando $\mathcal{C}$ soddisfa alla condizione o) del n.° 36.

I complessi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{H}$ non sono sempre della stessa specie; posto per esempio $\mathcal{C} = [h, h^2, \ldots, h^r, \ldots]$ (vedi Es. II, n.° 37), il complesso $\mathcal{H} = \{h\}$ è un gruppo.

B) La decomposizione dei gruppi e degli pseudogruppi.

40. Sia $\mathcal{G}$ un gruppo od uno pseudogruppo e sia $\mathcal{C}$ un suo sottogruppo o sottopseudogruppo.

Diremo che un insieme (I_s) di complessi del tipo $\gamma \cdot \mathcal{C}$ (dove γ appartiene a $\mathcal{G}$) è *una decomposizione a sinistra di* $\mathcal{G}$ *rispetto a* $\mathcal{C}$ quando i complessi $\gamma \cdot \mathcal{C}$ non hanno due a due operazioni comuni e sono tali che:

$$\mathcal{G} = \Sigma(\gamma \cdot \mathcal{C}).$$

Analogamente si definisce la *decomposizione* $(\mathrm{I_d})$ *a destra.*

41. I complessi $\gamma \cdot \mathcal{C}$ di una (I_s) [oppure $\mathcal{C} \cdot \gamma'$ di una (I_d)] si diranno, secondo la specie di $\mathcal{C}$, *quasi-gruppi o quasi-pseudogruppi a sinistra* (*a destra*).

42. Per l'esistenza di una (I_s) di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{C}$ occorre e basta che: *per ogni operazione* g *di* $\mathcal{G}$ *si possano determinare due operazioni* γ *e* c, *rispettivamente di* $\mathcal{G}$ *e di* $\mathcal{C}$, *tali che* $\mathrm{g} = \gamma \cdot \mathrm{c}$ *ed il prodotto* $\mathrm{k} = \gamma \cdot \mathrm{c}_1 \cdot \mathrm{c}_2^{-1}$ *(essendo* c_1 *e* c_2 *operazioni arbitrarie di* $\mathcal{C}$*) appartenga a* $\mathcal{G}$ *se e solo se* $\mathrm{c}_1 \cdot \mathrm{c}_2^{-1}$ *appartiene a* $\mathcal{C}$.

La condizione è necessaria.

Sia (I_s) una decomposizione di $\mathcal{G}$ rispetto a $\mathcal{C}$; una operazione g qualunque di $\mathcal{G}$ figurerà in un complesso $\gamma \cdot \mathcal{C}$ di (I_s) e quindi sarà $g = \gamma \cdot c$.

Se il prodotto $k = \gamma \cdot c_1 \cdot c_2^{-1}$ appartiene a $\mathcal{G}$ deve essere:

$$\gamma \cdot c_1 \cdot c_2^{-1} = \gamma_1 \cdot c_3, \quad \gamma \cdot c_1 = \gamma_1 \cdot c_3 \cdot c_2, \quad \gamma = \gamma_1, \quad c_3 \cdot c_2 = c_1,$$

onde l'operazione $c_1 \cdot c_2^{-1}$ appartiene a $\mathcal{C}$. Inversamente se $c_1 \cdot c_2^{-1}$ appartiene a $\mathcal{C}$, k appartiene a $\mathcal{G}$.

La condizione è sufficiente.

Sia γ l'operazione corrispondente alla generica g di $\mathcal{G}$ e soddisfacente alla enunciata condizione.

Moltiplicando a sinistra ciascuna γ per $\mathcal{C}$, si ottiene un insieme (I_s') di complessi $\gamma \cdot \mathcal{C}$ tali che se due di essi hanno una operazione in comune sono eguali.

Invero da $\gamma_1 \cdot c_1 = \gamma \cdot c$ si deduce:

(*a*) $\gamma_1 = \gamma \cdot c \cdot c_1^{-1} = \gamma \cdot c_2, \quad \gamma = \gamma_1 \cdot c_1 \cdot c^{-1} = \gamma_1 \cdot c_2^{-1} = \gamma_1 \cdot c_3,$ onde $\gamma \cdot \mathfrak{C} = \gamma_1 \cdot \mathfrak{C}$.

Segue da ciò che l'insieme (I_s), formato con tutti i complessi diversi che figurano in (I_s'), dà una decomposizione di $\mathfrak{G}$ rispetto a $\mathfrak{C}$.

La condizione per la decomponibilità a destra si ottiene sostituendo in quella data alla operazione γ una γ' tale che $g = c' \cdot \gamma'$, ed al prodotto $k = \gamma \cdot c_1 \cdot c_2^{-1}$ il prodotto $k' = c_2^{-1} \cdot c_1 \cdot \gamma'$.

43. Siano (I_s), (I_s') due decomposizioni a sinistra di $\mathfrak{G}$ rispetto a $\mathfrak{C}$.

Una operazione qualunque g di $\mathfrak{G}$ figura in un complesso $\gamma \cdot \mathfrak{C}$ di (I_s) e in uno $\gamma' \cdot \mathfrak{C}$ di (I_s') per cui [vedi n.° 42, form. (*a*)]: $\gamma \cdot \mathfrak{C} = \gamma' \cdot \mathfrak{C}$, $\gamma' = \gamma \cdot c_2$ (essendo c_2 una operazione di $\mathfrak{C}$ che ha l'inversa in $\mathfrak{C}$).

Da ciò risulta che gli insiemi (I_s), (I_s') hanno egual potenza e che (I_s') si ottiene da (I_s) mutando in modo opportuno ogni γ in una $\gamma \cdot c_2$ (dove c_2 ha l'inversa in $\mathfrak{C}$).

La potenza ω comune a tutte le decomposizioni a sinistra si dirà *indice a sinistra di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$.*

In modo analogo si dimostra che tutte le decomposizioni a destra hanno un'egual potenza ω_1 che si dirà *indice a destra di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$.*

44. Dalla condizione del n.° 42, si deducono le seguenti proposizioni d'immediata dimostrazione:

a) *Il complesso $\mathfrak{C}$ contiene l'identità.*

b) *L'operazione* $c_1 \cdot c_2^{-1}$ *appartiene a $\mathfrak{C}$ oppure non appartiene a $\mathfrak{G}$.*

c) *Nelle decomposizioni* (I_s) *esiste un complesso eguale a $\mathfrak{C}$.* Invero se $\gamma \cdot \mathfrak{C}$ contiene 1 si ha $\gamma \cdot c = 1$, $\gamma = c^{-1}$, $\gamma \cdot \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$.

Per la *a)* è impossibile decomporre un complesso $\mathfrak{G}$ rispetto ad un suo sottopseudogruppo semplice, per la *b)* è impossibile decomporre un gruppo rispetto ad un suo sottopseudogruppo composto; restano quindi soltanto possibili le decomposizioni:

1) *di un gruppo rispetto ad un suo sottogruppo;*

2) *di uno pseudogruppo composto rispetto ad un suo sottogruppo e rispetto ad un suo sottopseudogruppo composto.*

45. Le condizioni del n.° 42, sono sempre verificate per un gruppo G e per un suo sottogruppo C (basta porre $g = \gamma$, $c = 1$), onde G è decomponibile a sinistra e a destra rispetto a C.

Se in una (I_s): $G = \Sigma(\gamma \cdot C)$ si muta ciascuna operazione nella propria inversa si ottiene: $G = \Sigma(C \cdot \gamma^{-1})$ che rappresenta una (I_d), e perciò: *il gruppo* C *possiede un unico indice in* G.

46. Consideriamo uno pseudogruppo composto $G'' = G + G'$ ed un suo sottogruppo C. Anche in questo caso le condizioni per la decomponibilità di G'' rispetto a C sono soddisfatte, ma i due indici sono generalmente distinti (vedi esempio I).

In proposito vogliamo dimostrare che: *gli indici di* C *in* G″ *non sono numeri finiti.*

Siano g', $g'^2, \ldots, g'^r, \ldots,$ le potenze positive di una operazione g' di G', due di esse g'^r, g'^s non possono appartenere ad un medesimo complesso di una (I_s) perchè se fosse:

$$g'^s = \gamma \cdot c, \quad g'^r = \gamma \cdot c_1, \quad \text{si avrebbe} \quad g'^{s-r} = c_1^{-1} \cdot c = c_2.$$

La decomposizione (I_s) ha quindi, per lo meno, la potenza del numerabile. Altrettanto può dimostrarsi per una (I_d).

ESEMPIO I. Sia C il gruppo totale sugli elementi $1, 2, \ldots, n, \ldots$, e sia g la sostituzione:

$$g = \begin{pmatrix} \ldots, & -2n, & -2n+1, \ldots, & -3, & -2, & -1, & 1, & 2, & 3, \ldots, & n, \ldots \\ \ldots, & -n, & 2n-1, \ldots, & 3, & -1, & & 1, & 2, & 4, & 6, \ldots, & 2n, \ldots \end{pmatrix}.$$

Il complesso:

$$(\delta) \qquad \Gamma'' = C + g \cdot C + g^2 \cdot C + \ldots + g^r \cdot C \ldots,$$

è uno pseudogruppo composto perchè dalla eguaglianza: $g^{-s} \cdot c \cdot g^s = c_1$ (dove c, c_1 appartengono a C) discende $g^r \cdot c \cdot g^s \cdot c' = g^{r+s} \cdot c_1 \cdot c'$, e perchè ciascuna $g^r \cdot c$ non ha l'inversa in Γ''.

Dalla (δ) risulta che l'indice a sinistra di C in Γ'' è la potenza del numerabile mentre, come ora dimostreremo, l'indice a destra è la potenza del continuo.

Sia $C_r = g^{-r} \cdot C \cdot g^r$, e sia $C = \Sigma(C_r \cdot c^{(r)})$ una decomposizione di C rispetto a C_r; con tutte le operazioni $c^{(r)}$ formiamo i complessi del tipo $C \cdot g^r \cdot c^{(r)}$ e poi ripetiamo questa costruzione relativamente a tutte le potenze di g. L'insieme (I_d), che così otteniamo, rappresenta una decomposizione a destra di Γ'' rispetto a C.

Invero se in due complessi $C \cdot g^r \cdot c^{(r)}$, $C \cdot g^s \cdot c^{(s)}$ figurasse una medesima operazione si avrebbe:

$$c \cdot g^r \cdot c^{(r)} = c \cdot g^s \cdot c^{(s)}, \quad g^r \cdot c_r \cdot c^{(r)} = g^s \cdot c_s \cdot c^{(s)},$$

da cui $r = s$, e quindi $c_r \cdot c^{(r)} = c'_r \cdot c'^{(r)}$ il che è impossibile.

Inoltre, se $g^r \cdot c$ è una operazione qualunque di Γ'', posto:

$$c = c_{r'} \cdot c^{(r)}, \quad g^{-r} \cdot \bar{c} \cdot g^r = c_{r'},$$

si ha:

$$g^r \cdot c = g^r \cdot c_{r'} \cdot c^{(r)} = g^r \cdot g^{-r} \cdot \bar{c} \cdot g^r \cdot c^{(r)} = \bar{c} \cdot g^r \cdot c^{(r)},$$

onde $g^r \cdot c$ appartiene al complesso $C \cdot g^r \cdot c^{(r)}$ di (I_d).

Osservando poi che i gruppi C_r, le cui sostituzioni operano su elementi dell'insieme 2, 4, 6,...., $2n$,...., hanno per indice in C la potenza del continuo, si può affermare che tale deve essere l'indice di C in Γ''.

Esempio II. Consideriamo lo pseudogruppo $\Gamma'' = (g, h)$ dove g non ha periodo finito, h ha periodo 2 e $h \cdot g = g \cdot h$.

Il sottogruppo $H = [1, h]$ ha un unico indice in Γ'', potendosi scrivere Γ'' nei due modi: $\Gamma'' = \sum_{r=0}^{\infty} (H \cdot g^r)$, $\Gamma'' = \sum_{r=0}^{\infty} (g^r \cdot H)$.

47. Esaminiamo infine la decomposizione di uno pseudogruppo composto $G'' = G + G'$ rispetto ad un suo sottopseudogruppo $C'' = C + C'$. Tale decomposizione non è sempre possibile ed in alcuni casi è effettuabile da una sola parte (vedi Esempi).

Se G'' *è decomponibile (a sinistra ad es.) rispetto a* C'', *deve essere* C' *un sottopseudogruppo proprio di* G'.

Una operazione c' di C', non avendo l'inversa in C'', deve appartenere a G' (prop. *b*), n.° 44), onde C' coincide con G' o ne è una parte propria.

Se poi g'' è una operazione di G'' che non appartiene a C'', e se c' è una operazione di C', il prodotto $g'' \cdot c'$ non può appartenere a C' perchè altrimenti l'operazione $(g'' \cdot c') \cdot c'^{-1} = g''$ figurerebbe in G'' ma non in C''. Segue da ciò che C' è una parte propria di G'.

Esempio I. Sia Γ'' lo pseudogruppo dell'es. I. n.° 46 e sia:

$$\Lambda'' = C + g^2 \cdot C + g^4 \cdot C + \dots + g^{2r} \cdot C + \dots .$$

L'indice a sinistra di Λ'' in Γ'' è 2, perchè $\Gamma'' = \Lambda'' + g \cdot \Lambda''$, mentre l'indice a destra è la potenza del continuo, perchè:

$$\Gamma'' = \Lambda'' + \Sigma(\Lambda'' \cdot g \cdot c^{(1)}), \quad \text{essendo} \quad C_1 = g^{-1} \cdot C \cdot g \quad \text{e} \quad C = \Sigma(C_1 \cdot c^{(1)}).$$

Esempio II. Sia Γ'' lo pseudogruppo dell'es. II., n.° 46 e sia $\Lambda'' = (1, g)$. Poichè $\Gamma'' = \Lambda'' + h \cdot \Lambda'' = \Lambda'' + \Lambda'' \cdot h$, lo pseudogruppo Λ'' ha entrambi gli indici $= 2$.

ESEMPIO III. Consideriamo i tre cicli aperti:

$$g = (\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots), \quad \gamma = (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, 0, 1, \ldots, n, \ldots),$$
$$k = \gamma \cdot g^{-1} = (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, -1, \ldots, -n, \ldots),$$

e formiamo con essi gli pseudogruppi composti $\Theta'' = (1, g, \gamma, k)$, $\Delta'' = (1, g, \gamma)$, di cui il secondo è una parte del primo.

Una operazione θ di Θ'' si può scrivere nella forma:

$$\theta = \delta_0 \cdot k^{r_1} \cdot \delta_1 \cdot k^{r_2} \cdot \ldots \cdot k^{r_m} \cdot \delta_m,$$

e l'eguaglianza fra le operazioni θ e $\theta' = \delta_0' \cdot k^{r'_1} \cdot \delta_1' \cdot k^{r'_2} \cdot \ldots \cdot k^{r'_\mu} \cdot \delta_\mu'$ porta, per la natura di g, γ, k, alle eguaglianze:

$$\delta_p = \delta_p', \quad r_p = r_p', \quad m = \mu.$$

Segue da ciò che l'insieme (I_d) dei complessi $\Delta'' \cdot k^{r_1} \cdot \delta_1 \cdot \ldots \cdot k^{r_m} \cdot \delta_m$ dà una decomposizione a destra di Θ'' rispetto a Δ''.

Lo pseudogruppo Θ'' non è però decomponibile a sinistra rispetto a Δ'' perchè il prodotto $\gamma \cdot g^{-1} = k$ appartiene a Θ'' senza appartenere a Δ''.

ESEMPIO IV. Lo pseudogruppo $G'' = (1, g)$ non è decomponibile rispetto al suo sottopseudogruppo $C'' = [1, g^2, g^3, \ldots, g^r, \ldots]$ nè a destra nè a sinistra perchè il prodotto: $g^{-2} \cdot g^3 = g^3 \cdot g^{-2} = g$ appartiene a G'' e non a C''.

C) Trasformazione dei complessi.

48. Dato un complesso $\mathfrak{A}$ di sostituzioni, non necessariamente gruppo o pseudogruppo, e data una operazione t diremo *trasformato di* $\mathfrak{A}$ *mediante* t *il complesso* $\mathfrak{B} = \mathrm{t}^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathrm{t}$.

Dalle proprietà relative alle trasformate delle operazioni (vedi n.° 23) discendono le seguenti proposizioni:

a) *Se un prodotto finito od infinito appartiene ad* $\mathfrak{A}$, *il prodotto delle trasformate appartiene a* $\mathfrak{B}$.

b) *Se* a *ha l'inversa in* $\mathfrak{A}$, $\mathrm{t}^{-1} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{t}$ *ha l'inversa in* $\mathfrak{B}$.

c) *Se* $\mathfrak{A}$ *è un gruppo,* $\mathfrak{B}$ *è un gruppo.*

d) *Se* $\mathfrak{A}$ *è uno pseudogruppo semplice o composto, anche* $\mathfrak{B}$ *è rispettivamente uno pseudogruppo semplice o composto, ed in questo secondo caso se* $\mathfrak{A} = \mathrm{G} + \mathrm{G}'$, $\mathfrak{B} = \Gamma + \Gamma'$, *si ha:* $\Gamma = \mathrm{t}^{-1} \cdot \mathrm{G} \cdot \mathrm{t}$, $\Gamma' = \mathrm{t}^{-1} \cdot \mathrm{G}' \cdot \mathrm{t}$.

e) *Se* $\mathfrak{A}$ *è chiuso,* $\mathfrak{B}$ *è chiuso.*

49. Il complesso $\mathfrak{B}$ è generalmente diverso da quello $\mathfrak{A}$ su cui si opera la trasformazione; quando però $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ e cioè:

$$(o) \qquad t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t = \mathfrak{A}$$

si dirà che $\mathfrak{A}$ è *invariante per l'operazione* t.

Da (o) si deduce: $\mathfrak{A} = t \cdot \mathfrak{A} \cdot t^{-1}$, onde $\mathfrak{A}$ è invariante anche per t^{-1}.

Se il complesso $\mathfrak{A}$ contiene un numero finito di operazioni e se per ogni a di $\mathfrak{A}$ è $t^{-1} \cdot a \cdot t = a_1$, si ha: $t \cdot a \cdot t^{-1} = a'$ perchè $t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t = \mathfrak{A}$; se invece $\mathfrak{A}$ contiene infinite sostituzioni, e se non è invariante per t, può darsi che:

La t *trasformi ciascuna* a *in una* a_1, *e la* t^{-1} *trasformi qualche operazione di* $\mathfrak{A}$ *in operazioni ad esso estranee.*

Quando ciò avviene diremo che $\mathfrak{A}$ è *riducibile* mediante t perchè: *il complesso* $t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t$ *è una parte propria di* $\mathfrak{A}$ *mancando in esso quelle e solo quelle operazioni di* $\mathfrak{A}$ *che la* t^{-1} *trasforma in sostituzioni estranee ad* $\mathfrak{A}$.

Difatti se $t \cdot a \cdot t^{-1} = b$, l'operazione a non può figurare in $t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t$ perchè non si può porre sotto la forma $a = t^{-1} \cdot a_1 \cdot t$.

Inversamente, se a non figura in $t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t$, la $t \cdot a \cdot t^{-1}$ non può appartenere ad $\mathfrak{A}$ perchè altrimenti si avrebbe $t \cdot a \cdot t^{-1} = a_1$, $a = t^{-1} \cdot a_1 \cdot t$.

Un altro caso interessante si presenta quando, sempre nell'ipotesi che $\mathfrak{A}$ abbia infinite operazioni e non sia invariante per t, la t^{-1} trasforma tutte le operazioni di $\mathfrak{A}$ in operazioni di $\mathfrak{A}$, e la t trasforma qualche operazione di $\mathfrak{A}$ in operazioni ad esso estranee.

In tal caso il complesso $\mathfrak{A}$, essendo una parte propria di $t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t$, si dirà che è *ampliabile* mediante t.

Dalle definizioni precedenti risulta che *se* $\mathfrak{A}$ *è riducibile mediante* t *è ampliabile mediante* t^{-1} *e viceversa.*

50. Esempio I. Sia $\mathfrak{A}$ il gruppo totale sugli elementi:

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, n, \ldots \quad \text{e sia} \quad t = (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Il complesso $\mathfrak{B} = t^{-1} \cdot \mathfrak{A} \cdot t$ è formato da sole operazioni di $\mathfrak{A}$, ed in esso mancano quelle sostituzioni di $\mathfrak{A}$ che operano sull'elemento 0. Il gruppo totale è dunque riducibile mediante t, ed il trasformato $\mathfrak{B}$ è il gruppo totale sugli elementi $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Esempio II. Il medesimo gruppo $\mathfrak{A}$ è ampliabile mediante t^{-1} essendo $t \cdot \mathfrak{A} \cdot t^{-1}$ il gruppo totale sugli elementi $a_{-1}, 0, 1, \ldots, n, \ldots$.

51. Consideriamo ora, in luogo della sola operazione t, un certo complesso $\mathfrak{T}$ di sostituzioni. Con ciascuna operazione di $\mathfrak{T}$ trasformiamo $\mathfrak{A}$ in guisa da ottenere un insieme (I) di complessi, tra loro diversi, e fra i quali può figurare anche $\mathfrak{A}$.

Se (I) è formato da un sol complesso $\mathfrak{K}=\mathfrak{A}$ si dirà che $\mathfrak{A}$ è *invariante per* $\mathfrak{T}$. Dalla eguaglianza: $t^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot t=\mathfrak{A}$, valida per ogni t di $\mathfrak{T}$, si deduce: $t\cdot\mathfrak{A}\cdot t^{-1}=\mathfrak{A}$, onde $\mathfrak{A}$ è invariante per il complesso $\mathfrak{T}^{-1}$ formato con le inverse delle operazioni di $\mathfrak{T}$.

Inoltre $\mathfrak{A}$ è invariante per il gruppo $T=(\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^{-1})$ perchè una operazione generica τ di T si può considerare come il prodotto di un numero finito di operazioni per ciascuna delle quali $\mathfrak{A}$ è invariante.

Se poi $\mathfrak{A}$ contiene infinite operazioni, e se non è invariante per $\mathfrak{T}$, può accadere che esso sia riducibile per qualche t di $\mathfrak{T}$ e per le rimanenti sia invariante. Se ciò avviene si dirà che $\mathfrak{A}$ è *riducibile* mediante $\mathfrak{T}$.

In tal caso $\mathfrak{A}$ è riducibile anche per il complesso $(\mathfrak{T})$ e non per $T=(\mathfrak{T},\mathfrak{T}^{-1})$ perchè in T figurano le inverse di quelle t di $\mathfrak{T}$ per le quali $\mathfrak{A}$ è riducibile e che quindi trasformano qualche a di $\mathfrak{A}$ in operazioni estranee ad $\mathfrak{A}$. Da ciò discende che il complesso $(\mathfrak{T})$ non può essere un gruppo perchè altrimenti sarebbe $(\mathfrak{T})=(\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^{-1})$.

Se infine $\mathfrak{A}$ è ampliabile mediante qualche t di $\mathfrak{T}$ e per le restanti è invariante si dirà che $\mathfrak{A}$ è *ampliabile* mediante $\mathfrak{T}$.

Valgono in questo caso proposizioni analoghe alle precedenti, alle quali può aggiungersi che: *se il complesso $\mathfrak{A}$ è riducibile mediante $\mathfrak{T}$, è ampliabile mediante $\mathfrak{T}^{-1}$ e viceversa.*

52. Dati due complessi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, in modo che $\mathfrak{A}$ non sia invariante per $\mathfrak{T}$, vogliamo determinare *un complesso $\mathfrak{D}$ appartenente ad $\mathfrak{A}$, che sia invariante per $\mathfrak{T}$ e tale che qualsiasi altro complesso $\mathfrak{K}$ di $\mathfrak{A}$, pure invariante, sia contenuto in $\mathfrak{D}$.*

Sia $T=(\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}^{-1})$ e sia (I) l'insieme dei trasformati $\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau$ di $\mathfrak{A}$ mediante le operazioni di T.

Posto $\mathfrak{D}=|\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau|$, consideriamo due operazioni qualunque θ e d rispettivamente di T e $\mathfrak{D}$, ed il complesso generico $\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau$ di (I).

Poichè $\tau\cdot\theta^{-1}$, $\tau\cdot\theta$ sono operazioni di T, i complessi:

$$\theta\cdot\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau\cdot\theta^{-1},\quad \theta^{-1}\cdot\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau\cdot\theta$$

appartengono a (I), per cui:

$$\theta\cdot\tau^{-1}\cdot a\cdot\tau\cdot\theta^{-1}=d,\quad \theta^{-1}\cdot\tau^{-1}\cdot a_1\cdot\tau\cdot\theta=d,$$

od anche:

$$\theta^{-1}\cdot d\cdot\theta=\tau^{-1}\cdot a\cdot\tau,\quad \theta\cdot d\cdot\theta^{-1}=\tau^{-1}\cdot a_1\cdot\tau.$$

Ma $\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau$ è un complesso generico di (I), onde:

$$\theta^{-1}\cdot d\cdot\theta=d_1,\quad \theta\cdot d\cdot\theta^{-1}=d_2,$$

cioè $\mathfrak{D}$ è invariante per T e quindi per $\mathfrak{T}$.

Qualunque altro complesso $\mathfrak{K}$ di $\mathfrak{A}$, invariante per $\mathfrak{T}$, deve essere contenuto in $\mathfrak{D}$ perchè se τ e k sono due operazioni di T e $\mathfrak{K}$ si ha: $\tau^{-1}\cdot k_1\cdot\tau=k$, cioè k appartiene a tutti i complessi di (I) e quindi appartiene a $\mathfrak{D}=|\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau|$.

Il complesso $\mathfrak{D}$ richiesto è dunque dato da $|\tau^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\tau|$, ed esso esiste sotto la condizione che i complessi di (I) abbiano delle operazioni comuni.

53. Considerando la parte (J) dell'insieme (I) relativa ai trasformati di $\mathfrak{A}$ mediante le operazioni di $(1, \mathfrak{T}^{-1})$, si prova in modo analogo che: *il complesso* $\mathfrak{D}_1=|t^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot t|$ *è riducibile (od eventualmente invariante se* $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1$*) e qualsiasi complesso* $\mathfrak{K}_1$ *di* $\mathfrak{A}$ *riducibile od invariante è contenuto in* $\mathfrak{D}_1$.

Il medesimo procedimento serve infine a dimostrare che $\mathfrak{D}_2=|t_1^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot t_1|$, essendo t_1 una operazione di $(1, \mathfrak{T})$, è *il massimo complesso ampliabile contenuto in* $\mathfrak{A}$.

54. Se non esiste uno dei complessi $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, non esiste sicuramente $\mathfrak{D}$ che deve essere in entrambi contenuto, ma può anche darsi che i complessi $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, pur esistendo, non abbiano operazioni comuni il che esclude l'esistenza di $\mathfrak{D}$.

Ecco alcuni esempi:

Esempio I. Sia $\mathfrak{A}$ il gruppo totale su: $0, 1, 2, 3,\ldots, n,\ldots$ e sia:

$$t=(\ldots, -n,\ldots, -1, 0, 1,\ldots, n,\ldots).$$

L'insieme (I) è dato da:

$$\ldots, \mathfrak{A}_{-n},\ldots, \mathfrak{A}_{-1}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1,\ldots, \mathfrak{A}_n,\ldots$$

dove $\mathfrak{A}_n$ è il gruppo totale su $n, n+1,\ldots$; ed $\mathfrak{A}_{-n}$ quello su:

$$-n,\ldots, -1, 0, 1,\ldots, n,\ldots.$$

Si ha pertanto $\mathfrak{D}=1$, $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}_2=1$.

Esempio II. Sia $\mathfrak{A}=|(0, 1), (1, 2), (2, 3),\ldots|$ e $t=(\ldots, -n,\ldots, -1, 0, 1,\ldots, n,\ldots)$. I complessi $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}_2$ non esistono ed è $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{A}$.

Esempio III. Posto $\mathfrak{T}=[t, t_1]$, dove $t=(\ldots, -n,\ldots, -1, 0, 1,\ldots, n,\ldots)$, $t_1=(\ldots, a_{-n},\ldots, a_{-1}, 0, 1,\ldots, n,\ldots)$, ed $\mathfrak{A}=[(0, 1), (1, 2),\ldots; (0, a_{-1}), (a_{-1}, a_{-2}),\ldots]$; si ha $\mathfrak{D}_1=[(0, 1), (1, 2),\ldots]$, $\mathfrak{D}_2=[(a_{-1}, a_{-2}),\ldots]$, e quindi $\mathfrak{D}$ non esiste.

55. Diremo che un gruppo o un pseudogruppo $\mathcal{G}_m$, contenuto in un complesso $\mathcal{G}$, è *invariante massimo* quando è invariante per $\mathcal{G}$ e non esiste alcun complesso invariante di $\mathcal{G}$ della stessa specie di $\mathcal{G}_m$ e contenente $\mathcal{G}_m$.

Per indicare un complesso invariante massimo useremo, secondo la sua specie, le notazioni G_m, G_m', G_m''.

Un complesso $\mathcal{G}$ d'infinite operazioni, a differenza di quanto avviene per i gruppi finiti, può non ammettere complessi invarianti massimi. Ciò dipende: o dalla inesistenza in $\mathcal{G}$ di complessi invarianti, oppure dalla possibilità di poter costruire, in corrispondenza di un qualunque complesso $\mathcal{H}$ invariante di $\mathcal{G}$, un complesso $\mathcal{H}_1$ pure invariante e contenente $\mathcal{H}$.

Di questo tipo sono i complessi costruiti nel seguente:

ESEMPIO I. Sia:

$$(\alpha) \qquad g_1, \quad g_2, \ldots, \quad g_r, \ldots,$$

una successione di operazioni determinate dalla relazione ricorrente:

$$(o) \qquad g_{r+1}^{r+1} = g_r.$$

Fra due qualunque di esse g_r, g_s $(r \leq s)$ intercede la relazione:

$$(\omega) \qquad g_s^{\frac{s!}{r!}} = g_r,$$

come si può immediatamente verificare scrivendo le (o) dall'indice r all'indice s. Da (ω) si deduce:

$$g_r^{\rho} \cdot g_s^{\sigma} = g_s^{\rho \frac{s!}{r!} + \sigma} = g_s^{\sigma} \cdot g_r^{\rho},$$

onde l'insieme delle operazioni di (α), delle loro potenze e delle inverse costituisce un gruppo *abeliano* G, in cui cioè le operazioni sono due a due commutabili.

Sia ora H un sottogruppo proprio di G e sia g_r una operazione di (α) che non appartiene ad H, se g_r^{ρ} è la più piccola potenza positiva di g_r che figura in H, il complesso:

$$H_1 = H + H \cdot g_r + H \cdot g_r^2 + \ldots + H \cdot g_r^{\rho - 1}$$

è un gruppo nel quale non esiste l'operazione $g_{r\rho}$.

Invero se $g_{r\rho}$ appartenesse ad H_1 si avrebbe: $g_{r\rho} = h \cdot g_r^{x}$, da cui:

$$g_{r\rho}^{\frac{(r\rho)!}{r!}} = h_1 \cdot g_r^{\frac{(r\rho)!}{r!} x};$$

od anche, per essere $g_r = g_{r\rho}^{\frac{(r\rho)!}{r!}}$:

$$g_r^{1 - x\frac{(r\rho)!}{r!}} = h_1 .$$

Poichè le potenze di g_r che figurano in H sono del tipo $g_r^{y\rho}$, dovrebbe aversi l'eguaglianza $y\rho = 1 - x\,\dfrac{(r\rho)!}{r!}$ che è impossibile.

Segue da ciò che G non ammette sottogruppi invarianti massimi.

Se l'operazione g_1 non ha periodo finito tutte le g_r, per la (o), non hanno periodo finito, ed il gruppo G possiede i complessi invarianti massimi:

$$G_m' = (g_1,\ g_2, \ldots,\ g_r, \ldots), \qquad G_m'' = 1 + G_m',$$
$$\Gamma_m' = (g_1^{-1},\ g_2^{-1}, \ldots,\ g_r^{-1}, \ldots), \quad \Gamma_m'' = 1 + \Gamma_m'.$$

Se invece g_1 ha periodo finito tutte le operazioni di G hanno periodo finito e quindi G non può avere pseudogruppi invarianti massimi.

Esempio II. Lo pseudogruppo $\Gamma'' = [1,\ g,\ g^2, \ldots,\ g^r, \ldots]$, dove g è una operazione che non ha periodo finito, possiede i seguenti complessi invarianti massimi:

$$\Gamma_m = 1, \quad \Gamma_m' = [g,\ g^2, \ldots\ g^r, \ldots], \quad \Gamma_m'' = [1,\ g^2,\ g^3, \ldots,\ g^r, \ldots].$$

56. *Un sottogruppo* G_m *di un gruppo abeliano* G *ha indice primo in* G.

Se $G = \Sigma(G_m \cdot g)$ è una decomposizione di G rispetto a G_m, il prodotto $G_m \cdot g \cdot G_m \cdot g'$ di due quasi-gruppi, essendo G abeliano, è un nuovo quasi-gruppo $G_m \cdot g''$. Segue da ciò che se l'indice di G_m in G non fosse primo esisterebbe (n.° 35) un insieme di quasi-gruppi costituenti un sottogruppo di G contenente G_m.

Un Γ_m'' *di un* Γ'' *abeliano non ha indice nè a destra nè a sinistra in* Γ''.

Supponiamo che $\Gamma_m'' = H_1 + \Gamma_1'$ abbia indice (a sinistra per esempio) in $\Gamma'' = H + \Gamma'$; per la prop. del n.° 47, Γ_1' è una parte propria di Γ', ed il gruppo H_1 deve coincidere con H perchè altrimenti lo pseudogruppo $H_1 + \Gamma'$ conterrebbe Γ_m''.

Sia poi γ una operazione di Γ' che non figura in Γ_m'' e sia:

$$\Sigma'' = (\Gamma_m'',\ \gamma^2,\ \gamma^3, \ldots,\ \gamma^r, \ldots).$$

Questo pseudogruppo è una parte propria di Γ'', perchè non contiene γ, ed è più ampio di Γ_m'' perchè le due operazioni γ^2, γ^3 non possono contemporaneamente appartenere a Γ_m'' (n.° 44).

Dunque un sottopseudogruppo di Γ'' non può, ad un tempo, essere invariante massimo ed avere indice in Γ''.

57. Il complesso $\mathfrak{B}$ delle operazioni invarianti di un dato complesso $\mathfrak{A}$ si dirà *commutativo* di $\mathfrak{A}$. Esso appartiene al complesso $\mathfrak{D}$ costruito al n.° 52 perchè ciascuna b di $\mathfrak{B}$ costituisce, da sè sola, un complesso invariante per $\mathfrak{A}$.

Se $\mathfrak{A}$ è un gruppo od uno pseudogruppo composto, l'esistenza di $\mathfrak{B}$ è assicurata dalla operazione identica che appartiene ad $\mathfrak{A}$, se invece $\mathfrak{A}$ è uno pseudogruppo semplice, $\mathfrak{B}$ può anche non esistere (vedi n.° 34, 52).

58. Sia $\mathfrak{C}$ l'insieme di tutte le commutatrici $c = s^{-1} \cdot t^{-1} \cdot s \cdot t$ di un dato complesso $\mathfrak{A}$.

Poichè $\mathfrak{C}$ contiene insieme ad ogni operazione c la inversa c^{-1}, i complessi (n.° 36): $G_c = (\mathfrak{C})$, $G_d = \{\mathfrak{C}\}$ sono dei gruppi, ed il secondo G_d è chiuso. Essi si diranno, rispettivamente, *commutatore* e *derivato* di $\mathfrak{A}$.

Se $\mathfrak{A}$ è un gruppo, G_c è contenuto in $\mathfrak{A}$, mentre G_d, non essendo $\mathfrak{A}$ generalmente chiuso, può contenere delle operazioni estranee ad $\mathfrak{A}$.

Si dimostra poi, come per i gruppi finiti, che *se $\mathfrak{A}$ è un gruppo,* G_c *e* G_d *sono invarianti per* $\mathfrak{A}$.

Nel caso in cui $\mathfrak{A}$ non sia un gruppo si possono determinare, col metodo del n.° 52, i gruppi D_c, D_d contenuti in G_c e G_d ed invarianti per $\mathfrak{A}$.

Moti einsteiniani di un mezzo disgregato con simmetria sferica.

Memoria di HARRY LEVY (*) (a Zurigo).

L'oggetto di questo lavoro è di considerare il moto einsteiniano di un mezzo indefinito nell'ipotesi che corrisponde al caso newtoniano della mutua gravitazione delle particelle materiali che lo costituiscono. Supponiamo in particolare che il sistema sia dotato di simmetria attorno ad un centro, cioè che la densità μ e la velocità v siano funzioni solamente del tempo e della distanza dal centro.

La forma quaternaria che congloba le misure dello spazio e del tempo è riducibile, quando sussiste una tale simmetria, alla forma ([1])

$$ds^2 = \alpha dt^2 + 2\beta dt dr - \gamma dr^2 - \gamma r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2), \tag{1}$$

essendo r, θ, φ coordinate sferiche, α e β funzioni delle due variabili t ed r, γ della r sola.

Introduciamo ora, al posto delle t ed r, due loro combinazioni indipendenti qualsivogliono,

$$x_0 = x_0(t, r), \quad x_1 = x_1(t, r), \quad J = \frac{\partial(x_0, x_1)}{\partial(t, r)} \neq 0,$$

di cui ci riserviamo di disporre in modo opportuno; di più poniamo $x_2 \equiv \theta$, $x_3 \equiv \varphi$. Possiamo in conformità scrivere la (1) sotto la forma

$$ds^2 = e^{2\tau} \left\{ \sum_0^1 g_{ij}^{(0)} dx_i dx_j - dx_2^2 - \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2 \right\} \tag{2}$$

od anche

$$ds^2 = e^{2\tau} ds_0^2 \tag{2'}$$

(*) National Research Fellow (U. S. A.).

([1]) Cfr. LEVI-CIVITA, *Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà*. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, vol. V, (5ª), p. 170; oppure PALATINI, *Lo spostamento del perielio di Mercurio*. Il « Nuovo Cimento », tomo XIV, (serie 6ª, 1917), p. 20.

ove, per brevità, si ponga

$$ds_0^2 = \sum_0^1 g_{ij}^{(0)} dx_i dx_j - dx_2^2 - \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2. \tag{3}$$

Osserviamo infine che la forma binaria

$$d\sigma_0^2 = \sum_0^1 g_{ij}^{(0)} dx_i dx_j \tag{4}$$

deve essere indefinita.

Le equazioni einsteiniane quando si tratta di materia disgregata in moto, (cioè, col linguaggio ordinario, soggetta unicamente all'attrazione mutua delle particelle che la costiluiscono) sono (1)

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \mu \lambda_\alpha \lambda_\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \tag{5}$$

essendo $g_{\alpha\beta}$ i coefficienti della forma fondamentale (2), $R_{\alpha\beta}$ il tensore di RICCI ed R la curvatura media della stessa (2). Infine μ è la densità della materia nel posto e nell'istante considerato e λ_α sono i momenti (in quel posto e in quell'istante) della linea oraria descritta dalla generica particella (che lo occupa).

Dalla (2) si ha

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\tau} g_{\alpha\beta}^{(0)}$$

coll'intesa che $g_{pq}^{(0)}$ $(p, q = 2, 3)$ sono date dalla

$$\sum_2^3 g_{pq}^{(0)} dx^p dx^q \equiv - dx_2^2 - \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2. \tag{6}$$

Possiamo quindi calcolare $R_{\alpha\beta}$ ed R per mezzo delle relazioni fra due spazi in rappresentazione conforme.

Infatti se si designa con $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ il tensore di RICCI rispetto alla (3), con $R^{(0)}$ la curvatura media della (3) stessa, si ha (2):

$$\left\{\begin{aligned} R_{ij} &= R_{ij}^{(0)} + 2(\tau_{ij}^{(0)} - \tau_i \tau_j) + g_{ij}^{(0)}(2\Delta_1^{(0)}\tau + \Delta_2^{(0)}\tau) \\ R_{pq} &= R_{pq}^{(0)} + g_{pq}^{(0)}(2\Delta_1^{(0)}\tau + \Delta_2^{(0)}\tau) \\ R_{ip} &= R_{pi} = R_{ip}^{(0)} \\ R &= e^{-2\tau}(R^{(0)} + 6\Delta_1^{(0)}\tau + 6\Delta_2^{(0)}\tau) \end{aligned}\right. \qquad (i, j = 0, 1;\ p, q = 2, 3) \tag{7}$$

(1) Cfr. WEYL H., *Raum, Zeit, Materie*, (Springer, Berlin), p. 217.

(2) Vedasi LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. (A. Stock, Roma, 1925), p. 241; oppure EISENHART, *Riemannian Geometry*. (Princeton, University Press, Princeton, U. S. A., 1926), p. 90.

dove τ_i è la derivata $\dfrac{\partial\tau}{\partial x_i}$; $\tau_{ij}^{(0)}$ sono le derivate covarianti di τ_i, $\Delta_1^{(0)}\tau$ il parametro differenziale primo di τ, $\Delta_2^{(0)}\tau$ il secondo, tutti rispetto al ds_0^2 (3) oppure (essendo la (3) separabile e τ indipendente delle x_2, x_3) al $d\sigma_0^2$ (4).

Le espressioni delle $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ si ottengono facilmente sotto la forma

$$\text{(8)}\qquad \begin{gathered} R_{ij}^{(0)} = -k_0 g_{ij}^{(0)}, \quad R_{pq}^{(0)} = g_{pq}^{(0)}, \\ R_{ip}^{(0)} = R_{pi}^{(0)} = 0, \end{gathered} \qquad (i, j = 0, 1;\ p, q = 2, 3)$$

essendo k_0 la curvatura di GAUSS della forma binaria (4).

Dunque

$$R^{(0)} = -2k_0 + 2$$

ed abbiamo così dalle (7) ed (8)

$$\text{(9)}\qquad \left\{ \begin{aligned} & R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 2(\tau_{ij}^{(0)} - \tau_i \tau_j) - (1 + \Delta_1^{(0)}\tau + 2\Delta_2^{(0)}\tau) g_{ij}^{(0)} \\ & R_{pq} - \frac{1}{2} R g_{pq} = (k_0 - \Delta_1^{(0)}\tau - 2\Delta_2^{(0)}\tau) g_{pq}^{(0)} \\ & R_{ip} - \frac{1}{2} R g_{ip} = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i, j = 0, 1;\ p, q = 2, 3).$$

Dall' ipotesi che il moto resti simmetrico attorno al centro consegue che $\dfrac{dx^2}{ds} = \dfrac{dx^3}{ds} = 0$.

Pertanto anche le $\lambda_p = \sum\limits_{j=0}^{3} g_{jp} \dfrac{dx^j}{ds}$ si annullano, ($p = 2, 3$), e le dieci equazioni fondamentali (5) si riducono alle quattro seguenti:

$$\text{(10)}\qquad \left\{ \begin{aligned} & k_0 - \Delta_1^{(0)}\tau - 2\Delta_2^{(0)}\tau = 0 \\ & 2(\tau_{ij}^{(0)} - \tau_i \tau_j) - (1 + k_0) g_{ij}^{(0)} = \mu \lambda_i \lambda_j \end{aligned} \right. \qquad (i, j = 0, 1).$$

Fino a questo punto le variabili x_0, x_1 designano funzioni qualsiasi di r e di t. Possiamo facilitare lo studio delle (10) se supponiamo di assumere come linee parametriche $dx_0 = 0$ le linee orarie del moto di momenti λ_i, e come curve $dx_1 = 0$ le loro traiettorie ortogonali. Si annulla con ciò $g_{01}^{(0)}$ ed anche λ_0, e le (10) diventano

$$\text{(11)}\qquad \left\{ \begin{aligned} & k_0 - \Delta_1^{(0)}\tau - 2\Delta_2^{(0)}\tau = 0 \\ & \tau_{01}^{(0)} - \tau_0 \tau_1 = 0 \\ & 2(\tau_{00}^{(0)} - \tau_0^2) - (1 + k_0) g_{00}^{(0)} = 0 \\ & 2(\tau_{11}^{(0)} - \tau_1^2) - (1 + k_0) g_{11}^{(0)} = \mu \lambda_1^2. \end{aligned} \right.$$

La curvatura K della forma

$$d\sigma^2 = \sum_0^1 g_{ij} dx^i dx^j = e^{2\tau} d\sigma_0^2 \tag{12}$$

è data da [1]

$$k_0 = e^{2\tau}(K + \Delta_2 \tau) \tag{13}$$

dove $\Delta_2\tau$ è il parametro differenziale secondo di τ rispetto alla (12).

Siano τ_{ij} le derivate covarianti di τ_i rispetto alla (12) stessa; è allora [2]

$$\tau_{ij}^{(0)} = \tau_{ij} + 2\tau_i\tau_j - g_{ij}\Delta_1\tau, \tag{14}$$

essendo $\Delta_1\tau$ il parametro differenziale primo di τ rispetto alla (12), e dunque

$$\Delta_1^{(0)}\tau = e^{2\tau}\Delta_1\tau. \tag{15}$$

Di più, dalle (14)

$$\Delta_2^{0}\tau = e^{2\tau}\Delta_2\tau. \tag{15'}$$

Poichè le linee $dx_0 = 0$ sono linee orarie delle particelle materiali, esse devono appartenere al cono delle direzioni spaziali, cioè $g_{11} < 0$ [3], a cui $g_{00} > 0$. Ponendo

$$V^2 = g_{00}, \quad H^2 = -g_{11}$$

le (11) si possono scrivere per mezzo delle (13), (14), (15) e (15') sotto la forma

$$\begin{cases} K - \Delta_1\tau - \Delta_2\tau = 0 \\ \tau_{01} + \tau_0\tau_1 = 0 \\ 2\dfrac{\tau_{11}}{H^2} - \dfrac{\tau_0^2}{V^2} + \dfrac{3\tau_1^2}{H^2} - e^{-2\tau} = 0 \\ 2\dfrac{\tau_{00}}{V^2} + \dfrac{3\tau_0^2}{V^2} - \dfrac{\tau_1^2}{H^2} + e^{-2\tau} = \mu\dfrac{\lambda_1^2}{H^2}. \end{cases} \tag{11'}$$

Osserviamo che, pur avendo fissato le linee coordinate, si può ancora disporre dei loro parametri x_0 ed x_1.

Nel sistema delle coordinate che abbiamo introdotto $\lambda_1^2 = -g_{11} = H^2$ e dall'ultima delle (11') od (11) si può ricavare la densità μ. Resta pertanto da considerare un sistema di tre equazioni in cui figurano tre funzioni incognite

---

(1) Cfr. EISENHART, loc. cit., p. 90, dove $R = -2K$.

(2) Vedasi LEVI-CIVITA, *Lezioni*, p. 239.

(3) Cfr. LEVI-CIVITA, *Lezioni*, p. 162: oppure EDDINGTON, *The Mathematical Theory of Relativity*. (Cambridge University Press, 1924), p. 22.

(di due variabili) e le loro derivate prime e seconde. Ovviamente l'integrale generale di un tal sistema contiene funzioni arbitrarie. Cerchiamo prima di trovarne alcune soluzioni particolari.

Supponiamo che τ dipenda soltanto da x_0 (tempo), cioè $\tau_1 = 0$. Per soddisfare alla seconda delle (11'), anche V deve essere una funzione della sola x_0, e le altre due delle (11') divengono

$$\begin{aligned} &K - \frac{(\tau')^2}{V^2} - \frac{\tau''}{V^2} + \frac{\tau' V'}{V^3} - \frac{\tau'}{V^2}\frac{H'}{H} = 0 \\ &\tau' + \frac{2H'}{H} + \frac{V^2 e^{-2\tau}}{\tau'} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

dove gli apici indicano derivazioni rispetto all'argomento x_0. La curvatura di una forma binaria (nell'ipotesi che V dipenda dalla sola x_0) è [1]

$$K = \frac{-H''}{HV^2} + \frac{H'}{H}\frac{V'}{V^3}. \tag{17}$$

Sostituendo questa espressione del valore di K nella prima delle (16) e semplificando il risultato per mezzo della seconda delle (16), otteniamo

$$\left\{(\tau')^2 + V^2 e^{-2\tau}\right\}\left\{\tau'' + \frac{1}{2}V^2 e^{-2\tau} + \frac{3}{2}(\tau')^2 - \frac{\tau' V'}{V}\right\} = 0. \tag{18}$$

Poichè V e τ dipendono dalla sola x_0, possiamo scegliere il parametro x_0 in tal modo che $V^2 = 4e^{2\tau}$. La (18) quindi diviene

$$2\tau'' + (\tau')^2 + 4 = 0,$$

da cui

$$\tau' = -2\tan(x_0 + c),$$

dove c è la costante d'integrazione. Con ulteriore integrazione, si ha la τ stessa,

$$e^{2\tau} = A^2 \cos^4(x_0 + c),$$

essendo A^2 costante. Dalla seconda delle (16), mediante integrazione semplice, ricaviamo

$$H^2 = B\tan^2(x_0 + c)$$

essendo B a priori una funzione arbitraria di x_1; la possiamo però porre uguale ad $1/A^2$ per mezzo di uno scelto conveniente del parametro x_1.

---

(1) V. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale.* (Zanichelli, Bologna, 1922), vol. I, p. 124.

Raccogliendo questi risultati, abbiamo che il ds^2 è dato da

$$(19) \qquad ds^2 = 4A^2 \cos^4 (x_0 + c) ds_0^2 - \tan^2 (x_0 + c) dx_1^2 - A^2 \cos^4 (x_0 + c)(dx_2^2 + \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2).$$

Dalla (17) abbiamo

$$K = \frac{-1}{A^2 \cos^6 (x_0 + c)},$$

ed avendo riguardo all'ultima delle (11′) segue (dopo una semplice calcolazione) che la densità μ è uguale a zero, cioè lo spazio è vuoto.

Vediamo che la (19) è la forma più generale soddisfacente alle (11′) per la quale τ è una funzione della sola x_0.

Cerchiamo ormai di risolvere le (11′) nell'ipotesi che τ sia una funzione della sola x_1,

$$(20) \qquad \tau = \tau(x_1), \quad \tau_0 \equiv 0.$$

Una soluzione, in questo caso, sarà la forma ben nota di SCHWARZSCHILD [1]

$$(21) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{a}{x_1}\right) dx_0^2 - \left(1 - \frac{a}{x_1}\right)^{-1} dx_1^2 - x_1^2 (dx_2^2 + \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2),$$

la quale corrisponde al caso fisico di uno spazio in cui la materia è distribuita simmetricamente intorno ad un punto, o in particolare concentrata in quel punto, il centro di simmetria. Noi troveremo che, nell'ipotesi (20), potremo integrare le (11′) e ricavarne la soluzione generale; vedremo inoltre che la (21) *è una soluzione particolare*; essa è però la soluzione generale se si aggiunge alla (20) la condizione che la densità μ si annulli [2].

Infatti dalla seconda delle (11′) segue (attraverso la (20)) che H, anche essa, dipende dalla sola x_1; con ciò la prima e la terza delle (11′) si riducono alle

$$(22) \qquad \begin{cases} KH^2 + \tau'' + \tau' \left(\dfrac{V^1}{V} - \dfrac{H^1}{H}\right) + (\tau^1)^2 = 0 \\ 2\tau'' - 2\tau' \dfrac{H'}{H} + 3(\tau')^2 - H^2 e^{-2\tau} = 0 \end{cases}$$

---

(1) Vedasi, per es., WEYL, loc. cit., p. 231.

(2) Ciò è già stato osservato da BIRKHOFF, *Relativity and Modern Physics.* (Harvard, University Press, Cambridge, U. S. A.), p. 210. Vedasi anche BRINKMANN, *Solutions of the Einstein equations for empty space,* lavoro presentato alla « American Mathematical Society » ed annunciato nel « Bulletin Am. Math. Soc. », vol. 32, (1926), p. 70.

dove gli apici indicano derivazioni rispetto all'argomento x_1. La seconda delle (22) si può scrivere

$$\tau' \frac{d}{dx_1}\left(\frac{e^{2\tau}}{H^2}\right) + \frac{e^{2\tau}}{H^2}(\tau_1^2 + 2\tau'') - 1 = 0. \tag{23}$$

Moltiplicando da $\tau' e^{\tau}$ ed integrando, ricaviamo

$$H^2 = \frac{e^{3\tau}\tau_1^2}{e^{\tau} - a} \tag{24}$$

essendo a la costante d'integrazione.

La prima delle (22) si può semplificare sostituendo al posto di K il suo valore [1].

$$K = \frac{V''}{VH^2} - \frac{H'}{H^3}\frac{V'}{V} \tag{17'}$$

ed eliminando H per mezzo della (24). Otteniamo

$$\begin{aligned} V'' - V'\left(\frac{1}{2}\tau' + \frac{\tau''}{\tau'} - \frac{1}{2}\frac{e^{\tau}\tau'}{e^{\tau} - a}\right) \\ - \frac{1}{2}(\tau')^2 + \frac{1}{2}\frac{e^{\tau}(\tau')^2}{e^{\tau} - a} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Le (24) e (25) definiscono V ed H come funzioni di τ essendo τ arbitraria. Ma x_1 è un parametro qualsiasi lungo le linee orarie e possiamo quindi scegliere x_1 in tal modo che si dia alla (25) un aspetto semplice. Ponendo pertanto

$$\tau = \log x_1, \quad e^{\tau} = x_1, \tag{26}$$

abbiamo dalla (24)

$$H^2 = \frac{x - a}{x}, \tag{24'}$$

e la (25) si riduce alla

$$V'' - V'\left\{\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2(x_1 - a)}\right\} + V\left\{\frac{1}{2x_1(x_1 - a)} - \frac{1}{2x_1^2}\right\} = 0. \tag{25'}$$

Possiamo integrare la (25') più facilmente se introduciamo come variabile

[1] Cfr. Bianchi, loc. cit., p. 124.

indipendente (al posto della x_1) le y definita dalla

$$y = \frac{1}{H} = \sqrt{\frac{x_1 - a}{x_1}}. \tag{27}$$

La (25′) così diviene

$$(1 - y^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial V}{\partial y} + 2V = 0. \tag{25''}$$

Vediamo subito che $V = y$, cioè

$$V^2 = \frac{1}{H^2} = \frac{x_1 - a}{x_1} \tag{28}$$

è una soluzione particolare della (25″). La sua soluzione generale si può ottenere ponendo

$$V = y\overline{V} \tag{29}$$

con ciò si passa dalla (25″), equazione del secondo ordine, alla

$$(1 - y^2)y\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2} + 2(1 - 2y^2)\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = 0, \tag{30}$$

la quale è essenzialmente del primo ordine. Nella (30) le variabili sono separabili, e si ha per integrazione

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\alpha}{y^2} + \frac{\alpha}{1 - y^2}$$

essendo α la costante d'integrazione, cioè una funzione della x_0. Con una seconda integrazione si ottiene $\overline{V}$, e dalla (29) si ha V,

$$V = y\overline{V} = \alpha\left(-1 + \frac{y}{2}\log\frac{1+y}{1-y}\right) + \beta y \tag{31}$$

dove β è una funzione qualsiasi di x_0. È necessario distinguere le due eventualità, α uguale o diversa da zero. Nel primo caso ($\alpha = 0$) possiamo disporre del parametro x_0 in tal modo che $\beta = 1$; e sostituendo al posto di y il suo valore dato dalla (27), abbiamo

$$V^2 = 1 - \frac{a}{x_1}$$

e la forma quaternaria non è altro che la (20). Si può verificare con una semplice calcolazione per mezzo dell'ultima delle (11′) che la densità μ si annulla.

Se α è diversa da zero, possiamo (mediante una scelta conveniente dell' x_0) uguagliarla ad 1. Abbiamo dunque dalle (31) e (27) che

$$V = -1 + \sqrt{\frac{x_1 - a}{x_1}} \log \beta (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a}) \tag{32}$$

e la forma quaternaria (2) è così

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left\{ -1 + \sqrt{\frac{x_1 - a}{x_1}} \log [\beta(x_0)(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a})] \right\}^2 dx_0^2 \\ & - \frac{x_1}{x_1 - a} dx_1^2 - x_1^2(dx_2^2 + \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2). \end{aligned} \tag{33}$$

Dall' ultima delle (11') ricaviamo la densità μ

$$\mu = \frac{1}{x_1^2 - \sqrt{x_1^3(x_1 - a)} \log \beta (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a})}. \tag{34}$$

Com' è naturale, il centro ($x_1 = 0$) è un punto critico, cioè la densità vi è infinita. Ma esistono degli altri punti critici definiti dalla

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1 - a} \log \beta (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a}) = 0. \tag{35}$$

Siccome le due curve

$$f(x_1) = \sqrt{\frac{x_1}{x_1 - a}}, \quad \varphi(x_1) = \log (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a})$$

hanno un solo punto d' intersezione per il quale è $x > a$, segue che la (35) ha un' unica soluzione per ogni β.

La massa totale del sistema esterno ad una sfera fissa sarebbe [1]

$$M = 4\pi \int_R^\infty \mu H x_1^2 dx_1$$

dove R, il valore di x_1 per la sfera data, è maggiore del valore critico di x_1 ottenuto dalla (35). Dalla (27) si ha

$$x_1^2 \mu H = \frac{x_1}{x_1 - a} \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1}{x_1 - a}} - \log \beta (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - a})}$$

---

(1) Cfr. EDDINGTON, loc. cit., p. 110.

oppure

$$x_1^2\mu H = -2\sqrt{x_1(x_1-a)}\frac{\partial}{\partial x_1}\log\left\{-\sqrt{\frac{x_1}{x_1-a}}+\log\beta(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1-a})\right\}.$$

Dunque

$$M = -8\pi\int_R^\infty \sqrt{x_1(x_1-a)}\frac{\partial}{\partial x_1}\log\left\{-\sqrt{\frac{x_1}{x_1-a}}+\log\beta(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1-a})\right\}dx_1.$$

Se x_1 è abbastanza grande, diciamo

$$x_1 > N$$

l'espressione sotto il segno d'integrazione è positiva, e quindi

$$|M| \geq 8\pi\sqrt{N(N-a)}\int_R^\infty \frac{\partial}{\partial x_1}\log\left\{-\sqrt{\frac{x_1}{x_1-a}}+\log\beta(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1-a})\right\}dx_1.$$

Segue pertanto che *la massa totale interna ad una crosta sferica cresce indefinitamente al crescere del raggio della sfera che la limita esternamente.*

Il nostro lavoro, fin qui, mostra che *ogni soluzione delle* (11′) *per la quale* τ *dipende da una sola variabile è riducibile ad una delle tre forme* (19), (20), o (33). Resta pertanto da considerare il caso che τ sia una funzione di ambedue le variabili x_0 ed x_1. Una tale soluzione si potrebbe ottenere direttamente dalle (11′) se supponessimo che H dipenda solamente dalla x_1. Ma prima mostriamo che ciò è un'ipotesi naturale.

Infatti dalla prima delle (11′), attraverso le seconda e terza possiamo ricavare algebricamente la derivata seconda covariante τ_{00}. Avremo poi tre equazioni che definiranno esplicitamente le tre derivate seconde covarianti τ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ come funzioni delle derivate prime di τ e delle altre incognite (V ed H), da cui potremo ottenere due altre equazioni, le condizioni d'integrabilità. Vedremo che si potrà soddisfare una di queste due condizioni col prendere H come funzione della sola x_1.

Introduciamo U

(36) $$U = e^\tau, \quad \tau = \log U.$$

Abbiamo dunque (¹)

$$\tau_i = \frac{U_i}{U}, \quad \tau_{ij} = \frac{U_{ij}}{U} - \frac{U_i U_j}{U^2}$$

(37) $$\Delta_1\tau = \frac{\Delta_1 U}{U^2}, \quad \Delta_2\tau = \frac{\Delta_2 U}{U} - \frac{\Delta_1 U}{U^2}.$$

(¹) Cfr. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 241.

Dalle (11′) possiamo esprimere U_{ij} come funzioni delle altre incognite; le troviamo senza difficoltà:

(38-1) $$U_{00} = \left(\frac{\Delta_1 U + 1}{2u} + KU\right) V^2$$

(38-2) $$U_{01} = 0$$

(38-3) $$U_{11} = \left(\frac{\Delta_1 U + 1}{2U}\right) H^2.$$

Le condizioni d'integrabilità sono (¹)

(39) $$U_{ijk} - U_{ikj} = -\sum_{\alpha=0}^{1} U_\alpha R^\alpha_{ijk},$$

dove U_{ijk} sono le derivate terze covarianti rispetto alla (12) ed R^α_{ijk} i simboli di Riemann della (12) stessa. Questi sono (essendo la (12) a due dimensioni) della forma

(40) $$R^\alpha_{ijk} = K(\delta^\alpha_k g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{ik}) \qquad (\alpha,\ i,\ j,\ k = 0,1),$$

dove, come solito, $\delta^\alpha_k = 0$, $\alpha \neq k$, $\delta^\alpha_\alpha = 1$, e le g_{ij} sono i coefficienti della (12), oppure

(41) $$g_{00} = V^2, \quad g_{01} = 0, \quad g_{11} = -H^2.$$

Le (39) si possono quindi scrivere

(39′) $$U_{ijk} - U_{ikj} = K(U_j g_{ik} - U_k g_{ij}).$$

Per derivazione covariante delle (38) ed eliminazione delle derivate seconde per mezzo delle (38) stesse possiamo ricavare le espressioni di U_{ijk}; sostituendole nelle (39′) troviamo le due equazioni seguenti:

(42.1) $$\{U^2 K + \Delta_1 U + 1\} \frac{\partial H}{\partial x_0} = 0,$$

(42.2) $$\{U^2 K + \Delta_1 U + 1\} \frac{\partial \log V}{\partial x_1} + 2UU_1 K + U^2 K_1 - \frac{U_1}{U}(\Delta_1 U + 1) = 0$$

essendo K_1 la derivata $\dfrac{\partial K}{\partial x_1}$.

Le soluzioni delle (11′), oppure delle (38), devono soddisfare alle (42); supponiamo che H dipenda dalla sola x_1,

(43) $$\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \quad H = H(x_1).$$

(¹) Vedasi Levi-Civita, loc. cit., p. 212.

Con ciò la (38.2) si riduce alla

$$\frac{\partial U_0}{\partial x_1} - \frac{U_0}{V}\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0,$$

e per integrazione abbiamo

$$U_0 = V\varphi(x_0).$$

Se fosse $\varphi = 0$, avremmo un caso già trattato; possiamo dunque disporre del parametro x_0 in tal modo che

$$U_0 = V. \tag{44}$$

Per mezzo delle (43) e (44) possiamo semplificare le (38.1) e (38.3), oppure integrare l'ultima. Infatti, dalla (38.3) si ricava subito

$$2\frac{\partial U_1}{\partial x_1} - U_1\left(\frac{\partial \log H^2}{\partial x^1} - \frac{U_1}{U}\right) - 2\frac{H^2}{U} = 0.$$

Dopo moltiplicazione per $\frac{U_1 U}{H^2}$, questa espressione diviene un differenziale esatto e noi troviamo per integrazione rispetto alla x_1

$$U\left(2 - \frac{U_1^2}{H^2}\right) = f(x_0) \tag{45}$$

essendo $f(x_0)$ la costante d'integrazione, cioè una funzione arbitraria della x_0. Possiamo scrivere la (45) sotto la forma

$$\frac{UU_1}{\sqrt{2U^2 - fU}} = H,$$

ed una seconda integrazione rispetto alla x_1 dà

$$\sqrt{2U^2 - fU} + \frac{f}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}\sqrt{\frac{2U}{f}} = 2\int H dx_1 + F(x_0), \tag{46}$$

dove $F(x_0)$ è una funzione arbitraria della x_0.

Resta da trattare la (38.1). Sostituendo al posto di K il suo valore dato da (17') e semplificandola per mezzo delle (44) e (45) troviamo

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U^2 V_1^2}{H^2}\right) + \frac{fU_0 V_1}{U} = 0. \tag{47}$$

Supponiamo che f sia costante; noi abbiamo quindi per derivazione della (46) che

$$(48)\qquad \begin{aligned} U_0 &= F'(x_0)\,\frac{\sqrt{2U^2 - fU}}{2U} \\ U_1 &= H(x_1)\,\frac{\sqrt{2U^2 - fU}}{U}. \end{aligned}$$

Essendo $V = U_0$, segue dalle (48) che

$$(49)\qquad V_1 = \frac{fHF'}{4U^2}$$

e la (47) viene soddisfatta identicamente. Intanto se noi prendiamo H come funzione arbitraria della x_1, F della x_0, ed f una costante e se definiamo $U = U(x_0, x_1)$ implicitamente dalle (46) e $V = V(x_0, x_1)$ dalla (44), la forma

$$(50)\qquad \begin{aligned} ds^2 = V^2 dx_0^2 - H^2 dx_1^2 - \\ - U^2(dx_2^2 + \operatorname{sen}^2 x_2 dx_3^2) \end{aligned}$$

soddisfa alle condizioni fondamentali (11′).

Attraverso la (17′) troviamo che la curvatura K (della forma binaria $x_0 x_1$) è

$$K = \frac{-f}{U^3}$$

e segue dall'ultima delle (11′) che la densità μ si annulla, cioè che lo spazio è vuoto.

Tengo a ringraziare il prof. Levi-Civita per l'interesse che Egli ha preso alla preparazione di questo lavoro.

Zurigo, 17 giugno 1926.

Sulle reti e congruenze coniugate e sulle trasformazioni delle superficie per congruenze (W).

Memoria di PASQUALE CALAPSO (a Messina).

La presente ricerca ha per iscopo di osservare alcune proprietà generali delle congruenze (W) in relazione alla teoria delle reti e congruenze coniugate.

Il punto da cui si parte è il problema di GUICHARD, cioè *supponendo tracciato sopra una data superficie* S *un doppio sistema di linee fra loro coniugate* (réseau di GUICHARD) *costruire pei punti di* S *una congruenza* (G) *in guisa, che chiamando corrispondenti un punto di* S *e un raggio di* (G) *quando si appartengono, le sviluppabili della congruenza* (G) *corrispondano al detto sistema coniugato.*

La detta rete e la congruenza (G) soddisfacenti alla condizione del problema si diranno con GUICHARD tra loro *coniugate* e da questa definizione si intendono escluse le reti focali.

Se (g) è una rete di S si ottiene nel modo più generale una congruenza ad essa coniugata colla costruzione di GUICHARD, cioè *si formi una rete parallela alla data e sia* Σ *la superficie sostegno della nuova rete; la concongiungente i punti corrispondenti di* S *e* Σ *genera la congruenza richiesta.*

Sussiste il teorema inverso pure dovuto a GUICHARD, cioè *se due superficie si corrispondono per parallelismo di normali, la congiungente i punti corrispondenti genera una congruenza che è coniugata alla rete comune alle due superficie.*

Un' altra soluzione del problema è stata data recentemente da FUBINI [1], e si riassume nell' enunciato seguente: *se* x, y, z, t *sono le coordinate omogenee del punto che descrive la superficie* S *riferita alle asintotiche* u *e* v, *si unisca il punto* (x, y, z, t) *col punto:*

$$(\rho x)_{uv}, \quad (\rho y)_{uv}, \quad (\rho z)_{uv}, \quad (\rho t)_{uv}$$

essendo ρ *funzione arbitraria; tale congiungente genera una congruenza coniugata ad una rete di* S.

[1] Cfr. FUBINI, *Alcuni risultati di geometria proiettivo differenziale.* Lincei, anno 1923, 2° sem., pag. 325.

Il punto $(\rho x)_{uv}$ è qui chiamato il punto K di FUBINI.

Naturalmente la rete della superficie S coniugata alla congruenza costruita col metodo di FUBINI dipende dalla scelta della funzione ρ; ma qui mi son proposto la questione inversa, supponendo assegnata *a priori* la rete e fissata una congruenza ad essa coniugata; ho così ottenuto il teorema seguente:

Se una congruenza (G) *è coniugata ad una assegnata rete della superficie* S, *esiste per ogni raggio in un sol modo il punto* K *di Fubini.*

Nelle presenti ricerche ho anche considerato la congruenza che deducesi da (G) trasformando ogni volta la retta G mediante la polarità di LIE relativa al punto della superficie S, che corrisponde a G; ho chiamato con FUBINI la nuova congruenza *duale* di (G). Ritrovo quindi il teorema di FUBINI cioè: *se una congruenza* (G) *è coniugata ad una rete* (g) *della superficie* S, *il sistema di sviluppabili della congruenza duale ammette come corrispondente in* S *un sistema di linee anch'esse coniugate, in generale distinte da* (g).

Procedendo nella ricerca ho trovato che *se una congruenza* (G) *è coniugata ad una rete della superficie, la sua duale è armonica (nel senso di Guichard) ad una rete della superficie;* cioè non soltanto alle sviluppabili corrisponde una rete, ma di più i fuochi su ogni raggio sono le intersezioni del raggio colle tangenti alle linee coniugate che corrispondono alle sviluppabili.

La nuova conclusione a cui sono pervenuto si basa sopra una proposizione generale, prevedibile geometricamente, e sempre sfuggita finora, la quale viene qui stabilita in modo rigoroso; e cioè:

Se fra i punti P *di una superficie* S *e le rette* $\overline{\mathrm{G}}$ *di una congruenza* $(\overline{\mathrm{G}})$ *esiste una corrispondenza in guisa che la retta* $\overline{\mathrm{G}}$ *giace sul piano tangente in* P *ma non passa per* P, *e se in tale corrispondenza alle sviluppabili di* $(\overline{\mathrm{G}})$ *corrisponde su* S *un sistema coniugato, avverrà di conseguenza che i fuochi su* $\overline{\mathrm{G}}$ *sono le intersezioni di questo raggio colle tangenti alle linee coniugate che corrispondono alle sviluppabili di* $(\overline{\mathrm{G}})$.

Nella seconda parte del presente lavoro viene considerata la teoria delle trasformazioni delle superficie per congruenze (W) in relazione al problema delle reti e congruenze coniugate.

Fra le superficie corrispondenti ad S per parallelismo di normali esiste in infiniti modi una superficie Σ tale che alle assintotiche di S corrisponde in Σ un sistema coniugato; la rete di S, che è comune ad S ed alla superficie Σ, è qui chiamata una rete (M).

Le superficie S e Σ sono *associate* per deformazione infinitesima (BIANCHI, *Lezioni*, anno 1903, vol. II, pag. 8).

Se P ed H sono i punti corrispondenti di S e Σ ed O è un punto fisso dello spazio, si formi la somma geometrica OH' dei segmenti OP ed OH; la retta PH' genera una particolare congruenza coniugata alla rete (M) che qui diciamo *associata* a questa rete.

Il teorema, che ho qui stabilito, mediante il quale la considerazione delle reti (M) si connette con le trasformazioni per congruenze (W) si enuncia nel modo seguente:

Siano S *ed* S_1 *due superficie corrispondentisi per congruenza* (W); *per ogni punto di* S *si costruisca il piano che passa per una tangente assintotica ed è parallelo alla tangente corrispondente di* S_1 *e si costruisca il piano analogo per l'altra tangente assintotica di* S; *la retta comune a questi due piani genera una congruenza* (G) *associata ad una rete* (M) *di* S. Dopo ciò per i teoremi di DARBOUX (*Leçons*, anno 1896, quatrième partie, pag. 71) segue che: *La congruenza analoga per i punti di* S_1 *è associata ad una rete* (M_1) *di* S_1 *la cui corrispondente in* S *è armonica ad* (M).

La rete (M) della superficie S data dalla costruzione del teorema precedente si dirà legata alla trasformazione (W) che porta S in S_1; ma è da osservare che essa è una *qualunque* rete (M) di S, nel senso che qualunque rete (M) di S è sempre legata ad una *conveniente* trasformazione (W) di questa superficie; giacchè è noto (BIANCHI, l. c. pag. 52) che nella trasformazione di una congruenza W, di cui S è focale, la deformazione infinitesima di S è arbitraria.

Infine, il teorema di permutabilità di BIANCHI (l. c. pag. 71) in relazione alla congruenza associata alla rete (M) assume la forma seguente: siano S_1, S_2 due superficie distinte contigue rispettivamente ad S per trasformazioni (W), e siano (G_1) e (G_2) le congruenze rispettivamente associate alle reti (M) relative alle trasformazioni considerate; *se* (G_1') *è una congruenza pei punti di* S_1, *associata ad una rete* (M_1) *di questa superficie e tale che la retta* G_1' *è parallela al piano* G_1 G_2, *la congruenza* (W) *legata ad* (M_1) *trasforma la superficie* S_1 *nella quarta superficie del teorema di permutabilità*. Inversamente ogni superficie S' che con S, S_1, S_2 si può considerare come quarta superficie del teorema di permutabilità, è deducibile colla costruzione ora indicata.

§ 1. **Reti e congruenze coniugate.**

1. Ricordiamo che le coordinate

$$x(uv), \quad y(uv), \quad z(uv)$$

di un punto di una superficie S, riferita alle assintotiche, soddisfano ad un sistema simultaneo della forma

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

in cui le funzioni a, b, p, q soddisfano alle condizioni

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = \dfrac{\partial q}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \dfrac{\partial(bp)}{\partial u} + b\dfrac{\partial p}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 b}{\partial v^2} + \dfrac{\partial(bq)}{\partial v} + a\dfrac{\partial a}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial^2 a}{\partial v^2} + \dfrac{\partial(bp)}{\partial v} + p\dfrac{\partial b}{\partial v} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \dfrac{\partial(ap)}{\partial u} + q\dfrac{\partial q}{\partial u}. \end{cases}$$

2. Si può in infiniti modi considerare sulla superficie un doppio sistema di linee fra loro coniugate (*réseau di Guichard*); nel caso presente un sistema siffatto è rappsesentato da una equazione quadratica differenziale di forma ortogonale; cioè

$$\text{(3)}\qquad \lambda du^2 - \mu dv^2 = 0$$

in cui λ e μ sono qualunque, purchè diverse da zero nella regione che si considera.

3. Fissata sulla superficie S la rete (3), si ottiene nel modo più generale una congruenza coniugata alla rete colla costruzione di GUICHARD; cioè: *si formi una rete parallela alla data e sia Σ la superficie-sostegno della nuova rete; la congiungente i punti corrispondenti di* S *e* Σ *genera la congruenza richiesta.*

Sussiste il teorema inverso stabilito pure dal GUICHARD, e cioè:

Se due superficie si corrispondono per parallelismo di normali, la congiungente i punti corrispondenti genera una congruenza che è coniugata alla rete comune alle due superficie.

4. Per tradurre analiticamente la costruzione espressa dal primo di questi teoremi, basta esprimere che le coordinate ξ, η, ζ del punto della superficie Σ soddisfano ad equazioni della forma

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \omega\dfrac{\partial x}{\partial u} + \theta\lambda\dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \theta\mu\dfrac{\partial x}{\partial u} + \omega\dfrac{\partial x}{\partial v}; \end{cases}$$

in queste le funzioni ω e θ sono soggette soltanto alle condizioni d'integrabilità, cioè

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u}-\dfrac{\partial(\theta\lambda)}{\partial v}+b\cdot\theta\mu-q\cdot\theta\lambda=0 \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v}-\dfrac{\partial(\theta\mu)}{\partial u}+p\cdot\theta\lambda-a\cdot\theta\mu=0\,; \end{cases}$$

l'eliminazione di ω conduce ad un'equazione alle derivate parziali seconde per la funzione θ.

5. Formata nel modo ora detto una congruenza (G) coniugata alla rete (3) della superficie S, possiamo proporci inversamente la ricerca di tutte le reti coniugata a (G), e parallele a (3).

Osserviamo a tale scopo che una rete siffatta ha le coordinate della forma

$$\bar\xi=\frac{x-t\xi}{1-t},$$

donde osservando la (4) si deduce

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar\xi}{\partial u}=\dfrac{1-t\omega}{1-t}\dfrac{\partial x}{\partial u}-\dfrac{\theta\lambda t}{1-t}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{x-\xi}{(1-t)^2}\dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\bar\xi}{\partial v}=-\dfrac{\theta\mu t}{1-t}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{1-t\omega}{1-t}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{x-\xi}{(1-t)^2}\dfrac{\partial t}{\partial v}; \end{cases}$$

poichè queste debbono ridursi a combinazioni lineari di $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ solamente, e poichè per definizione il raggio della congruenza non è tangente alla superficie S, risultano come condizioni necessarie e sufficienti

$$\frac{\partial t}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial t}{\partial v}=0$$

cioè

$$t=\text{cost.}$$

dunque: *si ottengono tutte le reti coniugate a* (G) *e parallele a* (3) *come luogo di un punto che divide in rapporto costante il segmento dei punti corrispondenti di* S *e* Σ.

§ 2. Il teorema di Fubini.

6. Una seconda costruzione delle congruenze coniugate alla rete (3) si ottiene applicando il teorema di FUBINI.

Per venire ai risultati dell'Autore introduciamo le coordinate omogenee, poniamo cioè

$$x = \frac{x'}{t}, \quad y = \frac{y'}{t}, \quad z = \frac{z'}{t}$$

e proponiamoci di trovare una funzione ρ in guisa che il punto

$$(7) \qquad (\rho x')_{uv}\,; \quad (\rho y')_{uv}\,; \quad (\rho z')_{uv}\,; \quad (\rho t')_{uv}\,;$$

appartenga al raggio G.

Un punto siffatto, di cui ora confermiamo l'esistenza, sarà qui chiamato *un punto* K.

Per la dimostrazione consideriamo i parametri direttori della retta che unisce il punto della superficie S col punto (7); detti l, m, n questi parametri si trova con facile calcolo

$$(8) \qquad l = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Phi\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

in cui si è posto

$$(9) \qquad \Phi = \frac{1}{t\rho}.$$

Il problema è così ridotto alla ricerca di due funzioni σ e Φ in guisa da aversi

$$(10) \qquad \xi = x + \sigma\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Phi\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right).$$

Se ora esprimiamo che sono soddisfatte le (4), otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali in Φ e σ

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} &= a\frac{\partial \Phi}{\partial u} - b\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq\right)\Phi + \frac{\theta\lambda}{\sigma} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} &= \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right)\Phi + \frac{\omega - 1}{\sigma} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} &= q\frac{\partial \Phi}{\partial v} - p\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \left(\frac{\partial p}{\partial u} + ap\right)\Phi + \frac{\theta\mu}{\sigma} \end{aligned}\right.$$

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = - a\sigma \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = - q\sigma \end{cases}$$

e si vede con facile calcolo che questo è *illimitatamente integrabile* in base alle (2) e (5) per ipotesi verificate.

L'integrazione di questo sistema introduce quattro costanti arbitrarie che sono i valori iniziali di σ, Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$; ma fissato il valore iniziale di σ, le (10) sono atte a definire i valori iniziali di Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ e quindi rimane una sola costante arbitraria moltiplicativa in σ.

Ne risulta frattanto l'esistenza del punto K richiesto.

Importa osservare che cambiando il valore iniziale σ_0 in $c\sigma_0$, i nuovi valori iniziali di Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, che si deducono dalle (10), sono quelli di prima divisi per c; segue che la soluzione delle (11), corrispondente alla nuova soluzione σ ed in guisa che siano soddisfatte le (10), è $\frac{\Phi}{c}$ essendo c una costante.

Ora se scriviamo nella forma definitiva le coordinate del punto K, otteniamo le espressioni

$$(13) \qquad \xi' = x + \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \Phi \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - \dfrac{2}{\Phi}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}$$

ma queste non mutano se si cambia Φ in $\frac{\Phi}{c}$, dunque: *se una congruenza* (G) *è coniugata alla rete* (3) *della superficie, esiste per ogni raggio in un solo modo il punto* K *di Fubini.*

7. Inversamente definiamo mediante le (13) un punto K, che facciamo corrispondere al punto (x, y, z) di S e riteniamo nelle (13) per Φ una funzione arbitraria; si ha: *la congiungente il punto della superficie col punto* K *genera una congruenza coniugata ad una conveniente rete della superficie.*

Infatti i parametri direttori del raggio così costruito hanno le espressioni

$$l = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Phi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

colle analoghe in l ed m; donde segue facilmente

$$\frac{\partial l}{\partial u}=\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}-\left(\frac{\partial a}{\partial v}+bp\right)\Phi\right]\frac{\partial x}{\partial u}+$$
$$+\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}-a\frac{\partial\Phi}{\partial u}+b\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\left(\frac{\partial b}{\partial v}+bq\right)\Phi\right]\frac{\partial x}{\partial v}+al$$

$$\frac{\partial l}{\partial v}=\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}-q\frac{\partial\Phi}{\partial v}+p\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\left(\frac{\partial p}{\partial u}+ap\right)\Phi\right]\frac{\partial x}{\partial u}+$$
$$+\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}-\left(\frac{\partial q}{\partial u}+bp\right)\Phi\right]\frac{\partial x}{\partial v}+ql.$$

Indi assumendo una soluzione σ delle (12) e ponendo

$$\xi=x+\sigma l$$

saranno soddisfatte relazioni della forma (4) e rimane così dimostrato il teorema. Risulta altresì che l'equazione differenziale della rete è

$$\text{(14)}\qquad\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}-a\frac{\partial\Phi}{\partial u}+b\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\left(\frac{\partial b}{\partial v}+bq\right)\Phi\right]du^2-\\&-\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}-q\frac{\partial\Phi}{\partial v}+p\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\left(\frac{\partial p}{\partial u}+ap\right)\Phi\right]dv^2=0.\end{aligned}\right.$$

§ 3. Trasformazione di Lie.

8. Lasciamo per un momento l'ipotesi che la congruenza sia coniugata ad una rete della superficie S, e consideriamo una congruenza (Γ) in condizioni generali che si può ritenere generata dalla congiungente il punto (x, y, z) della superficie col punto

$$\text{(15)}\qquad x+m\frac{\partial x}{\partial u}+n\frac{\partial x}{\partial v}+h\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v};$$

trasformando ogni volta il raggio di (Γ) passante per (x, y, z) mediante la polarità di LIE relativa a questo punto si ottiene una nuova congruenza (Γ') che è detta da FUBINI la *duale di* (Γ).

Così per ogni punto (u, v) della superficie si ha un raggio di (Γ') situato sul piano tangente, le cui intersezioni colle tangenti assintotiche di S hanno rispettivamente le espressioni

$$x' = x + \frac{h}{n}\frac{\partial x}{\partial u} \tag{16}$$

$$x'' = x + \frac{h}{m}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{17}$$

9. Vogliamo altresì trascrivere le equazioni delle sviluppabili delle congruenze (Γ) e (Γ'); se indichiamo queste rispettivamente con

$$A du^2 + B du dv + C dv^2 = 0 \tag{18}$$

$$A' du^2 + B' du dv + C' dv^2 = 0 \tag{19}$$

si hanno per i coefficienti A, B, C, A', B', C' le espressioni

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{n}{h}\right) + b\frac{m}{h} - a\frac{n}{h} + \frac{\partial b}{\partial v} + bq - \frac{n^2}{h^2}\\ B &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{h}\right)\\ C &= -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{h}\right) - p\frac{n}{h} + q\frac{m}{h} - \frac{\partial p}{\partial u} - ap + \frac{m^2}{h^2}\end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned} A' &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{n}{h}\right) - b\frac{m}{h} - a\frac{n}{h} - \frac{n^2}{h^2}\\ B' &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{h}\right)\\ C' &= -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{h}\right) + p\frac{n}{h} + q\frac{m}{h} + \frac{m^2}{h^2}.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

10. Accenniamo al problema di FUBINI di ricercare i casi in cui le sviluppabili di (Γ) e (Γ') si corrispondano.

Se $B \neq 0$, essendo $B' = B$ la condizione del problema si traduce nelle equazioni

$$A = A', \quad B = B';$$

che danno

$$-\frac{m}{h} = \frac{1}{2b}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{q}{2}, \quad -\frac{n}{h} = \frac{1}{2p}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{a}{2}; \tag{22}$$

cioè la congruenza (Γ) è generata costruendo per il punto della superficie S la prima direttrice di WILCZYNSKI; oppure m, n, h qualunque se la superficie S è una quadrica.

Se invece è $B=0$, sarà anche $B'=0$, e la condizione del problema si traduce nell'equazione unica

$$AC' - A'C = 0.$$

Qui abbandoniamo questa circostanza particolare, e procediamo oltre nello studio delle proprietà che non richiedono la corrispondenza delle sviluppabili di (Γ) e (Γ').

11. Supponiamo che alle sviluppabili di (Γ) corrisponda una rete della superficie S; lo stesso sarà di (Γ'), e viceversa.

Questo teorema, dato da FUBINI, risulta subito dalle formule precedenti dall'uguaglianza $B=B'$.

Ma qui vogliamo procedere nella questione per rilevare una circostanza notevole.

Nel caso presente esiste una funzione Φ tale da aversi

$$m:n:h = \frac{\partial\Phi}{\partial v} : \frac{\partial\Phi}{\partial u} : -\Phi; \tag{23}$$

segue che le (16) e (17) prendono la forma

$$x' = x - \frac{\Phi}{\frac{\partial\Phi}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u} \tag{24}$$

$$x'' = x - \frac{\Phi}{\frac{\partial\Phi}{\partial v}} \frac{\partial x}{\partial v}. \tag{25}$$

Per interpretare queste formule assumiamo sopra S un nuovo sistema di linee coordinate del tutto arbitrario ponendo

$$u = u(\alpha\beta), \quad v = v(\alpha\beta)$$

e prendiamo l'intersezione della retta Γ' con la tangente alla linea β della superficie; si avranno per le coordinate di tale punto espressioni della forma

$$\overline{x}' = x - \tau \frac{\partial x}{\partial \alpha};$$

ma si dovrà pure avere

$$\overline{x}' = \frac{x' - t x''}{1 - t}.$$

Identificando i due valori di $\overline{x}'$ si hanno per h e t le equazioni

$$\frac{\Phi}{1-t}=\tau\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha};\quad -\frac{t\Phi}{1-t}=\tau\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha};$$

segue

$$\Phi=\tau\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$$

e perciò

$$\overline{x}'=x-\frac{\Phi}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}}\frac{\partial x}{\partial\alpha}. \tag{26}$$

Similmente per il punto comune a Γ' ed alla tangente alla linea α si ha:

$$\overline{x}''=x-\frac{\Phi}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\beta}}\frac{\partial x}{\partial\beta}. \tag{27}$$

Se ora prendiamo come α e β i parametri delle sviluppabili di Γ' e teniamo presenti i teoremi di GUICHARD, le (26) e (27) esprimono che *sopra ogni raggio di* (Γ') *i fuochi sono le intersezioni del raggio con le tangenti alle linee coniugate che corrispondono alle sviluppabili di* (Γ').

Il risultato definitivo si può dunque enunciare così:

Se una congruenza (Γ) *è coniugata ad una rete della superficie, la sua duale* (Γ') *è armonica* (nel senso di GUICHARD) *ad una rete della superficie.*

Le due reti della superficie S sono in generale distinte.

12. Il superiore procedimento chiarisce altresì una circostanza notevole, che sembra sia sfuggita finora, quantunque la cosa sia anche deducibile geometricamente; e cioè: *se fra i punti* P *di una superficie* S *e le rette* Γ' *di una congruenza* (Γ') *esiste una corrispondenza in guisa che la retta* Γ' *giace sul piano tangente alla superficie nel punto* P, *e se in tale corrispondenza alle sviluppabili di* (Γ') *corrisponde su* S *un sistema coniugato, avverrà di conseguenza che i fuochi su* Γ' *sono le intersezioni di questo raggio colle tangenti in* P *alle linee coniugate che corrispondono alle sviluppabili di* (Γ').

13. Osserviamo infine che l'equazione delle sviluppabili di (Γ') è

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}-a\frac{\partial\Phi}{\partial u}-b\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)du^2-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}-p\frac{\partial\Phi}{\partial u}-q\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)dv^2=0. \tag{28}$$

§ 4. Le reti (M) e le trasformazioni per congruenze (W).

14. *Chiamiamo rete* (M) *la rete comune alla superficie* S *e ad una superficie* Σ *che sia sostegno di una rete* (H) *parallela alle assintotiche di* S.

Qui il parallelismo avviene nel senso che in punti corrispondenti di S e Σ la tangente alla linea u di S è parallela alla tangente alla linea v di Σ, e la tangente alla linea v di S è parallela alla tangente alla linea u di Σ.

Per formare le equazioni caratteristiche di una rete (M) basta porre nelle (4) $\omega = 0$ e prendendo per comodità $\theta = \sigma$ le (5) danno

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = b\mu, \quad \frac{\partial\mu}{\partial u} = p\lambda. \tag{29}$$

Importa notare che nel caso presente le (4) hanno la forma

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \sigma\lambda \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = \sigma\mu \frac{\partial x}{\partial u} \tag{30}$$

donde

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

il che conferma che il sistema (H) è una rete.

Per ogni soluzione λ e μ delle (29) si ha una rete (M) di S. Se P ed H sono i punti corrispondenti di S e Σ ed O è un punto fisso dello spazio, si formi la somma geometrica OH' dei segmenti OP ed OH; la retta PH' genera una particolare congruenza coniugata alla rete (M), che qui diciamo *associata* a questa rete.

15. La considerazione delle reti (M) si connette con le trasformazioni per congruenze (W), in base al seguente teorema che qui stabiliremo.

Siano S *ed* S_1 *due superficie corrispondentisi per congruenza* (W); *per ogni punto di* S *si costruisca il piano che passa per una tangente assintotica ed è parallelo alla tangente corrispondente di* S_1 *e si costruisca il piano analogo per l'altra tangente assintotica di* S; *la retta comune a questi due piani genera una congruenza* (G) *associata ad una rete* (M) *di* S. *La congruenza analoga per i punti di* S_1 *è associata ad una rete* (M_1) *di* S_1 *la cui corrispondente in* S *è armonica ad* (M).

Per la dimostrazione manteniamo le superiori notazioni per gli elementi di S e adottiamo le notazioni analoghe munite dell'indice per gli elementi della superficie S_1; si hanno per le coordinate del punto di S_1 equazioni della forma

$$x_1 = x + h\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{31}$$

Si sa da un teorema di FUBINI che le funzioni h e k soddisfano alle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= -pk - \frac{h}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \\ \frac{\partial k}{\partial u} &= -bh - \frac{k}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}; \end{aligned}\right. \tag{32}$$

la funzione Φ dovendo determinarsi in guisa che S_1 sia superficie focale della congruenza.

Se deriviamo le (31), tenendo conto delle (32), otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left(\frac{\partial h}{\partial u} + ah + 1\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{k}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + k\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{h}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial k}{\partial v} + qk + 1\right)\frac{\partial x}{\partial v} + h\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

donde esprimendo la condizione del problema, troviamo ancora l'equazione

$$\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial v} + \frac{k}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{h}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + ah + qk + 2 = 0.$$

Segue che si potrà porre

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} &= -ah - \frac{k}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - 1 + \Omega \\ \frac{\partial k}{\partial v} &= -qk - \frac{h}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - 1 - \Omega. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Per comodità di procedimento possiamo ritenere che Φ soddisfa alle equazioni (11) e (12) con $\theta = \sigma$, essendo λ, μ, ω definite dalle equazioni stesse; esprimendo allora che

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial k}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial k}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)$$

troviamo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = -\frac{2}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\Omega - \frac{h\lambda}{\Phi} + \frac{k}{\Phi\sigma}(\omega - 1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{2}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\Omega + \frac{k\mu}{\Phi} - \frac{h}{\Phi\sigma}(\omega - 1).$$

Infine esprimendo la relazione

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)$$

si trova

$$\frac{2(\omega-1)}{\Phi\sigma}=0$$

dunque: *condizione necessaria e sufficiente affinchè le* (31) *rappresentino il passaggio da una focale all'altra di una congruenza* (W) *è che* h *e* k *verifichino le* (32), *essendo* Φ *una solnzione dell'equazione di Moutard*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}=\left(\frac{\partial q}{\partial u}+bp\right)\Phi. \tag{35}$$

Ciò premesso, prendiamo una soluzione qualunque di questa equazione, e poniamo come prima il sistema

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}=a\frac{\partial \Phi}{\partial u}-b\frac{\partial \Phi}{\partial v}+\left(\frac{\partial b}{\partial v}+bq\right)\Phi+\lambda\\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}=\left(\frac{\partial q}{\partial u}+bp\right)\Phi\\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}=q\frac{\partial \Phi}{\partial v}-p\frac{\partial \Phi}{\partial u}+\left(\frac{\partial p}{\partial u}+ap\right)\Phi+\mu,
\end{aligned}\right. \tag{36}$$

essendo λ e μ definite dalle equazioni stesse; la congruenza (W) sarà così rappresentata dalle (31), ove si ponga per h e k una soluzione del sistema completo

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial u}=-ah-\frac{k}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}-1+\Omega\\
&\frac{\partial h}{\partial v}=-pk-\frac{h}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\\
&\frac{\partial k}{\partial u}=-bh-\frac{k}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\\
&\frac{\partial k}{\partial v}=-qk-\frac{h}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}-1-\Omega\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial u}=-\frac{2}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\Omega-\frac{h\lambda}{\Phi}\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial v}=-\frac{2}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\Omega+\frac{k\mu}{\Phi}.
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

Tenendo conto di queste, le (33) diventano

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \Omega \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{k}{\Phi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Phi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\Omega \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{h}{\Phi}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Phi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right).$$

Se poniamo per brevità

$$l = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \Phi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

con le analoghe in m ed n, abbiamo nel caso presente

$$\text{(38)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \Omega \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{kl}{\Phi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\Omega \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{hl}{\Phi} \end{aligned} \right.$$

$$\text{(39)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u} &= al + \lambda \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial l}{\partial v} &= ql + \mu \frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

Frattanto la congruenza pei punti di S, secondo la costruzione indicata dal teorema, è generata dalla retta i cui parametri direttori sono l, m, n e questa per la (14) è coniugata alla rete

$$\text{(40)} \qquad \lambda du^2 - \mu dv^2 = 0$$

essendo λ e μ date dalle (36). Ma da queste eliminando Φ si trovano le (29) ed è così dimostrata la prima parte del teorema.

16. Osserviamo ancora le espressioni delle derivate seconde di x_1 y_1 z_1 che si deducono derivando le (38) ed opportunamente ordinando; si trova

$$\text{(41)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= a_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + b_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} &= p_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + q_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

in cui

$$\text{(42)} \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= a - \frac{2}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{h\lambda}{\Phi\Omega}, & b_1 &= -b + \frac{k\lambda}{\Phi\Omega} \\ p_1 &= -p - \frac{h\mu}{\Phi\Omega}, & q_1 &= q - \frac{2}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{k\mu}{\Phi\Omega} \end{aligned} \right.$$

ed infine

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\Phi\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\partial v}=\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\Phi\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}. \tag{43}$$

17. La seconda parte del teorema risulta osservando che le funzioni trasformatrici nel passaggio inverso da S_1 ad S sono

$$\Phi'=\frac{1}{\Phi},\qquad \lambda'=\frac{\lambda}{\Phi^2\Omega},\quad \mu'=-\frac{\mu}{\Phi^2\Omega}$$

$$h'=-\frac{h}{\Omega},\quad k'=\frac{k}{\Omega},\qquad \Omega'=\frac{1}{\Omega}$$

giacchè si verifica senza difficoltà che esse soddisfanno al sistema analogo a (36) e (37); dopo ciò si conclude che la congruenza pei punti di S_1 avente i parametri direttori (43) è associata alla rete (M_1) di S_1 rappresentata dall'equazione

$$\lambda' du^2-\mu' dv^2=0;$$

questa ha in S come corrispondente la rete armonica a (40).

Importa anche osservare che come coordinate del punto di Σ si può prendere

$$\xi=\sigma l,\quad \eta=\sigma m,\quad \zeta=\sigma n$$

giacchè le (30) sono soddisfatte; per le coordinate del punto della superficie Σ_1 analoga Σ si può prendere

$$\xi_1=-tl,\quad \eta_1=-tm,\quad \zeta_1=-tn$$

essendo t definita per quadratura dalle equazioni coesistenti

$$\frac{\partial t}{\partial u}=\left(\frac{h\lambda}{\Phi\Omega}-a\right)t,\quad \frac{\partial t}{\partial v}=-\left(\frac{k\mu}{\Phi\Omega}+q\right)t,$$

giacchè si deduce

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial u}=\frac{t\lambda}{\Omega}\frac{\partial x_1}{\partial v},\quad \frac{\partial\xi_1}{\partial v}=-\frac{t\mu}{\Omega}\frac{\partial x_1}{\partial u};$$

dunque: *disponendo delle costanti di traslazione si può fare in modo che i punti corrispondenti delle superficie Σ e Σ_1 siano allineati con un punto fisso.*

Importa osservare che la rete (M) della superficie S, che secondo il teorema dimostrato viene legata alla congruenza (W), è una *qualunque* rete (M) di S; giacchè qualunque siano λ e μ purchè soddisfacenti le (29) il sistema (36) è illimitatamente integrabile.

18. Terminiamo queste generalità notando il significato geometrico della funzione Φ.

Siano $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ le coordinate di LELIEUVRE relative alla superficie S e $\bar{\xi}_1$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\zeta}_1$ le analoghe per S_1; le funzioni $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ soddisfano ad un sistema della forma

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = A\dfrac{\partial\bar{\xi}}{\partial u} - b\dfrac{\partial\xi}{\partial v} + C\bar{\xi} \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} = \left(\dfrac{\partial q}{\partial u} + bp\right)\xi \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial^2 v} = -p\dfrac{\partial\xi}{\partial u} + A'\dfrac{\partial\bar{\xi}}{\partial v} + C'\bar{\xi} \end{cases}$$

in cui q, b, p sono le funzioni stesse che intervengono nelle (1).

Confrontando le formule di BIANCHI, che danno la seconda superficie focale, con le (31) si ha

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1\zeta - \bar{\eta}\,\zeta_1 &= h\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v} \\ &= h\left(\zeta\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial u} - \bar{\eta}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial u}\right) + k\left(\bar{\eta}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \bar{\zeta}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

e le analoghe, donde essendo t un conveniente fattore di proporzionalità possiamo scrivere

$$(45)\qquad \bar{\xi}_1 = h\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u} - k\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial v} + t\bar{\xi}, \quad \left[t = \frac{k}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{h}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \Omega\right].$$

Si sa che se R indica la funzione da cui dipende la deformazione infinitesima di S, legata alla trasformazione, si dovrà avere

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi_1}{\partial u} &= -\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u} + (\bar{\xi} - \bar{\xi}_1)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} \\ \frac{\partial\bar{\xi}_1}{\partial v} &= \frac{\partial\xi}{\partial v} - (\xi + \bar{\xi}_1)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial v}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella prima di queste il valore (45) ed osservando le (44) si ottiene

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial h}{\partial u} + Ah + 1 + t + \frac{h}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\right]\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u} - \left[\frac{\partial k}{\partial u} + bh + \frac{k}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\right]\frac{\partial\xi}{\partial v} + \\ &\qquad + \left[\frac{\partial t}{\partial u} + (t-1)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} - k\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) + hC\right]\bar{\xi} = 0 \end{aligned}$$

colle analoghe in η e ζ; segue

$$\frac{\partial k}{\partial u} + bh + \frac{k}{R}\frac{\partial R}{\partial u} = 0.$$

Similmente

$$\frac{\partial h}{\partial v} + pk + \frac{h}{R}\frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Ed ora, confrontando con le (32), si trova

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u}; \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial v};$$

cioè *la funzione* Φ *coincide con quella da cui dipende la deformazione infinitesima di* S *legata alla trasformazione.*

§ 5. **Il teorema di permutabilità.**

19. Siano S_1, S_2 due superficie distinte contigue rispettivamente ad S per trasformazione (W) e siano

$$\Phi_1, \quad h_1, \quad k_1, \quad \Omega_1$$

le funzioni trasformatrici relative al passaggio da S ad S_1; siano ancora

$$\Phi_2, \quad h_2, \quad k_2, \quad \Omega_2$$

le funzioni trasformatrici relative al passaggio da S ad S_2.

Le reti (M) di S legate alle trasformazioni le supponiamo in generale distinte, in corrispondenza a due soluzioni distinte (λ_1, μ_1) e (λ_2, μ_2) delle (29).

Si sa dal teorema di BIANCHI che la quarta superficie S' del teorema di permutabilità è rappresentata dalle equazioni

$$(46) \quad \begin{aligned} x' = x &+ \rho\left[A + h_1\frac{k_2}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - h_2\frac{k_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} - h_1h_2\left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} - \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \\ &+ \rho\left[B + k_2\frac{h_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} - k_1\frac{h_2}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + k_1k_2\left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial v} - \\ &- \rho C\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\end{aligned}$$

in cui

$$A = \Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_1, \quad B = \Omega_1 k_2 - \Omega_2 k_1, \quad C = h_1 k_2 - h_2 k_1$$

e ρ indica una soluzione del sistema

$$(47) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial u} = \rho \dfrac{\partial}{\partial u} \log(\Phi_1 \Phi_2) - \rho^2 \dfrac{\partial}{\partial u} \log\left(\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}\right) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial v} = \rho \dfrac{\partial}{\partial v} \log(\Phi_1 \Phi_2) + \rho^2 \dfrac{\partial}{\partial v} \log\left(\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}\right). \end{cases}$$

Se scriviamo la (46) sotto la forma

$$x' = x_1 + h_1' \frac{\partial x_1}{\partial u} + k_1' \frac{\partial x_1}{\partial v}$$

avremo con facile calcolo

$$h_1' = -\frac{h_1}{\Omega_1} + \frac{\rho}{\Omega_1}\left[A + h_1 k_2 \left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right) - h_1 h_2 \left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} - \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)\right]$$

$$k_1' = \frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{\rho}{\Omega_1}\left[B + k_1 k_2 \left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right) - k_1 h_2 \left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} - \frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)\right]$$

ed esprimendo le relazioni

$$\frac{\partial h_1'}{\partial v} = -p_1 k_1' - \frac{h_1'}{\Phi_1'}\frac{1}{\Phi_1'}$$
$$\frac{\partial k_1'}{\partial u} = -b_1 h_1' - \frac{k_1'}{\Phi_1'}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}$$

si trova

$$(48) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Phi_1'}\dfrac{\partial \Phi_1'}{\partial v} = (\rho - 1)\dfrac{1}{\Phi_1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial v} - \rho \dfrac{1}{\Phi_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \dfrac{1}{\Phi_1'}\dfrac{\partial \Phi_1'}{\partial u} = \rho \dfrac{1}{\Phi_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u} - (\rho + 1)\dfrac{1}{\Phi_1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u}. \end{cases}$$

20. Noi ci proponiamo di caratterizzare la rete (M) di S_1 legata alla trasformazione che porta S_1 in S'

A tale scopo indichiamo con (G_1) e (G_2) le congruenze rispettivamente associate alle reti (λ_1, μ_1) e (λ_2, μ_2) della superficie S, secondo la costruzione espressa al n.° 15, e cerchiamo una congruenza (G_1') coniugata alla superficie S_1 tale che la retta G_1' sia parallela al piano $G_1 G_2$.

Si dovrà allora trovare una funzione Φ_1' in guisa da aversi

$$\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}-\Phi_1'\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}+Al_1+Bl_2=0 \tag{49}$$

(colle analoghe in y_1 e z_1) con A e B convenienti funzioni.

Esprimendo che le (49) sono soddisfatte si trovano per Φ_1' le tre equazioni

$$\begin{gathered}\Omega_1\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}-\frac{k_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}-\frac{h_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}-\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}+\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\Omega_1-\\ -\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{k_1}{\Phi_1}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right)^2-\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{h_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}+A\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}+B\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\Omega_1\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}-\frac{h_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}-\frac{k_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}-\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}-\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\Omega_1-\\ -\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{h_1}{\Phi_1}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)^2-\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{k_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}+A\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}+B\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}=0,\end{gathered}$$

$$k_1\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}+h_1\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}+\Phi_1'+\Phi_1'\left(\frac{k_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}+\frac{h_1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)=A\Phi_1+B\Phi_2$$

che combinate opportunamente danno

$$\begin{aligned}\Omega_1\left(\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}+\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right)&=B\Phi_2\left(\frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}-\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\right)\\ \Omega_1\left(\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}+\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)&=B\Phi_2\left(\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}-\frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right).\end{aligned}$$

Se ora poniamo

$$\rho'=\frac{B\Phi_2}{\Omega_1\Phi_1'}$$

le precedenti assumono la forma

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\Phi_1'}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}&=(\rho'-1)\frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}-\rho'\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\\ \frac{1}{\Phi_1'}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}&=\rho'\frac{1}{\Phi_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}-(\rho'+1)\frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}.\end{aligned}\right. \tag{50}$$

Se più particolarmente vogliamo che la congruenza (G_1') sia associata ad una rete (M) di S_1, dobbiamo esprimere le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_1'}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right)+\frac{1}{\Phi_1'^2}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}-\frac{1}{\Phi_1^2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_1'}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\right)+\frac{1}{\Phi_1'^2}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1'}{\partial v}-\frac{1}{\Phi_1^2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}=0\,;$$

si ritrovano così per la funzione ρ' le equazioni (47).

Dunque *la rete* (M) *di* S_1 *legata alla trasformazione che porta* S_1 *in* S' *è caratterizzata dalla condizione che ammette una congruenza* (G_1') *ad essa associata in cui la retta* G_1' *è parallela al piano* G_1G_2.

Messina, 18 maggio 1924.

Sulle funzioni convesse.

Memoria di Pietro Tortorici (a Palermo).

1. Una funzione $f(x)$ di una variabile x, definita in (a, b), si dice, secondo Jensen [1], *convessa* in questo intervallo se, essendo x_1, x_2 due punti qualsivogliano interni ad esso, si ha

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

e, in particolare, la funzione si dice *lineare* in (a, b) se la precedente relazione sussiste sempre col segno $=$.

Le funzioni convesse posseggono notevolissime proprietà segnalate in gran parte dallo stesso Jensen nella Memoria citata; volendo qui notarne qualcuna nuova non credo inutile esporre qualche osservazione anche sulle proprietà conosciute.

Il Landau [2] definisce $f(x)$ funzione convessa in (a, b) se, essendo x_1, x_2, x_3 tre punti qualsivogliano di (a, b) tali che sia

$$x_1 < x_2 < x_3,$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 & 1 \\ f(x_2) & x_2 & 1 \\ f(x_3) & x_3 & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$$

Manifestamente una funzione convessa secondo Landau lo è pure secondo Jensen e, non appena si faccia ricorso alla proprietà fondamentale delle funzioni convesse limitate superiormente di essere continue, è quasi immediato che, inversamente, una funzione convessa secondo Jensen lo è pure secondo Landau.

---

(1) Cfr. J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes.* Math. Ann., T. 30, (1906), pag. 175

(2) Cfr. E. Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* Berlin, J. Springer, (1916).

Io mi propongo di provare l'equivalenza delle due definizioni senza ricorrere alla continuità della funzione della quale proprietà dò in seguito una dimostrazione diversa, nella forma, da quella data da JENSEN e riportata dai trattatisti [1]; infine, riprendendo la definizione di funzione convessa di più variabili, dimostro, ciò che credo sia non noto ed interessante, che una tale funzione è continua rispetto all'insieme delle sue variabili.

2. TEOREMA. *Una funzione definita e limitata superiormente in un intervallo* (a, b), *se è convessa secondo Jensen è pure convessa secondo Landau.*

Se è possibile, essendo $f(x)$ convessa secondo JENSEN in (a, b), siano x_1, ξ, x_2 tre punti di (a, b) tali che si abbia:

$$x_1 < \xi < x_2, \quad \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 & 1 \\ f(\xi) & \xi & 1 \\ f(x_2) & x_2 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Senza restrizione può supporsi $x_1 = a$, $x_2 = b$; posto allora

$$L(x) = \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(x) & x & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} \qquad (a < b)$$

si ha $L(\xi) > 0$. Si dimostrerà che ciò è assurdo se la funzione $f(x)$ è limitata superiormente in (a, b).

Intanto, per l'ipotesi, in ogni punto j, interno ad (a, b), della forma

$$j = a + \frac{k}{2^n}(b - a) \qquad (k,\ n \text{ numeri interi})$$

si ha $L(j) \leq 0$. Sia J l'insieme dei punti j.

Essendo $L(\xi) > 0$, se

$$f(a) \leq f(b) \quad \text{si ha} \quad f(\xi) > f(a)$$

mentre se

$$f(a) > f(b) \quad \text{si ha} \quad f(\xi) > f(b).$$

Invero la disuguaglianza $L(\xi) > 0$ può scriversi

$$(b - a)f(\xi) > (b - \xi)f(a) + (\xi - a)f(b).$$

[1] Cfr. G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Berlin, J. Springer, (1925), pagg. 51, 63, 224.

Sia ora ε un numero positivo tale che i punti $\xi - \varepsilon$, $\xi + \varepsilon$ siano ambedue interni ad (a, b): poichè per ipotesi

$$f(\xi - \varepsilon) + f(\xi + \varepsilon) \geq 2f(\xi),$$

è vera una almeno delle due disuguaglianze:

$$f(\xi - \varepsilon) \geq f(\xi), \quad f(\xi + \varepsilon) \geq f(\xi)$$

e ciò prova che esistono in (a, b) quanti si vogliano punti η pei quali è

$$f(\eta) \geq f(\xi).$$

Se $f(a) = f(b)$, per ogni punto η si ha:

$$(b - a)f(\eta) > (b - a)f(a) = (b - \eta)f(a) + (\eta - a)f(b)$$

cioè

$$L(\eta) > 0;$$

se $f(a) < f(b)$, si ponga:

$$\zeta = \xi + \frac{(b - a)f(\xi) - f(b)(\xi - a) - f(a)(b - \xi)}{f(b) - f(a)};$$

si ha $\zeta > \xi$ e perciò esistono in (a, b) quanti si vogliono punti η appartenenti all'intervallo (a, ζ) e nei quali si ha:

$$L(\eta) > 0;$$

se $f(a) > f(b)$ si ponga analogamente:

$$\zeta = \xi + \frac{(b - a)f(\xi) - f(b)(\xi - a) - f(a)(b - \xi)}{f(b) - f(a)}$$

si ha $\zeta < \xi$ ed esistono in (a, b) quanti si vogliono punti η, interni a (ζ, b), nei quali è ancora:

$$L(\eta) > 0.$$

In conclusione l'ipotesi $L(\xi) > 0$ implica l'esistenza di un insieme H infinito di punti η, diversi da ξ, contenuti in (a, b) e in (a, ζ) o in (ζ, b) in ciascuno dei quali si ha

$$L(\eta) > 0, \quad f(\eta) \geq f(\xi).$$

Manifestamente gll insiemi J e H sono disgiunti.

Dico allora che, se $f(a) \leq f(b)$, a è punto limite di H, mentre se $f(a) \geq f(b)$ è b punto limite di H.

Per fissare le idee, si supponga $f(a) \leq f(b)$ e si osservi che H è denso in ogni punto di (a, b) appartenente a $(2\xi - \zeta, \zeta)$.

Infatti il punto medio di $(2\xi - \zeta, \zeta)$ è ξ e di ogni coppia di punti $\xi - \varepsilon$, $\xi + \varepsilon$ interni ad (a, b) e a $(2\xi - \zeta, \zeta)$ uno almeno, per quanto si è visto, appartiene ad H.

Se in tale punto H non fosse denso dovrebbe esistere un intervallo ω contenuto in (a, b) e in $(2\xi - \zeta, \zeta)$ non contenente alcun punto di H, ciò che è assurdo perchè l'intervallo ω, simmetrico di ω rispetto a ξ, sarebbe tutto costituito da punti di H, mentre esso, come qualsiasi intervallo, contiene infiniti punti di J.

Adunque ogni punto comune ad (a, b) e $(2\xi - \zeta, \zeta)$ è punto limite di H e però se $2\xi - \zeta \leq a$, a è punto limite di H.

Se $2\xi - \zeta > a$ sia σ un numero positivo tale che

$$\sigma < \zeta - \xi,$$

esiste allora un punto ξ_1 di H tale che sia

$$\xi_1 < \xi - \sigma, \quad f(\xi_1) \geq f(\xi).$$

Dalla esistenza di ξ_1, ragionando come per ξ, si dedurrà quello dell'intervallo $(2\xi_1 - \zeta, \zeta)$ avente per punto medio ξ_1, contenente il precedente $(2\xi - \zeta, \zeta)$ e nel quale H è denso in tutti i punti che appartengono pure ad (a, b).

Si ha ora:

$$2\xi_1 - \zeta < 2(\xi - \sigma) - \zeta = (2\xi - \zeta) - 2\sigma$$

e però l'estremo sinistro $2\xi_1 - \zeta$ dista dall'estremo sinistro $2\xi - \zeta$ del precedente intervallo più di 2σ e dal punto ξ più di 3σ. Se $2\xi_1 - \zeta \leq a$, a è punto limite di H, in caso diverso si sceglierà un punto ξ_2 di H tale che $\xi_2 < \xi - 3\sigma$ e si dedurrà l'esistenza di un intervallo $(2\xi_2 - \zeta, \zeta)$ l'estremo sinistro del quale dista da ξ più di 7σ.

Così continuando, dopo un numero finito h di operazioni come quelle descritte, si perverrà per la prima volta ad un intervallo $(2\xi_h - \zeta, \zeta)$ l'estremo sinistro del quale, distante da ξ più di $(2^h - 1)\sigma$, è non maggiore di a e ciò fa concludere che a è punto limite di H.

Allora, per ogni numero θ positivo, nell'intervallo $(a, a + \theta)$ esiste un punto η in cui si ha $f(\eta) \geq f(\xi)$.

Ciò posto sia K un numero positivo arbitrario e si determini un numero naturale k tale che sia:

$$2^k[f(\xi) - f(a)] + f(a) > K;$$

si ponga

$$\theta = \frac{b-a}{2^k}$$

e sia $a + \eta_1$ un punto di H interno a $(a, a+\theta)$.

La classe di punti

$$a + \eta_1, \quad a + 2\eta_1, \dots \quad a + 2^k\eta_1$$

è contenuta in (a, b) e poichè $f(x)$ è convessa secondo JENSEN e si ha

$$f(a + \eta_1) > f(\xi),$$

si ha pure:

$$f(a + 2\eta_1) \geq 2f(a + \eta_1) - f(a) \geq 2[f(\xi) - f(a)] + f(a)$$
$$f(a + 2^2\eta_1) \geq 2f(a + 2\eta_1) - f(a) \geq 2^2[f(\xi) - f(a)] + f(a)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(a + 2^k\eta_1) \geq 2f(a + 2^{k-1}\eta_1) - f(a) \geq 2^k[f(\xi) - f(a)] + f(a) > K.$$

L'ipotesi $L(\xi) > 0$ implica dunque che $f(x)$ non sia limitata superiormente in (a, b), contrariamente alla premessa.

3. TEOREMA. *Una funzione* f(x) *definita e limitata superiormente in un intervallo se ivi è convessa è pure continua.*

Se è possibile la funzione $f(x)$, limitata superiormente e convessa in (a, b), sia discontinua nel punto ξ interno ad (a, b) e sia ω l'oscillazione di $f(x)$ in questo punto. Si ha:

$$\omega > 0.$$

Allora l'oscillazione di $f(x)$ in qualunque intorno racchiudente ξ non è minore di ω. Si consideri il massimo numero m soddisfacente alle condizioni

$$m \leq \xi - a, \quad m \leq b - \xi$$

ed inoltre, un numero naturale n tale sia

$$n - 1 > \frac{K}{\omega}$$

K essendo un numero positivo arbitrario prefissato, ed ancora il numero i definito da:

$$i = \frac{m}{n} < \frac{m\omega}{K}.$$

Sia Δ l'intorno di centro ξ ed ampiezza i ed x_1, x_2 due punti di Δ pei quali si abbia:

$$f(x_1) - f(x_2) \ngtr \omega .$$

Posto:

$$x_2 - x_1 = \delta$$

si ha

$$|x_2 - x_1| = |\delta| \leq i, \quad x_2 = x_1 + \delta$$

e i punti

$$x_1, \quad x_1 + \delta, \quad x_1 + 2\delta, \ldots, \quad x_1 + (n-1)\delta$$

sono tutti interni ad (a, b).

Infatti se $\delta > 0$ si ha:

$$x_1 + (n-1)\delta \leq \xi + i + (n-1)i = \xi + ni = \xi + m \leq b$$

e se $\delta < 0$

$$x_1 + (n-1)\delta = x_1 - (n-1)|\delta| \geq \xi - i - (n-1)i = \xi - ni = \xi - m \geq a.$$

A causa della convessità di $f(x)$ si ha:

$$f(x_1 + \delta) - f(x_1) \geq \omega$$

$$f(x_1 + 2\delta) - f(x_1 + \delta) \geq f(x_1 + \delta) - f(x_1), \quad f(x_1 + 2\delta) - f(x_1 + \delta) \geq \omega$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_1 + (n-1)\delta) - f(x_1 + (n-2)\delta) \geq f(x_1 + (n-2)\delta) - f(x_1 + (n-3)\delta),$$

$$f(x_1 + (n-1)\delta) - f(x_1 + (n-2)\delta) \geq \omega$$

e sommando membro a membro le disuguaglianze aventi a secondo membro ω si deduce

$$f(x_1 + (n-1)\delta) - f(x_1) > K$$

ciò che contraddice l'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia limitata in (a, b).

4. Sia ora f una funzione reale del punto $P(x, y, \ldots. z)$ variabile in un dominio Ω a n dimensioni semplicemente connesso e convesso; secondo JENSEN, la funzione $f(P)$ dicesi *convessa in* Ω se, essendo $P_1(x_1, y_1, \ldots. z_1)$, $P_2(x_2, y_2, \ldots. z_2)$ due punti qualsivogliano di Ω e P il punto medio del segmento P_1P_2 si ha:

$$f(P) \leq \frac{1}{2}\{ f(P_1) + f(P_2) \}.$$

La funzione $f(P)$ è allora convessa, manifestamente, rispetto a ciascuna delle sue n variabili; non sussiste però la proprietà inversa come lo stesso JENSEN ha mostrato con un esempio.

Riguardo alla continuità, si può osservare subito che la funzione $f(P)$ è continua rispetto a ciascuna delle sue variabili ma, di più, sussiste il seguente

Teorema. *La funzione* f(x) *convessa e limitata superiormente nel dominio* Ω *ad* n *dimensioni semplicemente connesso e convesso è ivi continua rispetto all'insieme delle sue variabili.*

Per semplicità si supporrà il dominio Ω a due dimensioni.

Sia dunque $f(x, y)$ una funzione convessa in Ω; si ponga

$$\begin{aligned} x &= at + b \\ y &= ct + d \end{aligned} \qquad (a, b, c, d \text{ costanti})$$

e si supponga che, variando t in un certo intervallo (τ_1, τ_2), il punto $P(x, y)$ appartenga a Ω. La funzione $F(t)$ definita ponendo:

$$F(t) = f(at + b, \ ct + d),$$

è funzione convessa di t in (τ_1, τ_2).

Infatti, se t_1, t_2 sono due punti di quest'ultimo intervallo e $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ i punti corrispondenti di Ω, si ha:

$$F\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = f\left(a\frac{t_1 + t_2}{2} + b, \ c\frac{t_1 + t_2}{2} + d\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)] = \frac{1}{2}[F(t_1) + F(t_2)].$$

Ciò posto, se è possibile, la funzione $f(x, y)$ sia discontinua nel punto (ξ, η) interno a Ω e sia ω l'oscillazione di $f(x, y)$ in questo punto. Se C_ρ è un dominio circolare di raggio arbitrario ρ e centro (ξ, η) contenuto in Ω, l'oscillazione di $f(x, y)$ in C_ρ non è minore di ω.

Sia δ la distanza del punto (ξ, η) dalla frontiera di Ω (o di un dominio limitato contenuto in Ω e contenente (ξ, η)) e, scelto ad arbitrio un numero positivo $K > \omega$, si ponga

$$(1) \qquad \rho = \frac{\delta\omega}{2K}.$$

Esistono allora in C_ρ due punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) tali che

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \geq \omega$$

e inoltre, detta d la loro distanza, si ha:

$$d < 2\rho.$$

Posto

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$

sulla retta contenente i punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) la $f(x, y)$ è una funzione convessa $F(t)$ di t e si ha:

$$F(1) - F(0) \geq \omega.$$

Si osservi che la distanza di ciascuno dei punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) dalla frontiera di Ω è, in forza di (1), maggiore di $\frac{\delta}{2}$ e però, se n è quel numero naturale soddisfacente alle limitazioni

$$n - 1 \leq \frac{\delta}{4\rho} < n,$$

il punto (x_n, y_n), con

$$x_n = x_1 + (n-1)(x_2 - x_1),$$
$$y_n = y_1 + (n-1)(x_2 - x_1),$$

è interno a Ω perchè si ha:

$$\sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} = (n-1)d < \frac{\delta}{4\rho}\, d < \frac{\delta}{4\rho} \cdot 2\rho = \frac{\delta}{2}.$$

D'altra parte si ha:

$$F(1) - F(0) \geq \omega,$$
$$F(2) - F(1) \geq \omega,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F(n) - F(n-1) \geq \omega,$$

e però

$$F(n) - F(0) \geq n\omega > \frac{\delta\omega}{4\rho} = \frac{K}{2},$$

cioè

$$f(x_n, y_n) > f(x_1, y_1) + \frac{K}{2}$$

ciò che è assurdo perchè, data l'arbitrarietà di K, la funzione $f(x, y)$ non sarebbe limitata in Ω.

Il teorema enunciato è quindi stabilito.

5. Per le funzioni di più variabili si potrebbe mettere la definizione di funzione convessa sotto altre forme.

Così ad es. la funzione di n variabili $f(x, y, ... z)$ può definirsi convessa nel dominio Ω a n dimensioni, semplicemente connesso e convesso, se per ogni sistema di $n+1$ punti di Ω, $(x_i, y_i, ... z_i)$ $(i=1, 2, ..., n+1)$ si ha:

$$f\left(\frac{\sum_1^{n+1}{}_i x_i}{n+1}, ..., \frac{\sum_1^{n+1}{}_i x_i}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \sum_1^{n+1}{}_i f(x_i, y_i, ... z_i)$$

ma non è difficile provare che questa definizione è equivalente a quella di JENSEN.

Si potrebbe ancora dare una definizione analoga a quella di LANDAU per le funzioni di una variabile ma, a quanto pare, senza alcun vantaggio dal punto di vista della semplicità.

Palermo, aprile 1926.

Formule fondamentali della geometria sopra una varietà algebrica.

Memoria di GIACOMO ALBANESE (a Catania).

Nella geometria sopra una varietà algebrica V_d a d dimensioni, capita continuamente di dovere esprimere i vari generi aritmetici di una V_{d-1} legata a più altre, in funzione dei vari generi aritmetici di quest'altre.

Nella prima parte di questo lavoro determino i principali di questi legami.

Indico con $\mathcal{A}^i$, il genere aritmetico della $(i-1)^{esima}$ varietà caratteristica A^i, di una varietà A a $d-1$ dimensioni di V_d; con $\mathcal{BC}$, il genere aritmetico della varietà d'intersezione di due varietà B e C. Ed ecco le formule più notevoli che dimostro.

1°) Se $A = B + C$, si ha:

$$\mathcal{A}^i = (\mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{BC})^i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\mathcal{B}^{\alpha+\gamma}\mathcal{C}^{\beta+\gamma} \quad \text{con } \alpha+\beta+\gamma = i$$

la somma essendo estesa, come per il polinomio di LEIBNITZ, a tutte le soluzioni intere positive o nulle dell'equazione $\alpha+\beta+\gamma = i$, oppure:

$$\mathcal{A}^i = \sum_0^i{}_r \sum_{i-r}^i{}_s \binom{i}{r}\binom{r}{i-s}\mathcal{B}^r\mathcal{C}^s.$$

Per bene intendere queste formule, occorre però convenire, che se nello sviluppo del secondo membro, vi compare un termine $\mathcal{B}^u\mathcal{C}^v$ con $u+v = d+t$ e $t \geq 1$, non corrispondente perciò, ad una effettiva varietà B^uC^v, bisogna porre: $\mathcal{B}^u\mathcal{C}^v = (-1)^{t-1}$.

È bene però notare che la somma di tutti questi possibili termini, con $u+v > d$ è equivalente a $(-1)^{d+1}\sum_0^{2i-d-1}{}_h(-1)^h\binom{i}{h}2^h$, sicchè le stesse formule si possono scrivere sotto la forma:

$$\mathcal{A}^i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\mathcal{B}^{\alpha+\gamma}\mathcal{C}^{\beta+\gamma} + (-1)^{d+1}\sum_0^{2i-d-1}{}_h(-1)^h\binom{i}{h}2^h$$

la prima somma essendo estesa a tutte le soluzioni α, β, γ, positive o nulle, della equazione $\alpha+\beta+\gamma=i$ con $\gamma \leq d-i$, oppure:

$$\mathfrak{A}^i = \sum_{r,s} \binom{i}{r}\binom{r}{i-s} \mathfrak{B}^r \mathfrak{C}^s + (-1)^{d+1} \sum_{0}^{2i-d-1}{}_h (-1)^h \binom{i}{h} 2^h$$

la prima somma essendo estesa a tutte le soluzioni r, s, intere positive o nulle dell'equazione $i \leq r+s \leq d$.

Le prime due relazioni si prestano bene in uno sviluppo teorico, mentre le ultime due servono meglio in un calcolo pratico, quando dati i valori numerici di d ed i si vuol calcolare l'effettiva espressione di $\mathfrak{A}^i$.

2°) Se $A=B-C$, si ha:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})(1-\mathfrak{C}+\mathfrak{C}^2 \ldots\ldots + (-1)^{d-1}\mathfrak{C}^{d-1}) + (-1)^d$$

ed in generale:

$$\mathfrak{A}^i = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})^i \sum_{0}^{d-i}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}^t + (-1)^{d-i+1}.$$

3°) Più interessanti sono però le formule che esprimono i vari generi $\mathfrak{A}^i$ di una varietà $A=kB$, in funzione dei vari generi $\mathfrak{B}^i$ di B, e precisamente si ha:

$$\mathfrak{A}^i = \sum_{0}^{d-i}{}_t \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s}\binom{sk}{t+i} \mathfrak{B}^{i+t} + \sum_{0}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s}\binom{sk-1}{d},$$

che per $i=1$ diventa:

$$\mathfrak{A} = \sum_{1}^{d}{}_t \binom{k}{t} \mathfrak{B}^t + \binom{k-1}{d}.$$

Nella seconda parte applico le formule trovate alle ricerche di due notevoli gruppi di formule.

Prima trovo le relazioni che legano il genere $\mathfrak{A}$ di una varietà A, ai vari generi aritmetici $\mathfrak{A}'^i$ del sistema $|A'|$ aggiunto ad $|A|$ e precisamente trovo:

$$\mathfrak{A}'^d - \mathfrak{A}'^{d-1} + \mathfrak{A}'^{d-2} - \ldots\ldots + \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + 2P_a - d - 1 \quad \text{se } d \text{ è dispari}$$

$$\mathfrak{A}'^d - \mathfrak{A}'^{d-1} + \mathfrak{A}'^{d-2} - \ldots\ldots - \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - d - 1 \quad \text{se } d \text{ è pari,}$$

P_a indicando il genere aritmetico della varietà ambiente V_d.

Nella seconda applicazione trovo invece tutte le relazioni che legano i caratteri Ω_0, Ω_1, $\Omega_2, \ldots,$ Ω_{d-1}, rispettivamente grado virtuale, genere curvilineo, genere aritmetico superficiale,...., genere aritmetico $(d-1)$-dimensionale, del sistema canonico $|D|$ di V_d. E queste relazioni — che formano la parte più importante del presente lavoro — si possono distinguere in due gruppi:

$$\text{I)} \qquad \sum_{0}^{2k} {}_r (-1)^r \binom{d-r}{2k+1-r} \Omega_r + \binom{d}{2k} + 1 = 2\Omega_{2k+1},$$

per qualsiasi valore di k tra zero e $\left[\frac{d-1}{2}\right]$, e dove per uniformità si è posto $P_a = \Omega_d$:

$$\text{II)} \qquad \sum_{0}^{2k-1} {}_r (-1)^r \binom{d-r}{2k-r} \Omega_r + \binom{d}{2k-1} - 1 = 0$$

per qualsiasi valore di k tra 1 e $\left[\frac{d}{2}\right]$.

In ogni gruppo si hanno formule indipendenti ma le formule del II gruppo sono conseguenza lineare di quelle del I gruppo.

Per $d = 2$, le I e le II si riducono alla nota formula $\Omega_0 = \Omega_1 - 1$ che, sopra una superficie, lega il grado ed il genere delle curve canoniche.

Per $d = 3$ le I e le II si riducono alla formula di PANNELLI [1] $3\Omega_0 + 2 = 2\Omega_1$ e alla formula di SEVERI [2] $\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 = 2P_a$.

Per $k =$ al massimo valore possibile, a seconda che d è dispari o pari, le I e le II danno:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots + \Omega_{d-1} + d + 1 = 2P_a \qquad d \text{ dispari}$$
$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots - \Omega_{d-1} + d - 1 = 0 \qquad d \text{ pari}$$

entrambe dovute al SEVERI [3].

In tutti gli altri casi le I e le II danno formule essenzialmente nuove.

Per es.: per le V_4 [4] si ha la nuova formula $2\Omega_0 + 1 = \Omega_1$; per le V_5 si hanno le due nuove formule $5\Omega_0 + 2 = 2\Omega_1$, $2\Omega_1 + 2\Omega_3 = 3\Omega_2 + 7$; ecc.

In generale per Ω_0 ed Ω_1, sopra una V_d qualunque si ha:

$$\Omega_1 = \frac{d}{2}\Omega_0 + 1.$$

---

(1) PANNELLI, *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni*, Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XV, 1906.

(2) SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXVII, 1919, n.° .

(3) SEVERI, loc. cit., n.° 30.

(4) ALBANESE, *Sul genere aritmetico delle varietà a quattro dimensioni*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXXIII, 1924.

Le formule dei due gruppi I e II suppongono superata la famosa questione relativa alla doppia definizione del genere aritmetico di una varietà, priva di punti multipli.

Come è noto allo stato attuale della Scienza è necessario definire questo numero in doppio modo ([1]).

Nella prima definizione si chiama genere aritmetico p_n di V_n, l'ultimo coefficiente della sua formula di postulazione, scritta in modo opportuno, come sarà detto in seguito.

Nella seconda definizione si chiama invece genere aritmetico p'_n di V_n (d'ordine m), il numero virtuale delle forme indipendenti di ordine $m-n-2$, aggiunte ad una proiezione generica di V_n sopra un S_{n+1}.

Per brevità chiamo p_n e p'_n il primo ed il secondo genere aritmetico di V_n.

Recentemente ho dimostrato ([2]) che tanto p_n quanto p'_n sono invarianti assoluti rispetto alle trasformazioni birazionali. Ma sulla loro uguaglianza, $p_n = p'_n$, fondamentale in tutta la geometria sopra V_d, non è stata detta ancora l'ultima parola. Per ora essa dipende da un postulato che naturalmente si cerca di evitare.

Le formule di tutta la prima parte non dipendono da questo postulato, ma non è lo stesso per le formule I e II. Occupandomi di vedere come si trasformano le I e II, se si prescinde da detto postulato, o che è lo stesso se si prescinde dall'uguaglianza $p_n = p'_n$, trovo tre nuovi gruppi di formule molto notevoli:

$$\text{(I')} \qquad \sum_0^k {}_r (-1)^r \binom{d-r}{2k+1-r} \Omega_r + \binom{d}{2k} + 1 = \Omega'_{2k+1} + \Omega_{2k+1},$$

$$\text{(II')} \qquad \sum_0^{k-1} {}_r (-1)^r \binom{d-r}{2k-r} \Omega_r + \binom{d}{2k-1} - 1 = \Omega'_{2k} - \Omega_{2k},$$

$$\text{(III')} \qquad \sum_0^{2k-1} {}_r \binom{d-r}{2k-r} (\Omega'_r - \Omega_r) = 2(\Omega'_{2k} - \Omega_{2k}),$$

per qualsiasi valore di k tra 1 a $\left[\frac{d}{2}\right]$ e dove Ω_r ed Ω'_r indicano il primo ed il secondo genere della varietà D^{d-r} del sistema canonico $|D|$ di V_d ed Ω_d ed Ω'_d il primo ed il secondo genere di V_d stessa.

([1]) SEVERI, loc. cit., n.i 4, 8 e 30.

([2]) ALBANESE, *Invarianza del genere aritmetico di una varietà algebrica.* « Annali delle Univ. Toscane », vol. IX, fasc. II, 1924.

A mio avviso, uno studio approfondito di queste formule deve condurre alla dimostrazione definitiva, e indipendentemente dal postulato accennato, dell' uguaglianza $p_n = p'_n$. Intanto, esse mi permettono di dimostrare che se *d è pari*, l' uguaglianza $p_d = p'_d$, è una conseguenza lineare della uguaglianza $p_n = p'_n$ per $n < d$. Sicchè in fondo l' uguaglianza in parola, basta dimostrarla per le sole varietà di dimensione dispari e di conseguenza risulterà dimostrata in generale.

E questo è un altro passo avanti, verso la dimostrazione definitiva e generale dell' uguaglianza stessa. E ciò vale tanto più, se si pensa, che tale dimostrazione pare si debba condurre in modo diverso a seconda che n sia pari o dispari.

Darò infine un' ultima applicazione delle formule trovate, calcolando l' invariante di ZEUTHEN-SEGRE della generica varietà del sistema $|A + B|$, in funzione dello stesso invariante e dei caratteri aritmetici di A e B. Limiterò lo studio al caso delle superficie di una V_3.

Detto I_C l' invariante di ZEUTHEN-SEGRE di una superficie C di V_3 si hanno le formule:

$$I_{A+B} = I_A + I_B + 4[AB] + [A^2B] + [AB^2],$$
$$I_{A_m} = mI_A + 2m(m-1)[A^2] + m(m-1)^2[A^3] - 2(m-1)(m-2),$$

dove, con le notazioni del SEVERI, $[MN]$ indica il genere della curva comune alle superficie M ed N ed $[MNP]$ il numero dei punti comuni ad M, N e P.

Le formule valgono anche per le superficie dello spazio ordinario dove si possono applicare molto utilmente.

Sull' invariante di ZEUTHEN-SEGRE relativo alle varietà a più dimensioni spero di ritornar presto con un altro lavoro.

PARTE PRIMA

INTRODUZIONE

1. Sul genere aritmetico di una varietà algebrica. — Ricordiamo che la formula di postulazione $v(l)$ di una varietà V_n ad n dimensioni, si può scrivere sotto la forma (SEVERI, loc. cit., n.° 4):

(1)
$$v(l) = (1 + p_0)\binom{l+n}{n} - (p_0 + p_1)\binom{l+n-1}{n-1} + \dots$$
$$+ (-1)^{n-1}(p_{n-2} + p_{n-1})(l+1) + (-1)^n(p_{n-1} + p_n).$$

Se V è irriducibile e priva di punti multipli, in un certo spazio S_h, l'ultimo coefficiente p_n di questa formula è il *genere aritmetico effettivo* di V, mentre $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_0$ sono i generi aritmetici effettivi delle sezioni di V con $S_{h-1}, S_{h-2}, \ldots, S_{h-n}$ generici di S_h.

In particolare se m è l'ordine di V, sarà $p_0 = m - 1$.

Sulla formula di postulazione è poi fondamentale la relazione di SEVERI:

$$v(l) = v_1(l) + v_2(l) - v_{12}(l) \tag{2}$$

che lega la postulazione $v(l)$ di una varietà V somma di due altre V_1 e V_2, $V = V_1 + V_2$, alle postulazioni $v_1(l)$, $v_2(l)$ di V_1 e V_2 e alla postulazione $v_{12}(l)$ della loro intersezione V_{12}.

In seguito noi supporremo sempre V_1 e V_2, della stessa dimensione n, immerse in una varietà W (priva di punti multipli, ad $n+1$ dimensioni) ed ivi variabili in sistemi lineari più volte infiniti. Allora per la validità della (2) basta ([1]) che V_1 sia irriducibile e priva di punti multipli; V_2, anche spezzata, sia però priva di parti multiple e V_{12} di dimensioni qualsiasi $\leq n-1$, sia pure priva di parti multiple. Condizioni che per il seguito supporremo sempre soddisfatte.

2. Supponiamo che V_{12} sia di dimensioni $n-1-i$. Posto per la (1)

$$v(l) = \sum_0^n {}_r (-1)^r (p_{r-1} + p_r) \binom{l+n-r}{n-r},$$

$$v_{12}(l) = \sum_0^{d-i-1} {}_s (-1)^s (q_{s-1} + q_s) \binom{l+n-i-1-s}{n-i-1-s},$$

$$v_1(l) = \sum_0^n {}_r (-1)^r (p'_{r-1} + p'_r) \binom{l+n-r}{n-r},$$

$$v_2(l) = \sum_0^n {}_r (-1)^r (p''_{r-1} + p''_r) \binom{l+n-r}{n-r},$$

(con $p_{-1} = p'_{-1} = p''_{-1} = q_{-1} = 1$) e sostituendo nella (2) se ne deducono le uguaglianze

$$p_0 = p'_0 + p''_0 + 1, \quad p_{r-1} + p_r = p'_{r-1} + p''_{r-1} + p'_r + p''_r \qquad \text{per } r = 1, 2, \ldots, i,$$

$$p_{i+s} + p_{i+s+1} + (-1)^{i+1}(q_{s-1} + q_s) = p'_{i+s} + p''_{i+s} + p'_{i+s+1} + p''_{i+s+1}$$
$$\text{per } s = 0, 1, 2, \ldots, d-i-1,$$

([1]) TORELLI, *Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche.* « Annali di Matematica », t. XVIII, 1911, n.° 10.

e da queste facilmente:

$$p_d = p'_d + p''_d + (-1)^i q_{d-i-1} \tag{3}$$

che *dà il genere di una varietà* V *somma di due altre* V_1, V_2 *della stessa dimensione* n, *quando la loro intersezione è di dimensione* n — i — 1.

Per $i=0$ la formula (3) coincide con una formula di SEVERI (loc. cit., n.° 5):

$$p_d = p'_d + p''_d + q_{d-1}. \tag{4}$$

Per $i=d-1$ cioè, V_{12} si compone di un gruppo di k punti si ha:

$$p_d = p'_d + p''_d + (-1)^{d-1}(k-1)$$

e per $k=0$, nel caso cioè che V_1 e V_2 non abbiano punti comuni:

$$p_d = p'_d + p''_d + (-1)^d.$$

3. Supponiamo ora che V_2 sia composta di due parti distinte, e per simmetria poniamo $V = V_1 + V_2 + V_3$, applicando due volte la (2) si ha:

$$v(l) = v_1(l) + v_2(l) + v_3(l) - v_{12}(l) - v_{23}(l) - v_{31}(l) + v_{123}(l)$$

$v_{123}(l)$, indicando la postulazione della varietà V_{123} comune a V_1, V_2, e V_3.

E in generale posto:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_k$$

nelle stesse ipotesi e con le stesse notazioni si ha per induzione:

$$v(l) = \sum_1^k {}_i \sum_{(r)} (-1)^{i-1} v_{r_1 r_2 \dots r_i}(l) \tag{5}$$

la seconda somma essendo estesa a tutte le possibili combinazioni semplici $(r) = r_1, r_2, \dots, r_i$ di classe i, degli indici 1, 2,..., k.

Quando qualche varietà $V_{r_1 r_2 \dots r_i}$ manca, in quanto V_{r_1}, $V_{r_2}, \dots, V_{r_k}$ non hanno punti comuni, al posto di $v_{r_1 r_2 \dots r_i}(l)$ bisogna mettere zero.

In particolare, supponendo $V_1, V_2, \dots, V_k$ varietà di uno stesso sistema lineare $|V_1|$ si ha:

$$V \equiv kV_1,$$

e la (5) diventa:

$$v(l) = \sum_1^k {}_i (-1)^{i-1} \binom{i}{k} v_1^{(i)}(l) \tag{6}$$

indicando con $v_1^{(i)}(l)$ la postulazione della varietà $V_1^{(i)}$, intersezione di i varietà generiche del sistema $|V_1|$.

4. I generi aritmetici relativi ad un sistema $|A|$. — Ciò detto sia $|A|$ un sistema lineare di varietà a $d-1$ dimensioni, immerso in una varietà V_d priva di punti multipli ed indichiamo con A^i la varietà a $d-i$ dimensioni, comune ad i varietà generiche ed indipendenti del sistema $|A|$. Chiameremo A^i una varietà caratteristica di ordine $i-1$ di $|A|$ ed indicheremo con $\mathfrak{A}^i$ il suo genere aritmetico.

Insieme ad $|A|$ nasce quindi la considerazione delle varietà A A^2, A^3,..., A^{d-1}, A^d e dei rispettivi generi aritmetici $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3$,..., $\mathfrak{A}^{d-1}$, $\mathfrak{A}^d$.

Si noti che A^{d-1} è una curva e $\mathfrak{A}^{d-1}$ il suo genere, A^d è un gruppo di punti e che $\mathfrak{A}^d$ *è uguale al numero di questi punti, diminuito di una unità.*

Per la effettiva esistenza di tutte le varietà A^i occorre che $|A|$ sia almeno ∞^{d-1}; questa condizione non è però necessaria e stabilite le formule di addizione e sottrazione nel caso generale, i numeri $\mathfrak{A}^i$ relativi ad una varietà A si possono definire indipendentemente dalla varietà A^i anche quando A varia o in un sistema continuo che non sia lineare, o sia isolata, oppure sia virtuale. Basta estendere a queste varietà, le note considerazioni, che allo stesso scopo, si fanno per definire il grado ed il genere virtuali di una curva di una superficie. I numeri $\mathfrak{A}^i$ che così si ottengono saranno i vari generi aritmetici *virtuali* di A, e soddisfano alle stesse formule di addizione e sottrazione del caso generale.

A completare le nostre notazioni, converremo di indicare con $\mathfrak{B}^r\mathfrak{C}^s$, il genere aritmetico della varietà B^rC^s d'intersezione delle due varietà B^r e C^s.

Formule relative al caso di $A \equiv B + C$.

5. Calcolo di $\mathfrak{A}^i$. — Supponiamo che sopra V_d sia $|A| = |B| + |C|$ e che la generica varietà BC sia a $d-2$ dimensioni. Per la formula (4) del SEVERI, con le nuove notazioni, si ha:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}. \tag{7}$$

Vogliamo dimostrare che se B^rC^s è di dimensione regolare $d-r-s$, la (7) si estende con la formula generale:

$$\mathfrak{A}^i = (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C})^i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\mathfrak{B}^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma} \quad \text{con } \alpha+\beta+\gamma = i, \tag{8}$$

la somma essendo estesa, come per il polinomio di LEIBNITZ, a tutte le soluzioni intere positive o nulle dell'equazione $\alpha+\beta+\gamma = i$, e con la convenzione di porre $\mathfrak{B}^r\mathfrak{C}^s = (-1)^{t-1}$, tutte le volte che è $r+s=d+t$ con $t \geq 1$, nel qual caso, la varietà B^rC^s evidentemente non esiste.

La formula e la convenzione sono entrambe vere nel caso di $i=1$, anche quando A, B e C sono gruppi di punti di una curva V_1 $(d=1)$, nel qual caso BC non esiste, e al posto di $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, essendo $t=1$, bisogna sostituire $+1$.

Per $i=2$, si calcola facilmente che è proprio:

$$\mathfrak{A}^2 = (\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C})^2 = \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2. \tag{9}$$

E siccome qui $r+s$ è al massimo uguale 4, per essere $r+s>d$ occorre che sia $d \leq 3$.

Per $d=3$ si ha effettivamente

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + 1$$

e perchè questa coincida con la (9), basta prendere $\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 = 1$.

Per $d=2$, A, B, C, sono curve di una V_2, A^2. B^2, C^2, e BC sono gruppi di punti e si ha evidentemente:

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + 3,$$

e perchè questa coincida con la (9), basta prendere $\mathfrak{B}^2\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 = 1$ e $\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 = -1$. In tutti questi casi la formula (9) è dunque vera, se conveniamo di prendere come si è detto, $\mathfrak{B}^r\mathfrak{C}^s = (-1)^{t-1}$, tutte le volte che $r+s=d+t$ con $t \geq 1$.

Accettiamo la (8) e la convenzione come vere per tutti i valori 1, 2,..., i dell'esponente, e dimostriamo che esse sono vere anche per $i+1$.

Indichiamo con B_1 e C_1 le varietà che B e C staccano su A. Ne segue che

$$\mathfrak{A}^{i+1} = (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)^i = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \mathfrak{B}_1^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}_1^{\alpha+\gamma} \quad \text{con } \alpha+\beta+\gamma = i.$$

Ma $\mathfrak{B}_1^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}_1^{\beta+\gamma}$ è il genere della varietà $AB^{\alpha+\gamma}C^{\beta+\gamma} \equiv (B+C)B^{\alpha+\gamma}C^{\beta+\gamma}$, che sopra la varietà $B^{\alpha+\gamma}C^{\beta+\gamma}$ si può considerare come la somma delle due varietà $B^{\lambda+\gamma+1}C^{\beta+\gamma}$ e $B^{\alpha+\gamma}C^{\beta+\gamma+1}$.

Perciò per la (7):

$$\mathfrak{B}_1^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}_1^{\beta+\gamma} = \mathfrak{B}^{\alpha+\gamma+1}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma} + \mathfrak{B}^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma+1} + \mathfrak{B}^{\alpha+\gamma+1}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma+1}, \tag{10}$$

che simbolicamente si può scrivere sotto la forma:

$$\mathfrak{B}_1^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}_1^{\beta+\gamma} = \mathfrak{B}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Sostituendo avremo:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = \sum \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\mathfrak{B}^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$
$$= (\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C})\sum \frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\mathfrak{B}^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma}$$
$$= (\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C})^{i+1}.$$

Si osservi però che se nel termine $\mathfrak{B}_1^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}_1^{\beta+\gamma}$, è $\alpha+\beta+2\gamma = d-1+t$, la varietà $B_1^{\alpha+\gamma}C_1^{\beta+\gamma}$ non esiste e il ragionamento di sopra perde significato. In ogni modo la (10) vale ancora.

Difatti, essendo $B_1^{\alpha+\gamma}C_1^{\beta+\gamma}$, contenuta in una varietà A a $d-1$ dimensioni, per la convenzione ammessa se $\alpha+\beta+2\gamma = d-1+t$ sarà $\mathfrak{B}_1^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}_1^{\beta+\gamma} = (-1)^{t-1}$ e la (10) rimane vera se conveniamo di prendere:

$$\mathfrak{B}^{\alpha+\gamma+1}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma} = \mathfrak{B}^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma+1} = (-1)^{t-1} \quad \text{e} \quad \mathfrak{B}^{\alpha+\gamma+1}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma+1} = (-1)^{t},$$

se conveniamo cioè, di accettare come vera la convenzione detta anche pel valore $i+1$ dell'esponente.

Concludiamo che la formula (8) e la convenzione sono verificate in generale, purchè B^rC^s, quando $r+s \leq d$, abbia effettivamente la dimensione $d-r-s$; se no invece della (4), si sarebbe dovuto applicare la (3), e la (8) non sarebbe più vera.

Alla (8) si può dare una forma leggermente diversa. Poniamo:

$$\alpha+\gamma = r \quad \text{e} \quad \beta+\gamma = s;$$

essendo $\alpha+\beta+\gamma = i$, si avrà:

$$\alpha = i-s, \quad \beta = i-r \quad \text{e} \quad \gamma = r+s-i$$

e quindi:

$$\frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} = \frac{i!}{(i-s)!\,(i-r)!\,(r+s-i)!} = \binom{i}{r}\binom{r}{i-s}$$

e sostituendo nella (8):

$$\mathfrak{A}^{i} = \sum_{0}^{i}{}_{r}\sum_{i-r}^{i}{}_{s}\binom{i}{r}\binom{r}{i-s}\mathfrak{B}^{r}\mathfrak{C}^{s} \tag{8'}$$

con la solita convenzione di porre $\mathfrak{B}^r\mathfrak{C}^s = (-1)^{t-1}$, tutte le volte che è $r+s = d+t$, con $t \geq 1$.

6. Quando $2i > d$ nella (8) e nella (8′) vi compaiono dei termini $\mathfrak{B}^r\mathfrak{C}^s$ con $r+s = d+t$ $(t > 0)$, che non corrispondono ad effettive varietà B^rC^s e bisogna sostituire con $(-1)^{t-1}$. In tali casi bisogna perciò trascinarsi dietro dei termini superflui, che specialmente quando d ed i sono dati numericamente, ingombrano inutilmente il calcolo. Conviene perciò calcolare il valore complessivo U di tutti questi termini, calcolare cioè, la somma $\sum\frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(-1)^{t-1}$, per tutte le soluzioni intere positive o nulle dell'equazione $\alpha+\beta+\gamma=i$, con $\alpha+\beta+2\gamma=d+t$.

In tal caso si avrà, $i+\gamma=d+t$ e si potrà scrivere:

$$U=\sum\frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(-1)^{t-1}=(-1)^{d-i+1}\sum\frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(-1)^{\gamma}$$
$$=(-1)^{d-i+1}\sum\binom{i}{\gamma}\binom{i-\gamma}{\alpha}(-1)^{\gamma}$$

la somma essendo estesa a tutti i numeri interi positivi o nulli α e γ che verificano le relazioni: $\alpha+\gamma\leq i$ e $\gamma>d-i$, e perciò:

$$U=(-1)^{d-i+1}\sum_{d-i+1}^{i}{}_{\gamma}(-1)^{\gamma}\binom{i}{\gamma}\sum_{0}^{i}{}_{\alpha}\binom{i-\gamma}{\alpha}=(-1)^{d-i+1}\sum_{d-i+1}^{i}{}_{\gamma}(-1)^{\gamma}\binom{i}{\gamma}2^{i-\gamma}$$

e posto $i-\gamma=h$ si ha in definitiva

$$U=(-1)^{d+1}\sum_{0}^{2i-d-1}{}_{h}(-1)^{h}\binom{i}{h}2^{h}.$$

La (8) si può perciò scrivere sotto la forma:

$$\mathfrak{A}^{i}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{i!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\mathfrak{B}^{\alpha+\gamma}\mathfrak{C}^{\beta+\gamma}+(-1)^{d+1}\sum_{0}^{2i-d-1}{}_{h}(-1)^{h}\binom{i}{h}2^{h} \tag{11}$$

la prima somma essendo estesa a tutte le soluzioni intere positive o nulle dell'equazione $\alpha+\beta+\gamma=i$ con $i+\gamma\leq d$. La seconda somma vi compare solo quando è $2i\geq d+1$, il che si ottiene senza alcuna altra ipotesi, convenendo, come d'ordinario, di prendere $\binom{i}{h}=0$ tutte le volte che è $h<0$.

Analogamente la (8′) si può scrivere sotto la forma:

$$\mathfrak{A}^{i}=\sum_{r,s}\binom{i}{r}\binom{r}{i-s}\mathfrak{B}^{r}\mathfrak{C}^{s}+(-1)^{d+1}\sum_{0}^{2i-d-1}{}_{h}(-1)^{h}\binom{i}{h}2^{h}, \tag{11′}$$

la prima somma essendo estesa a tutte le coppie di numeri r ed s positivi o nulli che verificano le disuguaglianze:

$$i \leq r + s \leq d.$$

Notiamo che se la (11) e la (11') si prestano meglio in un calcolo numerico, la (8) e la (8') invece, si adoperano con maggiore facilità e sveltezza in ogni sviluppo teorico, come è facile verificare con esempi.

Formule relative al caso di $A \equiv B - C$.

7. Calcolo di $\mathfrak{A}$. — Supponiamo che sia $A \equiv B - C$.

Vogliamo dimostrare la formula:

$$\mathfrak{A} = \sum_{0}^{d-1}{}_{r}(-1)^r \mathfrak{B}\mathfrak{C}^r - \sum_{0}^{d-1}{}_{r}(-1)^r \mathfrak{C}^{r+1} + (-1)^d \tag{12}$$

che simbolicamente si può anche scrivere sotto la forma:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})(1 - \mathfrak{C} + \mathfrak{C}^2 - \dots + (-1)^{d-1}\mathfrak{C}^{d-1}) + (-1)^d. \tag{12'}$$

Per $d = 1$ la formula è vera: infatti se A, B e C sono gruppi di punti di una curva V_1, si ha evidentemente:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} - \mathfrak{C} - 1 = \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + (-1)^1.$$

Se poi è $d = 2$, A, B e C sono curve di una V_2, e si ha subito:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{B} - \mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}^2 + 1 \\ &= (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})(1 - \mathfrak{C}) + (-1)^2.\end{aligned}$$

Ammettiamo la formula vera per le varietà a $d - 1$ dimensioni e dimostriamola vera per le varietà a d dimensioni.

Intanto sarà $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} - \mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, dove $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ indica il genere della varietà $AC \equiv BC - C^2$.

Poniamo $BC = B_1$ e $C^2 = C_1$; essendo B_1 e C_1 varietà a $d - 2$ dimensioni della varietà C, sarà per ipotesi:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C}_1)(1 - \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_1^2 - \dots + (-1)^{d-2}\mathfrak{C}_1^{d-2}) + (-1)^{d-1}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \mathfrak{B} - \mathfrak{C} - (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C}_1)(1 - \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_1^2 - \dots + (-1)^{d-2}\mathfrak{C}_1^{d-2}) + (-1)^d \\ &= \mathfrak{B} - \mathfrak{C} - \sum_{0}^{d-2}(-1)^i \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1^i + \sum_{0}^{d-2}{}_{i}(-1)^i \mathfrak{C}_1^{i+1} + (-1)^d.\end{aligned}$$

Ora $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1^i = \mathfrak{B}\mathfrak{C}^{i+1}$ e $\mathfrak{C}_1^{i+1} = \mathfrak{C}^{i+2}$, per cui sarà:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} - \mathfrak{C} - \sum_{0}^{d-2}{}_i (-1)^i \mathfrak{B}\mathfrak{C}^{i+1} + \sum_{0}^{d-2}{}_i (-1)^i \mathfrak{C}^{i+2} + (-1)^d$$

$$= (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})(1 - \mathfrak{C} + \mathfrak{C}^2 - \dots + (-1)^{d-1}\mathfrak{C}^{d-1}) + (-1)^d. \qquad \text{c. v. d.}$$

Per la validità della formula occorre sempre che ogni varietà $\mathfrak{B}^r\mathfrak{C}^s$ sia di dimensione $d - r - s$.

8. Calcolo di $\mathfrak{A}^i$. — La (12) si estende con la formula:

$$\mathfrak{A}^i = \sum_{0}^{i}{}_r \sum_{r}^{d-i+r}{}_s (-1)^s \binom{i}{r}\binom{i+r-s-1}{i-1} \mathfrak{B}^{i-r}\mathfrak{C}^s + (-1)^{d-i+1} \tag{13}$$

e che si può scrivere simbolicamente in modo più conciso:

$$\mathfrak{A}^i = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^i \sum_{0}^{d-i}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}^t + (-1)^{d-i+1}. \tag{13'}$$

Per $i = 1$ queste formule si riducono rispettivamente alla (12) e (12'), cioè esse son vere per $i = 1$. Ammettiamole vere per i e dimostriamole per $i + 1$.

Ora $A^{i+1} \equiv A^iB - A^iC$, posto quindi $BA^i = B_1$ e $CA^i = C_1$ e notando che B_1 e C_1 sono varietà $d - i - 1$ dimensioni della varietà A^i a $d - i$ dimensioni, per la (12) si avrà:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C}_1) \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s \mathfrak{C}_1^s + (-1)^{d-i}$$

$$= \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1^s - \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s \mathfrak{C}_1^{s+1} + (-1)^{d-i}$$

$$= \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s \mathfrak{A}^i\mathfrak{B}\mathfrak{C}^s - \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s \mathfrak{A}^i\mathfrak{C}^{s+1} + (-1)^{d-i}.$$

Per la prima somma poniamo $B_2 = B^2C^s$ e $C_2 = BC^{s+1}$, allora sulla varietà ambiente BC^s, la varietà A^iBC^s risulta una $(i-1)^{esima}$ varietà caratteristica del sistema $[B_2 - C_2]$.

Analogamente posto per la seconda somma $BC^{s+1} = B_3$ e $C^{s+2} = C_3$, sulla varietà C^{s+1}, la varietà A^iC^{s+1} risulta una $(i-1)^{esima}$ varietà caratteristica del sistema $[B_3 - C_3]$.

Applicando la (13′) allora si avrà:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{C}_2)^i \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}_2^t -$$

$$- \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s (\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{C}_3)^i \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}_3^t + (-1)^{d-i}.$$

Ora ogni varietà del tipo $B_2^{i-\alpha} C_2^{\alpha} C_2^t$ per la definizione stessa di B_2 e C_2 espressa in funzione di B e C si può indicare con $B^{i-\alpha+1} C^{\alpha+s-t} \equiv B \cdot B^{i-\alpha} C^{\alpha} C^{s+t}$.

Ne segue che:

$$(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{C}_2)^i \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}_2^t = \mathfrak{B}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^i \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}^{s+t}.$$

Analogamente si ha:

$$(\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{C}_3)^i \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}_3^t = \mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^i \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}^{s+t},$$

e sostituendo e riducendo:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = \sum_{0}^{d-i-1}{}_s (-1)^s (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^{i+1} \sum_{0}^{d-i-s-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-1}{i-1} \mathfrak{C}^{s+t} + (-1)^{d-i}$$

e ponendo t al posto di $s+t$:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^{i+1} \sum_{0}^{d-i-1}{}_s \sum_{0}^{d-i-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t-s-1}{i-1} \mathfrak{C}^t + (-1)^{d-i}$$

ed infine sommando rispetto ad s:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^{i+1} \sum_{0}^{d-i-1}{}_t (-1)^t \binom{i+t}{i} \mathfrak{C}^t + (-1)^{d-i}$$

che coincide con la (13′) quando si ponga i al posto di $i+1$.

Per cui la (13′) è vera in generale.

Dalla (13′) si passa alla (13), sviluppando la potenza $(B-C)^i$.

Formule relative al caso di $A \equiv kB$.

9. Calcolo di $\mathfrak{A}$. — Se $A = kB$ è applicabile, la formula (6) è a tal uopo calcolata. Dette $a(l)$ e $b^{(i)}(l)$ la postulazione di A e della $(i-1)^{esima}$ varietà caratteristica B^i del sistema $|B|$, si avrà:

$$a(l)=\sum_{1}^{k}{}_i(-1)^{i-1}\binom{k}{i}b^{(i)}(l) \tag{14}$$

e posto:

$$a(l)=\sum_{0}^{d-1}{}_r(p_{r-1}+p_r)\binom{l+d-r-1}{d-r-1},$$

$$b^{(i)}(l)=\sum_{0}^{d-i}{}_s(-1)^s(q_{s-1}^{(i)}+q_s^{(i)})\binom{l+d-i-s}{d-i-s}\quad \text{con } p_{-1}=q_{-1}^{(i)}=1,$$

si avrà:

$$\sum_{0}^{d-1}{}_r(-1)^r(p_{r-1}+p_r)\binom{l+d-1-r}{d-1-r}=$$

$$=\sum_{1}^{k}{}_i(-1)^{i-1}\binom{k}{i}\sum_{0}^{d-i}{}_s(-1)^s(q_{s-1}^{(i)}+q_s^{(i)})\binom{l+d-i-s}{d-i-s},$$

ed uguagliando i coefficienti:

$$(p_{r-1}+p_r)=\sum_{1}^{r+1}{}_i\binom{k}{i}(q_{r-i}^{(i)}+q_{r-i+1}^{(i)})\qquad \text{per } r=0,1,2,\ldots,d-1,$$

ossia:

$$p_0=kq_0^{(1)}+k-1,$$

$$p_{r-1}+p_r=\sum_{1}^{r+1}{}_i\binom{k}{i}(q_{r-i}^{(i)}+q_{r-i+1}^{(i)})$$

$$=\sum_{1}^{r}{}_i\binom{k}{i}q_{r-1}^{(i)}+\binom{k-1}{r}+\sum_{1}^{r+1}{}_i\binom{k}{i}q_{r-i+1}^{(i)}+\binom{k-1}{r+1}$$

e di conseguenza

$$p_r=\sum_{1}^{r+1}{}_i\binom{k}{i}q_{r-i+1}^{(i)}+\binom{k-1}{r+1}. \tag{15}$$

In queste formule $q_{r-i+1}^{(i)}$ indica il genere aritmetico della sezione di B^i con un $S_{h-d+r+1}$ generico, dello spazio ambiente S_h.

La (15) acquista particolare interesse per $r=d-1$, allora si ha:

$$p_{d-1}=\sum_{1}^{d}{}_i\binom{k}{i}q_{d-i}^{(i)}+\binom{k-1}{d}, \tag{16}$$

dove $q_{d-i}^{(i)}$ indica il genere aritmetico di $B^{(i)}$ stessa. Sicchè posto colle solite notazioni, $p_{d-1} = \mathcal{A}$ e $q_{d-i}^{(i)} = \mathcal{B}^i$ si avrà:

$$\mathcal{A} = \sum_{1}^{d}{}_i \binom{k}{i} \mathcal{B}^i + \binom{k-1}{d}. \tag{17}$$

10. Formule ausiliarie. — Prima di estendere la (17) e calcolare $\mathcal{A}^i$, ci conviene premettere alcune formule sui coefficienti binomiali.

La prima di queste formule è:

$$\sum_{0}^{i}{}_s (-1)^s \binom{i}{s} \binom{sk+\alpha}{r} = 0 \qquad \text{per } 0 \leq r < i \tag{19}$$

per tutti i valori di $r < i$, ed α qualunque.

È facile verificare che la (19) è vera tanto per $i = 1$, quanto per $i = 2$. Dopo di che, si dimostra, senza difficoltà, per induzione. Per brevità omettiamo la dimostrazione.

Dalla (19) moltiplicando per $(-1)^i$ e facendo una volta $\alpha = 0$ ed una volta $\alpha = 1$, si hanno le due formule:

$$\sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk}{r} = 0, \quad \sum_{0}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk-1}{r} = 0 \quad \text{per } 0 \leq r < i. \tag{19'}$$

In virtù di queste formule e con le solite proprietà dei coefficienti binomiali, è facile poi dimostrare quest' altre due formule:

$$\begin{aligned} &\sum_{0}^{d-i-1}{}_m \binom{k}{m+1} \sum_{m}^{d-i-1}{}_\tau \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk}{\tau - m + 1} = \\ &= \sum_{0}^{d-i-1}{}_\tau \sum_{1}^{i+1}{}_\rho (-1)^{i+1-\rho} \binom{i+1}{\rho} \binom{\rho k}{\tau + i + 1} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{0}^{d-i-1}{}_m \binom{k}{m+1} \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk-1}{d-m-1} + \binom{k-1}{d-i} = \\ &= \sum_{1}^{i+1}{}_\rho (-1)^{i+1-\rho} \binom{i+1}{\rho} \binom{\rho k - 1}{d}. \end{aligned} \tag{21}$$

Per brevità ometteremo la dimostrazione anche di queste formule.

11. Calcolo di $\mathcal{A}^i$. — Ciò detto vogliamo dimostrare che la (17) si estende con la formula:

$$\mathcal{A}^i = \sum_{0}^{d-i}{}_t \sum_{1}^{i}{}_s (\quad 1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk}{i+t} \mathcal{B}^{i+t} + \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk-1}{d}. \tag{18}$$

Procediamo per induzione, ammettiamola come vera per i e dimostriamola vera per $i+1$.

La i^{esima} varietà caratteristica A^{i+1} di $|A|$, si può pensare sopra una A^i, come l'intersezione di A^i stessa con una varietà kB, per la (17), poste $A^iB = C$, si avrà allora:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = \sum_{1}^{d-i}{}_m \binom{k}{m} \mathfrak{C}^m + \binom{k-1}{d-i}.$$

Ora sopra A^i, è $C^m = A^iB^m$, che pensata sopra B^m, si può considerare come la $(i-1)^{esima}$ varietà caratteristica del sistema staccato sopra B^m dal sistema $|kB|$; ma allora è applicabile la (18) e per la (19') si potrà scrivere successivamente:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = \sum_{1}^{d-i}{}_m \binom{k}{m} \left\{ \sum_{0}^{d-m-i}{}_t \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk}{t+i} \mathfrak{B}^{m+i+t} + \right.$$
$$\left. + \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk-1}{d-m} \right\} + \binom{k-1}{d-i}$$

$$= \sum_{1}^{d-i}{}_m \binom{k}{m} \sum_{0}^{d-m-i}{}_t \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk}{t+i} \mathfrak{B}^{m+t+i} +$$
$$+ \sum_{0}^{d-i-1}{}_m \binom{k}{m+1} \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk-1}{d-m-1} + \binom{k-1}{d-i}$$

$$= \sum_{0}^{d-i-1}{}_m \binom{k}{m+1} \sum_{m}^{d-i-1}{}_\tau \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk}{\tau-m+i} \mathfrak{B}^{\tau+i+1} +$$
$$+ \sum_{0}^{d-i-1}{}_m \binom{k}{m+1} \sum_{1}^{i}{}_s (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \binom{sk-1}{d-m-1} + \binom{k-1}{d-i}$$

ed applicando la (20) e la (21) si ha definitivamente:

$$\mathfrak{A}^{i+1} = \sum_{0}^{d-i-1}{}_\tau \sum_{1}^{i+1}{}_\rho (-1)^{i+1-\rho} \binom{1+1}{\rho} \binom{\rho k}{\tau+i+1} \mathfrak{B}^{\tau+i+1} +$$
$$+ \sum_{1}^{i+1}{}_\rho (-1)^{i+1-\rho} \binom{i+1}{\rho} \binom{\rho k-1}{d}$$

che coincide con la (18), quando si cambi $i+1$ in i.

Dunque la (18) essendo vera per $i=1$, è vera in generale.

Per il calcolo delle (18) sarebbe molto comodo calcolare le somme $\sum_{1}^{i}{}_{s}(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\binom{sk}{t}$ e $\sum_{1}^{i}{}_{s}(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\binom{sk-1}{t}$, in funzione di k, t ed i.

Per $t=i$ e $t=i+1$, si trova facilmente

$$\sum_{1}^{i}{}_{s}(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\binom{sk}{i}=k^i,\quad \sum_{1}^{i}{}_{s}(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\binom{sk}{i+1}=\frac{1}{2}k^i(k-1),$$

$$\sum_{1}^{i}{}_{s}(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\binom{sk-1}{i}=k^i-1,\quad \sum_{1}^{i}{}_{s}(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\binom{sk-1}{i+1}=\frac{i}{2}k^i(k-1)-k_i+1$$

PARTE SECONDA

Applicazioni.

12. Le formule che legano il genere di una varietà ai generi del suo sistema aggiunto. — Applichiamo le formule trovate a cercare le relazioni che legano, sopra V_d, i generi aritmetici $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'^2$, $\mathfrak{A}'^3$,..., $\mathfrak{A}'^{d-1}$, del sistema $|A'|$, aggiunto ad un sistema $|A|$, al genere $\mathfrak{A}$ di A ed al genere aritmetico p_d di V_d.

Indichiamo con $|D|$ il sistema canonico di V_d. Si avrà:

$$\mathfrak{A}'^d-\mathfrak{A}'^{d-1}+\mathfrak{A}'^{d-2}-\ldots+(-1)^{d-1}\mathfrak{A}'=\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}\mathfrak{A}'^i$$

$$=\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^i$$

$$=\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}\mathfrak{D}^i+\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}[(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^i-\mathfrak{D}^i]$$

$$=\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}\mathfrak{D}^i+\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})\sum_{1}^{i}{}_{r}\mathfrak{D}^{r-1}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{i-r}$$

$$=\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}\mathfrak{D}^i+(-1)^{d-1}\mathfrak{A}+\sum_{2}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}\sum_{1}^{i}{}_{r}\mathfrak{A}\mathfrak{D}^{r-1}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{i-r}-$$

$$-\sum_{2}^{d+1}{}_{\tau}(-1)^{d-\tau}\sum_{2}^{\tau}{}_{\rho}\mathfrak{A}\mathfrak{D}^{\rho-1}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{\tau-\rho}$$

$$=\sum_{1}^{d}{}_{i}(-1)^{d-i}\mathfrak{D}^i+(-1)^{d-1}\mathfrak{A}+\sum_{1}^{d-1}{}_{i}(-1)^{d-i-1}\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^i+$$

$$+\sum_{2}^{d+1}{}_{\rho}\mathfrak{A}\mathfrak{D}^{\rho-1}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{d-\rho+1}.$$

D'altra parte per le convenzioni poste, si ha:

$$\sum_{\rho=2}^{d+1} \mathfrak{A}\mathfrak{D}^{\rho-1}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{d-\rho+1} = \sum_{r=1}^{d} \mathfrak{A}\mathfrak{D}^{r}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{d-r}$$

$$= \sum_{r=1}^{d} \sum \frac{(d-r)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\mathfrak{A}^{\alpha+\gamma+1}\mathfrak{D}^{\beta+\gamma+r} = \sum_{r=1}^{d} \sum \frac{(d-r)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}(-1)^{\gamma}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (1+1-1)^{d-r} = d.$$

Sostituendo, infine risulta

$$\mathfrak{A}'^{d} - \mathfrak{A}'^{d-1} + \mathfrak{A}'^{d-2} - \dots + (-1)^{d-1}\mathfrak{A}' = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{d-i}\mathfrak{D}^{i} + \tag{25}$$
$$+ (-1)^{d-1}\mathfrak{A} + \sum_{i=1}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{i} + d.$$

Indichiamo con Ω_0, Ω_1, Ω_2,...., Ω_{d-1} il grado virtuale, il genere curvilineo, il genere aritmetico superficiale,.... ed il genere aritmetico $(d-1)$-dimensionale del sistema canonico $|D|$ di V_d.

Indichiamo analogamente con ω_0, ω_1, ω_2,...., ω_{d-2} gli stessi caratteri del sistema canonico della varietà A, del sistema cioè $|A^2+AD|$, si avrà:

$$\sum_{i=1}^{d}(-1)^{d-i}\mathfrak{D}^{i} = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots + (-1)^{d-1}\Omega_{d-1} - 1$$

$$\sum_{i=1}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{D})^{i} = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \dots + (-1)^{d-2}\omega_{d-2} - 1$$

e di conseguenza per la (25)

$$\mathfrak{A}'^{d} - \mathfrak{A}'^{d-1} + \mathfrak{A}'^{d-2} - \dots + (-1)^{d-1}\mathfrak{A} = (-1)^{d-1}\mathfrak{A} + \tag{26}$$
$$+ (\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots + (-1)^{d-1}\Omega_{d-1}) +$$
$$+ (\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \dots + (-1)^{d-2}\omega_{d-2}) + d - 2.$$

Distinguiamo due casi.

1° Caso: *d dispari*. — In tal caso per note formule del Severi (loc. cit., n.° 32), si ha:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots + \Omega_{d-1} = 2p_d - d - 1$$
$$\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \dots - \omega_{d-2} = -d + 2$$

è perciò:

$$\mathfrak{A}'^{d} - \mathfrak{A}'^{d-1} + \mathfrak{A}'^{d-2} - \dots + \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + 2p_d - d - 1 \qquad d \text{ dispari.}$$

2° CASO: d *pari*. — In tal caso per le stesse formule del SEVERI si ha:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots - \Omega_{d-1} = -d+1$$
$$\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \dots + \omega_{d-2} = 2\mathfrak{A} - d$$

e perciò:

$$\mathfrak{A}'^{d} - \mathfrak{A}'^{d-1} + \mathfrak{A}'^{d-2} - \dots - \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - d - 1 \qquad d \text{ pari.}$$

Per usare le notazioni del SEVERI, poniamo $\mathfrak{A} = p_{d-1}$, $\mathfrak{A}'^{d} = n'_0 - 1$ (¹) ed $\mathfrak{A}'^{i} = n'_{d-i}$, per $i < d$. Le formule di sopra si possono allora scrivere sotto la forma:

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - \dots + n'_{d-1} = p_{d-1} + 2p_d - d, \qquad \text{se } d \text{ è dispari}$$
$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - \dots - n'_{d-1} = p_d - d \qquad \text{se } d \text{ è pari}$$

che estendono alle V_d note formule per la superficie e per le V_3.

13. Altre formule ausiliare. — Prima di andare avanti procuriamoci quattro formule che poi ci torneranno molto utili.

Nella (19) poniamo $i = \sigma + 1$, $r = \sigma$, $\alpha = -k$ e cambiamo l'indice s in $u + 1$, si avrà:

$$\sum_1^{\sigma}{}_u (-1)^u \binom{\sigma+1}{u+1}\binom{uk}{\sigma} = 0$$

ossia

$$\sum_1^{\sigma}{}_u (-1)^u \binom{u+1}{\sigma+1}\binom{uk}{\sigma} = (-1)^\sigma \binom{k+\sigma-1}{\sigma}.$$

In questa al posto di σ mettiamo $2k+1-r$ e al posto di k mettiamo $d-2k$, si ottiene facilmente:

$$\sum_0^{2k-r}{}_i \sum_1^{i+1}{}_u (-1)^{u+1} \binom{i+1}{u}\binom{u(d-2k)}{2k+1-r} = (-1)^r \binom{d-r}{2k+1-r}$$

e poichè la seconda somma è nulla per tutti i valori di $i > 2k - r$, si avrà definitivamente:

$$\sum_0^{2k}{}_i \sum_1^{i+1}{}_u (-1)^{u+1} \binom{i+1}{u}\binom{u(d-2k)}{2k+1-r} = (-1)^r \binom{d-r}{2k+1-r}. \tag{27}$$

Ponendo in questa $d+1$ al posto di d ed $r+1$ al posto di r, tenendo

(¹) n'_0 è perciò il grado virtuale del sistema $|A'|$.

conto della (19), troviamo la seconda formula cercata, e cioè:

$$(28)\qquad \sum_{0}^{2k-1}{}_i\sum_{1}^{i+1}{}_u(-1)^u\binom{i+1}{u}\binom{u(d-2k+1)}{2k-r}=(-1)^r\binom{d-r}{2k-r}.$$

Le altre due formule si ottengono, con brevi trasformazioni, ponendo nella (27) e nella (28) $r=0$. Esse sono:

$$(29)\qquad \sum_{0}^{2k}{}_i\sum_{1}^{i+1}{}_u(-1)^{u+1}\binom{i+1}{u}\binom{u(d-2k)-1}{2k}+\binom{d}{2k}-(2k+2)=0$$

$$(30)\qquad \sum_{0}^{2k-1}{}_i\sum_{1}^{i+1}{}_u(-1)^u\binom{i+1}{u}\binom{u(d-2k)-1}{2k-1}+\binom{d}{2k-1}-(2k+1)=0.$$

Per brevità omettiamo la dimostrazione.

Le formule che legano i caratteri Ω_i del sistema canonico di una V_d.

14. Primo gruppo. — Ritorniamo alla nostra varietà V_d e consideriamo il suo sistema canonico $|D|$ (anche se virtuale), i cui caratteri, grado virtuale, genere curvilineo, genere aritmetico superficiale,..., genere aritmetico $(d-1)$ dimensionale, abbiamo detto di indicare con Ω_0, Ω_1, Ω_2,..., Ω_{d-1}. Per uniformità indicheremo con Ω_d il genere aritmetico p_d di V_d:$\Omega_d=p_d$.

Per potere applicare la (18) converrà porre $\Omega_0-1=\omega_0$ e per simmetria $\Omega_1=\omega_1$, $\Omega_2=\omega_2$,..., $\Omega_{d-1}=\omega_{d-1}$. In tal modo i numeri $\omega_i(i=0,..., d\quad 1)$ rappresentano i successivi generi aritmetici relativi al sistema $|D|$.

Sopra una varietà D, il sistema canonico è dato dal sistema $|2D^2|$, doppio del suo sistema caratteristico $|D^2|$. Analogamente sopra una varietà D^3 il sistema canonico è dato dal triplo $|3D^3|$, del suo sistema caratteristico $|D^3|$, e così via, sopra una D^{d-2k-1} il sistema canonico è dato dal sistema $|(d-k)D^{d-2k}|$.

Indichiamo con ω_0', ω_1', ω_2',..., ω_{2k}', i vari generi aritmetici di quest'ultimo sistema.

Essendo D^{d-2k-1} di dimensione $d-(d-2k-1)=2k+1$ dispari; per la formula di SEVERI (loc. cit., n. 32), ricordando che ω_0' indica il genere dell'ultimo gruppo caratteristico, ed è perciò uguale al grado virtuale meno uno, si avrà:

$$(31)\qquad \sum_{0}^{2k}{}_i(-1)^i\omega'_{2k-i}+2k+3=2\Omega_{2k+1}$$

D'altra parte i generi ω'_{2k-i} del sistema $|(d-2k)D^{d-2k}|$ si possono esprimere mediante la (18), in funzione dei generi ω_j del sistema $|D^{d-2k}|$. Per avere ω'_{2k-i} basterà porre nella (18) $d-2k$ al posto di k, $2k+1$ al posto di d ed $i+1$ al posto di i; sicchè verrà:

$$\omega'_{2k-i} = \sum_0^{2k-i}{}_t \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{i-s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)}{t+i+1}\omega_{2k-i-t} +$$
$$+ \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{i+1-s}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)-1}{2k+1}$$

e perciò sostituendo nella (31):

$$2\Omega_{2k+1} = \sum_0^{2k}{}_i \sum_0^{2k-i}{}_s \sum_1^{i+1}{}_t (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)}{t+i+1}\omega_{2k-i-t} +$$
$$+ \sum_0^{2k}{}_i \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)-1}{2k+1} + 2k+3$$

ed introducendo le Ω al posto delle ω:

$$2\Omega_{2k+1} = \sum_0^{2k}{}_i \sum_0^{2k-i}{}_t \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)}{t+i+1}\Omega_{2k-i-t} -$$
$$- \sum_0^{2k}{}_i \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)}{2k+1} +$$
$$+ \sum_0^{2k}{}_i \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)-1}{2k+1} + 2k+3.$$

Nella prima somma poniamo $2k-i-t=r$ ed eseguiamo le altre due somme si avrà:

$$2\Omega_{2k+1} = \sum_0^{2k}{}_i \sum_0^{2k-i}{}_r \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)}{2k+1-r}\Omega_r -$$
$$- \sum_0^{2k}{}_i \sum_1^{i+1}{}_s (-1)^{s+1}\binom{i+1}{s}\binom{s(d-2k)-1}{2k} + 2k+3$$

che per le formule (27) e (29) si può scrivere in forma definitiva:

$$\text{(I)} \qquad \sum_0^{2k}{}_r (-1)^r\binom{d-r}{2k+1-r}\Omega_r + \binom{d}{2k} + 1 = 2\Omega_{2k+1}$$

per tutti i possibili valori di k tra zero e $\left[\frac{d-1}{2}\right]$ gli estremi inclusi

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{d-1}{2}\right],$$

e ricordando che abbiamo posto $\Omega_d = p_d$.

15. Secondo gruppo. — Consideriamo ora il sistema canonico della varietà D^{d-2k} che è dato dal sistema $[(d-2k+1)D^{d-2k+1}]$. Indichiamo i suoi generi aritmetici con ω_0', ω_1', ..., ω'_{2k-1}. Essendo $d-(d-2k)=2k$ pari, la varietà D^{d-2k} è di dimensioni pari e per la seconda formula di SEVERI, si avrà:

$$\sum_{0}^{2k-1}{}_i(-1)^{i+1}\omega'_{2k-1-i} + 2k = 0. \tag{31'}$$

Operando come sopra, in base alle formule (18), (28) e (30) con calcolo perfettamente analogo, si avrà il secondo gruppo di formule a cui soddisfano i numeri Ω_i e precisamente:

$$\sum_{0}^{2k-1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k-r}\Omega_r + \binom{d}{2k-1} - 1 = 0 \tag{II}$$

per qualsiasi valore di k tra 1 e $\left[\frac{d}{2}\right]$ gli estremi inclusi:

$$k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{d}{2}\right].$$

16. Le formule del secondo gruppo come conseguenza lineare di quelle del primo gruppo. — Per $d=2$ le I e le II si riducono entrambe alla nota formula $\Omega_0 = \Omega_1 - 1$, che sopra una superficie, lega grado virtuale e genere delle curve canoniche.

Per $d=3$ le I ci danno la relazione di PANNELLI $\Omega_1 = \frac{3}{2}\Omega_0 + 1$ e la relazione di SEVERI $\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 = 2\Omega_3$.

Ora le II per $d=3$ ci danno di nuovo la relazione di PANNELLI.

Così per $d=4$ le I si riducono alle due formule:

$$2\Omega_0 + 1 = \Omega_2, \quad \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + 3 = 0$$

e la II ci danno le stesse formule.

Per $d = 5$ le I diventano:

$$5\Omega_0 + 2 = 2\Omega_1, \quad 2\Omega_1 + 2\Omega_3 = 3\Omega_2 + 7,$$
$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 + 6 = 2\Omega_5$$

e le II si riducono alle prime due di queste formule.

In altri termini le II, almeno nei casi visti, non ci danno mai formule nuove; sono cioè formule linearmente dipendenti dalle I.

Il fatto è generale e lo dimostreremo per induzione.

Intanto, ponendo nelle I, $k = 0$ si ha:

$$2\Omega_1 = d\Omega_0 + 2,$$

e ponendo nelle II $k = 1$, si ha:

$$\frac{d(d-1)}{2}\Omega_0 - (d-1)\Omega_1 + (d-1) = 0$$

che divisa per $\frac{d-1}{2}$ ci dà la formula di sopra.

La proprietà è perciò vera per la prima delle formule II.

Ciò detto ammettiamo che la proprietà sia vera per la 1ª, 2ª,... k^{esima} delle formule II e dimostriamola per la $(k+1)^{esima}$.

Basterà far vedere che la formula

$$\sum_{0}^{2k+1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\Omega_r + \binom{d}{2k+1} - 1 = 0 \tag{32}$$

è una conseguenza lineare delle formule

$$\sum_{0}^{2k-2i}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k-2i+1-r}\Omega_r + \binom{d}{2k-2i} + 1 = 2\Omega_{2k-2i+1} \tag{33}$$

per $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

e

$$\sum_{0}^{2k-1-2i}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{k-2i-r}\Omega_r + \binom{d}{2k-1-2i} - 1 = 0 \tag{34}$$

per $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

A tale scopo moltiplichiamo la (33) per $\binom{d-k+2i-1}{2i+1}$ si avrà subito.

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\sum_{0}^{2k-2i}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\binom{2k+2-r}{2i+1}\Omega_r+\\ &+\binom{d}{2k-2i}\binom{d-2k+2i-1}{2i+1}+\binom{d-2k+2i-1}{2i+1}=\\ &=2\binom{d-2k+2i-1}{2i+1}\Omega_{2k-2i+1}.\end{aligned}$$

Moltiplichiamo la (34) per $\binom{d-2k+2i}{2i+2}$, in maniera analoga si avrà:

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\sum_{0}^{2k-2i-1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\binom{2k+2-2r}{2i+r}\Omega_r+\\ &+\binom{d}{2k-2i-1}\binom{d-2k+2i}{2i+2}-\binom{d-2k+2i}{2i+2}=0.\end{aligned}$$

Sommiamo la (35) rispetto all'indice i da zero a k, sommiamo la (36) rispetto all'indice i da zero a $k-1$ e facciamo la differenza dei risultati,

$$\begin{aligned} &\sum_{0}^{k}{}_i\sum_{0}^{2k-2i}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\binom{2k+2-r}{2i+1}\Omega_r-\\ &-\sum_{0}^{k-1}{}_i\sum_{0}^{2k-2i-1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\binom{2k+2-r}{2i+2}\Omega_r+\\ &+\sum_{0}^{k}{}_i\binom{d}{2k-2i}\binom{d-2k+2i-1}{2i+1}-\sum_{0}^{k-1}{}_i\binom{d}{2k-2i-1}\binom{d-2k+2i}{2i+2}+\\ &+\sum_{0}^{k}{}_i\binom{d-2k-2i-1}{2i+1}+\sum_{0}^{k-1}{}_i\binom{d-2k+2i}{2i+2}=2\sum_{0}^{k}{}_i\binom{d-2k+2i-1}{2i+1}\Omega_{2k-2i+1}.\end{aligned}$$

Nella prima somma Ω_r vi compare per tutti i valori di i che verificano la relazione $2k-2i\geq r$, nella seconda analogamente Ω_r, vi compare quando è $2k-2i-1\geq r$. Quindi nelle prime due somme il coefficiente di Ω_r è

$$(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\left[\sum{}'\binom{2k+2-r}{2i+1}-\sum{}''\binom{2k+2-r}{2i+2}\right],$$

Σ' essendo estesa a tutti i valori di i da zero al più grande intero $\leq\frac{2k-r}{2}$

e Σ'' essendo estesa a tutti i valori di i da zero al più grande intero $\leq \frac{2k-r-1}{2}$. Ma allora

$$\Sigma'\binom{2k+2-r}{2i+1} - \Sigma''\binom{2k+2-r}{2i+2} = 1 + (-1)^r$$

che per r dispari è nullo e per r pari è uguale a due. Le prime due somme si riducono perciò a $2\sum_s^{k}\!{}_0 \binom{d-2s}{2k+2-2s}\Omega_{2s}$. Riunendo a questo, il termine scritto nel secondo membro, si può scrivere:

$$2\sum_{0}^{2k+1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\Omega_r + \sum_{0}^{k}{}_i\binom{d}{2k-2i}\binom{d-2k+2i-1}{2i+1} -$$
$$-\sum_{0}^{k-1}{}_i\binom{d}{2k-2i-1}\binom{d-2k+2i}{2i+2} + \sum_{0}^{k}{}_i\binom{d-2k+2i-1}{2i+1} +$$
$$+\sum_{0}^{k-1}{}_i\binom{d-2k+2i}{2i+2} = 0.$$

Ora è facile dimostrare, con le solite proprietà dei coefficienti binomiali, che si ha identicamente:

$$\sum_{0}^{k}{}_i\binom{d}{2k-2i}\binom{d-2k+2i-1}{2i+1} - \sum_{0}^{k-1}{}_i\binom{d}{2k-2i-1}\binom{d-2k+2i}{2i+1} = \binom{d}{2k+1} - 1$$

e analogamente

$$\sum_{0}^{k}{}_i\binom{d-2k+2i-1}{2i+1} + \sum_{0}^{k-1}{}_i\binom{d-2k+2i}{2i+2} = \binom{d}{2k+1} - 1.$$

Sostituendo si arriva alla formula

$$2\sum_{0}^{2k+1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+2-r}\Omega_r + 2\binom{d}{2k+1} - 2 = 0$$

che divisa per due, coincide con la (32): C. V. D.

Per il principio d'induzione, dobbiamo perciò concludere che le formule del secondo gruppo sono conseguenza lineare di quelle del primo.

È chiaro però che separatamente in ognuno dei due gruppi si hanno formule fra di loro indipendenti.

In tutto perciò le (I) e le (II) ci danno $\left[\frac{d+1}{2}\right]$ formule indipendenti fra di loro.

Nel caso di d pari, per es. $d = 2\delta$, le I e le II contengono lo stesso numero $\delta = \frac{d}{2}$ di formule e perciò anche le I sono conseguenza lineare delle II.

Se però d è dispari, $d = 2\delta + 1$, il primo gruppo contiene $\delta + 1$ formule, mentre il secondo gruppo ne contiene δ.

In tal caso le prime δ formule I, sono conseguenza lineare delle formule II. Ma non avviene lo stesso per la $(\delta + 1)^{esima}$. Questa formula contiene Ω_d che non figura in nessuna altra formula dei due gruppi, e perciò è indipendente da esse.

17. Il caso di $d = 2\delta$ pari. — Fissiamo l'attenzione sul caso di $d = 2\delta$ pari. Per $k = \delta$, dal II gruppo si ricava la formula di SEVERI:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 \ldots . \Omega_{2\delta-1} + 2\delta - 1 = 0 \tag{37}$$

che come si è detto è una conseguenza lineare delle δ formule del I gruppo.

Indichiamo con $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2\delta-2}$, i caratteri del sistama canonico, $|2D^2|$ di una varietà caninica D di V_d e poniamo $\omega_{2\delta-1} = \Omega_{2\delta-1}$.

Mediante le (18) esprimiamo le quantità Ω_i in funzione delle ω_i e sostituiamo nelle δ formule del gruppo I.

Le δ relazioni, nelle quantità ω_i, che così si ottengono, sono le δ relazioni del gruppo I, relative alla varietà D.

Ne segue che la (37) è una conseguenza lineare delle formule relative alle varietà D a $d - 1$ dimensioni, e perciò:

Per una V_d, *di dimensione* $d = 2\delta$ *pari, la relazione* (37), *si può dedurre, mediante le* (18), *come conseguenza lineare delle* δ *formule che legano i caratteri del sistema canonico di una varietà* D *a* $d - 1$ *dimensioni.*

Sicchè acquisite queste δ formule per una varietà a $d - 1$ dimensioni, la (37) si può dedurre da esse, in virtù delle (18), con semplici trasformazioni lineari.

Così per es.: dalle due relazioni:

$$3\omega_0 + 2 = 2\omega_1, \quad \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4 = 2\omega_3$$

che legano i caratteri del sistema canonico di una V_3, con le (18) e con semplici calcoli algebrici, si deduce che i caratteri Ω_i del sistema canonico di una V_4, verificano la relazione:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + 3 = 0.$$

È analogamente dalle tre relazioni, relative ad una V_5:

$$5\omega_0 + 2 = \omega_1, \quad 2\omega_1 + 2\omega_3 = 3\omega_2 + 7, \quad \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 + 6 = 2\omega_5,$$

applicando le (18), segue linearmente, che i caratteri Ω_i del sistema canonico di una V_6, verificano la relazione:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 - \Omega_5 + 5 = 0, \text{ ecc.}$$

18. Un'altra definizione del genere aritmetico. — Conviene a questo punto ricordare una seconda definizione del genere aritmetico di una varietà algebrica V_d, priva di punti multipli, come si è accennato in prefazione.

Proiettiamo genericamente V_d in una W_d di un S_{d+1} e sia m l'ordine di W_d.

Indichiamo con H la varietà doppia di W_d e con $h(l)$ la sua formula di postulazione: indi poniamo:

$$p_d' = \binom{m-1}{d+1} - h(m-d-2)$$

il numero p_d', così definito, si chiama pur esso, genere aritmetico di V_d, ed esprime il numero *virtuale* delle forme indipendenti di ordine $m-d-2$, aggiunte a W_d. Numero virtuale, perchè calcolato nell'ipotesi che $h(l)$ esprima la postulazione di H anche per $l = m - d - 2$.

19. Il primo ed il secondo genere aritmetico di una varietà V_d. — L'uguaglianza, $p_d = p_d'$, fondamentale in tutta la geometria sopra V_d, è necessaria anche per giustificare la comune denomenazione dei due numeri, è stata dimostrata per le varietà di dimensione $d \leq 4$ e per le varietà V_d completa intersezione di forme.

Nel caso generale la stessa uguaglianza è stata dimostrata dal SEVERI, in base però al postulato, esplicitamente enunciato sotto la forma: « *Ogni varietà dotata di punti multipli si può considerare come limite di una senza singolarità appartenente allo stesso spazio* ». Naturalmente si tende ad eliminare questo postulato e dimostrare per altra via che effettivamente $p_d = p_d'$.

Le formule dimostrate nella prima parte non dipendono da questo postulato, ma non si può dire lo stesso delle formule dei due gruppi I e II e qui vogliamo esaminare come esse si trasformano se prescindiamo dal postulato stesso. Ciò ci permetterà di trovare un notevole gruppo di formule che legano i numeri p_d e p_d'. Uno studio approfondito di queste formule credo che porterà a dimostrare definitivamente e indipendentemente dal postulato detto, l'uguaglianza $p_d = p_d'$; intento esse ci permetteranno di dimostrare che se d è pari, l'uguaglianza $p_d = p_d'$ è una conseguenza lineare dell'uguaglianza $p_n = p_n'$ per $n < d$.

Da questo momento prescindiamo perciò dell'uguaglianza $p_d = p_d'$ e chiamiamo p_d e p_d' *il primo ed il secondo genere aritmetico di* V_d.

20. I generi Ω_r' ed Ω_r di una varietà. — Riprendiamo le varietà D^{d-r}, $(d-r-1)^{esima}$ varietà caratteristica nel sistema canonico $|D|$ di V_d ed indichiamone con Ω_r ed Ω_r' il primo ed il secondo genere aritmetico, per tutti i valori di r da 1 a d. Sicchè per $r = d$, Ω_d ed Ω_d' indicheranno il primo ed il secondo genere aritmetico di V_d stessa:

$$\Omega_d = p_d, \quad \Omega_d' = p_d'.$$

Nelle nuove ipotesi le formule (31) e (31') acquistano una formula leggermente diversa (vedi SEVERI, l. c., formula 56) e precisamente:

$$\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \dots + \omega_{2k} + 2k + 3 = \Omega'_{2k+1} + \Omega_{2k+1} \tag{38}$$

$$\omega_0 - \omega_1 + \omega_2 - \dots - \omega_{2k-1} + 2k = \Omega'_{2k} - \Omega_{2k}. \tag{38'}$$

In tali condizioni le formule dei due gruppi I e II diventano:

$$\sum_0^{2k}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k+1-r}\Omega_r + \binom{d}{2k} + 1 = \Omega'_{2k+1} + \Omega_{2k+1}, \tag{I'}$$

$$\sum_0^{2k-1}{}_r(-1)^r\binom{d-r}{2k-r}\Omega_r + \binom{d}{2k-1} - 1 = \Omega'_{2k} - \Omega_{2k}. \tag{II'}$$

in particolare per k uguale al massimo valore possibile a seconda che d è dispari o pari si hanno le due formule di SEVERI:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots + \Omega_{d-1} + d + 1 = \Omega_d' + \Omega_d = p_d' + p_d \qquad d \text{ dispari} \tag{39}$$

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - \dots - \Omega_{d-1} + d - 1 = \Omega_d' - \Omega_d = p_d' - p_d \qquad d \text{ pari.} \tag{39'}$$

21. Formule che legano i generi Ω_r' ed Ω_r. — Alle formule I' ed II' applichiamo il procedimento svolto per le I e II nel n. 16.

Stavolta non si arriverà più a concludere che le II′ sono conseguenze lineari delle I′, ma con calcolo quasi analogo, che per brevità omettiamo, si arriva a questo gruppo di formule:

$$\text{(III)} \qquad \sum_{0}^{2k-1}{}_{r}\binom{d-r}{2k-r}(\Omega_r'-\Omega_r) = 2(\Omega'_{2k}-\Omega_{2k})$$

per tutti i valori di k da uno a $\left[\frac{d}{2}\right]$ e dove è bene ricordare che Ω_r' ed Ω_r indicano il primo ed il secondo genere aritmetico della varietà D^{d-r}, essendo $|D|$ il sistema canonico di V_d, ed Ω_d' ed Ω_d, indicano il primo ed il secondo genere aritmetico di V_d stessa, nel caso che d sia pari $d=2\delta$, e k possa perciò acquistare il valore di δ.

In tal caso per $k=\delta$ si ha in particolare:

$$\text{(40)} \qquad \sum_{0}^{d-1}{}_{r}(\Omega_r'-\Omega_r) = 2(\Omega_d'-\Omega_d) = 2(p_d'-p_d) \qquad d \text{ pari}$$

A questo punto supponiamo che per tutti i valori di $r<d=2\delta$ si abbia per ipotesi $\Omega_r'=\Omega_r$. Dalla (40) segue allora che è anche $\Omega_d'=\Omega_d$, ossia $p_d'=p_d$. E perciò: *L'uguaglianza* $p_d'=p_d$ *nel caso di* d *pari è una conseguenza lineare dell'uguaglianza* $p_r'=p_r$, *per tutti i valori di* $r<d$.

22. Lo stesso fatto si deduce dalle considerazioni svolte nel n.° 17.

Supposto $p_r'=p_r$ per tutti i valori di $r<d$, per la varietà canonica D di V_d valgono le formule del gruppo I. Di conseguenza, come si disse allora, se ne deduce la (37) che sostituita nella (39′), ci dà appunto l'uguaglianza $p_d=p_d'$.

Sicchè in fondo l'uguaglianza $p_d'=p_d$, basta dimostrarla per le sole varietà di dimensione dispari, di conseguenza risulterà dimostrata in generale.

E ciò può essere un effettivo vantaggio, perchè nei tentativi per ora seguiti per dimostrare, indipendentemente dal solito postulato, che è $p_d'=p_d$ è necessario distinguere i due casi di d pari o dispari. Pare insomma che la trattazione deve essere diversa nei due casi.

Per le cose dette basta perciò limitarsi al caso di d dispari — il caso di d pari — è conseguenza del primo.

E ciò spiega come per le superficie e per le V_4, la dimostrazione in parola, non presenti alcuna seria difficoltà, mentre è *assai laboriosa*, come dice il SEVERI, per le varietà a tre dimensioni.

Le difficoltà incontrate dal SEVERI per dimostrare che $p_3' = p_3$, sono perciò inerenti alla natura stessa del caso. E le eventuali semplificazioni, a cui il SEVERI allude, nella prefazione del citato lavoro, potranno al più, essere semplificazioni formali, ma non sostanziali.

Sull'invariante di Zeuthen-Segre relativo ad una superficie somma di due altre.

23. Facciamo un'ultima applicazione delle formule trovate, calcolando l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE di una superficie $C \equiv A + B$, appartenente ad una varietà a tre dimensioni V_3, in funzione degli stessi invarianti relativi ad A e B.

Useremo le notazioni del SEVERI, indicheremo cioè con $[M]$ il genere aritmetico di una superficie M, con $[MN]$ il genere della curva MN comune alle superficie M ed N ed infine con $[MNP]$ il numero dei punti comuni alle tre superficie M, N, P. Indicheremo poi con I_{A+B}, P_{A+B}, ω_{A+B}, rispettivamente l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE, il genere aritmetico ed il genere lineare della superficie $A + B$. Per una nota formula di NOETHER si avrà:

$$I_{A+B} = 12P_{A+B} - \omega_{A+B} + 9. \tag{41}$$

Ora per la (4) del n.° 2:

$$P_{A+B} = [A] + [B] + [AB].$$

D'altra parte detto $|D|$ il sistema canonico di V_3, ω_{A+B} esprime il genere della curva $C^2 + CD$ e perciò:

$$\omega_{A+B} = [C^2] + [CD] + [C^2D] - 1.$$

Per la (9) del n.° 5 si ha:

$$\begin{aligned}
[C^2] &= [A^2] + [B^2] + 2[AB] + 2[A^2B] + 2[AB^2] - 3 \\
[CD] &= [AD] + [BD] + [ABD] - 1 \\
[C^2D] &= [A^2D] + [B^2D] + 2[ABD].
\end{aligned}$$

Osservando che

$$[A^2] + [AD] + [A^2D] - 1 = \omega_A, \quad [B^2] + [BD] + [B^2D] - 1 = \omega_B$$

e sostituendo nella (41) si ha:

$$I_{A+B} = 12[A] + 12[B] + 10[AB] - \omega_A - \omega_B - 2[A^2B] - 2[AB^2] - 3[ABD] + 12.$$

D'altra parte:

$$I_A = 12[A] - \omega_A + 9, \quad I_B = 12[B] - \omega_B + 9$$

quindi

$$I_{A+B} = I_A + I_B + 10[AB] - 2[A^2B] - 2[AB^2] - 3[ABD] - 6.$$

Osservando infine che sulla superficie A il sistema aggiunto alla curva AB è $|AB + A^2 + AD|$ si ha:

$$2[AB] - 2 = [AB^2] + [A^2B] + [ABD]$$

che introdotto nella precedente ci dà la formula definitiva;

$$I_{A+B} = I_A + I_B + 4[AB] + [A^2B] + [AB^2] \tag{42}$$

la quale esprime appunto l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie $A+B$ in funzione degli stessi invarianti e dei caratteri aritmetici di A e B.

Per la validità della formula s'intende che i punti multipli delle superficie in considerazione vanno assegnati con multiplicità virtuale eguale a quella effettiva.

24. Ponendo nella (42) $B = A$ si ha la formula:

$$I_{2A} = 2I_A + 4[A^2] + 2[A^3]. \tag{43}$$

Ponendo invece $B = (k-1)A$ con breve calcolo si ottiene:

$$I_{kA} = I_A + I_{(k-1)A} + 4(k-1)[A^2] + \left[4\binom{k-1}{2} + 2\binom{k}{2}\right][A^3] - (k-2)$$

e dando a k successivamente i valori $k-1$, $k-2$,... 2 e sommando si ottiene la formula definitiva:

$$I_{kA} = kI_A + 2k(k-1)[A^2] + k(k-1)^2[A^3] - 2(k-1)(k-2). \tag{44}$$

Le formule (42), (43) e (44) si possono utilmente applicare anche alle superficie dello spazio ordinario.

Catania, marzo 1927.

Sulla riducibilità delle equazioni algebriche.

Memoria II di GIULIO DARBI (a Napoli).

Data un' equazione $f(x) = 0$, di grado n, a radici distinte e con coefficienti appartenenti ad un campo K di razionalità, sappiamo (¹) che è possibile di costruire un' equazione normale $V(\rho) = 0$, detta risolvente di GALOIS, di grado N, essendo $N = \underline{|n}$, con coefficienti appartenenti a K, la quale gode della proprietà, che il corpo algebrico $(K; \rho_i)$ è uguale all' altro: $(K; x_1, x_2, \dots x_n)$, ove ρ_i è una radice di $V(\rho) = 0$, ed $x_1, x_2, \dots x_n$ sono radici dell' equazione proposta. Se la precedente equazione è riducibile in K, sappiamo (²) che i fattori irriducibili, in cui si spezza $V(\rho)$, sono dello stesso grado λ rispetto a ρ e che tale numero λ è uguale all' ordine del gruppo di GALOIS dell' equazione data $f(x) = 0$.

La teoria svolta nella presente Memoria, che ha per oggetto lo studio sulla riducibilità delle equazioni risolventi, relative ad equazioni binomie, è indipendente dalla teoria dei gruppi di sostituzioni, ed è fondata principalmente sulla conoscenza di un teorema del CAPELLI (³) e di un altro (⁴) già da me dimostrato.

Denotando con $W(\rho)$ uno dei fattori irriducibili in K, in cui si spezza $V(\rho)$, continueremo a chiamare risolvente l' equazione: $W(\rho) = 0$, relativa all' equazione binomia $x^n - A = 0$, che supponiamo irriducibile nel campo di razionalità K, a cui appartiene A. Se $f(\varepsilon) = 0$ rappresenta l' equazione alle radici primitive n^{me} dell' unità, il cui grado r in ε è ben determinato, sappiamo (⁵) che la precedente equazione abeliana è irriducibile nel campo assoluto C di

(¹) Chiamiamo normale un' equazione di cui tutte le radici si possono esprimere razionalmente per mezzo di una di esse. (Cfr. HENRY WEBER, *Traité d' algèbre supérieure,* 1898. Cfr. nota (²).

(²) Cfr. LUIGI BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, 1899.

(³) Cfr. CAPELLI, *Sulla reduttibilità delle equazioni algebriche.* Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1898.

(⁴) Cfr. Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, 1923, 1° semestre.

(⁵) Cfr. nota (²).

razionalità. Se $f(\varepsilon)$ si decompone in fattori, irriducibili in K, questi sono dello stesso grado μ rispetto ad ε.

Nelle pagine che seguono, viene dimostrato che: il grado dell'equazione risolvente $W(\rho)=0$, irriducibile in K, è divisore del prodotto $n\mu$, ed è multiplo comune ad n e μ; inoltre, la condizione necessaria e sufficiente perchè tale grado sia uguale ad $\frac{n\mu}{i}$, o, ciò ch'è lo stesso, perchè l'ordine del gruppo di GALOIS dell'equazione binomia data: $x^n - A = 0$, sia uguale ad $\frac{n\mu}{i}$, è che i sia divisore comune ad n e μ ed A sia uguale alla potenza i^{ma} di un numero del campo $(K;\ \varepsilon)$ e non ad altra potenza, con esponente maggiore di i, di un numero dello stesso campo, essendo ε radice di $f(\varepsilon)=0$. Se poi il campo di razionalità K, in cui è irriducibile l'equazione data $x^n - A = 0$, coincide col campo assoluto C di razionalità, dimostreremo che: il grado della risolvente $W(\rho)=0$ è uguale al prodotto nr, se n è dispari; se poi n è pari, affinchè la risolvente risulti di grado nr, è necessario e sufficiente che A non sia uguale al quadrato di un numero del campo $(C;\ \varepsilon)$.

Considerando il caso in cui sia: $n = 2p_1,\ p_2, \dots\ p_i$, essendo $p_1,\ p_2, \dots\ p_i$ numeri primi dispari differenti fra loro, dimostreremo che: il grado della risolvente irriducibile $W(\rho)=0$ risulta uguale al prodotto nr se il termine A dell'equazione data: $x^n - A = 0$, non è della forma: $(-1)^\alpha p_1 p_2 \dots p_m a^2$, essendo: $\alpha = \sum_{s=1}^{s=m}\left(\frac{p_s - 1}{2}\right)$, ove $p_1,\ p_2, \dots\ p_m$ sono m numeri differenti, per $m \geq 1$, scelti a piacere fra $p_1,\ p_2, \dots\ p_i$; il numero a appartiene a C. Se poi A è della precedente forma, il grado della risolvente è uguale alla metà di nr. Infine si dimostra il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione binomia $x^n - A = 0$, *irriducibile nel campo assoluto di razionalità, a cui appartiene* A, *sia normale, è che abbia una delle tre seguenti forme:*

$$x^6 + 3a^2 = 0;\quad x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} = 0;\quad x^{2^\lambda} + 2^{2^{\lambda-2}} \cdot a^{2^{\lambda-1}} = 0,$$

essendo a *un numero appartenente a* C.

Giova notare che le equazioni normali binomie di quarto e ottavo grado, irriducibili in C debbono avere la forma seconda, in cui si faccia: $\lambda = 2$; $\lambda = 3$ nell'equazione: $x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} = 0$.

Da questo teorema si ricava, che un'equazione normale binomia, irriducibile nel campo assoluto di razionalità, deve avere il grado uguale a sei, oppure uguale ad una potenza di 2.

Denotando con x_1 una qualunque radice di una delle precedenti equazioni, le altre radici dell'equazione considerata, si esprimono razionalmente per x_1, mediante le seguenti relazioni:

Per le equazioni: $x^6 + 3a^2 = 0$ si ha:

$$x_2 = \frac{x_1(a + x_1^3)}{2a}; \quad x_3 = \frac{x_1(a - x_1^3)}{2a}; \quad x_4 = -x_1; \quad x_5 = -x_2; \quad x_6 = -x_3.$$

Per le equazioni: $x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} = 0$, si ha:

$$x_i = \frac{x_1^{2i-1}}{a^{i-1}},$$

potendo variare i da 1 a 2^λ.

Per le equazioni: $x^{2^\lambda} + 2^{2^{\lambda-2}} \cdot a^{2^{\lambda-1}} = 0$, si ha:

$$x_{i+1} = x_1 \left(\frac{2^{2^{\lambda-4}} a^{2^{\lambda-3}-1} x_1^{2^{\lambda-2}+2}}{x_1^{2^{\lambda-1}} + 2^{2^{\lambda-3}} a^{2^{\lambda-2}}} \right)^i,$$

potendo variare i da 0 a $2^\lambda - 1$.

I.

1. Abbiasi l'equazione binomia:

$$(1) \qquad x^n - A = 0,$$

in cui A sia un numero appartenente ad un certo campo K di razionalità. Se: $n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, essendo $p_1, p_2, \dots, p_i$ numeri primi dispari differenti fra loro, sappiamo [1] che: Affinchè l'equazione (1) sia irriducibile nel campo di razionalità K, è necessario e sufficiente che A non sia il quadrato, nè la potenza p^{ma} di un numero di K, e che $-A$, nel caso di $\lambda > 1$, non sia il quadruplo della quarta potenza di un numero di K. Denotando con $x_1, x_2, \dots x_n$ le radici della (1), che supponiamo irriducibile in K, consideriamo una funzione ρ di $x_1, x_2, \dots x_n$, definita dall'uguaglianza:

$$(2) \qquad \rho = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

ove $a_1, a_2, \dots a_n$ sono numeri di K scelti in modo tale che per tutte le possibili sostituzioni fra $x_1, x_2, \dots x_n$, l'espressione che figura nel secondo membro

(1) Cfr. CAPELLI, citata nota.

della (2), assuma N valori distinti: $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_N$, che sono radici di un'equazione normale: $V(\rho) = 0$, con coefficienti appartenenti a K, essendo: $N = \underline{|n}$.

Consideriamo l'equazione: $f(\varepsilon) = 0$ alle radici primitive n^{me} dell'unità, la quale, come sappiamo (1), è irriducibile nel campo assoluto di razionalità ed è abeliana; il suo grado r è uguale al prodotto:

$$2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_i^{\alpha_i-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_i - 1).$$

Se $f(\varepsilon)$ si decompone in fattori irriducibili in K, sia $f_1(\varepsilon)$ uno di tali fattori di grado μ in ε; poichè l'equazione: $f(\varepsilon) = 0$ è abeliana, μ è divisore di r. Se con ε denotiamo una radice di $f(\varepsilon) = 0$, potendo le radici della (1) rappresentarsi così:

$$x_1, \quad x_1\varepsilon, \quad x_1\varepsilon^2, \ldots \quad x_1\varepsilon^{n-1},$$

la (2) può scriversi:

$$\rho = x\varphi(\varepsilon), \quad \text{essendo:} \quad \varphi(\varepsilon) = a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \ldots + a_n\varepsilon^{n-1}.$$

Per lo studio sulla riducibilità dell'equazione risolvente: $V(\rho) = 0$, giova considerare il sistema:

$$\begin{aligned} \rho &= x\varphi(\varepsilon) \\ x^n &= A \\ f_1(\varepsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

dal quale, eliminando x, ε, si ottiene la risultante: $\psi(\rho) = 0$, di grado $n\mu$ in ρ, con radici distinte, perchè differenti sono le radici dell'equazione: $V(\rho) = 0$, come abbiamo già detto. Ricordiamo il seguente teorema (2):

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione: F(x) = 0, *a radici distinte, che si ottiene eliminando le* n — 1 *variabili:* y, z,... u, v, w *dalle* n *equazioni del sistema:*

$$\begin{aligned} &f_1(x,\ y,\ z, \ldots\ u,\ v,\ w) = 0; \quad f_2(y,\ z, \ldots\ u,\ v,\ w) = 0; \\ &f_3(z, \ldots\ u,\ v,\ w) = 0; \ldots \quad f_{n-1}(v,\ w) = 0; \quad f_n(w) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

sia irriducibile nel campo di razionalità K, *è che le equazioni:*

$$\begin{gathered} f_1(x;\ y_1,\ z_1, \ldots\ u_1,\ v_1,\ w_1) = 0; \quad f_2(y;\ z_1, \ldots\ u_1,\ v_1,\ w_1) = 0; \\ f_3(z; \ldots\ u_1,\ v_1,\ w_1) = 0; \ldots \quad f_{n-1}(v;\ w_1) = 0; \quad f_n(w) = 0; \end{gathered}$$

---

(1) Cfr. BIANCHI, citata opera, da pag. 209 a pag. 212.

(2) Cfr. citata nota, Rendiconti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, 1923.

siano irriducibili rispettivamente nei campi:

$$(K;\ y_1,\ z_1,\dots\ u_1,\ v_1,\ w_1);\quad (K;\ z_1,\dots\ u_1,\ v_1,\ w_1);\dots$$
$$(K;\ u_1,\ v_1,\ w_1);\quad (K;\ v_1,\ w_1);\quad (K;\ w_1);\quad K,$$

ove $(y_1,\ z_1,\dots\ u_1,\ v_1,\ w_1)$ *rappresenta una soluzione, scelta a piacere, del sistema costituito dalle ultime* $n-1$ *equazioni del sistema* (4).

Applicando al sistema (3) il teorema testè enunciato, si ricava che: la risultante $\psi(\rho)=0$ è irriducibile in K se l'equazione (1) è irriducibile nel campo $(K;\ \varepsilon)$, essendo ε una radice qualunque di $f_1(\varepsilon)=0$.

Si noti che l'equazione (1) è normale nel campo $(K;\ \varepsilon)$; sia $\vartheta_1(x,\ \varepsilon)$ uno dei fattori di grado h in x, irriducibile in questo campo, in cui si decompone il primo membro dell'equazione (1), essendo h divisore di n.

Eliminando le variabili x, ε dalle equazioni del sistema:

$$\text{(3')}\qquad \begin{aligned} \rho &= x\varphi(\varepsilon)\\ \vartheta_1(x,\ \varepsilon) &= 0\\ f_1(\varepsilon) &= 0, \end{aligned}$$

si ha che la risultante: $W(\rho)=0$, di grado $h\mu$ in ρ, è irriducibile in K. Se denotiamo con $\beta_1(\varepsilon,\ x)$ uno dei fattori di grado t in ε, irriducibile nel campo $(K;\ x)$, in cui si decompone $f_1(\varepsilon)$, essendo x una radice di $x^n-A=0$, ed il numero t divisore di μ, eliminiamo x, ε dalle equazioni del sistema:

$$\text{(3'')}\qquad \begin{aligned} \rho &= x\varphi(\varepsilon)\\ \beta_1(\varepsilon,\ x) &= 0\\ x^n - A &= 0. \end{aligned}$$

La risultante $W(\rho)=0$, che così si ottiene, è di grado nt in ρ.

Essendo: $n=2^\lambda p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, le condizioni, a cui deve soddisfare A, perchè l'equazione: $x^n-A=0$ sia irriducibile in $(K;\ \varepsilon)$ sono le seguenti: A non deve essere uguale alla potenza $p_i{}^{ma}$, nè al quadrato di un numero del campo $(K;\ \varepsilon)$. È facile dimostrare che l'altra condizione a cui deve soddisfare $-A$, nel caso di $\lambda>1$, di non essere uguale alla quarta potenza di un numero di $(K;\ \varepsilon)$, è assorbita dalle altre enunciate. Se fosse infatti: $A=-4\Phi(\varepsilon)^4$, si ricaverebbe: $A=\left[2\varepsilon^{\frac{n}{2}}\Phi(\varepsilon)^2\right]^2$, tenuto conto che, essendo ε radice primitiva n^{ma} dell'unità, soddisfa l'equazione: $\varepsilon^{\frac{n}{2}}+1=0$. Da quanto si è detto risulta che: se l'equazione (1) è riducibile in $(K;\ \varepsilon)$ ed i fattori irriducibili in tale campo, in cui si spezza il primo membro della (1), sono ciascuno di grado m in x, essendo m divisore di n, deve essere A uguale alla potenza i^{ma} di un numero di $(K;\ \varepsilon)$, e non ad altra potenza di un numero dello stesso campo $(K;\ \varepsilon)$ con esponente maggiore di i, essendo: $i = \frac{n}{m}$.

Infatti, se fosse: $A = \psi(\varepsilon)^i$, si avrebbe: $(x^m)^i - \psi(\varepsilon)^i = 0$; quindi $x^n - A$ sarebbe divisibile per $x^m - \psi(\varepsilon)$. Ora, l'equazione: $x^m - \psi(\varepsilon) = 0$ è irriducibile in $(K;\ \varepsilon)$ se $\psi(\varepsilon)$ non è uguale alla potenza p^{ma} di un numero di $(K;\ \varepsilon)$, o, ciò ch'è lo stesso, se A non è uguale alla potenza di un numero di tale campo con esponente multiplo di i.

2. Concludendo, possiamo dire che:

Se un' equazione binomia: $\mathrm{x^n - A = 0}$, *è irriducibile in un campo* K *di razionatità a cui appartiene* A, *il grado della sua risolvente* $\mathrm{W}(\rho) = 0$ *è divisore del prodotto* $\mathrm{n}\mu$, *ed è multiplo comune ad* n *e* μ; *la condizione necessaria e sufficiente perchè tale grado sia uguale ad* $\frac{\mathrm{n}\mu}{\mathrm{i}}$, *è che* i *sia divisore comune ad* n *e* μ *ed* A *sia uguale alla potenza* $\mathrm{i^{ma}}$ *di un numero del campo* $(\mathrm{K};\ \varepsilon)$ *e non ad altra potenza di un numero dello stesso campo, con esponente maggiore di* i, *essendo* ε *radice di* $\mathrm{f}(\varepsilon) = 0$, *cioè dell' equazione alle radici primitive* $\mathrm{n^{me}}$ *dell' unità, ed il numero* μ *è il grado di uno dei fattori irriducibili in* K, *in cui si spezza* $\mathrm{f}(\varepsilon)$.

II.

1. Occupiamoci del caso, in cui il campo di razionalità K coincida col campo assoluto C di razionalità, ove sia irriducibile l'equazione binomia data: $x^n - A = 0$, essendo A un numero di C. Se la precedente equazione è normale, cioè se le radici si possono esprimere in funzione razionale di una qualunque di esse, anche le radici della risolvente: $V(\rho) = 0$, come si vede dalla (2) del precedente paragrafo, si possono esprimere in funzione razionale di una qualunque radice dell'equazione:

$$x^n - A = 0. \tag{1}$$

Quindi i corpi algebrici $(K;\ \rho_i)$, $(K;\ x_i)$ sono uguali; il che significa che i fattori irriducibili, in cui si spezza $V(\rho)$ nel campo C, sono di grado n, come del resto è noto che: se un'equazione è normale, l'ordine del suo gruppo di GALOIS è uguale al grado dell'equazione. Applicando il teorema 2 del precedente paragrafo, il grado della risolvente irriducibile $V(\rho) = 0$ deve essere multiplo di μ, ossia il grado n della (1) deve essere multiplo di r, che è uguale al grado dell'equazione alle radici primitive n^{me} dell'unità. Essendo:

$$n = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}; \quad r = 2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_i^{\alpha_i-1} (p_1-1)(p_2-1) \dots (p_i-1),$$

vediamo in quali casi n è divisibile per r.

Supponiamo dapprima che n sia uguale alla potenza di un numero primo, cioè si abbia: $n = p^\alpha$; sarà quindi: $r = p^{\alpha-1}(p-1)$. Deve essere il quoziente $\frac{n}{r}$ uguale ad un numero intero, cioè p divisibile per $p-1$; è necessario quindi che sia: $p = 2$, ossia $n = 2^\alpha$. Nel caso in cui n non sia uguale alla potenza di un numero primo, facendo il rapporto fra n e r si ottiene:

$$\frac{n}{r} = \frac{2 p_1 p_2 \dots p_i}{(p_1-1)(p_2-1) \dots (p_i-1)}.$$

È facile vedere che tale quoziente risulta intero solo nel caso in cui i fattori primi p_1, p_2,... p_i non siano diversi da 2 e 3.

2. Da quanto si è detto, risulta che:

Perchè un'equazione binomia $x^n - A = 0$, *irriducibile nel campo assoluto di razionalità, sia normale, è necessario che il suo grado sia pari e non contenga alcun fattore primo dispari diverso da 3.*

3. Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} \rho &= x\varphi(\varepsilon) \\ x^n - A &= 0 \\ f(\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Affinchè la risultante di grado nr in ρ, che si ottiene eliminando x, ε dalle equazioni del sistema (2), sia irriducibile in C, sappiamo [1] che è necessario e sufficiente che l'equazione: $x^n - A = 0$ sia irriducibile nel campo $(C; \varepsilon)$; se i fattori primi di n sono 2, p_1, p_2,... p_i, tale condizione dell'irriducibilità di $x^n - A = 0$ nel campo $(C; \varepsilon)$ si trasforma nelle altre [2]: A non sia uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, nè alla potenza p_i^{ma} di un numero di tal campo. Supponiamo che si abbia: $A = \Phi(\varepsilon)^p$, essendo p numero primo dispari. Ponendo: $\Phi(\varepsilon) = z$, la precedente equazione si può scrivere: $z^p - A = 0$.

---

[1] Cfr. CAPELLI, citata nota, nonchè Rendiconti Reale Accad. Naz. dei Lincei, 1923.

[2] Cfr. nota precedente.

Poichè ε è radice di un' equazione abeliana, anche la precedente equazione è abeliana, essendo z funzione razionale di ε; ciò è assurdo per il precedente teorema 2.

Dunque la risultante di grado nr in ρ relativa al sistema (2), è irriducibile in C, se A non è uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \varepsilon)$; tale risultante di grado nr in ρ è irriducibile in C se n è dispari.

Se poi l'equazione (1) è normale, sappiamo che n deve essere della forma: $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, essendo: $\alpha > 0$. Vogliamo dimostrare che β è uguale ad uno. Intanto, se $\beta > 0$, si ha: $r = 2^\alpha \cdot 3^{\beta-1}$. Poichè l'equazione (1) è normale, la sua risolvente irriducibile $W(\rho) = 0$ deve essere di grado n, cioè di grado $2^\alpha \cdot 3^\beta$; quindi, la risultante $\psi(\rho) = 0$ in ρ, relativa al sistema (2), deve essere riducibile in C; i fattori irriducibili in C, in cui si spezza $\psi(\rho)$ debbono essere di grado n in ρ. Onde, $x^n - A$ si dovrà decomporre in fattori irriducibili nel campo $(C; \varepsilon)$, ciascuno di grado terzo rispetto ad x. È necessario perciò che A sia uguale alla potenza di grado $\frac{n}{3}$, cioè: $2^\alpha \cdot 3^{\beta-1}$, di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, ossia: $A = \Omega(\varepsilon)^{2^\alpha \cdot 3^{\beta-1}}$. Ponendo: $\Omega(\varepsilon)^{2^\alpha} = z$, si ha: $A = z^{3^{\beta-1}}$. Essendo z uguale ad una funzione razionale di ε, è radice di un' equazione abeliana e quindi normale. Ora, la precedente equazione non può sussistere per il teorema 2 di questo paragrafo, a meno che non sia: $\beta = 1$; in tal caso si ha: $n = 2^\alpha \cdot 3$.

4. Pertanto, possiamo riassumere i risultati ottenuti, come segue:

Se un' equazione binomia: $x^n - A = 0$, *irriducibile nel campo assoluto* C *di razionalità, a cui appartiene* A, *è di grado dispari, la sua risolvente irriducibile in* C *è di grado* nr*; se poi* n *è pari, perchè la risolvente sia di grado* nr, *è necessario e sufficiente che* A *non sia uguale al quadrato di un numero del campo* $(C; \varepsilon)$. *Se poi l'equazione binomia è normale in* C, *il suo grado deve essere della forma:* $2^\alpha \cdot 3$, *essendo:* $\alpha > 0$, *oppure:* 2^α.

III.

1. In questo paragrafo considereremo equazioni binomie di grado pari del tipo: $x^{2p_1p_2\dots p_i} - A = 0$, essendo $p_1, p_2, \dots p_i$ numeri primi dispari differenti fra loro. Trattiamo dapprima il caso più semplice di $n = 2p$, in cui l'equazione alle radici primitive n^{me} dell'unità è:

$$y^{p-1} - y^{p-2} + \dots + y^2 - y + 1 = 0,$$

la quale, per $y = -\alpha$, si trasforma nell'equazione della divisione della circonferenza in p parti uguali. Si consideri il sistema:

$$(1)\qquad \begin{gathered} \rho = x\varphi(\alpha) \\ x^{2p} = A \\ \alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \dots + 1 = 0, \end{gathered}$$

dal quale eliminiamo x, α. Applicando il teorema 4 del precedente paragrafo, la risultante di grado: $2p(p-1)$ in ρ è riducibile in C, cioè nel campo assoluto di razionalità, se A è uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \alpha)$, cioè: $A = \Omega(\alpha)^2$. Si tratta di determinare la più generale funzione di α che sia radice di un'equazione del tipo:

$$(1')\qquad y^2 - A = 0,$$

essendo A un numero appartenente a C. Denotando con g una radice primitiva dell'unità nel senso dei numeri, secondo il modulo p, possiamo rappresentare le p radici: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{p-2}$ rispettivamente con: $\alpha, \alpha^g, \alpha^{g^2}, \dots \alpha^{g^{p-2}}$. Sappiamo [1] che una funzione di α, a due valori, che siano radici di un'equazione della forma (1'), è del tipo:

$$(2)\qquad a(\eta_0 - \eta_1),$$

essendo:

$$(3)\qquad \eta_0 = \alpha + \alpha^{g^2} + \alpha^{g^4} + \dots + \alpha^{g^{p-3}}; \quad \eta_1 = \alpha^g + \alpha^{g^3} + \dots + \alpha^{g^{p-2}}.$$

Onde, le (3) sono radici dell'equazione:

$$\eta^2 + \eta + \frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{4} = 0.$$

Dalla precedente equazione si ricava:

$$\eta_0 - \eta_1 = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

Quindi, la più generale funzione razionale di α, che sia radice della (1') è:

$$a\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

Si ha dunque:

$$(4)\qquad A = a^2 p (-1)^{\frac{p-1}{2}} = a^2(\eta_0 - \eta_1)^2.$$

---

[1] Cfr. BIANCHI, citata opera, pag. 223.

Se nell'equazione: $x^{2p} - A = 0$ del sistema (1), sostituiamo ad A l'espressione: $a^2(\eta_0 - \eta_1)^2$, che figura nel secondo membro della (4), si ha:

$$x^{2p} - A = [x^p - a(\eta_0 - \eta_1)][x^p + a(\eta_0 + \eta_1)].$$

Dal sistema (1), sostituendo all'equazione: $x^{2p} - A = 0$, l'equazione: $x^p - a(\eta_0 - \eta_1) = 0$, si ricava il nuovo sistema:

$$(5) \qquad \begin{gathered} \rho = x\varphi(\alpha) \\ x^p - a(\eta_0 - \eta_1) = 0 \\ \alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0. \end{gathered}$$

Ora, è facile vedere che l'equazione: $x^p - a(\eta_0 - \eta_1) = 0$, è irriducibile nel campo $(C; \alpha)$; se fosse riducibile, essendo p numero primo dispari, risulterebbero le radici $x_1, x_2, \ldots x_p$ numeri del campo $(C; \alpha)$; il che è assurdo, tenuto conto che l'equazione data: $x^{2p} - A = 0$, è irriducibile in C, per l'ipotesi ammessa.

Onde, applicando il teorema, enunciato al principio dell'art. 1 del § 1, la risultante in ρ, di grado $p(p-1)$, che si ottiene eliminando x, α dalle equazioni del sistema (5), è irriducibile in C.

2. Concludendo diremo che: l'equazione risolvente irriducibile, relativa ad un'equazione binomia: $x^{2p} - A = 0$ è di grado $p(p-1)$, se l'equazione binomia è della seguente forma: $x^{2p} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} pa^2$; se non è della precedente forma, la risolvente è di grado $2p(p-1)$.

3. Per trattare la quistione più generale, cioè relativa all'equazione binomia: $x^{2p_1p_2\ldots p_i} - A = 0$, dovremo premettere il seguente teorema, che dimostreremo facilmente:

L'equazione della divisione della circonferenza in p_1 *parti uguali, è irriducibile nel campo che si ottiene aggiungendo al campo assoluto* C *di razionalità le radici delle equazioni della divisione della circonferenza in* $p_2, p_3, \ldots p_i$ *parti uguali, essendo* $p_1, p_2, \ldots p_i$ *numeri primi dispari differenti fra loro.*

Se poniamo: $n = p_1 p_2 \ldots p_i$ e rappresentiamo con ε una radice primitiva n^{ma} dell'unità, la quale soddisfa ad un'equazione: $f(\varepsilon) = 0$, di grado $(p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_i - 1)$, irriducibile [1] in C, si ha: $\varepsilon = \alpha\beta\gamma\delta\ldots\psi$, essendo α

[1] Cfr. BIANCHI, citata opera, pag. 210.

una radice dell'equazione della divisione della circonferenza in p_1 parti uguali; β una radice dell'equazione della divisione della circonferenza in p_2 parti uguali; in generale si ha che ψ rappresenta una radice dell'equazione della divisione della circonferenza in p_i parti uguali. Supponiamo che l'equazione della divisione della circonferenza in p_1 parti uguali sia riducibile nel campo $(C;\ \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots \psi_1)$; denotiamo con $f_1(\alpha;\ \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots \psi_1)$ uno dei fattori irriducibili in tal campo, in cui si decompone il primo membro dell'equazione: $\alpha^{p_1-1} + \alpha^{p_1-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$; analogamente, denotiamo con $f_2(\beta_1;\ \gamma_1, \delta_1, \ldots \psi_1)$ uno dei fattori irriducibili nel campo $(C;\ \gamma_1, \delta_1, \ldots \psi_1)$, in cui si decompone il primo membro dell'equazione: $\beta^{p_2-1} + \beta^{p_2-2} + \ldots + \beta + 1 = 0$.

Consideriamo il sistema:

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
\alpha\beta\gamma\delta \ldots \psi &= \varepsilon \\
f_1(\alpha;\ \beta, \gamma, \delta, \ldots \psi) &= 0 \\
f_2(\beta;\ \gamma, \delta, \ldots \psi) &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
f_i(\psi) &= 0,
\end{aligned}
$$

essendo:

$$
f_i(\psi) = \psi^{p_i-1} + \psi^{p_i-2} + \ldots + \psi + 1 = 0.
$$

Applicando al precedente sistema (6), che è di forma analoga al sistema (4) del § 1, il teorema enunciato all'art. 1 di detto paragrafo, si perviene alla conclusione che, la risultante in ε (che si ottiene eliminando $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \psi$ dalle equazioni del sistema (6)) di grado minore del numero: $(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_i-1)$, è irriducibile in C; il che è assurdo, perchè ε, essendo radice primitiva n^{ma} dell'unità, soddisfa, come noto (¹) ad un'equazione di grado r, irriducibile in C, ove: $r = (p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_i-1)$.

4. Consideriamo il sistema:

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\rho &= x\varphi(\varepsilon) \\
x^{2p_1p_2} &= A \\
f(\varepsilon) &= 0,
\end{aligned}
$$

del § 2 art. 3, ed eliminiamo x, ε, notando che $f(\varepsilon) = 0$ è l'equazione alle radici primitive n^{me} dell'unità di grado $2p_1p_2$. Perchè la risultante $\psi(\rho) = 0$, di grado: $2p_1p_2(p_1-1)(p_2-1)$, sia irriducibile in C, sappiamo (²), per il

(¹) Cfr. Bianchi, citata opera, pag. 210.
(²) Cfr. Rendiconti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, citata nota.

teorema citato all'art. 1 del § 1, che è necessario e sufficiente, che l'equazione: $x^{p_1 p_2} - A = 0$ sia irriducibile nel campo $(C; \varepsilon)$, e quindi, per il teorema 4 del § 2, che A non sia il quadrato di un numero di $(C; \varepsilon)$. Essendo $\varepsilon = \alpha\beta$, è quindi necessario e sufficiente che A non sia il quadrato di un numero del campo: $(C; \alpha \cdot \beta)$, ove: α, β sono radici rispettivamente delle equazioni:

$$\alpha^{p_1-1} + \alpha^{p_1-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0; \qquad \beta^{p_2-1} + \beta^{p_2-2} + \ldots + \beta + 1 = 0.$$

Supponiamo che si abbia: $A = \Omega(\alpha, \beta)^2$, essendo: $\Omega(\alpha, \beta)$ una funzione razionale intera di α, β con coefficienti appartenenti a C. Ora, $\Omega(\alpha, \beta)$ si può considerare come funzione razionale intera di α con coefficienti appartenenti al campo: $(C; \beta)$; quindi, la precedente equazione si può scrivere: $A = \Omega_1(\alpha)^2$, essendo $\Omega_1(\alpha)$ una funzione razionale di α, con coefficienti appartenenti al campo: $(C; \beta)$. Tenuto conto che l'equazione:

$$\alpha^{p_1-1} + \alpha^{p_1-2} + \ldots + \alpha + 1 = 0$$

è irriducibile nel campo $(C; \beta)$, sappiamo dalla 4 pel presente paragrafo che non può esistere una relazione del precedente tipo: $A = \Omega_1(\alpha)^2$, se non è verificata l'uguaglianza $A = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} p_1 \cdot b^2$, essendo b un numero di $(C; \beta)$. Dalla precedente equazione si ricava che, b^2 è un numero del campo C, essendo A appartenente a tale campo; onde, per la formula (4), testè citata, si deve avere: $b^2 = (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \cdot p_2 \cdot a^2$, ove a appartiene a C.

Se nell'uguaglianza: $A = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} p_1 b^2$, sostituiamo al numero b^2 l'equivalente espressione trovata, si ha:

$$A = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot a^2 = \Omega(\alpha, \beta)^2 = \Omega(\varepsilon)^2.$$

Per tale valore di A, l'equazione binomia: $x^{2p_1 p_2} - A = 0$ è riducibile nel campo $(C; \varepsilon)$ o, ciò ch'è lo stesso, nel campo: $(C; \alpha \cdot \beta)$, essendo uguali tali campi.

Ora, l'equazione: $x^{p_1 p_2} - \Omega(\varepsilon) = 0$ è irriducibile nel campo $(C; \varepsilon)$. Se fosse riducibile in tal campo, pel teorema del CAPELLI, dovrebbe essere $\Omega(\varepsilon)$ uguale alla potenza di grado p_1 o di grado p_2 di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, e quindi per la (8), si avrebbe: $A = \Phi(\varepsilon)^{p_1}$; poichè ε è radice di un'equazione abeliana e quindi normale, anche $\Phi(\varepsilon)$, che è funzione razionale di ε, è radice di equazione normale e pel teorema 4 del precedente § 2, non può soddisfare ad un'equazione binomia della precedente forma.

Ora, sostituendo nel sistema (7) all'equazione $x^{2p_1p_2}-A=0$, l'equazione: $x^{p_1p_2}-\Omega(\varepsilon)=0$, che è irriducibile nel campo $(C;\ \varepsilon)$, eliminando x, ε si ricava che, la risultante in ρ di grado: $p_1p_2(p_1-1)(p_2-1)$ è irriducibile in C pel teorema già ricordato all'art. 1 del § 1. Se $n=2p_1p_2 \dots p_i$, essendo $p_1,\ p_2, \dots p_i$ numeri primi dispari, differenti fra loro, seguendo lo stesso ragionamento tenuto per l'equazione: $x^{2p_1p_2}-A=0$, si perverrebbe alle stesse conclusioni.

5. Riassumendo i risultati ottenuti in questo paragrafo, possiamo dire che:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione binomia: $\mathrm{x}^n-\mathrm{A}=0$, *(ove* $\mathrm{n}=\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \dots \mathrm{p}_i$*) la quale sia irriducibile nel campo assoluto* C *di razionalità, ammetta per risolvente irriducibile un' equazione di grado* $2\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \dots \mathrm{p}_i(\mathrm{p}_1-1)(\mathrm{p}_2-1) \dots (\mathrm{p}_i-1)$, *è che* A *non abbia la forma:*

$$(-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}} \dots (-1)^{\frac{p_m-1}{2}}\, p_1p_2 \dots p_m a^2,$$

ove $\mathrm{p}_1,\ \mathrm{p}_2, \dots \mathrm{p}_m$ *sono scelti a piacere fra* $\mathrm{p}_1,\ \mathrm{p}_2, \dots \mathrm{p}_i$, *che sono numeri primi dispari differenti fra loro, essendo* a *un numero di* C*; se poi* A *è della precedente forma, il grado della risolvente è uguale alla metà di quello di prima, cioè:* $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 \dots \mathrm{p}_i(\mathrm{p}_1-1)(\mathrm{p}_2-1) \dots (\mathrm{p}_i-1)$.

6. Come illustrazione della teoria svolta, mi sembra non privo d'interesse applicare il precedente teorema, al caso, in cui si abbia: $n=2\cdot 3$, cioè al caso di un'equazione binomia di sesto grado: $x^6-A=0$.

Se l'equazione è della forma: $x^6+3a^2=0$, essendo a un numero di C la risolvente è di grado sei, cioè l'equazione è normale in C; se poi l'equazione binomia di sesto grado, non è della precedente forma, la risolvente è di grado dodici. Essendo l'equazione: $x^6+3a^2=0$ normale, le sue radici si possono esprimere in funzione razionale di una qualunque di esse mediante relazioni, che non è difficile determinare. Se α denota una radice dell'equazione: $\alpha^2-\alpha+1=0$, si ha:

$$x_2=x_1\alpha;\quad x_3=x_1\alpha^2;\quad x_4=-x_1;\quad x_5=-x_2;\quad x_6=-x_3.$$

Si ricava: $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $\alpha^2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Essendo: $x^6=-3a^2$, si ha: $x^3=i\sqrt{3}\cdot a$; quindi: $i\sqrt{3}=\dfrac{x^3}{a}$. Per conseguenza si ha:

$$\alpha=\frac{1+\dfrac{x^3}{a}}{2}=\frac{a+x^3}{2a};\quad \alpha^2=\frac{1-\dfrac{x^3}{a}}{2}=\frac{a-x^3}{2a}.$$

Quindi:

$$x_2 = \frac{x_1(a + x_1^3)}{2a}; \quad x_3 = \frac{x_1(a - x_1^3)}{2a}; \quad x_4 = -x_1; \quad x_5 = -x_2; \quad x_6 = -x_3.$$

IV.

1. Le equazioni binomie, che studieremo in questo paragrafo, sono della forma: $x^{2^\lambda} = A$, cioè di grado uguale ad una potenza di 2, in cui A è un numero del campo assoluto di razionalità.

Cominciamo dalle equazioni di 4° grado, e consideriamo il sistema, analogo al sistema (3) del § 1, cioè:

$$(1) \qquad \begin{gathered} \rho = x\varphi(\varepsilon) \\ x^4 = A \\ \varepsilon^2 + 1 = 0. \end{gathered}$$

Perchè la risultante di ottavo grado in ρ, che si ottiene eliminando x, ε dalle equazioni del precedente sistema, sia irriducibile in C, è necessario e sufficiente, che l'equazione: $x^4 - A = 0$ sia irriducibile nel campo $(C; \varepsilon)$, ossia che A non sia il quadrato di un numero di tal campo. Se fosse: $A = (a\varepsilon + b)^2$, tenuto conto dell'equazione: $\varepsilon^2 + 1 = 0$, si ricaverebbe: $A = -a^2$, essendo a un numero di C, o, ciò che è lo stesso: $A = (\varepsilon a)^2$. Dunque applicando il teorema 4 del § 2, si ha:

Le equazioni binomie di quarto grado, che non siano della forma: $x^4 + a^2 = 0$, *ammettono, per risolventi irriducibiti, equazioni di ottavo grado; se hanno la precedente forma, le risolventi sono di quarto grado, cioè: le equazioni binomie di quarto grado, irriducibili in* C, *che siano normali, debbono avere la forma:* $x^4 + a^2 = 0$, *essendo a un numero di* C; *inversamente, se un'equazione è della precedente forma è normale.*

2. Si abbia l'equazione: $x^8 - A = 0$. Supponiamo che sia:

$$(2) \qquad A = \Omega(\varepsilon)^2,$$

essendo ε radice primitiva di ottavo grado dell'unità, cioè radice dell'equazione: $\varepsilon^4 + 1 = 0$. Poichè $\Omega(\varepsilon)$ è un numero del campo $(C; \varepsilon)$, è della forma: $a\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d$, essendo a, b, c, d numeri di C. La (2) si può scrivere:

$$(3) \qquad A = [(b\varepsilon^2 + d) + \varepsilon(a\varepsilon^2 + c)]^2.$$

Ponendo: $\varepsilon^2 = y$, risulta: $y^2 + 1 = 0$; la (3) diventa:

$$A = (by + d)^2 + y(ay + c)^2 + 2\varepsilon(by + d)(ay + c). \tag{3'}$$

Poichè ε è radice dell'equazione: $\varepsilon^4 + 1 = 0$, irriducibile in C, non può essere funzione razionale in c di y, che soddisfa l'equazione: $y^2 + 1 = 0$; per tal ragione, si ricava dalla (3'): $by + d = 0$, oppure: $ay + c = 0$; dalla prima uguaglianza si deduce: $b = d = 0$; dall'altra si ricava: $a = c = 0$.

La (3), per: $b = d = 0$, diventa: $A = y(ay + c)^2$, ossia, tenuto conto che: $y^2 + 1 = 0$, risulta: $A = \pm 2a^2$. Se invece fosse: $a = c = 0$, la (3') diventerebbe: $A = (by + d)^2$, ossia: $A = -b^2$. Ricordando il teorema 4 del § 2, risulta quanto segue:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione binomia di ottavo grado: $x^8 - A = 0$, *irriducibile nel campo assoluto* C *di razionalità a cui appartiene* A, *ammetta per risolvente un'equazione di grado 32, è che* A *non abbia la forma* $\pm 2a^2$ *oppure* $-a^2$, *essendo* a *un numero di* C.

3. Perchè la risolvente, relativa ad un'equazione binomia sia normale deve essere, per il teorema 2 del § 1, A uguale alla quarta potenza di un numero del campo: $(C; \varepsilon)$, cioè: $A = \Omega(\varepsilon)^4$. Essendo $\Omega(\varepsilon)$ funzione razionale di ε, che è radice di un'equazione abeliana, sarà radice di un'equazione abeliana; quindi l'equazione: $A = \Omega(\varepsilon)^4$ è normale rispetto a $\Omega(\varepsilon)$; per il teorema 1 di questo paragrafo, deve essere: $A = -a^2$, essendo a un numero di C, cioè: $A = (a\varepsilon^2)^2 = \Omega(\varepsilon)^4$. Da queste uguaglianze si ricava che a deve essere uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, ossia, per i risultati ottenuti nel precedente articolo, si ha: $a = \pm 2b^2$ oppure: $a = -b^2$; poichè si è trovato: $A = -a^2$, si ricava: $A = -4b^4$; $A = -b^4$.

Essendo l'equazione: $x^8 - A = 0$ irriducibile in C, così, per il teorema del CAPELLI, non può sussistere l'uguaglianza: $A = -4b^4$; rimane l'altra, cioè: $A = -b^4$. Da quanto si è detto, risulta quanto segue:

Affinchè un'equazione binomia di ottavo grado, irriducibile in C, *ammetta una risolvente irriducibile di grado 16, è necessario e sufficiente che abbia una delle forme:*

$$x^8 - 2a^2 = 0; \quad x^8 + 2b^2 = 0; \quad x^8 + d^2 = 0,$$

essendo a, b, d *numeri di* C, *senza però essere* b, d *quadrati di numeri appartenenti a* C; *perché poi la risolvente sia di ottavo grado, cioè affinchè l'equazione binomia sia normale, è necessario e sufficiente che abbia la forma:* $x^8 + a^4 = 0$.

4. Si abbia l'equazione: $x^{16} - A = 0$, e sia ε una radice primitiva della unità, che soddisfa l'equazione: $\varepsilon^8 + 1 = 0$. Perchè la risolvente irriducibile, relativa alla data equazione binomia di 16^{mo} grado, sia di grado 16×8, giusto il teorema 4 del § 2, è necessario e sufficiente che A non sia uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, ossia non deve esistere un'uguaglianza del tipo:

$$A = \Omega(\varepsilon)^2, \tag{4}$$

essendo $\Omega(\varepsilon)$ una funzione razionale intera di settimo grado rispetto ad ε con coefficienti appartenenti a C. Ponendo: $\varepsilon^2 = y$, risulta: $y^4 + 1 = 0$.

La (4) si può scrivere così:

$$A = [\Omega_1(y) + \varepsilon\Omega_2(y)]^2, \tag{4'}$$

ossia:

$$A = \Omega_1(y)^2 + y\Omega_2(y)^2 + 2\varepsilon\Omega_1(y)\Omega_2(y).$$

Poichè ε non può essere funzione razionale di y, così dalla precedente uguaglianza si ricava: $\Omega_1(y)\Omega_2(y) = 0$. Se fosse: $\Omega_2(y) = 0$, la (4') darebbe: $A = \Omega_1(y)^2$, ossia sarebbe A uguale al quadrato di un numero del campo $(C; y)$, e quindi, per il precedente art. 2 sarebbe: $A = -b^2$, oppure: $A = \pm 2b^2$. Se fosse invece: $\Omega_1(y) = 0$, la (4'), assumerebbe la forma:

$$A = (\alpha_1\varepsilon^7 + \alpha_3\varepsilon^5 + \alpha_5\varepsilon^3 + \alpha_7\varepsilon)^2, \tag{5}$$

essendo: $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots \alpha_7$ numeri di C.

Ora, è facile vedere che la (5) non può sussistere, data l'irriducibilità dell'equazione binomia: $x^{16} - A = 0$.

Infatti, le radici dell'equazione: $\varepsilon^8 + 1 = 0$, che è irriducibile nel campo C, possono essere rappresentate dalle potenze: $\pm\varepsilon$, $\pm\varepsilon^3$, $\pm\varepsilon^5$, $\pm\varepsilon^7$.

La (5) dovrebbe continuare ad essere vera, sostituendo ad ε i numeri: $\pm\varepsilon^3$, $\pm\varepsilon^5$, $\pm\varepsilon^7$,

Ciò equivarrebbe a ritenere che l'espressione: $\alpha_1\varepsilon^7 + \alpha_3\varepsilon^5 + \alpha_5\varepsilon^3 + \alpha_7\varepsilon$, non cambia valore, sostituendo ad ε i numeri: $\varepsilon^3, \varepsilon^5, \varepsilon^7$; il che porterebbe alla uguaglianza: $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = A = 0$, contrariamente all'ipotesi circa l'irriducibilità dell'equazione: $x^{16} - A = 0$.

Consideriamo il caso in cui la precedente equazione sia normale, ossia il grado della risolvente irriducibile sia 16. Applicando il teorema 2 del § 1, deve essere A uguale alla potenza di grado ottavo di un numero del campo: $(C; \varepsilon)$, ossia: $A = \Omega(\varepsilon)^8$. Per quanto si è detto in casi consimili, la precedente equazione in $\Omega(\varepsilon)$ è abeliana e quindi normale. Applicando il teorema enunciato alla fine del precedente articolo di questo paragrafo, si deve avere: $A = -b^4$, (5') ossia: $A = -b^4 = (b\varepsilon^2)^4$, ricordando che: $\varepsilon^8 + 1 = 0$. Risulta quindi: $(b\varepsilon^2)^4 = \Omega(\varepsilon)^8$, ossia: $b = \Omega_1(\varepsilon)^2$, essendo b un numero di C, ed $\Omega_1(\varepsilon)$ uguale ad una funzione razionale intera di ε, con coefficienti appartenenti a C. La precedente uguaglianza, della forma analoga alla (4), non può sussistere, per quanto si è visto, se non sono verificate le uguaglianze, $b = \pm 2d^2$, oppure: $b = -d^2$, essendo d un numero di C.

Se nella (5'), sostituiamo al numero b, i valori trovati: $\pm 2d^2$, $-d^2$, avremo: $A = -2^4 d^8$, $A = -d^8$. I risultati ottenuti in questo articolo, si possono riassumere come segue:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè la risolvente irriducibile relativa ad un'equazione binomia: $x^{16} - A = 0$, *sia di grado* 16×8, *è che* A *non abbia alcuna delle forme:* $+2a^2$, $-2c^2$, $-d^2$, *essendo* a, c, d *numeri di* C; *perchè sia di grado:* 16×4, *è che* A *abbia una delle precedenti forme, escludendo il caso di:* $c = 2b^2$, *oppure:* $d = b^2$, *essendo* b *un numero di* C; *perchè la risolvente sia di grado:* 16×2, *è che* A *abbia la forma:* $-b^4$, *escludendo il caso di:* $b = d^2$, *oppure:* $b = 2d^2$; *perchè la risolvente sia di grado* 16, *ossia, perchè l'equazione binomia data sia normale, è che* A *abbia una delle forme:* $-b^8$, $-2^4 b^8$.

5. Ammettiamo che i risultati ottenuti nei precedenti articoli di questo paragrafo, siano applicabili alle equazioni binomie di grado, che sia uguale ad una potenza di due, non maggiore di $2^{\lambda-1}$; facciamo vedere che continuano ad essere veri per le equazioni binomie di grado 2^λ.

Sia data l'equazione binomia: $x^{2^\lambda} - A = 0$, che sia irriducibile nel campo assoluto di razionalità, a cui appartiene A. Sia ε una radice dell'equazione: $\varepsilon^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0$. Perchè la risolvente, relativa alla data equazione binomia: $x^{2^\lambda} - A = 0$, sia di grado uguale al prodotto $2^\lambda \cdot 2^{\lambda-1}$, sappiamo, per il teorema 4 del § 2, che non deve essere A uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, ossia: $A = \Omega(\varepsilon)^2$, essendo $\Omega(\varepsilon)$ una funzione razionale intera di ε di grado $2^{\lambda-1} - 1$. La precedente uguaglianza si può scrivere così:

$$A = [\Omega_1(y) + \varepsilon\Omega_2(y)]^2, \tag{6}$$

essendo: $y = \varepsilon^2$. Sviluppando si ha:

$$A = \Omega_1(y)^2 + y\Omega_2(y)^2 + 2\varepsilon\Omega_1(y)\Omega_2(y). \tag{6'}$$

Non potendo essere ε funzione razionale di y, dalla (6') si ricava: $\Omega_1(y)\Omega_2(y) = 0$. Se fosse: $\Omega_2(y) = 0$, si ricaverebbe dalla (6): $A = \Omega_1(y)^2$.

Applicando alla precedente equazione i risultati ottenuti nei precedenti articoli di questo paragrafo, si ricava: $A = -b^2$; oppure: $A = \pm 2b^2$, essendo b un numero di C. Se fosse: $\Omega_1(y) = 0$, si avrebbe dalla (6): $A = [\varepsilon\Omega_2(y)]^2$, cioè:

$$A = (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_3\varepsilon^3 + \alpha_5\varepsilon^5 + \ldots + \alpha_{2m-1}\varepsilon^{2m-1})^2, \tag{7}$$

essendo: $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots \alpha_{2m-1}$ numeri di C; si ha poi: $m = 2^{\lambda-2}$.

Poichè le radici dell'equazione: $\varepsilon^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0$, si possono esprimere così:

$$\pm\varepsilon, \quad \pm\varepsilon^3, \quad \pm\varepsilon^5, \ldots \varepsilon^{2^{\lambda-1}-1},$$

la (7) dovrebbe continuare a sussistere sostituendo ad ε i precedenti valori (8); il che condurebbe, come abbiamo visto nel precedente articolo, alle uguaglianze: $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_{2m-1} = A = 0$. Ciò è assurdo a causa dell'irriducibilità della data equazione: $x^{2^\lambda} - A = 0$.

Concludendo, diremo che: se A è uguale al quadrato di un numero del campo: $(C; \varepsilon)$, deve essere soddisfatta una delle due uguaglianze:

$$A = -b^2; \quad A = \pm 2b^2. \tag{9}$$

Determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione: $x^{2^\lambda} - A = 0$ sia normale in C. Per il teorema 2 del § 1, si deve avere:

$$A = \Omega(\varepsilon)^{2^{\lambda-1}}. \tag{10}$$

La precedente equazione è abeliana rispetto a $\Omega(\varepsilon)$ e perciò normale, essendo $\Omega(\varepsilon)$ una funzione razionale intera di ε con coefficienti appartenenti a C; ε è radice dell'equazione: $\varepsilon^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0$.

Avendo ammesso che i risultati ottenuti nei precedenti articoli di questo paragrafo siano veri fino alle equazioni binomie di grado $2^{\lambda-1}$, così, essendo l'equazione (10) normale, si deve avere:

$$A = -a^{2^{\lambda-2}}, \quad \text{oppure:} \quad A = -2^{2^{\lambda-3}} a^{2^{\lambda-2}}. \tag{11}$$

Dalla prima delle (11) e dalla (10) si ricava:

$$\Omega(\varepsilon)^{2^{\lambda-1}} = (a\varepsilon^2)^{2^{\lambda-2}}. \tag{11'}$$

Tenuto conto che ε è radice dell'equazione: $\varepsilon^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0$, si deduce dalla (11') che a deve essere uguale al quadrato di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, e quindi, per le (9), deve essere: $a = -b^2$; oppure: $a = \pm 2b^2$. Sostituendo tali valori di a, testè trovati, nella prima delle (11) si ha:

$$A = -b^{2^{\lambda-1}}; \quad A = -2^{2^{\lambda-2}} b^{2^{\lambda-1}}.$$

Consideriamo la seconda delle (11) e la (10); si ha:

$$A = -2^{2^{\lambda-3}} a^{2^{\lambda-2}} = \Omega(\varepsilon)^{2^{\lambda-1}}. \tag{13}$$

La (13) si può scrivere così:

$$(2a^2\varepsilon^4)^{2^{\lambda-3}} = [\Omega(\varepsilon)^4]^{2^{\lambda-3}}.$$

Dalla precedente equazione si ricava che $2a^2$ deve essere uguale alla quarta potenza di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, cioè:

$$2a^2 = \Omega_1(\varepsilon)^4, \tag{14}$$

essendo $\Omega_1(\varepsilon)$ una funzione razionale intera di ε, con coefficienti appartenenti a C. La (14) è un'equazione normale di quarto grado rispetto a $\Omega_1(\varepsilon)$ ed è irreduttibile, com'è facile vedere, nel campo C; applicando il teorema dell'articolo 1 di questo paragrafo, deve essere: $2a^2 = -d^2$, essendo d un numero di C; il che è assurdo, non potendo esistere una relazione della precedente forma fra numeri che appartengono al campo assoluto di razionalità.

In conclusione possiamo affermare quanto segue:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione binomia, di grado uguale alla potenza 2^λ, sia normale, è che abbia una delle forme:

$$x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} = 0, \quad x^{2^\lambda} + 2^{2^{\lambda-2}} a^{2^{\lambda-1}} = 0. \tag{15}$$

V.

1. In questo paragrafo ci proponiamo di dimostrare che non esistono altri tipi di equazioni binomie normali, all'infuori di quelli già considerati nei precedenti paragrafi. Per il teorema 4 del § 2, sappiamo che il grado di una equazione normale binomia, irriducibile nel campo assoluto di razionalità, è della forma: $2^\alpha \cdot 3$, essendo $\alpha > 0$, oppure: 2^α. Le equazioni normali di grado uguale ad una potenza di 2 sono state studiate nei precedenti articoli del § 4. Ora, consideriamo quelle di grado $2^\alpha \cdot 3$, che, per $\alpha = 1$, si riducono alle equazioni del tipo: $x^6 + 3a^2 + 0$, già menzionate nell'articolo 6 del § 3, e per $\alpha = 2$

si riducono alle equazioni di dodicesimo grado:

(1) $$x^{12} - A = 0.$$

Dimostriamo intanto che non esistono equazioni normali di grado 12, irriducibili nel campo assoluto di razionalità, a cui appartiene A.

Perchè l'equazione (1) sia normale, sappiamo, per il teorema 2 del § 1, che A deve essere uguale alla quarta potenza di un numero del campo $(C; \varepsilon)$, essendo ε radice primitiva dodicesima dell'unità, cioè radice dell'equazione:

(2) $$\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 1 = 0.$$

Si abbia dunque:

(3) $$A = \Phi(\varepsilon)^4,$$

ove $\Phi(\varepsilon)$ è una funzione razionale intera di ε con coefficienti appartenti a C. Essendo l'equazione (3) normale rispetto a $\Phi(\varepsilon)$, per il teorema dell'articolo 1 del § 4, deve essere: $A = - b^2$, essendo b un numero di C. Dalla (3) e dalla precedente uguaglianza si ricava:

(4) $$- b^2 = \Phi(\varepsilon)^4.$$

Tenuto conto che dalla (2) si ha: $\varepsilon^6 = -1$, la (4) si può scrivere così:

(5) $$(b\varepsilon^3)^2 = \Phi(\varepsilon)^4.$$

Dalla (5) si scorge che $b\varepsilon$ deve essere uguale al quadrato di un numero del campo: $(C; \varepsilon)$, ossia si ha:

(6) $$b\varepsilon = \psi(\varepsilon)^2$$

Essendo ε radice di un'equazione irriducibile in C, la (6) deve continuare a sussistere se sostituiamo $-\varepsilon$ al poste di ε. Si ha dunque:

(6') $$- b\varepsilon = \psi(-\varepsilon)^2.$$

Dalle (6) e (6') si ricava:

$$\psi(\varepsilon)^2 = - \psi(-\varepsilon)^2,$$

cioè:

(7) $$\pm \psi(\varepsilon) = \pm \psi(-\varepsilon) \cdot \varepsilon^3.$$

Esaminiamo la (7), prendendo i segni superiori, e poniamo:

(7') $$\psi(\varepsilon) = m\varepsilon^3 + n\varepsilon^2 + p\varepsilon + q.$$

Si ha dunque:

$$m\varepsilon^3 + n\varepsilon^2 + p\varepsilon + q = \varepsilon^3(-m\varepsilon^3 + n\varepsilon^2 - p\varepsilon + q).$$

La precedente equazione, tenuto conto che dall'equazione (2) si ricava:

$$\varepsilon^5 = \varepsilon^3 - \varepsilon; \quad \varepsilon^4 = \varepsilon^2 - 1; \quad \varepsilon^6 = -1,$$

si può scrivere così:

$$m\varepsilon^3 + n\varepsilon^2 + p\varepsilon + q = (n+q)\varepsilon^3 - p\varepsilon^2 - (p+n)\varepsilon + p + m. \tag{8}$$

Uguagliando nella (8) i coefficienti delle potenze di ε che hanno lo stesso grado, si ha:

$$m = n + q; \quad n = -p; \quad q = m + p; \quad p = -(p+n).$$

Dalle precedenti uguaglianze si ricava: $n = p = 0$; $m = q$.

Sostituendo nella (7') ad m, n, p, q i precedenti valori trovati si ha:

$$\psi(\varepsilon) = m(\varepsilon^3 + 1).$$

Quindi la (6) diventa:

$$b\varepsilon = m^2(\varepsilon^3 + 1)^2,$$

ossia:

$$b\varepsilon = 2m^2\varepsilon^3.$$

Dall'ultima uguaglianza si ricava: $b = 0$, e quindi: $A = 0$, essendo $A = -b^2$. Ciò è assurdo, a causa dell'irriducibilità della data equazione binomia: $x^{12} - A = 0$. Ugualmente impossibile è l'uguaglianza:

$$\psi(\varepsilon) = -\psi(-\varepsilon)\cdot\varepsilon^3,$$

che si deduce dalla (7). Da quanto si detto, risulta che la precedente equazione binomia di dodicesimo grado, non può essere normale.

2. È facile dimostrare che le equazioni binomie di grado: $2^\alpha \cdot 3$, irriducibili nel campo assoluto di razionalità, sono normali nel solo caso di $\alpha = 1$, già considerato. Abbiasi l'equazione:

$$x^{24} - A = 0, \tag{9}$$

irriducibile in C. Perchè la (9) sia normale, a causa del teorema 2 § 1, si deve avere:

$$A = \Phi(\varepsilon)^8, \tag{10}$$

essendo $\Phi(\varepsilon)$ funzione razionale intera di ε con coefficienti appartenenti a C, essendo ε radice primitiva ventiquattresima dell'unità, che soddisfa l'equazione:

$$\varepsilon^8 - \varepsilon^4 + 1 = 0. \tag{11}$$

Possiamo scrivere la (10) così:

$$A = [\varphi_1(y) + \varepsilon\varphi_2(y)]^8, \quad \text{essendo} \quad \varepsilon^2 = y. \tag{12}$$

A causa dell'irriducibilità in C della (11), la precedente equazione deve continuare a sussistere se sostituiamo $-\varepsilon$ ad ε. Si ha dunque:

$$A = [\varphi_1(y) - \varepsilon\varphi_2(y)]^8. \tag{12'}$$

Moltiplicando le (12) (12') fra loro, si ottiene:

$$A^2 = [\varphi_1(y)^2 - y\varphi_2(y)^2]^8,$$

ossia:

$$\pm A = \Omega(y)^4 \tag{13}$$

ove $\Omega(y)$ rappresenta una funzione razionale intera di y con coefficienti appartenenti a C, ed y è radice primitiva dodicesima dell'unità.

Per il teorema dell'articolo precedente, la (13), che è di forma analoga alla (3), non può sussistere. Onde, è dimostrato che non esistono equazioni binomie di ventiquattresimo grado, le quali siano normali ed irriducibili nel campo assoluto di razionalità. Seguendo uguale procedimento, si può dimostrare che all'infuori di $\alpha = 1$, non esistono equazioni di grado: $2^\alpha \cdot 3$, normali e binomie, irriducibili nel campo C.

3. Riunendo i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi e nel presente, possiamo enunciare il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione binomia: $x^n - A = 0$, *irriducibile nel campo assoluto* C *di razionalità a cui appartiene* A, *sia normale, è che abbia una delle tre seguenti forme:*

$$x^6 + 3a^2 = 0; \quad x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} = 0; \quad x^{2^\lambda} + 2^{2^{\lambda-2}} a^{2^{\lambda-1}} = 0, \tag{14}$$

essendo a *un numero appartenente a* C. *Giova osservare, che, se le equazioni sono di quarto o di ottavo grado, debbono avere la seconda delle precedenti forme, in cui si faccia* $\lambda = 2$, *oppure* $\lambda = 3$.

4. Consideriamo l'equazione seconda delle (14), cioè:

$$x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} = 0. \tag{15}$$

Chiamando x_1 una qualunque radice della (15), le altre radici si debbono esprimere razionalmente per x. Si abbia l'equazione alle radici primitive n^{me} dell'unità:

$$\varepsilon^{2^{\lambda-1}} + 1 = 0, \tag{16}$$

essendo: $n = 2^\lambda$. Ponendo nella (16): $\varepsilon = \frac{x_1^2}{a}$, si ha l'equazione (15).

Le radici della (15) si ottengono moltiplicando una di esse per le successive potenze di ε fino alla potenza di grado $2^\lambda - 1$. Si ha quindi: $x_2 = x_1\varepsilon$, ossia, essendo: $\varepsilon = \frac{x_1^2}{a}$, potremo scrivere: $x_2 = \frac{x_1^3}{a}$. Analogamente si ha:

$$x_3 = x_1\varepsilon^2 = \frac{x_1^5}{a^2}.$$

In generale possiamo dire:

Fra le radici della (15) *hanno luogo relazioni del tipo:*

$$x_i = \frac{x^{2i-1}}{a^{i-1}},$$

potendo variare i *da* 1 *fino alla potenza* 2^λ.

5. Consideriamo la terza delle (14), cioè:

$$x^{2^\lambda} + a^{2^{\lambda-1}} 2^{2^{\lambda-2}} = 0. \tag{15'}$$

Ponendo nella (16): $\varepsilon = \frac{x_1^2}{a\sqrt{2}}$, si ha l'equazione (15'), che possiamo scrivere così:

$$\left(x_1^{2^{\lambda-1}} + a^{2^{\lambda-2}} 2^{2^{\lambda-3}}\right)^2 - 2x_1^{2^{\lambda-1}} a^{2^{\lambda-2}} 2^{2^{\lambda-3}} = 0,$$

da cui si ricava:

$$\sqrt{2} = \frac{x_1^{2^{\lambda-1}} + a^{2^{\lambda-2}} 2^{2^{\lambda-3}}}{x_1^{2^{\lambda-2}} \cdot a^{2^{\lambda-3}} 2^{2^{\lambda-4}}}.$$

Essendo: $\varepsilon = \frac{x_1^2}{a\sqrt{2}}$, si ha:

$$\varepsilon = \frac{x_1^2\left(x_1^{2^{\lambda-2}} a^{2^{\lambda-3}} 2^{2^{\lambda-4}}\right)}{a\left(x_1^{2^{\lambda-1}} + a^{2^{\lambda-2}} 2^{2^{\lambda-3}}\right)} = \frac{x_1^{2^{\lambda-2}+2} a^{2^{\lambda-3}-1} 2^{2^{\lambda-4}}}{x_1^{2^{\lambda-1}} + a^{2^{\lambda-2}} 2^{2^{\lambda-3}}}.$$

Poichè le radici della (15′) si possono ottenere moltiplicando una di esse per le successive potenze di ε, così avremo:

Fra le radici della (15′) *hanno luogo relazioni del tipo:*

$$x_{i+1} = x_1 \left(\frac{x_1^{2^{\lambda-2}+2} a^{2^{\lambda-3}-1} 2^{2^{\lambda-4}}}{x_1^{2^{\lambda-1}} + a^{2^{\lambda-2}} 2^{2^{\lambda-3}}}\right)^i$$

potendo i *variare da* 0 *fino all' espressione* $2^\lambda - 1$.

La géométrie des groupes simples

par Élie Cartan (à Paris).

INTRODUCTION

J'ai, dans un mémoire récent (¹), développant et complétant un article antérieur publié en collaboration avec M. J. A. Schouten (²), étudié les espaces à connexion affine, sans courbure ou sans torsion, représentatifs des groupes de transformations continus. Cette étude s'appliquait aux groupes les plus généraux, et elle était locale. Dans le cas des groupes simples, les espaces sans torsion représentatifs sont riemanniens, soit complexes, soit réels (à ds^2 défini ou indéfini). Les espaces complexes représentent les groupes simples à paramètres complexes; les espaces réels représentent les groupes simples à paramètres réels, *unitaires* (si le ds^2 est défini), ou *non unitaires* (si le ds^2 est indéfini). Les deux derniers cas se distinguent l'un de l'autre par la propriété de l'espace d'être *clos* ou *ouvert*.

Les espaces de Riemann représentatifs des groupes simples réels unitaires rentrent dans une catégorie plus générale et très importante d'espaces de Riemann, caractérisés par la propriété que leur courbure riemannienne est conservée par le transport parallèle; leur étude se ramène à l'étude de ceux que j'ai appelés *irréductibles* et qui se rattachent tous aux groupes simples (³). Dans chacun de ces espaces irréductibles, la courbure riemannienne a partout le même signe; dans une même classe existent à la fois des espaces à courbure positive et des espaces à courbure négative. Etant donnée une structure simple, les espaces représentatifs des groupes réels unitaires correspondants sont à

(¹) É. Cartan, *La Géométrie des groupes de transformations.* (J. Math. pures et appl., t. 6, 1927, pp. 1-119).

(²) É. Cartan and J. A. Schouten, *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups.* (Proc. Akad. Amsterdam, t. 29, 1926, pp. 803-815).

(³) La détermination de tous ces espaces est faite dans un mémoire dont la première partie vient de paraître. (Bull. Soc. Math. de France, t. 54, 1924, pp. 214-264). Voir aussi É. Cartan, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure.* (Rend. Acc. Lincei, (6), t. 3¹, 1926, pp. 544-547).

courbure positive; les espaces à courbure négative de la même classe ne sont représentatifs d'aucun groupe, mais leur groupe des déplacements est isomorphe au groupe à paramètres complexes de la structure donnée. S'il s'agit de la structure simple à trois paramètres, les deux espaces sont les espaces à trois dimensions à courbure constante, positive ou négative; le premier représente le groupe des rotations de l'espace ordinaire; le groupe des déplacements du second est isomorphe au groupe homographique *complexe* d'une variable.

L'étude détaillée des espaces de RIEMANN irréductibles les plus généraux présente un très grand intérêt, aussi bien au point de vue de la théorie des groupes qu'au point de vue géométrique. Elle fera l'objet d'un mémoire ultérieur. Dans le présent mémoire je m'occupe seulement des deux classes particulières signalées plus haut (espaces représentatifs des groupes simples réels unitaires et leurs correspondants à courbure négative). L'étude faite ici n'est plus locale; elle se rapporte plutôt aux propriétés de l'espace ressortissant à l'*Analysis situs*, à la distribution des géodésiques, à la détermination complète de leurs groupes mixtes d'isométrie, de leurs différentes formes de KLEIN, etc. Les questions qui se posent sont du reste de nature bien différente suivant que l'espace est à courbure positive ou à courbure négative.

Un premier chapitre introductif est consacré à la topologie des groupes simples réels unitaires; il a son point de départ dans les recherches de H. WEYL relatives à la théorie des groupes semi-simples (¹); la question y est reprise en entier; les résultats de H. WEYL sont complétés et les questions qui se posent sont résolues jusqu'au bout en utilisant un de mes mémoires récents (²).

Le chapitre II est consacré aux espaces des groupes réels unitaires; la distribution des géodésiques est étudiée assez complètement pour les formes simplement connexes de ces espaces; elle rèvèle, associées à chaque point de l'espace, l'existence d'un certain nombre de *variétés antipodiques* (qui peuvent se réduire à des points) qui sont en quelque sorte des *variétés de striction* pour les géodésiques fermées issues du point donné. Il y en a autant que d'unités dans le *rang* du groupe.

Le chapitre III est consacré aux espaces à courbure négative dont le groupe des déplacements a une structure simple *complexe*. Ils sont tous sim-

(¹) H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*. (Math. Zeitschr., t. 23, 1925, pp. 271-309; t. 24, 1925, pp. 328-395).

(²) E. CARTAN, *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples*. (Bull. Sc. Math., 2ème série, t. 49, 1925, pp. 130-152).

plement connexes. On peut grâce à eux (et c'est ce qui se reproduira dans tous les autres espaces irréductibles à courbure négative) résoudre des problèmes importants relatifs à leur groupe des déplacements. Je signalerai seulement le résultat suivant: les groupes simples *complexes* ont, au point de vue de l'*Analysis situs*, les mêmes propriétés que les groupes réels unitaires correspondants, et ils admettent toujours un représentant linéaire simplement connexe. Ce théorème résulte lui-même d'un mode de génération remarquable des transformations finies du groupe complexe: pour ne prendre qu'un exemple, chaque rotation complexe de l'espace ordinaire est décomposable d'une manière et d'une seule en une rotation réelle et une rotation d'un angle purement imaginaire autour d'un axe réel. Enfin les espaces en question ont aussi leur importance au point de vue purement géométrique, mais cette importance se manifestera surtout pour les espaces irréductibles plus généraux à courbure négative.

Je supposerai connus les principes fondamentaux de la théorie des groupes simples (1).

CHAPITRE I.

LA TOPOLOGIE DES GROUPES SIMPLES UNITAIRES

I. Le polyèdre fondamental du groupe adjoint.

1. On sait (2) qu'à chaque type de groupes simples d'ordre r appartient une forme réelle unitaire, à r paramètres réels, caractérisée par la propriété que la somme des carrés des racines caractéristiques d'une transformation infinitésimale arbitraire soit une forme quadratique définie négative $-\varphi(e)$. Les groupes unitaires sont, pour les quatre grandes classes de groupes simples, respectivement isomorphes:

A) au groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'HERMITE définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots. + x_{l+1}\bar{x}_{l+1};$$

(1) Le lecteur pourra à cet égard, se reporter à ma Thèse (Paris, Nony, 1894) ou au mémoire précédemment cité de H. WEYL; la lecture du mémoire cité dans la note (1) page 209, ne sera pas non plus inutile.

(2) E. CARTAN, *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples.* (Bull. Sc. Math., 2ème série, t. 49, 1925, p. 135).

B) *D*) au groupe linéaire d'une forme quadratique définie positive à $n = 2l + 1$ (type *B*) ou $n = 2l$ (type *D*) variables;

C) au groupe linéaire laissant invariantes une forme d'HERMITE définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_{2l}\bar{x}_{2l}$$

et une forme quadratique extérieure

$$[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \dots + [x_{2l-1} x_{2l}].$$

Dans les notations précédentes, l désigne le *rang* du groupe, dont il va être question ci-dessous.

2. Soit G un groupe simple unitaire, Γ son groupe adjoint. Γ est un groupe linéaire à r variables réelles

$$e_1, \quad e_2, \dots, \quad e_r,$$

qui laisse invariante la forme quadratique définie positive $\varphi(e)$. Chaque transformation peut être représentée par une matrice T d'ordre r, de déterminant égal à 1.

Toute matrice T peut, et d'une infinité de manières, être engendrée par une transformation infinitésimale Y de Γ [1]. Parmi les racines caractéristiques de Y, l sont nulles [2], les $r - l$ autres sont deux à deux égales et opposées; elles sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers déterminés de l d'entre elles (dites *fondamentales*). Toutes ces racines sont purement imaginaires: nous les désignerons, avec H. WEYL, par la notation

$$2\pi i \varphi_\alpha;$$

les quantités φ_α sont les *paramètres angulaires* de la transformation Y.

La matrice T engendrée par Y admet l racines caractéristiques égales à 1, les autres sont les quantités $e^{2\pi i \varphi_\alpha}$.

3. Si une transformation infinitésimale Y est *générale*, c'est-à-dire n'admet pas plus de l racines caractéristiques nulles, il existe $l - 1$ autres transformations infinitésimales indépendantes entre elles et indépendantes de Y, qui

---

(1) Voir, pour ce paragraphe et le suivant, le mémoire cité dans la note précédente, pp. 134-146.

(2) L'entier l est le rang du groupe; c'est le nombre des coefficients de l'équation caractéristique du groupe qui sont indépendants. Voir E. CARTAN, *Thèse* (Paris, Nony, 1894), p. 29.

jouissent de la propriété d'être échangeables entre elles et échangeables avec Y. On obtient ainsi un sous-groupe abélien γ d'ordre l. Si

$$e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + \dots + e_l Y_l$$

est la transformation infinitésimale la plus générale de γ, les paramètres angulaires φ_α sont des formes linéaires en $e_1, e_2, \dots, e_l$ dont l sont linéairement indépendantes.

Si maintenant on part d'une transformation infinitésimale Y *singulière*, c'est-à-dire admettant plus de l racines caractéristiques nulles, il existe plus de l transformations indépendantes échangeables avec Y. On peut se demander si, parmi ces transformations, il en existe au moins une qui ne soit pas singulière. C'est ce que nous allons démontrer.

Soit Y_1 une transformation particulière échangeable avec Y; soit Y_2 une transformation particulière échangeable avec Y et Y_1 (et linéairement indépendante de Y et de Y_1), et ainsi de suite. Supposons que nous arrivions à trouver ainsi λ transformations indépendantes

$$Y, \quad Y_1, \dots, \quad Y_{\lambda-1},$$

échangeables entre elles et telles qu'aucune autre transformation du groupe ne soit échangeable en même temps avec chacune d'elles. Les racines caractéristiques ω_α de la transformation

$$eY + e_1 Y_1 + \dots + e_{\lambda-1} Y_{\lambda-1}$$

sont des formes *linéaires* (1) en $e, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Parmi ces formes linéaires, il y en a au moins λ indépendantes; sinon il existerait une transformation non nulle $\Sigma e_i Y_i$ ayant toutes ses racines caractéristiques nulles; cela est impossible, puisque la somme des carrés des racines caractéristiques d'une transformation arbitraire du groupe est une forme *définie*. Les racines caractéristiques d'une transformation arbitraire étant au nombre minimum de λ indépendantes, cela prouve, d'après la définition même du rang, que λ est au plus égal à l. Mais d'autre part λ ne peut pas être inférieur à l, puisque l des racines ω_α sont nulles et qu'à chaque forme linéaire ω_α correspondent une ou plusieurs transformations X telles qu'on ait

$$(\Sigma e_i Y_i, \ X) = \omega_\alpha X,$$

quels que soient les coefficients $e, e_1, \dots, e_{\lambda-1}$. Il existerait donc $l - \lambda$ trans-

(1) Cela tient à ce que les transformations sont échangeables entre elles.

formations indépendantes des Y et échangeables avec les Y, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'entier λ étant égal à l, et le nombre des formes linéaires ω_α identiquement nulles ne dépassant pas l, il suffit de donner aux coefficients e_i des valeurs numériques n'annulant aucune des formes ω_α non identiquement nulles pour obtenir une transformation *générale;* la transformation donnée Y fait ainsi partie du sous-groupe γ défini par cette transformation générale.

4. Toute transformation infinitésimale Y fait donc partie d'au moins un sous-groupe abélien γ, contenant une infinité de transformation générales. Tous les sous-groupes γ sont du reste homologues entre eux dans le groupe adjoint continu Γ ([1]), de sorte que toute transformation de Γ est homologue à une transformation d'un sous-groupe γ particulier.

Cela posé, regardons les l paramètres angulaires fondamentaux $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ d'une transformation infinitésimale arbitraire comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace à l dimensions. Nous choisirons les vecteurs unitaires de coordonnées de manière que la forme quadratique définie positive

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha^2$$

représente, à un facteur constant près, le carré de la distance d'un point à l'origine.

Tout point M (φ_i) représente une transformation infinitésimale de chaque sous-groupe γ, et par suite une infinité de transformations infinitésimales homologues entre elles. Si aucun des paramètres φ_α n'est nul, ces transformations sont générales et forment par suite un ensemble ∞^{r-l}. Si h des paramètres φ_α sont nuls (h pair), chaque transformation représentée par M est invariante par un sous-groupe à $l+h$ paramètres et par suite admet ∞^{r-l-h} homologues.

A l'intérieur d'un sous-groupe γ déterminé, une transformation infinitésimale admet un certain nombre d'homologues; on obtient leurs points représentatifs en effectuant sur les $r-l$ paramètres φ_α (regardés comme des lettres) un groupe fini $\mathcal{G}'$ de substitutions; ces substitutions conservent les relations

---

([1]) Cela tient à ce que les transformations infinitésimales *générales* Y, dont chacune définit un sous-groupe γ, forment un ensemble *connexe*; en effet, comme nous le verrons dans un instant, les transformations singulières remplissent, dans le domaine du groupe, une ou plusieurs variétés à 3 dimensions de moins que ce domaine.

linéaires à coefficients entiers qui existent entre les paramètres angulaires [1]. Géométriquement le groupe $\mathcal{G}'$, opérant sur les points représentatifs M, est un groupe de rotations et de symétries, engendré par $\frac{r-l}{2}$ symétries par rapport aux hyperplans $\varphi_\alpha = 0$ [2].

Si l'on considère les $\frac{r-l}{2}$ hyperplans $\varphi_\alpha = 0$ menés par l'origine, ils partagent l'espace en un certain nombre de régions indéfinies (angles polyèdres) convexes. Chacune d'elles représente le *domaine fondamental* (D) du groupe $\mathcal{G}'$, et toute transformation infinitésimale de γ est homologue à une transformation et une seule intérieure à cette région. Toute région convexe, limitée par un certain nombre d'hyperplans $\varphi_\alpha = 0$, *et telle qu'aucun autre de ces hyperplans ne la traverse*, peut être prise comme domaine fondamental. Nous vérifierons plus loin que toutes ces régions admettent exactement l faces hyperplanes.

Tout point intérieur au domaine fondamental (D) représente ∞^{r-l} transformations infinitésimales homologues; tout point situé sur l'une de ses faces, ou l'une de ses arêtes, etc., représente au plus ∞^{r-l-2} transformations homologues.

5. Passons maintenant aux transformations *finies*, ou aux matrices T du groupe Γ. Soit Y l'une de ses transformations infinitésimales génératrices, appartenant à un certain sous-groupe γ; on peut représenter T et Y par le même point M. Or à l'intérieur du même sous-groupe γ, la matrice T peut être engendrée par une infinité de transformations infinitésimales différentes de Y; ce sont celles qu'on obtient en ajoutant aux paramètres angulaires fondamentaux φ_i des nombres entiers arbitraires. Considérons alors le réseau (R) des points à coordonnées φ_i entières.

La même matrice T est représentée par une infinité dénombrable de points, homologues entre eux par rapport au réseau (R).

Supposons que $l + 2k$ des racines caractéristiques de T soient égales à 1; on démontre alors que, T étant invariant par un sous-groupe à $l + 2k$ para-

---

(1) Il peut y avoir des substitutions jouissant de cette propriété sans appartenir à $\mathcal{G}'$. Voir E. CARTAN, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples.* (Bull. Sc. Math., 2ème série, t. 49, 1925, pp. 365-366).

(2) Cette interprétation du groupe $\mathcal{G}'$ comme groupe de rotations et de symétries, ainsi que celle de ses opérations génératrices, est due à H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen.* (Math. Zeitschr., 24, 1925, pp. 367-371). Le groupe $\mathcal{G}'$ est le groupe (S) de H. WEYL.

mètres de Γ, il existe ∞^{r-l-2k} matrices homologues à T. L'hypothèse faite revient à dire que, parmi les paramètres angulaires φ_α de Y, $2k$ sont des *nombres entiers*. La matrice T peut donc être invariante par un groupe plus grand que sa transformation génératrice Y.

6. L'ensemble des opérations du groupe $\mathcal{G}'$ et des translations $\mathcal{T}$ qui laissent le réseau (R) invariant engendre un groupe $\mathcal{G}_1$ de déplacements et de symétries. Deux points M homologues par rapport à $\mathcal{G}_1$ représentent des matrices T homologues par rapport à Γ.

Nous allons maintenant considérer l'ensemble des hyperplans (Π) obtenus en égalant un des paramètres angulaires φ_α à un nombre entier arbitraire. Tous ces hyperplans partagent l'espace en une infinité de polyèdres convexes; soit (P) l'un d'entre eux, que l'on peut supposer intérieur au domaine fondamental indéfini (D). Nous allons montrer que toute matrice T peut être représentée par un point au moins de (P).

Partons de la remarque, due à H. WEYL [1], que les matrices représentées par un point donné d'un même hyperplan (Π), admettant au moins $l+2$ racines caractéristiques égales à 1, forment dans l'espace du groupe une variété à $r-l-2$ dimensions au plus; par suite les matrices représentées par les différents points des hyperplans (Π) forment un nombre fini de variétés à

$$(r-l-2)+(l-1)=r-3$$

dimensions. Il est donc possible d'aller d'un point à un autre de l'espace du groupe, c'est-à-dire de passer par continuité d'une matrice T quelconque à une autre matrice T' quelconque, en évitant les matrices singulières. Soit alors M_0 un point particulier intérieur à (P), soit T_0 une des matrices représentées par M_0, et soit T une matrice quelconque. En passant de T_0 à T de manière à éviter les matrices singulières, le point représentatif correspondant, partant de M_0, *restera à l'intérieur de* (P) [2], et par suite il existe bien à l'intérieur de (P) un point M représentatif de T. En particulier la matrice unité devant être représentée, cela veut dire que l'un au moins des sommets de (P) appartient au réseau (R). On pourra donc supposer, par une des translations $\mathcal{T}$, que le polyèdre (P) a l'un de ses sommets à l'origine O.

---

(1) Math. Zeitschr., t. 24, 1925, p. 379.

(2) On peut démontrer en toute rigueur que lorsque la matrice T varie d'une manière continue sans jamais être singulière, le point représentatif M peut être également suivi par continuité, sans qu'il y ait jamais ambiguïté.

7. Nous sommes maintenant en mesure, en nous plaçant au point de vue général de H. WEYL [1], d'étudier la topologie de l'espace du groupe adjoint Γ, en particulier de chercher s'il existe dans cet espace des contours fermés non réductibles à un point par déformation continue.

Supposons d'abord que le polyèdre (P) n'ait aucun sommet autre que O appartenant au réseau (R). Considérons un contour fermé (C) tracé dans l'espace du groupe; nous pourrons toujours le déformer d'une manière continue de façon à le faire partir du point origine (correspondant à la transformation identique), de façon aussi qu'il ne rencontre aucune matrice singulière (autre que la matrice unité, qui correspond à son point de départ et d'arrivée). Il correspondra à (C), dans l'espace à l dimensions des φ_i, un contour (C') qu'on pourra faire partir de O, qu'on pourra supposer tout entier intérieur à (P) et qui se terminera nécessairement en O. Soit M un point de (C'); il représente une transformation infinitésimale génératrice déterminée Y de la matrice T qui appartient au point correspondant du contour (C). Les matrices tY, où t est un nombre réel compris entre 0 et 1, forment à l'intérieur de (P) un contour variable qui résulte d'une déformation continue de (C') et se réduit au point O pour $t = 0$. Les matrices finies correspondantes T formeront dans l'espace du groupe un contour fermé qui se déduira de (C) par déformation continue et se réduira au point origine pour $t = 0$. C'est ce que nous voulions démontrer. *Si donc le polyèdre* (P) *n'a qu'un sommet appartenant au réseau* (R), *l'espace du groupe* Γ *est simplement connexe.*

Supposons maintenant que le polyèdre P ait $h-1$ sommets $O_1, O_2, \ldots, O_{h-1}$ différents de O et appartenant au réseau (R). Si un contour fermé (C) tracé dans l'espace du groupe est réductible à un point par déformation continue, cette déformation pourra toujours s'effectuer en évitant les matrices singulières, puisque ces matrices forment des variétés à 3 dimensions de moins que l'espace ambiant; de même si deux contours fermés sont réductibles l'un à l'autre, la réduction peut se faire en évitant les matrices singulières.

Cela posé, tout contour fermé (C) peut toujours être déformé de manière à partir du point origine et à éviter toute autre matrice singulière; il lui correspondra dans l'espace des φ_i un contour (C') qu'on pourra supposer partir de O et rester à l'intérieur de (P); il se terminera nécessairement en l'un des point $O, O_1, \ldots, O_{h-1}$. S'il se termine en O, le contour (C) est réductible à un point. Mais s'il se termine en O_1 par exemple, le contour (C) n'est certainement pas réductible à un point; sinon en effet la réduction pourrait

[1] Math. Zeitschr., t. 24, 1925, pp. 380-381.

se faire en ne cessant pas de faire partir (C) du point origine et de lui faire éviter les matrices singulières; le contour (C') ne pourrait alors constamment que partir de O et aboutir à O_1, il ne serait donc pas réductible à un point.

On voit de plus *qu'il y a exactement dans l'espace du groupe* h *classes distinctes de contours fermés irréductibles entre eux, et qui correspondent à* h *chemins joignant* O *aux point* O, $O_1, \ldots, O_{h-1}$ *à l'intérieur de* (P). Nous dirons que h est l'*indice de connexion* du groupe.

8. Si l'espace du groupe Γ n'est pas simplement connexe, le polyèdre (P) n'est pas un domaine fondamental du groupe fini $\mathcal{G}_1$, puisqu'il existe à l'intérieur de (P) h points homologues entre eux par rapport à $\mathcal{G}_1$. On aurait facilement un domaine fondamental (Q) de $\mathcal{G}_1$ par la méthode du rayonnement en prenant les points de (P) qui sont plus rapprochés de O que de chacun des points $O_1, \ldots, O_{h-1}$; ce polyèdre (Q) a pour faces d'abord les hyperplans qui limitent le domaine (D) de $\mathcal{G}'$, puis un certain nombre d'autres faces hyperplanes.

Pour obtenir le polyèdre (P), il suffit de construire d'une manière quelconque un polyèdre limité par un certain nombre d'hyperplans (Π) et qui ne soit traversé par aucun autre hyperplan (Π). Nous allons passer en revue les différents types de groupes simples et vérifier que pour chacun d'eux le polyèdre (P) admet exactement $l+1$ faces hyperplanes. Nous déterminerons en même temps les l sommets autres que O, ainsi que ceux de ces sommets qui appartiennent au réseau (R); leur nombre sera l'indice de connexion h diminué de 1.

9. Si nous prenons d'abord le cas du groupe à 3 paramètres de rang 1 (groupe des rotations de l'espace ordinaire), il est clair que (P) est ici le segment $(0, 1)$ d'un axe; ses deux extrémités appartiennent au réseau (R). L'indice de connexion de Γ est donc égal à 2. Le domaine (Q) serait formé du segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. L'espace du groupe des rotations n'est autre, comme on sait, que l'espace elliptique à 3 dimensions qui, en effet, n'est pas simplement connexe.

10. *Type* A) (¹). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_i, \quad \pm(\varphi_i - \varphi_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

(¹) Les expressions générales des paramètres angulaires correspondant aux différents types simples se trouvent indiquées dans : E. Cartan, *Thèse*, pp. 81-93.

Nous pouvons définir le domaine (P) par les $l+1$ inégalités

$$1 > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0;$$

il est clair que le domaine défini par ces inégalités n'est traversé par aucun des hyperplans (II). Les sommets de (P) autres que O sont les points de coordonnées

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 0, & 0,\dots, & 0, \\ 1, & 1, & 0,\dots, & 0, \\ 1, & 1, & 1,\dots, & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 1, & 1,\dots, & 1. \end{array}$$

Ils appartiennent tous au réseau (R) formé des points à coordonnées entières. L'espace du groupe Γ à donc $l+1$ pour indice de connexion.

11. *Type* B). Les paramètres angulaires sont de la forme

$$\pm\varphi_i, \quad \pm\varphi_i \pm \varphi_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Nous définirons le domaine (P) par les $l+1$ inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Les sommets, autres que O, du polyèdre (P) sont

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 0, & 0,\dots, & 0, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0,\dots, & 0, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & \frac{1}{2}. \end{array}$$

Le premier seul appartient au réseau (R). *Le groupe* Γ *a donc l'indice de connexion* 2.

12. *Type* C). Les paramètres angulaires sont

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm\varphi_i \pm \varphi_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, l);$$

le réseau (R) est formé des points dont toutes les coordonnées sont entières ou des moitiés de nombres impairs. On peut définir le polyèdre (P) par les $l+1$ inégalités

$$\frac{1}{2} > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l > 0.$$

Les sommets, autres que O, de (P) sont

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2}, & 0, & 0,\dots, & 0, \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0,\dots, & 0, \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & 0, \\
\dots & & & \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & \frac{1}{2}.
\end{array}$$

Le dernier seul appartient au réseau (R). *Le groupe* Γ *a donc l'indice de connexion* 2.

13. *Type* D). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_i \pm \varphi_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Le réseau (R) est le même que dans le cas du type C). On peut définir le polyèdre (P) par les inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_l, \quad \varphi_{l-1} + \varphi_l > 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Les sommets, autres que O, du polyèdre (P) sont

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 0, & 0,\dots, & 0, & 0, & 0, \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0,\dots, & 0, & 0, & 0, \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & 0, & 0, & 0, \\
\dots & & & & & \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, \\
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\dots, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}.
\end{array}$$

Le premier et les deux derniers appartiennent au réseau (R). *Le groupe* Γ *a donc pour indice de connexion* 4.

14. *Type* E_6). Les paramètres angulaires sont

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \pm(\varphi_i + \varphi_j + \varphi_k), \quad \pm(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_6).$$

Les sommets du réseau (R) sont les points dont toutes les coordonnées sont des nombres entiers ou dont toutes les coordonnées sont des tiers de nombres entiers congrus entre eux (mod 3).

On peut définir le polyèdre (P) par les 7 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_6, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_6 > 0, \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_6 < 1.$$

Les sommets, autres que O, de (P) sont

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\
\frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\
\frac{2}{3}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\
\frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\
\frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2}, \\
\frac{5}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}.
\end{array}$$

Le deux premiers appartiennent au réseau (R). *Le groupe* Γ *a donc pour indice de connexion* 3.

15. *Type* E_7). Les paramètres angulaires sont

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \varphi_i + \varphi_j + \varphi_k + \varphi_h \qquad (i, j, k, h = 1, 2, \dots, 8),$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_8 = 0.$$

Les sommets du réseau (R) sont les points dont les 8 coordonnées, de somme nulle, sont des quarts de nombres entiers congrus entre eux (mod 4).

On peut définir le polyèdre (P) par les 8 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_8, \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_8 < 1.$$

Les sommets, autres que O, du polyèdre (P) sont

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{3}{4}, & \frac{3}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\[1ex]
\frac{3}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\[1ex]
\frac{3}{4}, & \frac{1}{12}, & \frac{1}{12}, & \frac{1}{12}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\[1ex]
\frac{3}{4}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\[1ex]
\frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\[1ex]
\frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2}, \\[1ex]
\frac{7}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}, & -\frac{1}{8}.
\end{array}$$

Le premier seul appartient au réseau (R). *Le groupe* Γ *a donc pour indice de connexion* 2.

16. *Type* E_8). Les paramètres angulaires sont

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \pm(\varphi_i + \varphi_j + \varphi_k) \qquad (i, j, k = 1, 2, \dots, 9),$$

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_9 = 0.$$

Les points du réseau (R) sont ceux dont les coordonnées sont des tiers de nombres entiers congrus entre eux (mod 3).

On peut définir le polyèdre (P) par les 9 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \dots > \varphi_9, \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_9 < 1.$$

Les sommets, autres que O, du polyèdre (P) sont

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{5}{6}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, \\
\frac{5}{6}, & \frac{1}{12}, & \frac{1}{12}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, \\
\frac{5}{6}, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, & -\frac{1}{6}, \\
\frac{4}{5}, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{5}, & -\frac{1}{5}, & -\frac{1}{5}, & -\frac{1}{5}, \\
\frac{3}{4}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, \\
\frac{2}{3}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, \\
\frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\frac{1}{2}, \\
\frac{8}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}, & -\frac{1}{9}.
\end{array}$$

Aucun d'eux n'appartient au réseau (R). *Le groupe* Γ *est donc simplement connexe.*

17. *Type* F). Les paramètres angulaires sont

$$\pm\varphi_i, \quad \pm\varphi_i \pm \varphi_j, \quad \frac{\pm\varphi_1 \pm\varphi_2 \pm\varphi_3 \pm\varphi_4}{2}.$$

Les sommets du réseau (R) sont les points dont les coordonnées sont des nombres entiers à somme paire.

On peut définir le polyèdre (P) par les 5 inégalités

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4 > 0, \quad \varphi_1 > \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4, \quad \varphi_1 + \varphi_2 < 1.$$

Ses sommets autres que O sont

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, \\
\frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0, \\
\frac{3}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, \\
1, & 0, & 0, & 0.
\end{array}$$

Aucun d'eux n'appartient au réseau (R). *Le groupe* Γ *est donc simplement connexe.*

18. *Type* G). Les paramètres angulaires sont

$$\pm \varphi_i, \quad \pm (\varphi_i - \varphi_j) \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

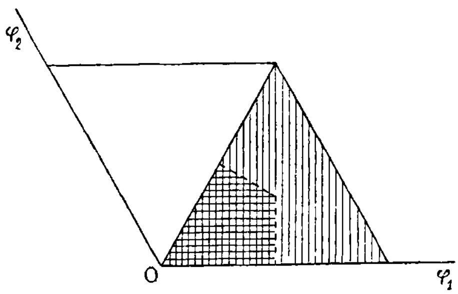

Fig. 1

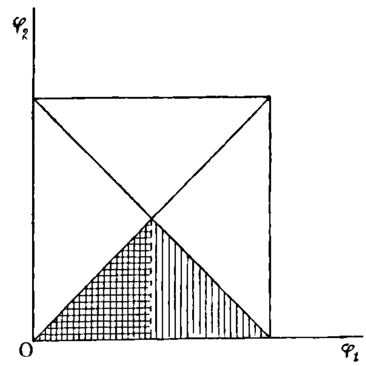

Fig. 2

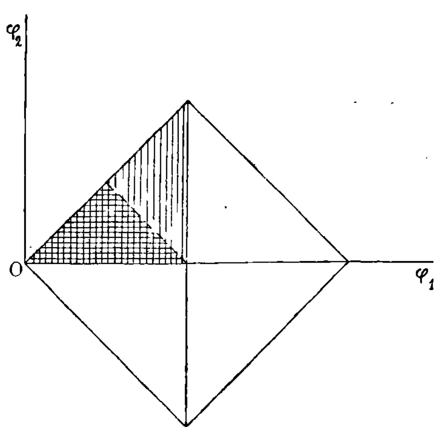

Fig. 3

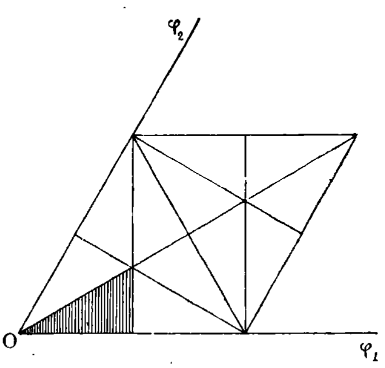

Fig. 4

avec

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$$

On peut définir le domaine (P), qui est ici un triangle, par les 3 inégalités

$$\varphi_1 > \varphi_2 > 0, \quad \varphi_1 - \varphi_3 < 1.$$

Ses deux sommets autres que O sont

$$\frac{1}{2},\quad 0,\quad -\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3}.$$

Aucun d'eux n'appartient au réseau (R). *Le groupe* Γ *est donc simplement connexe.*

19. Nous représentons dans les figures 1, 2, 3 et 4, pour chacun des types de rang 2, à savoir A), B), C) et G), un parallélogramme du réseau (R), ainsi que les droites (Π) qui le limitent ou le traversent; le domaine triangulaire (P) est figuré au moyen de hachures verticales, le domaine (Q), quand il existe, au moyen d'un double système de hachures verticales et horizontales. Le groupe du type D) de rang 2 est semi-simple; c'est pour cela qu'il n'est pas figuré [1]. On remarquera que les figures 2 et 3 relatives aux types B) et C) sont semblables; c'est qu'en effet les deux groupes correspondants sont isomorphes.

II. Le groupe abstrait simplement connexe et ses représentations linéaires.

20. Nous avons vu que toute transformation finie T du groupe adjoint Γ peut être représentée par h points distincts intérieurs au $(l+1)$-èdre (P). Nous allons construire un groupe abstrait $\mathbf{\Gamma}$ [2] dont chaque opération sera représentée par un point et un seul de (P).

Convenons d'appeler *élément* $\overline{T}$ l'ensemble d'une matrice T de Γ et d'un chemin (C) joignant, dans l'espace du groupe, le point origine au point T. Deux éléments seront regardés comme identiques s'ils correspondent à la même matrice T et si les deux chemins qui achèvent de les définir sont réductibles l'un à l'autre par déformation continue. A chaque matrice T correspondent h éléments $\overline{T}$. Tout élément $\overline{T}$ est représenté par un point et un seul intérieur à (P).

[1] Tout ce qui précède peut s'étendre aux groupes semi-simples, avec la seule différence que le polyèdre (P) est limité par plus de $l+1$ faces hyperplanes.

[2] C'est H. WEYL qui a montré l'importance de la notion du groupe abstrait dans son mémoire précédemment cité.

Nous allons définir *in abstracto* le produit de deux éléments $\overline{T}$ et $\overline{T}'$. Considérons pour cela un des chemins qui, allant du point origine au point T', définissent l'élément T'. A chaque point de ce chemin est associée une matrice Θ variant d'une manière continue depuis la matrice unité jusqu'à T'. La matrice $T\Theta$ décrit alors un chemin continu partant de T et aboutissant à TT'. Suivons par continuité sur ce chemin l'élément correspondant, en partant de l'élément initial $\overline{T}$; nous arriverons à un élément final $\overline{T}''$, qui est l'un des h éléments associés à la matrice $T'' = TT'$; nous poserons

$$\overline{T}'' = \overline{\overline{T}\overline{T}'}.$$

Il est facile de montrer que la définition donnée du produit $\overline{\overline{T}\overline{T}'}$ est univoque. Il est clair maintenant que tous les éléments $\overline{T}$ définissent un *groupe abstrait* $\overline{\Gamma}$.

Le groupe Γ est simplement connexe, car pour qu'un contour partant, dans l'espace du groupe, d'un point T auquel on associe l'élément $\overline{T}$, ramène en T le même élement $\overline{T}$, il faut et il suffit que ce contour soit réductible à zéro par déformation continue.

Le groupe Γ est isomorphe mériédrique de Γ; le groupe quotient $\overline{\Gamma}/\Gamma$ peut être regardé comme formé des h éléments de $\overline{\Gamma}$ qui correspondent à la transformation identique de Γ. Ces éléments sont représentés, dans le polyédre (P), par les h sommets O, O_1, O_{h-1}. Chacun de ces éléments laissant invariante chaque transformation de Γ et, par continuité, chaque transformation de $\overline{\Gamma}$, le groupe $\overline{\Gamma}$ Γ est abélien. *Nous l'appellerons le groupe de connexion de* Γ.

Supposons maintenant qu'on ait un groupe G ayant même structure infinitésimale que Γ. A une transformation de G ne correspond évidemment qu'une transformation de Γ, mais la réciproque peut ne pas être vraie. Si on va par continuité, dans l'espace de G, le long d'un chemin déterminé, de la transformation identique à une transformation donnée, il lui correspondra, dans l'espace de Γ, un chemin conduisant à un élément déterminé $\overline{T}$ de $\overline{\Gamma}$. Deux transformations différentes S et S' de G ne pourront jamais conduire de cette manière au même élément $\overline{T}$ de $\overline{\Gamma}$; sinon, en effet, il existerait dans l'espace de G un chemin allant de S à S' et qui donnerait, dans l'espace de Γ, un contour fermé réductible à zéro; la réduction à zéro de ce chemin par une déformation continue conservant le point de départ et le point d'arrivée, entraînerait, dans l'espace de G, la réduction à zéro d'un chemin partant toujours de S et aboutissant toujours à S', ce qui est absurde.

Si donc G est un groupe quelconque de même structure infinitésimale que Γ, le groupe Γ est isomorphe (mériédrique ou holoédrique) de G, et le groupe G est lui-même isomorphe (mériédrique ou holoédrique) de $\overline{\Gamma}$. Le *groupe de connexion* de G, à savoir $\overline{\Gamma}/G$, est un sous-groupe du groupe de connexion $\overline{\Gamma}/\Gamma$ de Γ. Ce sous-groupe peut d'ailleurs se réduire à l'opération identique ou se confondre avec $\overline{\Gamma}/\Gamma$.

Les considérations précédentes ne supposent nullement que le groupe Γ soit simple; elles s'appliquent à n'importe quelle structure infinitésimale, à la seule condition que Γ soit le groupe adjoint correspondant.

21. Jusqu'à présent le groupe $\overline{\Gamma}$ a été considéré uniquement *in abstracto.* On peut se poser la question de savoir s'il existe effectivement, dans un champ numérique convenable, un groupe d'opérations isomorphe *holoédrique* à $\overline{\Gamma}$. La réponse est fournie par le théorême suivant:

Il existe, pour chaque type de groupe simple, un groupe unitaire linéaire simplement connexe [1].

Il suffit, pour démontrer ce théorême, de vérifier dans chaque cas l'existence d'un groupe linéaire G tel que les transformations de ce groupe représentées par les sommets O_1, O_2, O_{h-1} du domaine (P) ne soient pas la transformation identique. Or cela est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans mon article: *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples* [2]. Il suffit de prendre

Type A): le groupe g_1 d'une forme d'HERMITE définie positive à $l+1$ variables, dont le domaine contient $h=l+1$ fois celui du groupe adjoint;

Type B): le groupe g_1 à 2^l variables, dont le domaine contient $h=2$ fois celui du groupe adjoint;

Type C): le groupe g_1 d'un complexe linéaire, dont le domaine contient $h=2$ fois celui du groupe adjoint;

Type D), l impair: le groupe g_1 à 2^{l-1} variables, dont le domaine contient $h=4$ fois celui du groupe adjoint;

Type D), l pair: le groupe *réductible* $g_1 g_2$ à 2^l variables, dont le domaine contient $h=4$ fois celui du groupe adjoint;

Type E_6): le groupe g_1 dont le domaine contient $h=3$ fois celui du groupe adjoint;

---

(1) H. WEYL a démontré ce théorème pour les quatre grands types de groupes simples; pour les types exceptionnels, il a simplement montré que le groupe de connexion est fini. (Math Zeitschr., t. 24, 1925, pp. 380-381), mais sans exclure, semble-t-il, l'hypothèse de la non-existence d'un groupe linéaire simplement connexe.

(2) Bull. Sc. Math., (2), t. 49, pp. 130-152, spécialement p. 150.

Type E_7): le groupe g_2 dont le domaine contient $h = 2$ fois celui du groupe adjoint.

Pour les autres types, le groupe adjoint est simplement connexe.

On remarquera que, dans le cas du type D) de rang pair, il n'existe aucun groupe linéaire *irréductible* simplement connexe ([1]).

22. On a facilement, d'après les résultats précédents, la structure du groupe $\overline{\Gamma}/\Gamma$. Il est cyclique dans tous les cas, à l'exception du type D) de rang pair, auquel cas il est isomorphe au groupe engendré dans un plan par les symétries, prises par rapport à deux droites rectangulaires (qui donnent par composition la symétrie par rapport à leur point d'intersection et l'opération identique).

Revenons à la représentation des transformations de Γ dans l'espace à l dimension des φ_i. Les opérations $\overline{T}$ de $\overline{\Gamma}$ seront représentables également par les points qui représentent leurs transformations infinitésimales génératrices. Seulement le réseau (R) des point qui représentent l'opération identique de $\overline{\Gamma}$ ne contiendra qu'une partie des sommets du réseau (R). Pour obtenir $(\overline{R})$, on peut remarquer que le groupe $\overline{\mathcal{G}}_1$ des déplacements et des symétries dont (P) est le polyèdre fondamental résulte de la combinaison du groupe $\mathcal{G}'$ des rotations et des symétries autour de l'origine avec le groupe des translations $\overline{\mathcal{T}}$ du réseau $(\overline{R})$. Les sommets de $(\overline{R})$ sont les différentes positions que prend le point O quand on lui applique les opérations de $\overline{\mathcal{G}}_1$, et $\overline{\mathcal{G}}_1$ est lui-même engendré par les $l+1$ symétries effectuées par rapport aux $l+1$ faces du polyèdre (P).

On pourra prendre comme domaine fondamental du groupe $\overline{\mathcal{T}}$ des translations du réseau (R), non pas un des parallélépipèdes fondamentaux de ce réseau, mais le volume $(\mathfrak{D})$ formé par (P) et par tous les $(l+1)$-èdres qui se déduisent de (P) par les opérations de $\mathcal{G}'$. Les faces opposées à O de tous ces $(l+1)$-èdres sont en effet les lieux des points équidistants de O et des points du réseau $(\overline{R})$ les plus rapprochés de O; elles limitent donc le domaine fondamental du groupe $\overline{\mathcal{T}}$, tel qu'on le construirait par la méthode du rayonnement.

Les figures 5, 6 et 7 (pp. 237 et 238) indiquent la forme du domaine $(\mathfrak{D})$ pour les groupes simplement connexes des types A), B) et G) de rang 2. On a conservé

([1]) On peut ajouter qu'il existe toujours un groupe linéaire admettant pour groupe de connexion un sous-groupe quelconque du groupe de connexion $\overline{\Gamma}/\Gamma$ du groupe adjoint.

la même échelle que pour les figures 1, 2 et 4. On obtiendrait dans chaque cas un parallélogramme fondamental du réseau $(\bar{R})$ en prenant les symétriques O' et O'' de O par rapport à deux côtés consécutifs non en ligne droite du périmètre de $(\mathfrak{D})$, et en achevant le parallélogramme construit sur O' et O''.

23. Les domaines $(\mathfrak{D})$ relatifs aux groupes de rang 3, des types A), B) et C), se construisent facilement.

Les types A) et B) donnent le même polyèdre $(\mathfrak{D})$: c'est un dodécaèdre formé de 12 faces losanges. Les extrémités des petites diagonales de ces losanges sont les 8 sommets d'un cube ; les extrémités des grandes diagonales sont les symétriques du centre de ce cube par rapport à ses faces. Dans le cas du type A), les losanges sont partagés en deux triangles par leurs petites diagonales, ce qui correspond à 24 tétraèdres (P) remplissant le polyèdre $(\mathfrak{D})$. Les sommets du cube sont les points O_1 et O_3, chacun répété quatre fois ; les autres sommets correspondent au point O_2. Dans le cas du type B), les losanges sont partagés en 4 triangles par leurs deux diagonales, ce qui donne 48 tétraèdres (P).

Dans le cas du type C), le domaine $(\mathfrak{D})$ est un cube dont chaque face est partagée en 8 triangles par les diagonales et les droites joignant les milieux des côtés opposés, ce qui donne encore 48 tétraèdres (P); le groupe $\mathcal{G}'$ est ici le groupe de toutes les symétries du cube. Les sommets du cube sont tous des homologues de O_1.

24. La détermination effective des sommets de $(\mathfrak{D})$ se fait facilement par le calcul. Il suffit de déterminer le symétrique de O par rapport à la face de (P) opposée à O, et de lui appliquer ensuite les différentes opérations de $\mathcal{G}'$. En partant maintenant de l sommets convenablement choisis, on aura l arêtes issues de O susceptibles d'engendrer le parallélépipède fondamental du réseau (R). On aura le groupe $\bar{\Gamma}/\Gamma$ en regardant comme une seule opération l'ensemble des translations qui amènent de O aux points homologues à chacun des sommets $O, O_1, \ldots, O_{h-1}$.

Type A). Le réseau $(\bar{R})$ est formé des points à coordonnées entières dont la somme est divisible par $l+1$. Les points homologues de O_α sont ceux pour lesquels les coordonnées sont entières avec une somme congrue à α $(\text{mod } l+1)$.

Type B). Le réseau $(\bar{R})$ est formé des points à coordonnées entières dont la somme est paire. Les points homologues de O_1 sont ceux dont les coordonnées sont entières, avec une somme impaire.

Type C). Le réseau (R) est formé des points à coordonnées entières. Les points homologues de O_1 ont pour coordonnées des moitiés de nombres impairs.

Type D). Le réseau $(\overline{R})$ est formé des points à coordonnées entières dont la somme est paire. Les points homologues de O_1 ont pour coordonnées des moitiés de nombres impairs, avec une somme différant de $\frac{l}{2}$ d'un nombre impair. Les points homologues de O_3 ont pour coordonnées des moitiés de nombre impairs, avec une somme différant de $\frac{l}{2}$ d'un nombre pair. Les points homologues de O_2 ont pour coordonnées des nombres entiers de somme impaire.

Si l est impair, la translation $\overrightarrow{OO_1}$ est cyclique (mod $\overline{\mathcal{C}}$), son carré est la translation $\overrightarrow{OO_2}$ et son cube la translation $\overrightarrow{OO_3}$.

Si l est pair, chacune des translations $\overrightarrow{OO_i}$ est cyclique d'ordre 2, et chacune d'elles est le produit des deux autres.

Type E_6). Le réseau $(\overline{R})$ est formé des points dont les coordonnées sont de la forme

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{3} \qquad (p_i \text{ entiers, } h = 0,\ 1 \text{ ou } -1),$$

la somme des p_i étant divisible par 3. Les points homologues de $O_\alpha (\alpha = 1, 2)$ ont leurs coordonnées de la même forme, mais la somme des p_i étant congrue à α (mod 3).

Type E_7). Le réseau $(\overline{R})$ est formé des points dont les 8 coordonnées φ_i, de somme nulle, sont de la forme

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{2} \qquad (p_i \text{ entiers, } h = 0 \text{ ou } 1).$$

Les points homologues de O_1 ont leurs coordonnées de somme nulle, de la forme

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{4} \qquad (p_i \text{ entiers, } h = 1 \text{ ou } -1).$$

Types E_8), F), G). Le réseau $(\overline{R})$ est identique à (R).

CHAPITRE II.

LES ESPACES DES GROUPES SIMPLES UNITAIRES

I. Groupe d'isométrie et groupe d'isotropie.

25. L'espace représentatif $\mathcal{E}$ d'un groupe simple unitaire G est un espace de RIEMANN, simplement connexe si le groupe est simplement connexe [1]. Son groupe continu d'isométrie est symbolisé par les équations

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi S_b,$$

où S_ξ représente une transformation arbitraire de G, $S_{\xi'}$ la transformation qui lui correspond par l'isométrie, S_a et S_b deux transformations fixes [2]. Le groupe continu d'isotropie (ou groupe des rotations autour du point origine) est formé des transformations du groupe adjoint

$$S_{\xi'} = S_a^{-1} S_\xi S_a.$$

26. Il peut exister un groupe *mixte* d'isotropie; il est formé de toutes les substitutions linéaires à r variables (composantes d'un vecteur issu de A) qui laissent invariante la forme de RIEMANN

$$R = \sum_{\rho,\,(ij),\,(kh)} c_{ij\rho}\, c_{k\rho h}\, p_{ij}\, p_{kh},$$

où les p_{ij} désignent les composantes d'un bivecteur arbitraire, les c_{ijk} les constantes de structure du groupe, qu'on peut toujours supposer former un trivecteur. Le groupe adjoint *mixte*, c'est-à-dire l'ensemble des substitutions linéaires qui conservent les constantes de structure du groupe, fait évidemment partie du groupe mixte d'isotropie. Supposons maintenant qu'il existe une substitution linéaire Θ faisant partie du groupe d'isotropie sans appartenir au groupe adjoint. Si T est une matrice arbitraire du groupe adjoint *continu*, la matrice

$$\Theta^{-1} T \Theta = T'$$

en fait aussi partie; la matrice Θ permet ainsi d'établir une correspondance entre les matrices T et T' du groupe adjoint, et cette correspondance conserve

(1) Il s'agit de l'espace à connexion affine *sans torsion* du groupe. Voir É. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations.* (J. de Math., t. 6, 1927, pp. 1-119).

(2) Voir p. 98 du mémoire précédemment cité.

évidemment la structure de ce groupe. Il existe donc, dans le groupe adjoint mixte, une substitution T_0 telle qu'on ait aussi

$$T_0^{-1}\,TT_0 = T';$$

on aura donc

$$\Theta^{-1}\,T\Theta = T_0^{-1}\,TT_0,$$

d'où

$$T_0\Theta^{-1}\,T = TT_0\Theta^{-1};$$

la transformation $T_0\Theta^{-1}$ est donc échangeable avec toutes les matrices du groupe adjoint continu. *Ce groupe adjoint étant irréductible* ([1]), il résulte d'un théorème de I. SCHUR et FROBENIUS que la matrice $T_0\Theta^{-1}$ est le produit de la matrice unité par un facteur constant m. On a donc

$$\Theta = \frac{1}{m}T_0;$$

par suite le groupe d'isotropie doit contenir la matrice $\frac{1}{m}$, qui multiplie les composantes de chaque vecteur par $\frac{1}{m}$. Cela n'est possible que si $\frac{1}{m} = -1$.

Réciproquement toute symétrie par rapport à un point, qui revient à changer le signe de toutes les r variables sur lesquelles agit le groupe d'isotropie, conserve évidemment la forme de RIEMANN R; elle ne fait du reste pas partie du groupe adjoint *mixte*, car si l'on change les signes de toutes les transformations infinitésimales d'un groupe simple, les coefficients de structure du groupe sont altérés.

En résumé si le groupe adjoint de G est formé de h familles continues distinctes, le groupe d'isotropie de l'espace de RIEMANN $\mathcal{E}$ du groupe G est formé de $2h$ familles continues distinctes, qu'on obtient en combinant le groupe adjoint mixte avec la symétrie par rapport au point fixe considéré de l'espace.

D'après les résultats que j'ai démontrés relativement au groupe adjoint des groupes simples ([2]), on voit que le *groupe d'isotropie de l'espace $\mathcal{E}$ est formé de deux familles continues, avec les exceptions suivantes:*

([1]) Cela signifie qu'il ne laisse invariante aucune multiplicité plane.

([2]) É. CARTAN, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples*. (Bull. Sc. Math., 2ème série, t. 49, 1925, pp. 361-374). A la vérité les résultats, sans que cela soit dit explicitement, se rapportent au groupe adjoint des groupes simples *à paramètres complexes*, ainsi qu'à celui des groupes *réels unitaires*; dans les autre cas, il n'est pas

Dans le cas du type A) *de rang* $l \geq 2$, *du groupe* D) *de rang* $l \geq 5$, *du type* E) *de rang* 6, *le groupe d'isotropie est formé de quatre familles continues.*

Dans le cas du type D) *de rang* 4, *le groupe d'isotropie est formé de douze familles continues.*

27. A chaque famille continue du groupe d'isotropie correspond une famille de transformations isométriques. Les différentes familles de transformations isométriques ainsi obtenues sont *localement* distinctes au voisinage des transformations qui laissent fixe un point donné de l'espace. Nous allons montrer que, l'espace $\mathcal{E}$ étant simplement connexe, il y a exactement autant de familles continues distinctes dans le groupe total d'isométrie que dans le groupe total d'isotropie. Sinon en effet on pourrait passer par continuité de la transformation identique à une transformation isométrique laissant fixe un point A et n'appartenant pas au groupe continu d'isotropie qui laisse fixe le point A. Si on applique les différentes isométries obtenues au point A, on obtient dans l'espace $\mathcal{E}$ un contour fermé (C) partant de A et y revenant. Ce contour fermé peut par déformation continue être réduit au point A ; cette déformation entraîne avec elle une déformation continue de la suite des transformations isométriques considérées. On aurait finalement une suite continue de transformations du groupe mixte d'isotropie du point A, partant de la transformation identique et aboutissant à une transformation *n'appartenant pas au groupe continu d'isotropie*, ce qui est absurde.

Le raisonnement est général et montre que *dans tout espace de Riemann simplement connexe le groupe d'isométrie contient autant de familles continues distinctes que le groupe d'isotropie.*

Si le nombre de ces familles est 2, les deux familles d'isométries sont définies par les équations

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi S_b,$$
$$S_{\xi'} = S_a S_\xi^{-1} S_b.$$

28. On aurait pu partir d'un autre groupe linéaire unitaire G' isomorphe à G, mais non simplement connexe. Son espace représentatif $\mathcal{E}'$ est un espace de RIEMANN non simplement connexe localement applicable sur le premier

certain, comme il est affirmé à la fin du n.° 2 (p. 365) de ce mémoire, que toute transformation du groupe adjoint mixte qui laisse invariante chacune des transformations Y d'un sous-groupe abélien γ appartienne au groupe adjoint *continu* espace $\mathcal{E}$. L'application fait correspondre à un point de $\mathcal{E}'$ un certain nombre k de points de $\mathcal{E}$, en désignant par k l'indice de connexion de G'. Les transformations isométriques de $\mathcal{E}$ qui font passer d'un de ces points aux $k-1$ autres constituent ce qu'on peut appeler *le groupe d'holonomie* de $\mathcal{E}'$ par rapport à $\mathcal{E}$. Toutes ces transformations sont échangeables avec les différentes transformations du groupe continu d'isométrie de $\mathcal{E}$; ce sont les transformation

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi,$$

où S_a désigne les différents transformations de G qui correspondent à la transformation identique de G'. Les transformations du groupe d'holonomie font ainsi partie du groupe *continu* d'isométrie de $\mathcal{E}$. Il en résulte en particulier que l'espace $\mathcal{E}'$ est *orientable*. Le groupe d'holonomie n'est autre que le groupe de connexion $\overline{\Gamma}/G$; c'est un sous-groupe du groupe d'holonomie de l'espace du groupe adjoint. Si G est distinct de Γ, son groupe d'holonomie est nécessairement cyclique.

29. Les résultats précédents permettent de préciser quels sont les différents espaces de RIEMANN $\mathcal{E}'$ correspondant à une même structure. A côté de l'espace simplement connexe $\mathcal{E}$, qui existe toujours, on trouve

A) : autant de formes d'espaces que le nombre $l+1$ admet de diviseurs autres que 1 ; chacune a un groupe d'holonomie cyclique ;

B), C), E_6), E_7) : une seconde forme d'espace et une seule ;

D), l impair : deux autres formes d'espaces avec des groupes d'holonomie cycliques d'ordres 2 et 4 ;

D), l pair : quatre autres formes d'espaces, trois admettant un groupe d'holonomie cyclique d'ordre 2, la dernière admettant un groupe d'holonomie non cyclique d'ordre 4.

30. Les espaces $\mathcal{E}'$ qui viennent d'être considérés peuvent être appelés des *formes de Klein* de l'espace $\mathcal{E}$. Ils admettent chacun un groupe continu d'isométrie, partout régulier et uniforme, localement isomorphe au groupe continu d'isométrie de $\mathcal{E}$.

On sait qu'il existe ou qu'il peut exister d'autres formes d'espaces, que nous appellerons *formes de Clifford* [1], à métrique partout régulière, loca-

[1] Voir F. ENRIQUES, *Fondements de la Géométrie.* (Encycl. Sc. Math., t. III, vol. I, fasc. I, pp. 133-136). Nous distinguons ici les formes de KLEIN et les formes de CLIFFORD, au lieu de les confondre toutes, comme on le fait d'habitude, sous le nom de formes de CLIFFORD-KLEIN.

lement applicables sur $\mathcal{E}$, admettant localement (dans un domaine suffisamment petit) les mêmes transformations isométriques que $\mathcal{E}$, mais *ces transformations ne restant pas toutes uniformes quand on les prolonge dans tout l'espace.* C'est ainsi que le cylindre de révolution est une forme de CLIFFORD du plan euclidien ; les translations du plan peuvent se prolonger et rester uniformes sur toute la surface du cylindre, mais il n'en est plus de même des rotations.

A chaque forme de CLIFFORD d'un espace simplement connexe $\mathcal{E}$ est associé un groupe discontinu d'holonomie engendré par les transformations isométriques de $\mathcal{E}$ qui font passer, dans cet espace, d'un point M aux différents points qui correspondent au même point que M dans l'espace de CLIFFORD. La recherche des formes de CLIFFORD revient à celle des sous-groupes discontinus du groupe (total) d'isométrie de $\mathcal{E}$ tels qu'aucune opération d'un tel sous-groupe (autre que l'opération identique) ne laisse fixe un point de $\mathcal{E}$.

Dans le cas qui nous occupe, les seules formes de KLEIN $\mathcal{E}'$ de l'espace $\mathcal{E}$ proviennent des différents groupes linéaires unitaires de même structure; le groupe continu d'isométrie G' de $\mathcal{E}'$ ayant en effet la même structure infinitésimale que G, et étant partout régulier et uniforme, est isomorphe holoédrique de l'un des groupes linéaires indiqués.

Nous retrouvons des résultats classiques dans le cas particulier du groupe simple à 3 paramètres. Le groupe adjoint est isomorphe au groupe des rotations autour de l'origine dans l'espace ordinaire; l'espace de ce groupe n'est autre que l'*espace elliptique* à trois dimensions. L'espace simplement connexe $\mathcal{E}$ est l'*espace sphérique,* qui peut être regardé comme l'espace du groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'HERMITE définie positive à deux variables. Cet espace admet deux familles continues d'isométries; le groupe d'holonomie de l'espace elliptique (par rapport à l'espace sphérique) est formé de l'opération identique et de la transformation $x_i' = -x_i$, qui fait partie du groupe continu des déplacements de l'espace sphérique. L'espace elliptique est orientable. C'est la seule forme de KLEIN de l'espace sphérique.

II. Les géodésiques.

31. Le groupe d'isométrie de l'espace simplement connexe $\mathcal{E}$ étant transitif, l'étude des géodésiques issues d'un point quelconque se ramène à celle des géodésiques issues du point origine O, qui correspond à la transformation identique de G. Ces géodésiques correspondent aux différents sous-groupes à un paramètre de G; chercher une géodésique joignant O à un point donné A, c'est chercher une transformation infinitésimale génératrice de la transformation finie représentée par A. Il résulte immédiatement de là que *par deux points quelconque de $\mathcal{E}$ il passe toujours une géodésique* (*et même une infinité si* $l > 1$). Nous laisserons de côté dans ce qui suit le cas $l = 1$, qui correspond à l'espace sphérique (et à l'espace elliptique) à trois dimensions.

Toute direction issue de O représente une transformation infinitésimale de G, laquelle appartient au moins à un sous-groupe abélien γ (n° **3**). Les transformations de γ fournissent dans l'espace $\mathcal{E}$ une variété E_l à l dimensions passant par O. Cette variété a une courbure riemannienne nulle, puisque la rotation associée à un parallélogramme élémentaire dont les côtés représentent les transformations infinitésimales U et V a pour effet de donner au vecteur X l'accroissement géométrique $\frac{1}{4}$ $((UV)X)$, et est par suite nulle si le crochet (UV) est nul: c'est le cas pour deux transformations quelconques de γ.

La variété E_l est donc localement euclidienne; elle est de plus totalement géodésique, puisqu'elle représente un sous-groupe de G. On peut définir analytiquement un point A de E_l par les l paramètres angulaires fondamentaux $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ de la transformation infinitésimale Y de γ qui engendre la transformation finie représentée par A; la distance OA, comptée sur la géodésique correspondante, est égale, à un facteur constant près, à la racine carrée de la somme $\Sigma\varphi_\alpha^2$ étendue aux $r - l$ paramètres angulaires. On voit ainsi que *la représentation utilisée dans le Chapitre I dans un espace euclidien à* l *dimensions n'est autre qu'une application sur cet espace euclidien de la variété localement euclidienne* E_l.

Il y a cependant une différence importante. La variété E_l n'est pas un espace euclidien indéfini; si on la développe sur l'espace euclidien à l dimensions, elle donne le réseau $(\overline{R})$ de parallèlépipèdes, *dont chacun représente complètement* E_l.

On voit d'après cela que *tout point de* E_l *peut être joint à* O *par une infinité dénombrable de géodésiques, situées tout entières dans* E_l, et qui ont pour images, dans l'espace euclidien, les droites joignant l'origine O aux différents points homologues d'un point donné par rapport au groupe $\overline{\mathfrak{T}}$ des translations du réseau $(\overline{R})$. Celles dont les paramètres directeurs sont rationnels sont fermées. Toutes les géodésiques, situées dans E_l, joignant O à A sont du reste *isolées*; aucune ne se coupe elle-même.

32. Au lieu de répresenter E_l par le parallèlépipède fondamental du réseau (R), il vaut mieux le représenter par le polyèdre $(\mathfrak{D})$ introduit au n° **26**. Les opérations du groupe $\mathcal{G}'$ correspondent à des rotations du groupe continu d'isotropie de $\mathfrak{G}$ qui amènent la variété E_l en coïncidence avec elle-même, (mais sans laisser fixes tous les points de E_l); dans chacune de ces rotations, les différents $(l+1)$ èdres (P) dans lesquels est décomposé le polyèdre $(\mathfrak{D})$ se transforment les uns dans les autres; ils sont du reste en même nombre que les opérations de $\mathfrak{G}'$ et *chacun d'eux est un domaine fondamental pour le groupe discontinu* $\mathfrak{G}'$.

La figure 5 représente ainsi une des variétés planes E_2 de l'espace simplement connexe à 8 dimensions du groupe simple du type A) de rang 2. Les côtés opposés de l'hexagone régulier doivent être regardés comme identiques, leurs points se correspondant par la translation qui amène en coïncidence ces deux côtés. Les trois translations correspondant aux trois couples de côtés opposés engendrent le groupe $\mathfrak{T}$ des translations du réseau $(\overline{R})$ (c'est au fond le groupe d'holonomie du plan de CLIFFORD E_2 par rapport au plan euclidien). Les trois sommets O_1 ne constituent qu'un seul point de E_2; il en

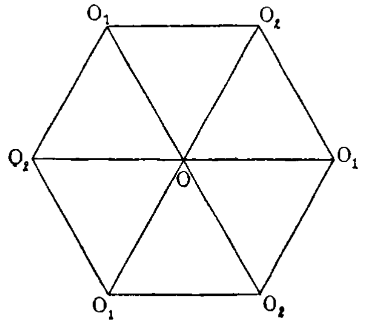

Fig. 5

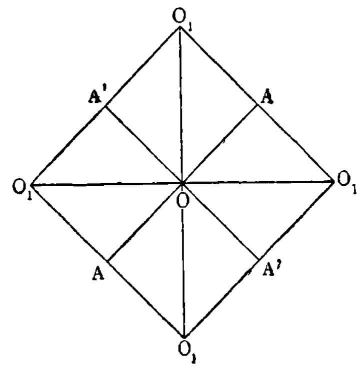

Fig. 6

est de même des trois sommets O_2. La figure met en évidence trois géodésiques fermées distinctes issues de O; chacune va passer successivement par les points O_1 et O_2, qui la partagent en trois parties égales. On a une de ces géodésiques en partant par exemple de O dans le sens horizontal de la figure jusqu'en O_1; cette géodésique continue par l'un des côtés horizontaux $O_1\,O_2$, puis se termine par le rayon horizontal $O_2\,O$ qui ramène au point de départ. Ces trois géodésiques, de même longueur, se coupent en O suivant des angles de 120° (si on les prend dans le sens qui mène d'abord au point O_1). Bien entendu, il existe dans E_2 une infinité d'autres géodésiques fermées, mais elles sont plus longues.

La figure 6 montre le domaine $(\mathfrak{D})$ représentatif d'une variété E_2 de l'espace simplement connexe à 10 dimensions du groupe simple unitaire du type B) de rang 2. Les côtés opposés du carré se correspondent par translation et doivent être considérés comme identiques. Les quatre sommets du carré représentent un même point de E_2; quant aux milieux des côtés, ils représentent deux points distincts A et A'. Il existe sur la figure quatre géodésiques fermées issues de O; deux d'entre elles, qui se coupent en O à angle droit, sont partagées en leur milieu par le point O_1; deux autres $\left(\text{dont la longueur est à celle des précédentes dans le rapport } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont partagées en leur milieu, l'une par le point A, l'autre par le point A'. Il existe encore sur la figure deux autres géodésiques fermées passant par O_1 et partagées en leur milieu, l'une par A, l'autre par A'.

La figure 7 représente une variété E_2 de l'espace à 14 dimensions du groupe simple du type G). Les sommets de l'hexagone régulier représentent

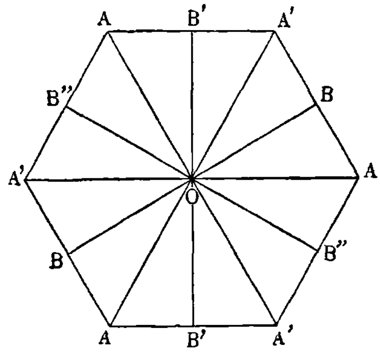

Fig. 7

deux points distincts A et A' de E_2; les milieux des côtés représentent trois autres points distincts B, B', B''. La figure représente trois géodésiques fermées issues de O et passant successivement par les points A et A' qui les partagent en trois parties égales; elles sont d'autre part coupées en leur milieu par l'un des points B, B' ou B''. La figure montre encore trois autres géodésiques fermées partagées en leur milieu par un de ces trois point, mais ne passant ni par A ni par A'. Les longueurs comparées de ces deux espèces de géodésiques sont 3 et $\sqrt{3}$.

33. Revenons à l'étude générale des géodésiques. Si un point donné A autre que O appartient à une seule variété E_l, toutes les géodésiques joignant O à A sont dans cette variété; elles sont isolées et il y en a une infinité dénombrable.

Si le point A appartient à une infinité de variétés E_l, la transformation finie de G représentée par A est échangeable avec plus de l transformations infinitésimales indépendantes, soit $l+\lambda$. On aura le nombre λ en cherchant combien, parmi les $r-l$ paramètres angulaires φ_α de A, sont des nombres entiers. Le point A est alors invariant par un sous-groupe $g_{l+\lambda}$ du groupe continu des rotations autour de O. Il appartient par suite à ∞^λ variétés E_l distinctes, et dans chacune d'elles il existe une infinité dénombrable de géodésiques joignant O à A. Supposons que la direction en O d'une de ces géodésiques soit invariante par un sous-groupe $g_{l+\mu}$ du groupe des rotations autour de O; la géodésique correspondante appartiendra à ∞^μ variétés E_l distinctes. Si $\mu=\lambda$, cette géodésique sera isolée dans l'espace $\mathcal{E}$ (parmi l'ensemble des géodésiques joignant O à A). Si $\mu<\lambda$, cette géodésique appartiendra à une variété continue à $\lambda-\mu+1$ dimensions de géodésiques joignant O à A, et cette variété s'obtiendra en appliquant à la géodésique donnée toutes les rotations du groupe $g_{l+\lambda}$ qui laisse fixes les point O et A.

En définitive, *certaines géodésiques joignant* O *à* A *peuvent ne pas être isolées;* ce fait se présente si le groupe des rotations qui laissent le point A invariant est plus grand que le groupe des rotations qui laissent la direction en O de la géodésique invariante; la dimension de la variété continue dont fait partie la géodésique est la différence augmentée de 1 entre les ordres de ces deux groupes.

34. Cela posé, les point M de l'espace se partagent en trois catégories :

1° La première catégorie est formée des points qui ne peuvent être joints à O que par des géodésiques isolées;

2° La deuxième catégorie est formée des points qui peuvent être joints à O par des géodésiques isolées et par des géodésiques non isolées;

3° La troisième catégorie est formée des points qui ne peuvent être joints à O par aucune géodésique isolée.

Il est clair que dans l'espace représentatif à l dimensions utilisé au chapitre I, tout point A de l'une des deux dernières catégories doit se trouver sur un des hyperplans (Π) obtenus en égalant l'un des paramètres angulaires à un nombre entier. Par suite si on suppose, ce qui ne restreint pas la généralité, ce point ramené à l'intérieur du $(l+1)$-èdre (P), il est nécessairement sur l'une des faces ou l'une des arêtes, etc., de (P).

Réciproquement, prenons un point A à la frontière de (P); il peut arriver qu'il soit homologue (par rapport au réseau (R_l)) à un point A' dont tous les paramètres angulaires entiers soient nuls [1]. Dans ce cas la géodésique représentée par la droite OA' admet toutes les rotations qui laissent fixe le point A'; elle est par suite isolée. Dans le cas contraire, aucune des géodésiques joignant O à A ne sera isolée.

C'est ce qui se passe en particulier pour tout sommet A (autre que O) du polyèdre (P); le point A', s'il existait, aurait en effet tous ses paramètres angulaires nuls; ce serait donc le point origine O, qui n'est pas homologue de A dans le réseau $(\overline{R})$.

Les l sommets A, distincts de O, du polyèdre (P) engendrent, quand la variété euclidienne E_l prend toutes les positions possibles, l variétés distinctes qu'on peut appeler les *variétés antipodiques* de O. *Il est impossible de joindre par une géodésique isolée le point* O *à un point quelconque d'une de ces variétés antipodiques.*

La détermination complète des points de la troisième catégorie devra être faite dans chaque cas particulier, et il pourra arriver qu'il en existe ailleurs que sur les variétés antipodiques. Cette déterminations dépend de considérations purement arithmétiques.

35. Si l'un des sommets du $(l+1)$-èdre (P) est, dans la représentation du groupe adjoint Γ, un des sommets du réseau (R), c'est-à-dire représente la transformation identique de Γ, il est clair qu'il est invariant par toutes les rotations autour de O; ce point se trouve nécessairement dans toutes les variétés E_l. Nous dirons que nous avons un *point antipode* de O. Nous avons déterminé leur nombre $h-1$ dans les différents cas.

Dans le cas contraire, le sommet considéré du $(l+1)$-èdre (P) n'admet qu'un sous-groupe à $r-\rho$ paramètres du groupe des rotations autour de O (c'est-à-dire du groupe adjoint continu); il engendre donc, quand on fait varier la variété E_l, une variété antipodique (M_ρ) à ρ dimensions. Le nombre des variétés antipodiques qui ne se réduisent pas à un point est $l-h+1$. Il sera facile dans chaque cas de déterminer leurs dimensions respectives. Il est clair que toute variété E_l coupe toute variété antipodique de O en un nombre fini de points. Si A est un sommet de (P) appartenant à cette variété et si on lui applique toutes les opérations de $\mathcal{G}'$, on obtient un certain nombre de points appartenant, dans E_l, à la même variété antipodique, mais il ne faut pas

[1] Il faut et il suffit pour cela que la face (ou arête, etc.) de (P) sur laquelle se trouve le point A passe, si on la prolonge suffisamment, par un sommet du réseau $(\overline{R})$.

regarder comme distincts ceux qui sont homologues entre eux par les différentes translations génératrices du groupe $\mathfrak{T}$ du réseau $(\bar{R})$.

36. Nous allons faire d'abord une étude complète pour les trois types de groupe simples de rang 2.

Dans le cas du type A), le point O admet deux antipodes O_1 et O_2 (fig. 5, p. 237). Les points situés sur l'un des côtés latéraux des triangles dans lesquels est décomposé l'hexagone $(\mathfrak{D})$ ont un paramètre angulaire nul (ainsi que le paramètre égal et opposé). On a donc ici $\lambda = 2$ et le point est homologue à $\infty^{r-1} = \infty^1$ points de l'espace. Le lieu des points analogues (points de la seconde catégorie) est donc une variété unique à 5 dimensions (M_5) coupée par une variété E_2 suivant trois géodésiques fermées issues de O.

Parmi les géodésiques fermées, il en est qui sont situées tout entières dans (M_5); elles font partie chacune d'une variété continue de géodésiques fermées $(\lambda = 6,\ \mu = 2)$, qui n'est autre du reste que (M_5); elles contiennent toutes les deux points antipodes O_1 et O_2. D'autres géodésiques fermées ne sont pas contenues tout entières dans (M_5), leur direction en O n'admet qu'un groupe de rotations à 2 paramètres $(\mu = 0)$; chacune fait partie d'une variété continue V_7 de géodésiques fermées.

Considérons une géodésique fermée *orientée*, figurée dans le plan représentatif par une droite joignant O à un point du réseau $(\bar{R})$. Les coordonnées de ce point sont des entiers p et q dont la somme est un multiple de 3. Si p et q sont premiers entre eux, la géodésique ne rencontrera aucun des deux points antipodes (qui devraient correspondre à des coordonnées tp, tq entières, avec $0 < t < 1$). Si p et q ne sont pas premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur ne peut être que 3; la géodésique passera d'abord par le point $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$ qui est un point antipode; elle passera ensuite par l'autre point antipode $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2q}{3}\right)$; elle sera partagée en trois parties égales par ces deux points. Elle rencontrera en premier lieu O_1 ou O_2 suivant que $\frac{p+q}{3}$ est congru à 1 ou à 2 (mod 3).

Il existe donc trois catégories de géodésiques fermées orientées:

1° *celles qui contiennent les deux points antipodes dans l'ordre* OO_1O_2O;

2° *celles qui contiennent les deux points antipodes dans l'ordre* OO_2O_1O;

3° *celles qui ne contiennent aucun des deux antipodes.*

Il est clair que les géodésiques fermées orientées de la seconde catégorie ne sont autres que celles de la première parcourues en sens inverse.

Si maintenant on joint le point O à un point particulier A de la variété (M_5), on aura d'abord une géodésique isolée tout entière située dans (M_5), puis une infinité de classes de géodésiques formant des variétés continues V_3.

Si enfin on joint O à un point A non situé dans (M_5), on aura une infinité de géodésiques isolées.

37. Dans le cas du type B) de rang 2, le point O admet un point antipode O_1 (fig. 6, p. 237) et une variété antipodique coupée par E_2 en deux point A, A'. Avec les notations du n. **15**, le point A est de coordonnées $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$. Les paramètres angulaires

$$\pm \varphi_1 \pm \varphi_2,$$

en nombre $\lambda = 4$, sont entiers; par suite, comme $r = 10$, $l = 2$, la variété antipodique est à 4 dimensions.

Tout point O *admet donc un point antipode* O_1 *et une variété antipodique* (M_4).

Le lieu des points de la seconde catégorie est formé de deux variétés (M_7) et (M'_7) coupées par chaque variété E_2 suivant deux droites rectangulaires (fig. 6); l'une contient le point antipode O_1, l'autre la variété antipodique (M_4).

Une géodésique fermée partant de O sera représentée dans le plan euclidien par une droite partant de O et aboutissant à un point du réseau $(\overline{R})$; soit (p, q) le premier de ces points; p et q sont des entiers à somme paire (n. **28**).

Si p et q sont impairs, le point $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ appartient à la variété antipodique (M_4), qui partage la géodésique en deux parties égales; la géodésique ne passe pas par le point antipode O_1.

Si p et q sont pairs, ils ne sont pas tous les deux divisibles par 4; si $p = 4p'$, $q = 4q' + 2$, la géodésique rencontre d'abord le point antipode O_1 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, puis revient en O.

Donc, toute géodésique fermée est coupée en son milieu soit par le point antipode O_1, *soit par la variété antipodique* (M_4).

La discussion des dimensions des variétés continues engendrées par les géodésiques joignant deux points donnés se ferait comme dans le cas A).

38. Dans le cas du type G), le point O n'admet pas d'antipode. Il existe deux variétés antipodiques, l'une coupée en deux points A, A' (fig. 7, p. 238), l'autre en trois points B, B', B'' par toute variété E_2. Avec les notations du n. **22**, l'un des points A a pour coordonnées $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{3}$, l'un des points B a pour coordonnées $\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_2 = 0$. En introduisant la coordonnée surabondante $\varphi_3 = -\varphi_1 - \varphi_2$, on trouve que ceux des paramètres angulaires de A qui sont entiers sont

$$\pm(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \pm(\varphi_1 - \varphi_3), \quad \pm(\varphi_2 - \varphi_3);$$

on a donc $\lambda = 6$, $r = 14$, $l = 2$; la première variété antipodique est donc à 6 dimensions. Ceux des paramètres angulaires de B qui sont entiers sont

$$\pm\varphi_2, \quad \pm(\varphi_1 - \varphi_3);$$

on a donc $\lambda = 4$; la seconde variété antipodique est à 8 dimensions.

Tout point O *de l'espace admet donc deux variétés antipodiques* (M_6) *et* (M_8).

Les points homologues de O ont des coordonnées entières. Les points de (M_6) ont pour coordonnées les tiers de deux entiers congrus entre eux (mod 3); les points de (M_8) ont pour coordonnées les moitiés de deux entiers non tous les deux pairs.

Toute géodésique fermée, partant de O, aboutit dans le plan euclidien à un point (p, q), p et q étant deux entiers premiers entre eux. Nous avons alors à considérer les points $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$, $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2q}{3}\right)$. Le second point appartient à (M_8); le premier appartient à (M_6) si $p - q$ est divisible par 3, et il en est de même du troisième.

Il existe donc deux catégories distinctes de géodésiques fermées. Dans chaque catégorie, les géodésiques sont coupées en leur milieu par la variété antipodique (M_8); *les géodésiques de la seconde catégorie sont en outre partagées en trois parties égales par la variété antipodique* (M_6).

La figure (7) donne des exemples de ces deux catégories de géodésiques.

III. Classification des géodésiques fermées.

Nous allons, pour les quatre grandes classes de groupes simples, déterminer les variétés antipodiques d'un point et indiquer une classification des géodésiques fermées basée sur la nature des variétés antipodiques rencontrées.

39. *Espaces simplement connexes du type* A). Il n'y a ici que des points antipodes. Nous appelerons O_i celui dont les i premières coordonnées sont égales à 1, les autres étant nulles (n. **10**).

Les points homologues de O_i sont ceux dont les coordonnées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ sont entières et satisfont à la congruence

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_l \equiv i \qquad (\text{mod } l+1).$$

Cela posé, considérons une géodésique fermée représentée par une droite partant de l'origine et aboutissant au point de coordonnées entières $(p_1, \ldots, p_l)$ avec

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_l \equiv 0 \qquad (\text{mod } l+1).$$

Soit d le plus grand commun diviseur des entiers p_i. Le nombre d est nécessairement un diviseur de $l+1$, sinon, en divisant les coordonnées p_i par $\frac{d}{\delta}$, δ étant le plus grand commun diviseur de d et de $l+1$, on aurait des coordonnées entières q_i dont la somme serait un multiple de $l+1$, et la géodésique se fermerait plus tôt qu'on ne le supposait.

On rencontrera un des points antipodes de O si l'on a des entiers proportionnels à p_i, inférieurs à p_i et dont la somme ne soit pas divisible par $l+1$. Cela est impossible si $d = 1$. Sinon on prendra nécessairement les multiples de $\frac{p_i}{d}$. Si donc

$$\frac{p_1}{d} + \frac{p_2}{d} + \ldots + \frac{p_l}{d} \equiv \alpha \qquad (\text{mod } l+1),$$

la géodésique rencontrera successivement les antipodes O_α, $O_{2\alpha}$, $O_{3\alpha}, \ldots$. Il faudra réduire chaque indice par soustraction du plus grand multiple posible de $l+1$.

En définitive *il existe* $1+1$ *catégories distinctes de géodésiques fermées orientées; les géodésiques de la* $\alpha^{\text{ième}}$ *catégorie rencontrent successivement, en partant de* O *dans le sens positif, les points antipodes* O_α, $O_{2\alpha}$, $O_{3\alpha}$, *etc. Celles de la* $(1+1)^{\text{ième}}$ *catégorie ne rencontrent aucun point antipode.*

On voit qu'il existe $\varphi(l+1)$ catégories de géodésiques fermées orientées contenant tous les point antipodes de O (l, si $l+1$ est premier).

40. *Espaces simplement connexes du type* B). En conservant les notations du n. **11**, les l sommets du $(l+1)$-èdre (P) sont

$$\begin{array}{lccccc}
(O_1) & 1, & 0, & 0, \ldots & 0, \\
(A_2) & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, \ldots & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(A_l) & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, \ldots & \frac{1}{2}.
\end{array}$$

Le premier est le point antipode de O. Ceux des paramètres angulaires de A_i qui sont entiers sont

$$\begin{aligned} &\pm \varphi_{i+1}, \ldots, \quad \pm \varphi_l, \\ &\pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, i), \\ &\pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu \qquad (\lambda, \mu = i+1, \ldots, l). \end{aligned}$$

Ils sont au nombre de

$$4i^2 - (4l+2)i + 2l^2;$$

par suite le point A_i engendre une variété antipodique (M^i) à

$$2i(2l - 2i + 1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, l)$$

dimensions.

Les points homologues de O sont à coordonnées entières de somme paire; ceux de O_1 à coordonnées entières de somme impaire. Les points qui appartiennent à la variété antipodique (M^i) ont i coordonnées qui sont des moitiés de nombres impairs, les autres coordonnées étant entières.

Soit une géodésique fermée partant de O; elle arrivera à un point de coordonnées entières p_i, avec Σp_i pair. Si les entiers p_i sont tous pairs, ce sont les doubles de nombres entiers premiers entre eux à somme impaire. Si les entiers p_i ne sont pas tous pairs, il sont premiers entre eux.

Supposons d'abord les p_i premiers entre eux, avec une somme paire; le point $\left(\frac{p_i}{2}\right)$ appartiendra certainement à l'une des variétés antipodiques, et comme il y a un nombre pair d'entiers p_i impairs, cette variété antipodique sera (M^2) ou (M^4) ou (M^6) etc.

Supposons maintenant $p_i = 2q_i$, les q_i étant premiers entre eux et à somme impaire. Il y a lieu d'examiner les point $\left(\frac{q_i}{2}\right)$, (q_i) et $\left(\frac{3q_i}{2}\right)$. Si un seul des entiers q_i est impair, le point $\left(\frac{q_i}{2}\right)$ et le point $\left(\frac{3q_i}{2}\right)$ ne se trouvent sur aucune variété antipodique et le point (q_i) est l'antipode O_1. Si $2h+1 \geq 3$ entiers q_i sont impairs, le géodésique rencontre successivement (M^{2h+1}), O_1 et (M^{2h+1}) et elle est partagée en 4 segments égaux.

En résumé: *les géodésiques fermées se partagent en* 1 *catégories distinctes, suivant la première variété antipodique rencontrée.*

Si cette variété est le point antipode O_1 *ou l'une des variétés* (M^{2i}), *la géodésique n'en rencontre pas d'autre et elle est partagée en deux segments égaux.*

Si cette variété est l'une des variétés (M^{2i+1}), *la géodésique rencontre ensuite* O_1, *puis de nouveau* (M^{2i+1}), *et elle est partagée en 4 segments égaux.*

41. *Espaces simplement connexes du type* C). Nous avons (n. **12**) l sommets $A_1, \ldots, A_{l-1}, A_l$; le sommet A_i ayant ses i premières coordonnées égales à $\frac{1}{2}$, les autres nulles. Le point A_l est le point O_1 antipode unique de O.

Ceux des paramètres angulaires de A_i qui sont entiers sont

$$\begin{aligned} &\pm 2\varphi_\alpha && (\alpha = 1, 2, \ldots, l), \\ &\pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta && (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, i), \\ &\pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu && (\lambda, \mu = i+1, \ldots, l). \end{aligned}$$

Ils sont au nombre de $4i^2 - 4li + 2l^2$. Par suite le point A_i engendre une variété antipodique (M^i) à $4i\,(l-i)$ dimensions.

Les points homologues de O sont les points à coordonnées entières, les points homologues de O_1 sont ceux dont les coordonnées sont des moitiés de nombres impairs. Les points qui appartiennent à (M^i) ont i coordonnées qui sont des moitiés d'entiers impairs, les autres étant entières.

Soit une géodésique fermée partant de O; elle aboutira à un point à coordonnées entières p_i, les nombres p_i étant premiers entre eux. Le point $\left(\frac{p_i}{2}\right)$ sera évidemment, suivant les cas, le point antipode ou un point d'une des variétés antipodiques.

Il existe 1 *catégories de géodésiques fermées; toutes les géodésiques fermées rencontrent une variété antipodique et une seule, qui la partage en deux parties égales.*

42. *Espaces simplement connexes du type* D). Le sommet A_1 du $(l+1)$-èdre (P) a sa première coordonnée égale à 1; le sommet A_i $(2 \leq i \leq l-2)$ a ses i premières coordonnées égales à $\frac{1}{2}$, les autres étant nulles; les sommets A_{l-1} et A_l ont leurs $l-1$ premières coordonnées égales à $\frac{1}{2}$, la dernière étant $-\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$.

Les points A_1, A_{l-1} et A_l sont les trois antipodes O_2, O_1 et O_3 de O.

Ceux des paramètres angulaires de A_i qui ont des valeurs entières sont

$$\begin{aligned} &\pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta && (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, i), \\ &\pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu && (\lambda, \mu = i+1, \ldots, l), \end{aligned}$$

au nombre de $4i^2 - 4li + 2l(l-1)$. Par suite le point A_i engendre une variété antipodique (M^i) à $4i\,(l-i)$ dimensions.

Il y a lieu de distinguer maintenant suivant la parité de l:

1° *l impair*. Soit une géodésique fermée orientée partant de O; ses paramètres directeurs seront proportionnels à des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_l$ premiers entre eux.

Si un seul de ces entiers est impair, la géodésique sera partagée en son milieu par le point O_2 $(p_1, p_2, \ldots, p_l)$ et ne rencontrera aucune autre variété antipodique.

Si le nombre des entiers p_i impairs est égal à $2\alpha \leq l-3$, la géodésique rencontrera d'abord la variété antipodique $(M^{2\alpha})$ au point de coordonnées $\frac{p_i}{2}$, puis reviendra en O.

Si le nombre des entiers p_i impairs est égal à $2\alpha + 1$ $\left(1 \leq \alpha \leq \frac{l-3}{2}\right)$, la géodésique fermée rencontrera d'abord la variété antipodique $(M^{2\alpha+1})$, puis le point antipode (O_2), enfin de nouveau la variété antipodique $(M^{2\alpha+1})$ pour revenir en O; elle sera partagée ainsi en quatre segments égaux.

Si le nombre des entiers p_i impairs est égal à $l-1$, la géodésique ne rencontrera aucune des variétés antipodiques.

Si enfin tous les entiers p_i sont impairs, la variété rencontrera les trois points antipodes, soit dans l'ordre $OO_1O_2O_3O$, soit dans l'ordre $OO_3O_2O_1O$.

Il existe donc $l+1$ catégories de géodésiques fermées orientées.

2° *l pair*. La discussion est analogue à la précédente. La seule différence se rapporte aux cas où le nombre des entiers p_i impairs est égal à $l-1$ ou à l.

Si $l-1$ des entiers p_i sont impairs, la géodésique est partagée en son milieu par le point antipode O_2.

Si les entiers p_i sont tous impairs, la géodésique est partagée en son milieu par l'un des deux points antipodes O_1 ou O_3.

Il existe donc dans ce cas l catégories de géodésiques fermées orientées; toutes les géodésiques rencontrent 1 ou 3 variétés antipodiques.

CHAPITRE III.

LES GROUPES SIMPLES COMPLEXES ET LES ESPACES DE RIEMANN À COURBURE NÉGATIVE ASSOCIÉS

I. Les espaces de Riemann attachés aux groupes simples complexes.

43. Nous avons étudié dans le chapitre précédent les espaces de RIEMANN représentatifs des groupes simples unitaires (à paramètres réels). Ces espaces sont à courbure riemannienne partout positive ou nulle.

A chacun de ces espaces correspond un autre espace de RIEMANN au même nombre de dimensions r, mais à courbure riemannienne *négative* (ou nulle). Le groupe d'isotropie de ces nouveaux espaces est identique à celui des premiers espaces, mais leur groupe continu d'isométrie, au lieu de se décomposer en deux groupes simples à r paramètres réels, est un groupe simple à r paramètres complexes ($2r$ paramètres réels).

44. Partons d'une structure simple donnée et choisissons r transformations infinitésimales de base $X_1, \ldots, X_r$ engendrant un groupe *unitaire* (avec coefficients de structure réels). Le groupe complexe sera engendré par les transformations infinitésimales $\Sigma e_i X_i$ avec des coefficients e_i complexes arbitraires. Nous dirons que deux transformations dans lesquelles les coefficients e_i sont complexes conjugués sont elles-mêmes complexes conjuguées. Une transformation sera purement imaginaire si les coefficients e_i sont tous purement imaginaires.

Les racines caractéristiques d'une transformation infinitésimale réelle étant purement imaginaires, celles d'une transformation infinitésimale purement imaginaire seront toutes réelles. Par suite la matrice T du groupe adjoint (complexe) engendrée par la transformation considérée a toutes ses racines caractéristiques réelles et positives; la matrice S qui représente la transformation infinitésimale est donnée sans ambiguïté par la formule

$$S = \log T,$$

où on donne aux logarithmes des racines caractéristiques de T leurs déterminations réelles (1). On voit immédiatement que T n'admet qu'une transfor-

(1) Voir E. STUDY-E. CARTAN, *Nombres complexes.* (Encycl. Sc. Math., 15, n.° 31, pp. 438-440).

mation infinitésimale génératrice purement imaginaire. Nous dirons que les matrices T considérées du groupe adjoint continu sont purement imaginaires; elles sont caractérisées par la propriété que la matrice $\overline{T}$ imaginaire conjuguée de T est égale à T^{-1}.

Toute matrice purement imaginaire T est définie d'une manière bi-univoque par les r nombres réels $\frac{e_\alpha}{i}$ obtenus en divisant par i les coefficients e_α de sa transformation infinitésimale génératrice. *L'espace $\mathcal{E}$ des matrices* T *est donc simplement connexe,* puisqu'il admet une représentation bi-univoque sur l'espace euclidien à r dimensions. Ce n'est pas un espace de groupe, car les *matrices* T *n'engendrent pas un groupe.*

45. Considérons l'espace, à $2r$ dimensions, à connexion affine sans torsion du groupe adjoint *complexe.* Le lieu $\mathcal{E}$ des points représentatifs des matrices T est une variété totalement géodésique de cet espace (¹). En effet les r transformations infinitésimales génératrices des matrices T:

$$U_1 = iX_1, \quad U_2 = iX_2, \ldots, \quad U_r = iX_r$$

jouissent de la propriété que les transformations

$$((U_i U_j) U_k)$$

sont des combinaisons linéaires (à coefficients réels) des U_i. Comme d'autre part les transformations isomorphiques de l'espace du groupe adjoint complexe laissent invariante la forme quadratique $\varphi(e)$, où on regarde les e_i comme des quantités complexes, et que cette forme quadratique, quand on se déplace le long de $\mathcal{E}$, est *définie positive,* la variété totalement géodésique $\mathcal{E}$ est un espace de RIEMANN. Les isométries de cet espace sont formées des isomorphies de l'espace total qui laissent la variété $\mathcal{E}$ invariante. En particulier toutes les isométries qui laissent invariant le point origine s'obtiennent en transformant T par une transformation du groupe adjoint unitaire, combinée ou non avec une symétrie par rapport à l'origine:

$$T' = R^{-1} T R,$$

$$T' = R^{-1} T^{-1} R,$$

R désignant une matrice arbitraire (réelle) du groupe adjoint (mixte) unitaire.

(¹) É. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations.* (J. Math., t. 6, 1927, pp. 71-75).

Pour obtenir les autres isométries, considérons d'abord la symétrie par rapport à un point T_0 de l'espace; elle se traduit analytiquement par la relation

$$T' = T_0 T^{-1} T_0 .$$

Cela posé, les isométries qui amènent l'origine en T_0 s'obtiendront en effectuant successivement une rotation autour de l'origine, puis une symétrie par rapport au point $T_0^{\frac{1}{2}}$. On aura donc les deux familles

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}},$$
$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T^{-1} R_0 T_0^{\frac{1}{2}}.$$

Chacune de ces familles se décompose éventuellement, si elle n'est pas continue, en deux ou six familles continues.

Toute isométrie peut être regardée comme définissant une transformation du groupe adjoint mixte complexe, *considéré comme à* $2r$ *paramètres réels.* Il contient deux fois plus de familles distinctes que le groupe adjoint mixte du groupe *considéré comme à paramètres complexes indivisibles;* cela tient à ce que dans le premier cas il est permis de considérer la transformation d'un paramètre complexe en son paramètre complexe conjugué, ou, ce qui revient au même, de la transformation RT dans la transformation conjuguée RT^{-1} (ce qui correspond à la symétrie par rapport au point origine).

46. Le déplacement défini par

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} T T_0^{\frac{1}{2}},$$

qui résulte de deux symétries successives par rapport au point origine et au point $T_0^{\frac{1}{2}}$, fait évidemment partie du groupe continu des déplacements; quand on prend pour T_0 les matrices finies engendrées par une même matrice infinitésimale purement imaginaire, on obtient un déplacement continu dans lequel la géodésique (C) joignant l'origine au point T_0 glisse sur elle-même de manière que tout vecteur issu d'un point de cette géodésique se déplace parallèlement à lui-même, au sens de Levi-Civita. On pourrait donner à un tel déplacement le nom de *transvection de base* (C).

Cela posé, *tout déplacement de l'espace* $\mathcal{E}$ *peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une rotation (isométrique) autour de* O *et une* *transvection ayant pour base une géodésique issue de* O. En effet l'égalité, quel que soit T,

$$T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}} = T'^{\frac{1}{2}}_0 R'^{-1}_0 T R'_0 T'^{\frac{1}{2}}_0,$$

donne, en faisant $T = 1$,

$$T_0 = T'_0;$$

on a ensuite

$$R'_0 R_0^{-1} T = T R'_0 R_0^{-1},$$

ce qui prouve que la matrice $R'_0 R_0^{-1}$ est échangeable avec toutes les matrices T, c'est-à-dire avec toutes les transformations infinitésimales du groupe; c'est donc la matrice unité, et $R'_0 = R_0$.

47. Le groupe continu des déplacements de l'espace $\mathcal{E}$ est isomorphe au groupe engendré par les transformations $R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$ du groupe adjoint complexe, produit d'une matrice réelle par une matrice purement imaginaire. Si on pose

$$\Theta = R_0 T_0^{\frac{1}{2}},$$

et si on désigne par $\overline{\Theta}$ la matrice imaginaire conjuguée de Θ, on a

$$\overline{\Theta} = R_0 T_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Par suite les transformations isométriques de $\mathcal{E}$ sont de l'une des deux formes

$$T' = \overline{\Theta}^{-1} T \Theta,$$
$$T' = \Theta^{-1} T^{-1} \Theta,$$

en désignant par Θ une matrice arbitraire du groupe adjoint (mixte) complexe. Les transformations Θ formant nécessairement un groupe, ce groupe ne peut être que le groupe adjoint complexe, *dont toutes les transformations sont ainsi réductibles à la forme* $\Theta = R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$.

II. La topologie des groupes simples complexes.

48. Les résultats précédents nous permettent d'étudier la topologie du groupe adjoint continu complexe. En effet chacune de ses transformations étant décomposable d'une manière et d'une seule en une transformation du groupe adjoint unitaire et une transformation T, tout contour fermé tracé dans le domaine du groupe se ramènera, d'une manière et d'une seule, à un contour fermé tracé dans le domaine du groupe adjoint unitaire et à un contour fermé tracé dans l'espace $\mathcal{E}$ et formé des points transformés de O par les différentes transformations T.

L'espace $\mathcal{E}$ étant simplement connexe, le second contour fermé est toujours réductible à zéro. Par suite *le groupe de connexion du groupe adjoint complexe est identique au groupe de connexion du groupe adjoint unitaire.*

Plus généralement, tout groupe linéaire à r paramètres complexes de la structure donnée admet le même groupe de connexion que le groupe linéaire unitaire correspondant. *Il existe donc toujours un groupe linéaire à paramètres complexes, simplement connexe, admettant une structure infinitésimale simple donnée.*

III. Les géodésiques et la trigonométrie des espaces $\mathcal{E}$.

49. La distribution des géodésiques de l'espace $\mathcal{E}$ est extrêmement simple. Il passe en effet par deux points quelconque de $\mathcal{E}$ une géodésique et une seule. Il suffit de le démontrer pour le point origine O et un autre point quelconque A correspondant à une matrice T. Le point T^t, quand t varie de 0 à 1, décrit une géodésique, et c'est la seule qui passe par O et A, car T ne possède qu'une transformation infinitésimale génératrice.

On peut du reste se demander si cette double propriété de l'espace $\mathcal{E}$ n'est pas liée nécessairement à la double propriété qu'il possède d'être simplement connexe et d'avoir sa courbure riemannienne partout négative ou nulle.

Une conséquence importante peut être tirée de ce qui précède, c'est la *non-existence d'autres formes de Klein pour l'espace $\mathcal{E}$.* Sinon en effet, il existerait au moins une isométrie de $\mathcal{E}$ échangeable avec tous les déplacements de l'espace $\mathcal{E}$ et ne laissant aucun point fixe; soit alors A le point dans lequel cette isométrie transforme le point O. Toute rotation isométrique autour de O devrait laisser invariant le point A, par suite la géodésique OA; et il n'existe aucune direction invariante par toutes les transformations du groupe d'isotropie: sinon il existerait une transformation infinitésimale (purement imaginaire) du groupe échangeable avec toutes les autres, ce qui n'est pas.

50. Il est facile d'indiquer une relation donnant toutes les formules de la trigonométrie de l'espace $\mathcal{E}$, et faisant intervenir cinq des six éléments d'un triangle géodésique OAB. Soient en effet T_A et T_B les matrices représentées par A et B; soient a et b leurs modules (longueurs des côtés OA et OB); leur produit scalaire $T_A \mid T_B$, (qui n'est autre que la quantité $-\Sigma e_\alpha e'_\alpha$ relative à leurs deux transformations infinitésimales génératrices) est égal à $ab \cos \widehat{O}$. Transportons par parallélisme le segment de géodésique AB de A en O le long de la géodésique AO; nous obtenons un segment de géodésique égal OB', avec

$$T_{B'} = T_A^{-\frac{1}{2}} T_B T_A^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans cette formule fondamentale on a

$$| T_A | = OA = a, \quad | T_B | = OB = b, \quad T_{B'} | = AB = c;$$

$$T_A \mid T_B = ab \cos \widehat{O}, \quad T_A \mid T_{B'} = -ab \cos \widehat{A}.$$

Si en particulier les matrices T_A et T_B sont échangeables entre elles, ce qui revient à dire que les points A et B sont dans une même variété E_l issue de O, on a

$$T_{B'} = T_B T_A^{-1},$$

et les formules de la trigonométrie sont les mêmes que dans le plan euclidien. Ici la variété E_l est un vrai espace euclidien simplement connexe illimité.

IV. Les quatre grandes classes d'espaces $\mathcal{E}$.

51. Il ne sera pas mauvais, après ces généralités, de passer en revue les quatre grandes classes de groupes simples et de donner des interprétations géométriques concrètes des espaces $\mathcal{E}$ correspondants. Un remarque générale peut être faite d'abord.

Considérons un groupe linéaire unitaire particulier, à n variables; nous savons qu'il laisse invariante une forme d'Hermite définie positive F_0 [1]. Lorsqu'on applique les substitutions du groupe linéaire, aux r paramètres réels desquelles on attribue des valeurs complexes quelconques, la forme d'Hermite F_0 est changée en une autre forme d'Hermite définie positive F

[1] Ce théorème est dû à H. Weyl qui en a montré, dans les mémoires précédemment cités, l'importance dans la théorie de la représentation des groupes semi-simples par des groupes linéaires. Voir une autre démonstration dans mon mémoire, déjà cité : *Les tenseurs irréductibles, etc.* (Bull. Sc. Math., 2ème série, t. 49, 1925, pp. 132-159).

dépendant essentiellement de r paramètres réels. L'espace de ces formes d'HERMITE est identique à l'espace $\mathcal{E}$. On aura une représentation concrète plus ou moins simple suivant le groupe linéaire unitaire choisi.

52. Le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui du groupe simple à 3 paramètres complexes, par exemple le groupe des transformations homographiques complexes d'une variable complexe. Si nous prenons ici pour groupe unitaire le groupe des rotations autour d'un point fixe, *les matrices* T *représentent les rotations autour d'un axe réel d'un angle purement imaginaire*. En utilisant les paramètres d'EULER-OLINDE RODRIGUES, chaque matrice T est définie par quatre nombres réels ρ, λ, μ, ν satisfaisant à

$$\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = 1 \qquad (\rho > 0).$$

On obtient l'espace hyperbolique à trois dimensions, dont le groupe continu des déplacements est en effet isomorphe au groupe des transformations homographiques complexes d'une variable complexe (avec un indice de connexion égal à 2).

53. Le cas général du type A) conduit à l'espace $\mathcal{E}$ des formes d'HERMITE définies positives à $l+1$ variables, à discriminant égal à 1. Cet espace est à $(l+1)^2 - 1 = l(l+2)$ dimensions. Toute transformation infinitésimale unimodulaire laissant invariante la forme d'HERMITE

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_{l+1}\bar{x}_{l+1}$$

est homologue à une transformation de la forme

$$i(a_1x_1p_1 + a_2x_2p_2 + \dots + a_{l+1}x_{l+1}p_{l+1}) \qquad (\Sigma a_i = 0),$$

les coefficients a_i étant réels. Par suite toute matrice T est réductible à la forme diagonale

$$\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & e^{a_{l+1}} \end{pmatrix}.$$

Toute géodésique de l'espace $\mathcal{E}$ est, par un déplacement convenable, réductible au lieu des formes d'HERMITE

$$e^{a_1 s}x_1\bar{x}_1 + e^{a_2 s}x_2\bar{x}_2 + \dots + e^{a_{l+1} s}x_{l+1}\bar{x}_{l+1}.$$

Si l'on suppose, ce qui est le cas général,

$$a_1 > a_2 > \dots > a_l > a_{l+1},$$

le point de la géodésique qui est à l'infini négatif ($s = -\infty$) est le point représentatif de la forme d'HERMITE dégénérée $x_{l+1}\bar{x}_{l+1}$, et le point à l'infini positif représente la forme d'HERMITE dégénérée $x_1\bar{x}_1$.

Dans l'espace projectif des formes d'HERMITE à $l+1$ variables, l'espace $\mathcal{E}$ est limité par les variétés représentatives des formes d'HERMITE dégénérées, mais jamais négatives; ces variétés constituent l'*absolu* et toutes les géodésiques ont deux points à l'infini sur l'absolu.

54. Dans le cas des types *B*) et *D*), on peut prendre pour groupe unitaire le groupe réel d'une forme quadratique réelle définie positive, ou le groupe des rotations autour de l'origine dans un espace euclidien à n dimensions. L'espace $\mathcal{E}$ sera par exemple celui des formes d'HERMITE définies positives obtenues en appliquant à la forme

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \dots + x_n\bar{x}_n$$

une rotation autour d'éléments plans réels, mais d'angles purement imaginaires. Toute géodésique pourra, à un déplacement près, s'obtenir en appliquant à la forme d'HERMITE considérée la rotation

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 ch(a_{12}s) - ix_2 sh(a_{12}s),\\
x'_2 &= ix_1 sh(a_{12}s) + x_2 ch(a_{12}s),\\
x'_3 &= x_3 ch(a_{34}s) - ix_4 sh(a_{34}s),\\
x'_4 &= ix_3 sh(a_{34}s) + x_4 ch(a_{34}s),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

avec les coefficients réels a_{12}, $a_{34}, \dots$, tels que la somme de leurs carrés soit égale à 1. On obtiendra alors les formes d'HERMITE

$$ch(2a_{12}s)(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2) + ish(2a_{12}s)(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) + \dots$$

Si on suppose par exemple

$$a_{12} > a_{34} > 0, \quad a_{56} = \dots = 0,$$

la géodésique commencera (pour $s = -\infty$) à la forme d'HERMITE dégénérée

$$x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4 - i(x_3\bar{x}_4 - x_4\bar{x}_3) = (x_3 + ix_4)(\bar{x}_3 - i\bar{x}_4),$$

et se terminera (pour $s = +\infty$) à la forme d'HERMITE dégénérée

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + i(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) = (x_1 - ix_2)(\bar{x}_1 + i\bar{x}_2).$$

55. Dans le cas du type C), on peut partir du groupe unitaire qui laisse invariantes la forme quadratique extérieure

$$[x_1x_2] + [x_3x_4] + \ldots + [x_{2l-1}x_{2l}]$$

et la forme d'HERMITE définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{2l}\bar{x}_{2l}.$$

L'espace $\mathcal{E}$ sera par exemple celui des formes d'HERMITE définies positives dans lesquelles est transformée la forme d'HERMITE précédente par une substitution linéaire complexe arbitraire laissant invariante la forme quadratique extérieure.

Toute transformation infinitésimale du groupe unitaire est réductible à la forme

$$ia_{12}(x_1p_1 - x_2p_2) + ia_{34}(x_3p_3 - x_4p_4) + \ldots + ia_{2l-1,\,2l}(x_{2l-1}p_{2l-1} - x_{2l}p_{2l}).$$

Il en résulte que toute géodésique pourra, à un déplacement près, être regardée comme le lieu des formes d'HERMITE

$$e^{2a_{12}s}x_1\bar{x}_1 + e^{-2a_{12}s}x_2\bar{x}_2 + \ldots + e^{2a_{2l-1,\,2l}s}x_{2l-1}\bar{x}_{2l-1} + e^{-2a_{2l-1,\,2l}s}x_{2l}\bar{x}_{2l},$$

avec

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 + \ldots + a_{2l-1,\,2l}^2 = 1.$$

La quantité s désigne l'abscisse curviligne. Si l'on a

$$a_{12} > a_{34} > \ldots > a_{2l-1,\,2l} > 0,$$

le point à l'infini négatif sur la géodésique est la forme d'HERMITE dégénérée $x_2\bar{x}_2$, tandis que le point à l'infini positif est $x_1\bar{x}_1$.

On remarquera que dans les exemples précédents *il existe en général une infinité de géodésiques se coupant aux deux mêmes points à l'infini.*

Sulle configurazioni d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile.

Memoria di GIULIO KRALL (a Roma).

§ 1. Tra le sollecitazioni cui una piastra elastica sottile può essere cimentata, a quelle nominate *piane* o *tangenziali* spetta notoriamente importanza cospicua, e ciò, sia per la vasta cerchia di quesiti della pratica che portano a considerarle, sia, e più ancora, per l'interesse, invero notevole, che destano certi problemi d'analisi (cosidetti *problemi d'autovalori*) che a questi si collegano.

Come si sa, a particolari valori di queste sollecitazioni (*sollecitazioni critiche*, chiamate anche *di punta* nei sistemi unidimensionali) corrispondono configurazioni d'equilibrio caratteristicamente instabili, intendendosi con ciò alludere a *stati d'equilibrio* tali, per cui anche il più tenue cimento, statico o dinamico che sia, produce in generale perturbazioni grandi oltre ogni limite, vale a dire in generale, la rottura del sistema cimentato.

Queste circostanze di fatto, cui l'esperienza da ben conosciuti riscontri, si sogliono per lo più studiare alla stregua d'un noto criterio di stabilità d'uso assai frequente. Il quale criterio, traducendosi in una proposizione d'esistenza di *minimo* per un certo integrale (dell'*energia potenziale totale*) contenente una funzione incognita, caratterizzante la configurazione d'equilibrio, porta, con l'impiego adeguato di alcuni algoritmi del calcolo variazionale, primissimo tra questi quello del RITZ, ad esaurire con agilità e speditezza pressochè qualunque quesito che la pratica chiama a risolvere [1].

Ora, pur riconoscendo (pei risultati conseguiti) l'utilità indubbia di tale modo di riguardare quest'ordine di problemi, non sembra si possa ritenere proprio conseguita, con tutta la generalità desiderabile, la dimostrazione d'esistenza di tali configurazioni, come pure una loro caratterizzazione qualitativa e quantitativa completa.

È perciò che non pare del tutto inutile considerare qui con qualche diffusione gli aspetti analitici delle suddette quistioni, come anche di segnalare in pari tempo alcuni procedimenti risolutivi validi in ogni caso.

Riprendendo una mia Nota (2) concernente la quistione ora nominata, si comincia col riportare (§ 2) l'equazione differenziale del problema (che, sotto debite ipotesi di derivabilità e continuità, traduce il principio di minimo di cui sopra) ad una equazione integrale del tipo classico di FREDHOLM onde sfruttare (§§ 3, 4) ben noti teoremi d'univocità ed esistenza, nonchè i metodi risolutivi assegnati per queste equazioni.

Indi, non essendo però possibile attribuire a detti metodi che un valore essenzialmente teorico, si introduce (§§ 5, 6) un algoritmo d'approssimazioni successive che, sulle direttive magistrali di SCHWARZ, POINCARÉ e PICARD, non è difficile nè impostare nè giustificare.

§ 2. **Posizione del problema. Criterio d'instabilità.**

Sia S una piastra sottile, elastica isotropa.

Indichino: h lo spessore, piccolo di fronte alle altre dimensioni, E e ν le costanti d'elasticità, *modulo* e *coefficiente di contrazione* del materiale che la costituisce.

Orientati nella superficie mediana (alla quale, secondo l'uso, andranno riferite le considerazioni che seguono), due assi cartesiani x ed y, si porti normalmente a questi, quindi alla nominata superficie, piana in condizioni naturali (si vuol intendere in assenza di sollecitazioni), l'asse delle z. Allora, se con $p = p(x, y)$ specifichiamo una distribuzione di pressioni sulla S, agenti secondo z, ove si indichi con $w = w(x, y)$ lo spostamento d'un punto generico P di coordinate x, y, l'equazione per l'equilibrio si scrive (3),

$$\Delta\Delta w(x, y) = p(x, y), \tag{1}$$

essendo scelte le unità di misura in modo, che risulti $= 1$ (per sola semplicità di scrittura) il *coefficiente di rigidità (Steifigkeits-koeffizent, flexural rigidity)*

$$R = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

che notoriamente moltiplica in quest'equazione il doppio *operatore laplaciano*

$$\Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \tag{2}$$

Ciò posto, detto S il campo d'integrazione definito dalla superficie testè definita, il bordo della quale si indicherà con σ, sia $G = G(P, P')$ una funzione (la *seconda funzione di Green*) di due punti P e P' di S, (di coordinate x, y rispettivamente ξ, η), tale che si abbia in tutto il campo:

$$\Delta\Delta G = 0,$$

a) l'operatore $\Delta\Delta$ essendo indifferentemente formato colle coordinate di P o di P';

b) che al contorno σ soddisfi alle condizioni che si vogliono imporre alla w, le quali sono, per i tipi di vincolo più frequente, l'*incastro* o l'*appoggio libero*, fornite dalle due coppie

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

rispettivamente

$$w = 0, \quad \mathfrak{D}(w) = \nu\Delta w + (1 - \nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \tag{4}$$

essendo n la normale esterna, spiccata in un punto P di σ;

c) che in tutto S si possa porre

$$G(P, P') = \frac{1}{8\pi} r^2 \lg r + g(P, P') \tag{5}$$

con r eguale alla distanza $\overline{PP'} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ e $g = g(P, P')$ funzione continua con le sue prime quattro derivate (seconda funzione *preliminare* di Green).

Sorpassando sulla questione d'esistenza come pure su quella costruttiva di una tale funzione, esaurita dalle ricerche di Boggio (4), Hadamard (5) ed altri, l'integrale generale della (1) si scriverà nella forma

$$w(P) = \int_S G(P, P')p(P')dS', \tag{6}$$

essendo dS' l'elemento di superficie di S espresso nelle coordinate ξ e η di P'.

Dopo questi preliminari, di cui ci si varrà in seguito, si caratterizzi una sollecitazione piana con le tre componenti *caratteristiche* $n_{xx} = n_{xx}(P)$, $n_{xy} = n_{xy}(P)$, $n_{yy} = n_{yy}(P)$.

Relativamente ad esse riterremo, in conformità con la teoria classica, che possano ricavarsi come derivate seconde d'una funzione $A = A(P)$ (funzione di Airy (6)) *biarmonica* in S, *tipica* della sollecitazione che si considera, secondo le relazioni

$$n_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \quad n_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \tag{7}$$

e si abbiano quindi in tutto il campo le relazioni, *fondamentali* nella nostra ricerca,

$$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

e

$$\frac{\partial^2 n_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 n_{yy}}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

Riterremo inoltre, come condizione essenziale, che dette componenti, riguardate come coefficienti d'una *forma quadratica* in due variabili φ e ψ

$$F = n_{xx}\varphi^2 + 2n_{xy}\varphi\psi + n_{yy}\psi^2, \tag{10}$$

sieno tali da renderla *definita* e *negativa*, vale a dire, che si abbia (per la prima condizione) in tutto il campo (7)

$$n_{xx}n_{yy} - n_{xy}^2 > 0; \tag{11}$$

con che si vuole esprimere che la conica delle sollecitazioni relativa al punto generico P è chiusa, dunque una *ellisse*.

Allora, se con L indichiamo l'*operatore differenziale*

$$L = n_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + n_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{12}$$

manifestamente *autoaggiunto* per le nominate relazioni (8), l'equazione per gli spostamenti w (quella che traduce il *principio di minimo* di cui è cenno nel § 1), permanendo ancora la pressione p, si scrive (8)

$$\Delta\Delta w = \tau L(w) + p, \tag{13}$$

τ essendo un parametro numerico, in particolare eguale all'unità, che moltiplica le tre componenti n.

Poichè il termine addittivo $\tau L(w)$ della p è, in linea formale, assimilabile a questa, dal confronto della (13) con le (1) e (6) risulta senz'altro

$$w(P) = \tau \int_S G(P, P')L'[w(P')]dS' + \pi(P), \tag{14}$$

essendo

$$(15) \qquad \pi(P) = \int_S G(P, P')p(P')dS'$$

e

$$(16) \qquad L' = n_{xx}(\xi, \eta)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2n_{xy}(\xi, \eta)\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + n_{yy}(\xi, \eta)\frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

vale a dire, l'*operatore* L già definito applicato alle coordinate ξ e η di P'.

Per riportare l'equazione *integro-differenziale* (14) ad una equazione *integrale* del tipo di FREDHOLM eseguiamo una doppia *integrazione per parti*, sicuramente legittima per la specificazione della G. Si ottiene, sfruttando l'annullarsi al contorno della w come della G,

$$(17) \qquad w(P) = \tau \int_S \left\{ \frac{\partial^2[n_{xx}(P')G(P, P')]}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2[n_{xy}(P')G(P, P')]}{\partial \xi \partial \eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2[n_{yy}(P')G(P, P')]}{\partial \eta^2} \right\} w(P')dS' + \pi(P),$$

od anche, tenendo presenti le (8) e (9), l'equazione

$$(18) \qquad w(P) = \tau \int_S L'[G(P, P')]w(P')dS' + \pi(P)$$

che è manifestamente del tipo classico, non omogeneo del FREDHOLM,

$$(19) \qquad w(P) = \tau \int_S K(P, P')w(P')dS' + \pi(P),$$

il nucleo $K = K(P, P')$, *logaritmicamente infinito* per P coincidente con P', essendo dato dal *secondo parametro differenziale autoaggiunto* della seconda funzione di GREEN, preso rispetto alle coordinate di P'.

Ciò posto, in base ai teoremi generali della teoria delle equazioni integrali possiamo affermare che, ove il parametro τ sia distinto da una delle radici $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_k, \ldots$; dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il suo determinante fondamentale, esisterà una ed una sola soluzione della (18); che invece non ne esisterà alcuna se vi è coincidenza con una delle radici suddette, inquantochè le formule risolutive generali danno in tal caso valori infiniti, cioè spostamenti e sforzi incompatibili con la connessione del sistema.

Ed avendosi altresì dalla teoria generale la nozione d'esistenza di soluzioni non nulle (*autofunzioni*) dell'equazione

$$w(P) = \tau \int_S K(P, P') w(P') dS', \qquad K(P, P') = L'[G(P, P')] \tag{20}$$

corrispondentemente alle nominate radici τ_k (cosidette *valori caratteristici* o *autovalori*), resta implicitamente confermata l'esistenza di soluzioni *non nulle* dell'equazione

$$\Delta\Delta w = \tau L(w), \tag{21}$$

quindi, di configurazioni d'equilibrio corrispondenti alle *sole* sollecitazioni piane $\tau_k n_{xx}$, $\tau_k n_{xy}$, $\tau_k n_{yy}$.

Le quali configurazioni tutte, per quanto precede, hanno i caratteri precipui dell'instabilità (l'addizione d'una sollecitazione p, comunque piccola, producendo spostamenti comunque grandi) come già si ebbe a rilevare.

Con ciò sono conseguiti i teoremi d'esistenza come pure, attraverso ai metodi del Fredholm, gli algoritmi risolutivi formali del nostro problema. Per il rigore però fa d'uopo provare che, non solo è possibile (come abbiamo fatto) passare dall'equazione differenziale a quella integrale, ma anche, che è altresì possibile, rifacendo il cammino, pervenire da quest'ultima all'originaria equazione (13). Una tale dimostrazione, come è evidente, si compendia nella verifica dell'esistenza delle quattro prime derivate della w ricavata (in modo qualunque) dalla (19) o (20), a seconda che sia $p = 0 \neq$ da zero.

§ 3. Esistenza delle quattro prime derivate delle soluzioni dell'equazione integrale. Principio d'equivalenza.

Convenendo d'indicare con $R = R(P, P')$ la *singolarità* $r^2(P, P') \lg r(P, P')$ della G, sempre quando convenga metterla in evidenza, cominciamo a dimostrare l'esistenza delle derivate prime.

Derivando sotto il segno integrale, abbiamo dalla (18)

$$\frac{\partial w(P)}{\partial x} = \tau \int_S \frac{\partial}{\partial x} L'[R(P, P')] w(P') dS' + \tau \int_S \frac{\partial}{\partial x} L'[g(P, P')] w(P') dS' + \\ + \int_S \frac{\partial}{\partial x} [R(P, P') + g(P, P')] p(P') dS'.$$

Il primo integrale esiste poichè la funzione $\frac{\partial}{\partial x} L'[R(P, P')]$ diventa infinita d'ordine 1, quindi d'ordine $<$ del numero di dimensioni del campo, com'è richiesto da una condizione d'integrabilità ben nota.

Il secondo termine esiste ed è, diciamolo sin d'ora, derivabile ancora una volta, poichè la g, per definizione, è quattro volte derivabile. Così il terzo ed ultimo termine esiste pur esso ed è, è bene rilevarlo, derivabile ancora tre volte sotto la condizione che la p ammetta una derivata, condizione questa che riteniamo soddisfatta.

Ciò posto, senza considerare più quest'ultimo termine, convenendo d'indicarlo, unitamente ad ogni altro di cui la derivabilità sia manifesta, con . . . , integriamo una volta *per parti* la (14). Sfruttando le (8) e (9) abbiamo

$$w(P) = -\tau \int_S \Lambda'[G(P, P') \cdot w(P')] dS' + \pi(P) \tag{22}$$

dove l'operatore differenziale Λ è definito, considerandolo applicato alle coordinate di P, dall'espressione

$$\Lambda[\varphi, \psi] = n_{xx}(P) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + n_{xy}(P) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + n_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

φ e ψ essendo due generiche funzioni del punto suddetto.

Quest'equazione, *equivalente* alla (20) (in quanto per l'esistenza poc'anzi accertata delle prime derivate è possibile passare indifferentemente dall'una all'altra), ha soluzioni *due volte derivabili.*

Infatti, derivando due volte sotto il segno, ponendo in vista il solo termine contenente la singolarità (che è quello che, per sua natura, può portare a difficoltà), abbiamo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \tau \int_S \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \Lambda'[R(P, P') \cdot w(P')] \} dS' + \ldots.$$

Ora, il termine sotto il segno diventa infinito d'ordine 1, quindi è integrabile, e per conseguenza le soluzioni della (22) sono due volte derivabili come si voleva dimostrare.

Perciò, ponendo l'equazione integrale (18) nella forma intermediaria (22), (il che è legittimo per la provata esistenza delle derivate prime) si riconosce la *doppia* derivabilità delle sue soluzioni, cioè, in particolare, l'*equivalenza* sua con l'equazione integrodifferenziale (15).

Riservandoci di trar partito tra poco del risultato raggiunto, *iteriamo* (sfruttando un accorgimento da PICARD introdotto in analoghe questioni [10]) la (18).

Moltiplicandola secondo la regola per $L[G(P, P'')]dS$, si ha, integrando in tutto S,

$$w(P'') = \tau^2 \int_S \int_S L[G(P, P'')] L'[G(P, P')] w(P') dS dS' + \tau \int_S L[G(P, P'')] \pi(P) dS + \pi(P'')$$

od anche, con evidente trasposizione degli apici,

$$w(P) = \tau^2 \int_S \int_S L''[G(P'', P)] L'[G(P'', P')] w(P') dS' dS'' + \tau \int_S L''[G(P'', P)] \pi(P'') dS + \pi(P).$$

Integrando due volte per parti rimpetto a P', il che sarà possibile sicuramente, poichè siamo certi che esistono le derivate prime e seconde della w, abbiamo

$$w(P) = \tau^2 \int_S \int_S L''[G(P'', P)] G(P'', P') L'[w(P') dS' dS'' + \ldots$$

oppure, spostando (con una successiva doppia integrazione rispetto a P'') l'*operatore* L'' dalla $G(P'', P)$ alla $G(P'', P')$,

$$w(P) = \tau^2 \int_S \int_S G(P'', P) L''[G(P'', P')] L'[w(P')] dS' dS'' + \ldots .$$

Derivando ora rispetto ad x (cioè alle coordinate di P), poichè si ha

$$\frac{\partial R(P, P'')}{\partial x} = - \frac{\partial R(P, P'')}{\partial x''},$$

risulta, ove si metta in evidenza la *singolarità*,

$$\frac{\partial w(P)}{\partial x} = - \tau^2 \int_S \int_S \frac{\partial R(P, P'')}{\partial x''} L''[G(P'', P')] L' w(P') dS' dS'' + \ldots$$

od anche, integrando per parti rispetto a x'',

$$\frac{\partial w(P)}{\partial x} = \tau^2 \int_S \int_S R(P, P'') \frac{\partial}{\partial x''} \{ L''[G(P'', P')] \} L'[w(P')] dS' dS'' + \ldots$$

Tre successive derivazioni danno

$$\frac{\partial^4 w(P)}{\partial x^4} = \tau^2 \int_S\int_S \frac{\partial^3 R(P, P'')}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x''} \{L''[G(P'', P')]\} L'[w(P')] dS' dS'' + \ldots.$$

Una sommaria ispezione porta a riconoscere che tale integrale esiste effettivamente e perciò, ove si osservi che, salvo materiale sostituzione di lettera risultano le derivate rispetto ad y (o quelle miste) resta assolta la quistione sollevata alla fine del precedente paragrafo.

§ 4. Caratterizzazioni qualitative ulteriori.

Dagli sviluppi in serie di τ, ricavabili per la w in base ai teoremi di Fredholm, risulta il carattere suo di funzione *meromorfa*. Passiamo a dimostrare che gli *autovalori* τ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, che ne sono i *poli*, sono tutti *semplici*, *reali* e *positivi*.

Prendendo le mosse dalla (21), procedendo *per assurdo*, supponiamo che un generico *autovalore* τ_k possa esser posto nella forma complessa

$$\tau = \tau' + i\tau'' \qquad (\tau', \tau'' \text{ numeri reali, } i = \sqrt{-1}).$$

Poichè si dovrà avere in conformità

$$w = w' + iw'' \qquad (w', w'' \text{ funzioni reali di } P)$$

risulta dalla (21), eguagliando tra loro le parti reali rispettivamente quelle immaginarie,

$$\Delta\Delta w' = \tau' L(w') - \tau'' L(w''), \tag{23}$$

$$\Delta\Delta w'' = \tau'' L(w') + \tau' L(w''). \tag{24}$$

Moltiplicando la (23) per $w'' dS$, la (24) per $w' dS$, integrando e sottraendo si ottiene

$$\int_S (w''\Delta\Delta w' - w'\Delta\Delta w'') dS = \tau' \int_S \{w'' L(w') - w' L(w'')\} dS - \\ - \tau'' \int_S \{w'' L(w'') + w' L(w')\} dS. \tag{25}$$

Ora, dalla formula di GREEN generalizzata

$$(26) \qquad \int_S (w'\Delta\Delta w'' - w''\Delta\Delta w')dS = \int_\sigma \left(\Delta w' \frac{\partial w''}{\partial n} - \Delta w'' \frac{\partial w'}{\partial n}\right) d\sigma + \\ + \int_\sigma \left(w' \frac{\partial(\Delta w'')}{\partial n} - w'' \frac{\partial(\Delta w')}{\partial n}\right) \partial\sigma,$$

si ha, come è facile provare

$$(27) \qquad \int_S (w'\Delta\Delta w'' - w''\Delta\Delta w')dS = \int_\sigma \left(\mathfrak{D}(w') \frac{\partial w''}{\partial n} - \mathfrak{D}(w'') \frac{\partial w'}{\partial n}\right) d\sigma + \\ + \int_\sigma (w' D(w'') - w'' D(w'))d\sigma$$

essendo $\mathfrak{D}$ l'*operatore* già definito a § 1 e D l'*operatore*

$$D = \frac{\partial}{\partial n}[\Delta] + \nu \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial n}\right],$$

dove t designa la direzione tangente a σ.

Quindi, per le condizioni (3) o (4), in ogni caso, al posto della (27),

$$(28) \qquad \int_S (w'\Delta\Delta w'' - w''\Delta\Delta w')dS = 0.$$

D'altra parte, poichè la w' come la w'' s'annulla al contorno, si avrà dalla (25)

$$(29) \qquad \int \{w' L(w'') - w'' L(w')\} dS = 0$$

ed infine, per definizioni fatte,

$$(30) \qquad \int w L(w) dS = -\int_S \left\{ n_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2n_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + n_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS > 0$$

con w eguale w' o w''.

Risulta perciò al posto della (25), la relazione $\tau'' \cdot \boldsymbol{L} = 0$ ($\boldsymbol{L}$ = quantità non nulla) la quale non potrà esser soddisfatta che per $\tau'' = 0$.

Dimostriamo infine che, per le premesse fatte, gli *autovalori* τ son tutti *positivi*. All'uopo moltiplichiamo la (14), senza termine perturbante, per $L(w)$

ed integriamo su tutto S. Risulta allora

$$(31)\qquad \int_S w(P)Lw(P)dS = \tau\int_S\int_S G(P,\ P')L'[w(P')]L[w(P)]dSdS'.$$

Quindi, ove si osservi che la G è tale che, data una qualunque funzione Φ di P si ha

$$(32)\qquad \int_S\int_S G(P,\ P')\Phi(P)\Phi(P')dSdS' > 0;\ ^{*)}$$

---

*) Per dimostrare che effettivamente tale disuguaglianza (32) è soddisfatta, consideriamo nel campo S l'equazione

$$(^*)\qquad \Delta\Delta w = \psi,$$

con le condizioni al contorno fornite da una delle coppie 3) o 4).

Se la $\psi = \psi(P)$ è una funzione arbitraria dei punti P di S (come vogliamo supporre) ma tale da soddisfare alle condizioni, poco restrittive del resto, che danno i limiti d'applicabilità della formula di LAURICELLA, avremo, con le notazioni solite

$$(^{**})\qquad w(P) = \int_S G(P,\ P')\psi(P')dS'.$$

Moltiplicando allora questa espressione di $w(P)$ per $\psi(P)dS$, l'integrazione estesa a tutto S dà

$$\int_S w(P)\Delta\Delta w(P)dS = \int_S\int_S G(P,\ P')\psi(P)\psi(P')dSdS'.$$

La dimostrazione della (32) è con ciò ricondotta a provare che, ove la $w = w(P)$ soddisfi alle condizioni 3) o 4) (come effettivamente avviene se la G sotto il doppio segno integrale s'identifica con una delle due funzioni di GREEN considerate) si ha in ogni caso

$$(^{***})\qquad \int_S w\Delta\Delta w dS > 0.$$

Ciò risulta senza notevole difficoltà sfruttando con lievi modifiche una celebre formula da KIRCHOFF trovata ed adottata per primo in un campo di questioni prossime a quelle che ci riguardano.

Detta formula, per il nostro scopo, si può scrivere nella forma

$$\int_S w\Delta\Delta w dS - \int_\sigma w\left\{\frac{\partial\Delta w}{\partial n} + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial t}\left[\cos\delta\ \mathrm{sen}\,\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\delta - \mathrm{sen}^2\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\right\}d\sigma +$$

$$+\int_\sigma \frac{\partial w}{\partial n}\left\{\nu\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right\}d\sigma = \int_S\left\{\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2 + \frac{2\nu}{\rho_1\rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2\right\}dS,$$

per la (30), assimilando la Φ con la $L[w(P)]$, si ottiene necessariamente $\tau > 0$, come volevamo provare.

Riguardiamo ora la w come funzione di τ, sotto forma dl sviluppo in serie di potenze del tipo

$$w = w_0 + w_1\tau + w_2\tau^2 + \dots + w_m\tau^m + \dots \tag{33}$$

con w_m $(m=0, 1, 2,\dots;)$ coefficienti (funzioni di P) da determinare.

Sostituendo nella (21) ricaviamo lo schema algoritmico

$$\Delta\Delta w_0 = 0 \tag{34}$$

e

$$\Delta\Delta w_m = L(w_{m-1}) \qquad \text{per } m > 1 \tag{35}$$

con le condizioni al contorno fornite (per la (35)) da una delle coppie (3) o (4).

Rilevando l'*equivalenza* della formula generica (35) con le

$$w_m(P) = \int_S L'[G(P, P')]w_{m-1}(P')dS' \tag{36}$$

oppure

$$w_m(P) = \int_S G(P, P')L'[w_{m-1}(P')]dS', \tag{37}$$

passiamo a dimostrare che la serie (33), che sappiamo essere *meromorfa* in base ai teoremi di FREDHOLM, possiede soli *poli semplici*, come annunciamo.

Supponiamo all'uopo che esista un *polo* τ_k d'ordine r per $r > 1$. Si avrà, sviluppando in un intorno convenientemente vicino,

$$w(P) = \frac{v_r(r)}{(\tau - \tau_k)^r} + \frac{v_{r-1}(P)}{(\tau - \tau_k)^{r-1}} + \dots \tag{38}$$

---

essendo ρ_1 e ρ_2 le *curvature principali* della superficie $w = w(P)$ e δ l'angolo che la normale esterna n fa con l'asse x.

Sfruttando in definitiva le condizioni limiti 3) o 4), si ha

$$\int_S w\Delta\Delta w dS = \int_S \left\{ \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2 + \frac{2\nu}{\rho_1\rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2 \right\} dS.$$

Si riconosce ora in modo immediato che, se $\nu < 1$, la funzione integranda del termine a destra, riguardata come *forma quadratica* nelle variabili $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, sarà senz'altro *positiva.* Poichè effettivamente, per necessità ben note, la costante ν è, per ogni materiale, minore dell'unità, resta conseguita la giustificazione della (**).

$v_r, v_{r-1}, \ldots$ essendo funzioni di P che si sanno calcolare. Infatti, sostituendo nella (21), prendendo i termini in $\frac{1}{(\tau-\tau_k)^r}$ e $\frac{1}{(\tau-\tau_k)^{r-1}}$ risulta

(39) $$\Delta\Delta v_r = \tau_k L(v_r)$$

e

(39^a) $$\Delta\Delta v_{r-1} = \tau_k L(v_{r-1}) + L(v_r)$$

con le solite condizioni ai limiti (3) oppure (4).

Moltiplicando la (39) per $v_{r-1}dG$, la (39^a) per $v_r dS$, ove si integri in tutto S e si sottraggano una dall'altra le equazioni che risultano, si ricava

$$\int_S (v_{r-1}\Delta\Delta v_r - v_r\Delta\Delta v_{r-1})dS = \tau_k\int_S (v_{r-1}L(v_r) - v_r L(v_{r-1}))dS + \int_S v_r L(v_r)dS.$$

Ricordando alcune trasformazioni ed eguaglianze già adottate (le (26), (27), (28)), si ottiene

$$\int_S \left\{ n_{xx}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)^2 + 2n_{xy}\frac{\partial v_r}{\partial x}\frac{\partial v_r}{\partial y} + n_{yy}\left(\frac{\partial v_r}{\partial y}\right)^2 \right\} dS = 0.$$

Perchè tale integrale si annulli è necessario che identicamente si annullino in tutto il campo le derivate $\frac{\partial v_r}{\partial x}$, $\frac{\partial v_r}{\partial y}$, poichè, come si ebbe a rilevare, la funzione sotto il segno è, per ipotesi, in ogni caso differente da zero.

Ma al contorno σ, si adotti la coppia di condizioni (3) o la coppia (4), la v_r deve annullarsi. Perciò si avrà in conformità, $v_r = 0$ in tutto S.

Tale procedimento essendo naturalmente valido per ogni r *intero* superiore all'unità, porta a riconoscere che effettivamente la w non può avere che *poli semplici*.

Concludendo, osserveremo che il Boggio ([12]) ebbe già a rilevare, adducendo esempi assai cospicui dalla teoria dell'elasticità, del calore e dell'elettromagnetismo, che in generale, ove le funzioni che soddisfano alle equazioni delle corrispondenti teorie, abbiano, per rispetto ad un parametro, dei *poli*, questi, necessariamente, debbono essere *semplici*.

§ 5. **Introduzione delle costanti di Schwarz.**

Conseguite le caratterizzazioni qualitative delle soluzioni del nostro problema, resta a vedere come queste possano ottenersi evitando le formule generali del Fredholm, di costruzione estremamente complessa nel caso nostro.

Ci proponiamo di trar partito del metodo universale e fecondo delle *approssimazioni successive.* All'uopo ci informiamo alle direttive fondamentali di SCHWARZ e PICARD e per quanto riguarda sia l'impostazione algoritmica sia la sua giustificazione.

Riattaccandoci allo sviluppo (33) del precedente paragrafo, fissando l'attenzione su due coefficienti generici w_m, w_n formiamo gl'integrali

$$W_{m,n} = \int_S L(w_m) \cdot w_n dS, \qquad (m, n, = 0, 1, \ldots), \tag{40}$$

che, per certe loro proprietà di comportamento, chiameremo brevemente: *costanti di Schwarz.*

Relativamente a queste costanti passiamo a dimostrare alcune proprietà importanti.

a) Si ha in tutto il campo

$$W_{m,n} = W_{n,m}, \tag{41}$$

Infatti, integrando la (40) due volte per parti, sfruttando le (8) e (9) si ottiene *)

$$\int_S L(w_m) \cdot w_n dS = \int_S w_m L(w_n) dS.$$

vale a dire $W_{m,n} = W_{n,m}$.

b) Il valore di $W_{m,n}$ è dipendente dalla somma $m + n$, *non* dai particolari valori di m ed n. Vale a dire, indicato con μ un numero intero $< m$, $< n$, si ha

$$W_{m,n} = W_{m-\mu, n+\mu} = W_{m+\mu, n-\mu} = W_{m+n}. \tag{42}$$

Infatti, esplicitando nella (40) la funzione w_m pel tramite della formula ricorrente (37^a), si ottiene

$$W_{m,n} = \int_S L(w_n) w_m dS = \int_S \int_S L[w_n(P)] L'[G(P, P')] w_{m-1}(P') dS dS' =$$

$$= \int_S \int_S L[w_n(P)] G(P, P') L'[w_{m-1}(P')] dS dS' =$$

$$= \int_S w_{n+1}(P') L[w_{m-1}(P')] dS' = W_{m-1, n+1},$$

*) Posto che la w_0, ricavata dalla (34), sia nulla al contorno

e quindi, ripetendo μ volte la stessa operazione, la relazione (42) che si voleva provare.

§ 6. Costruzione della prima autofunzione e del primo autovalore.

Essendo, per quanto precede, lecito adottare un indice solo nella costante W, poniamo m, il primo *autovalore* τ_1 e la corrispondente *autofunzione*, che indicheremo con $w^{(1)}$, è fornito dalla relazione *limiti*

$$\lim_{m=\infty} \frac{W_{m-1}}{W_m} = \tau_1 \tag{42}$$

$$\lim_{m=\infty} [\tau_1{}^m w_m] = w^{(1)}. \tag{43}$$

§ 7. Esistenza effettiva dei limiti (42), (43).

Per giustificare le nominate relazioni introduciamo i rapporti

$$\rho_m = \frac{W_m}{W_{m-1}}. \qquad (m = 1, 2, \ldots;). \tag{44}$$

Faremo vedere anzitutto ch'essi soddisfano alle *disuguaglianze* fondamentali

$$\frac{W_m}{W_{m-1}} > \frac{W_{m-1}}{W_{m-2}} > \frac{W_{m-2}}{W_{m-3}} > \ldots . \tag{45}$$

Introduciamo all'uopo l'integrale *positivo*

$$I = -\iint_S \left\{ n_{xx} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\alpha w_m + \beta w_n) \right]^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha w_m + \beta w_n) \frac{\partial}{\partial y} (\alpha w_m + \beta w_n) + \right.$$
$$\left. + n_{yy} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\alpha w_m + \beta w_n) \right]^2 \right\} dS > 0, \tag{46}$$

con α e β costanti qualunque.

Ove si osservi che si ha identicamente, poichè tutte le w si annullano al contorno

$$W_{2m} = W_{m,m} = \int_S w_m L(w_m) dS = -\int_S \left\{ n_{xx}\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + 2n_{xy}\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + n_{yy}\left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right)^2 \right\} dS,$$

$$W_{m,n} = \int_S w_m L(w_n) dS = -\int_S \left\{ n_{xx}\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right) + n_{xy}\left[\frac{\partial w_m}{\partial x}\frac{\partial w_n}{\partial y} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial w_m}{\partial y}\frac{\partial w_n}{\partial x}\right] + n_{yy}\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right) \right\} dS,$$

$$W_{2n} = W_{n,n} = \int_S w_n L(w_n) dS = -\int_S \left\{ n_{xx}\left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2 + 2n_{xy}\left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right) + n_{yy}\left(\frac{\partial w_n}{\partial y}\right)^2 \right\} dS;$$

risulta al posto della (46), eseguendo materialmente le operazioni,

$$I = \alpha^2 W_{2m} + 2\alpha\beta W_{m,n} + \beta^2 W_{2n} > 0, \tag{47}$$

che per costruzione è una forma quadratica *positiva* e *definita* nelle α e β.

Si ha quindi

$$W_{2m} W_{2n} - W_{m,n} > 0 \tag{48}$$

od anche, per $n = m + 1$,

$$\frac{W_{2m}}{W_{2m+1}} > \frac{W_{2m+1}}{W_{2m+2}}. \tag{49}$$

Ciò posto, introduciamo, sfruttando la (32), l'integrale *positivo*

$$J = \int_S\int_S G(P, P')\{\alpha L[w_m(P)] + \beta L[w_{m-1}(P)]\}\{\alpha L'[w_m(P')] + \beta L'[w_{m-1}(P')]\} dS dS' \tag{50}$$

con α e β costanti da riguardare alla stregua di prima.

Eseguendo materialmente le operazioni, ove si osservi che, per le (37), valgono le relazioni

$$W_{2m+1} = W_{m,\,m+1} = \int_S w_{(m+1)} L(w_m) dS = \int_S\int_S G(P, P') / [w_m(P)] L'[w_m(P')] dS dS',$$

$$W_{2m} = W_{m,\,m} = \int_S w_m L(w_m) dS = \int_S\int_S G(P, P') L[w_m(P)] L'[w_{m-1}(P')] dS dS',$$

$$W_{2m-1} = W_{m,\,m-1} = \int_S w_m L(w_{m-1}) dS = \int_S\int_S G(P, P') L[w_{m-1}(P)] L'[w_{m-1}(P')] dS dS',$$

si ottiene

$$J = \alpha^2 W_{2m+1} + 2\alpha\beta W_{2m} + \beta^2 W_{2m-1} > 0.$$

Potremo perciò esprimere tale disuguaglianza nella forma

$$W_{2m+1} W_{2m-1} - W_{2m}^2 > 0, \tag{51}$$

oppure

$$\frac{W_{2m+1}}{W_{2m}} > \frac{W_{2m}}{W_{2m-1}} > \frac{W_{2m-1}}{W_{2m-2}} > \dots . \tag{52}$$

Associando queste relazioni (52) alle (49) restano manifestamente provate le (45). Quindi i valori ρ_m, in conformità con le (45), *crescono* con m. Comunque però, essi tendono ad un limite *finito*. Ciò risulta osservando che altrimenti, la serie

$$W_0 + W_1\tau + W_2\tau^2 + \dots + W_m\tau^m + \dots \tag{53}$$

non convergerebbe che per il valore banale $\tau = 0$, il che porterebbe a dichiarare *divergente* per ogni valore non nullo di τ la serie

$$w_0 + w_1\tau + w_2\tau^2 + \dots + w_m\tau^m + \dots,$$

in contrarietà con i teoremi di FREDHOLM.

Si avrà dunque necessariamente

$$\lim_{m=\infty} \frac{W_{m+1}}{W_m} = \rho_1 \qquad (\rho_1 = \text{quantità finita non nulla}). \tag{54}$$

Dimostreremo ora, che $\frac{1}{\rho}$ è il *raggio di convergenza* della serie (35) e, per quanto precede, il primo autovalore τ_1.

All'uopo cerchiamo di costruire una disuguaglianza che colleghi la generica w_m dello sviluppo di w alla generica costante W_m.

Poniamo nella (46) la $G(P, P')$ al posto della w_n (con P' fisso) ed in essa dividiamo la w_m per $\sqrt{W_{2m}}$. Otteniamo allora, integrando per parti, ancora indicando con I l'espressione che ne risulta, con Λ l'*operatore* definito dalla (28)

$$I = \alpha_2 \frac{W_{2m}}{W_{2m}} - \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{W_2}} \int_S \Lambda[w_m(P), G(P, P')] dS + \tag{55}$$

$$- \beta^2 \int_S \left\{ n_{xx} \left[\frac{\partial G(P, P')}{\partial x}\right]^2 + 2n_{x,y} \frac{\partial G(P, P')}{\partial x} \frac{\partial G(P, P')}{\partial y} + n_{yy} \left[\frac{\partial G(P, P')}{\partial y}\right]^2 \right\} dS > 0.$$

Avendosi però con una ulteriore integrazione per parti, (ove si ricordi l'algoritmo costruttivo fornito dalla (37))

$$-\int_S \Lambda[w_m(P),\ G(P,P')]dS = \int_S L[G(P,P')]w_m(P)dS = w_{m+1}(P'),$$

potremo scrivere, poichè è $I > 0$, indicando con $\Omega(P')$ il coefficiente di β^2 nella (55),

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta \frac{w_{m+1}(P')}{\sqrt{W_{2m}}} + \beta^2\Omega(P') > 0,$$

e quindi, coi soliti criteri

(56) $$\frac{w_{m+1}^2(P')}{W_{2m}} < \Omega(P').$$

Osservando poi, che per essere $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_m$, si ha

$$\frac{W_{2m+2}}{W_{2m}} = \frac{W_{2m+2}}{W_{2m+1}} \cdot \frac{W_{2m+1}}{W_{2m}} = \rho_{2m+2} \cdot \rho_{2m-1} > \rho_1^2$$

e perciò

$$W_{2m+2} > \rho_1^2 W_{2m};$$

ponendo eguale ad Ω il limite superiore (*positivo* per premessa) di $\Omega(P')$, potremo anche scrivere la disuguaglianza (56) nella forma

$$w_{m+1} < \frac{\sqrt{\Omega}}{\rho_1}\sqrt{W_{2m+2}},$$

oppure, sostituendo m ad $m+1$,

(57) $$w_m < K\sqrt{W_{2m}} \qquad \left(K = \frac{\sqrt{\Omega}}{\rho_1}\right).$$

Dal fatto che il rapporto $\frac{w_m}{\sqrt{W_{2m}}}$ non supera mai, qualunque sia m, una costante finita K, scende, seguendo un criterio di convergenza dovuto a SCHWARZ, che la serie per la w, converge *assolutamente* ed *uniformemente* in tutto S per ogni valore di τ inferiore a $\frac{1}{\rho_1}$, e quindi che $\tau = \tau_1 = \frac{1}{\rho_1}$ ne è precisamente il *raggio di convergenza*.

Infatti, la serie

$$K(\sqrt{W_0} + \tau\sqrt{W_2} + \dots \tau^m\sqrt{W_{2m}}),$$

maggiorante della (33) converge per $\tau < \frac{1}{\rho_1}$, come risulta osservando che il quoziente tra due termini successivi

$$\frac{\tau^m \sqrt{W_{2m}}}{\tau^{m-1}\sqrt{W_{2m-2}}} = \tau \sqrt{\frac{W_{2m}}{W_{2m-1}} \frac{W_{2m-1}}{W_{2m}}} = \tau\sqrt{\rho_{2m-1}\cdot\rho_{2m}}$$

ha per limite (per $m = \infty$) il valore $\rho\tau$.

Per dimostrare la (43), osserviamo che il punto $\tau_1 = \frac{1}{\rho_1}$ dev'essere necessariamente un *polo semplice*.

Quindi in un suo intorno sarà legittimo lo sviluppo del tipo

$$w(P) = \frac{w'(P)}{1 - \frac{\tau}{\tau_1}} + v_0(P) + v_1(P)\cdot\tau + \ldots + v_m(P)\cdot\tau^m + \ldots, \tag{58}$$

$w' = w'(P)$ essendo il *residuo del polo*; v_0, v_1,... v_m; essendo funzioni determinabili di P.

Confrontando questo sviluppo con l'originario (35), si ottiene senz'altro

$$w_m(P) = v_m(P) + \frac{w'(P)}{\tau_1{}^m}, \tag{59}$$

e dunque ovviamente

$$\lim_{m=\infty} w_m \tau_1{}^m = w'.$$

Introducendo la (58) nell'equazione (20), eguagliando i coefficienti delle potenze eguali si trova

$$w' = \tau_1 \int_S L'[G(P, P')]w'(P')dS \tag{60}$$

ed il sistema *ricorrente* per la formazione delle v

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 = \tau \int_S L'[G(P, P')]w'(P')dS', \\ v_1 = \int_S L'[G(P, P')]v_0(P')dS', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_m = \int_S L'[G(P, P')]v_{m-1}(P')dS'. \end{array}\right. \tag{61}$$

Ora la (60) è proprio l' equazione di cui si cercava la soluzione, la w' la soddisfa *identicamente*, come pure soddisfa alle condizioni al contorno. Si avrà quindi $w' = w^{(1)}$, cioè l' identità tra la (59) e la (43), ed infine $\frac{1}{\rho_1} = \tau_1$, come si voleva dimostrare.

Ciò posto formiamo con le v testè definite, poichè ne è assicurata la derivabilità, le costanti positive

$$W'_{m+n} = \int_S L(v_m) v_n dS.$$

Si avranno ancora le disuguaglianze

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \dots < \frac{W'_n}{W'_{n-1}} < \dots$$

dalle quali si conclude l' esistenza d' un limite finito ρ_2 del rapporto

$$\frac{W'_n}{W'_{n-1}}.$$

Che se ciò non avvenisse, sarebbe necessariamente *divergente* la serie

$$v_0 + v_1\tau + \dots + v_n\tau^n + \dots,$$

la quale però, converge anche al di là di τ_1.

Della disuguaglianza, analoga alla (57)

$$|v_n(P)| < K'\sqrt{W'_{2n}}$$

che si stabilisce nel modo identico al precedente, resta provata i' identità del *cerchio di convergenza* delle due serie

$$v_0 + v_1\tau + \dots + v_n\tau^n + \dots,$$

e

$$W'_0 + \dots W'_1\tau + \dots + W'_n\tau^n + \dots.$$

Con ciò si arriva al secondo polo $\tau_2 = \frac{1}{\rho_2}$.

In conformità, ove si osservi che in un intorno conveniente di τ_2 si dovrà avere

$$w = \frac{v}{1 - \frac{\tau}{\tau_2}} + u_0 + u_1 + \dots u_m\tau^m + \dots,$$

da un confronto con l'originario sviluppo

$$v_0 + v_1\tau + \dots + v_n\tau^n + \dots,$$

risulta la relazione analoga alla (59)

$$v' = u_m + \frac{v_m}{\tau_2{}^m}$$

e quindi

$$v' = \lim_{m=\infty} \tau_2{}^m v_m .$$

Una tale funzione soddisfa alla (25) e quindi alla (26) nonchè rispetta le condizioni al contorno. Perciò essa s'identifica come integrale relativo all'autovalore τ_2, quindi come *seconda autofunzione* $w^{(2)}$.

Procedendo così di seguito, sulle tracce segnate da PICARD, si dimostra l'esistenza di tutti gli autovalori, di cui l'insieme, chiameremo *spettro relativo alla specifica sollecitazione* n, e delle corrispondenti soluzioni o *autofunzioni* caratterizzanti le configurazioni (instabili) d'equilibrio.

Riservando ad una eventuale prossima ricerca la prosecuzione dell'analisi fatta per quanto concerne lo studio dell'*equazione associata* alla (20), il comportamento *asintotico* degli *autovalori* τ_k, la loro dipendenza funzionale dal contorno ecc., rileveremo, concludendo, che il metodo di approssimazioni successive ora assegnato può riguardarsi come una estensione di un accorgimento (VIANELLO) assai noto e validamente usato dai pratici nel calcolo del (primo) *carico critico* di aste, colonne, ecc. soggette a *flessopressione*.

NOTA BIBLIOGRAFICA

(1) Cfr. p. e. A. NÀDAI: *Elastische Platten.* (Berlin, Springer, 1925) pp. 231-234.

(2) G. KRALL: *Intorno alle condizioni di stabilità dell'equilibrio elastico.* Rendiconti Acc. Lincei, vol. III, serie 6ª, pp. 744-749 (1926).

(3) A. NÀDAI: Op. cit., pp. 19-22.

(4) T. BOGGIO: *Sull'equilibrio delle piastre incastrate.* Rend. Acc. Lincei, vol. X, serie 5ª, (1901), pp. 199-205; *Sulle funzioni di Green d'ordine* m. Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XX, pp. 1-39 (1905); R. MARCOLONGO: *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici.* (Milano, Hoepli, 1904) pp. 1-54.

(5) I. HADAMARD: *Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires.* Ann. de l'École Normale, 3ª serie, t. XVIII (1901); *Le Problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques encastrées.* Mémoires de l'Ac. des Sciences, t. XXXIII.

(6) A. Nàdai: Op. cit., pp. 222-225.

(7) Cfr. p. e. Bianchi: *Lezioni di Geometria analitica.* (Pisa, Spoerri, 1915) Appendice.

(8) A. Nàdai: Op. cit., pp. 232-236.

(9) Cfr. p. e. G. Vivanti: *Teoria delle equazioni integrali lineari.* (Milano, Hoepli, 1916) pp. 121-154.

(10) H. A. Schwarz: *Gesammelte Mathematische Abhandtungen.* Erster Band. (Berlin, Springer 1890) pp. 241-269; É. Picard: *Sur quelques applications de l'équation de M. Fredholm.* Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXII (1906) pp. 241-259; *Traité d'Analyse.* Tome III. (Paris, Gauthier-Villars, 1908) pp. 100-128.

(11) R. Marcolongo: Op. cit., p. 17.

(12) T. Boggio: *Sopra alcuni teoremi di fisica matematica.* Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908).

Roma, gennaio 1927.

Sulla integrazione delle equazioni differenziali lineari di secondo ordine a coefficienti variabili (*).

† Memoria dell'ing. NICOLA AMOROSO (Napoli).

---

1. Abbiasi l'equazione differenziale lineare di secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\frac{dx}{dt} + f_2 x + f_3 = 0, \tag{1}$$

nella quale f_1, f_2, f_3 sono funzioni della variabile t.

Indicando con u_1 ed u_2 le radici dell'equazioue:

$$u^2 + \varphi_1 u + \varphi_2 = 0 \tag{2}$$

ci proponiamo di determinare quali funzioni di t devono essere le φ_1 e φ_2, perchè:

$$x = u_1{}^n + u_2{}^n \tag{3}$$

rappresenti un integrale particolare della equazione (1).

Derivando due volte la (3) rispetto a t, si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\frac{dx}{dt} &= u_1{}^{n-1}\frac{du_1}{dt} + u_2{}^{n-1}\frac{du_2}{dt} \\
\frac{1}{n}\frac{d^2x}{dt^2} &= (n-1)\left[u_1{}^{n-2}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + u_2{}^{n-2}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad + u_1{}^{n-1}\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_2{}^{n-1}\frac{d^2u_2}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

(*) Passato il periodo eroico dell'indirizzo funzionale nel campo delle equazioni differenziali, noi ci convinciamo ogni giorno di più che quell'indirizzo ci consente, sì, di risolvere pienamente, in astratto, i problemi generali, ma si rivela molte volte praticamente inefficace quando dal generale si passa al particolare, e si vuole individuare numericamente un integrale particolare che corrisponda a determinate condizioni iniziali, in quanto esso non si presta ad applicazioni numeriche immediate.

Il metodo del fu ing. NICOLA AMOROSO contenuto in questa Memoria, e che si riferisce ad una particolare classe di equazioni, consente invece di giungere elegantemente, in alcuni casi, a tali applicazioni. E per questo il suo carattere diventa particolarmente di attualità oggi, in cui tutta una nuova corrente di studi nell'Analisi matematica — per opera di RUNGE, WHITTAKER, RITZ, ecc. — si indirizza appunto verso tali applicazioni.

(Nota del prof. M. PICONE).

Le derivate delle funzioni u rispetto a t si ottengono derivando l'equazione (2), e poi sostituendo ad u, prima u_1 e poi u_2; eseguendo tali operazioni, si ricaverà:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}}{2u + \varphi_1}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \left(2\frac{d\varphi_2}{dt} - \varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}\right)\frac{du}{dt} + \frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}}{(2u + \varphi_1)^2} - \frac{u\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}}{2u + \varphi_1}.$$

Sostituendo ad u prima u_1 e poi u_2, ed osservando che:

$$u_1 = -\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\varphi_1^2 - 4\varphi_2}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\varphi_1^2 - 4\varphi_2},$$

si otterrà:

$$u_1^{\,n-1}\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_2^{\,n-1}\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{2\frac{d\varphi_2}{dt} - \varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}}{n(\varphi_1^2 - 4\varphi_2)}\frac{dx}{dt} + \frac{x\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}(u_1^{\,n-1} + u_2^{\,n-1})}{\varphi_1^2 - 4\varphi_2}$$

$$-\left[u_1^{\,n-1}\frac{u_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}}{2u_1 + \varphi_1} + u_2^{\,n-1}\frac{u_2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}}{2u_2 + \varphi_1}\right].$$

L'ultimo termine nella parentesi, prescindendo dal segno negativo, può esprimersi così:

$$\frac{1}{\varphi_1^2 - 4\varphi_2}\left\{(2u_1 + \varphi_1)\left(u_1^{\,n}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + u_1^{\,n-1}\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}\right) + (2u_2 + \varphi_1)\left(u_2^{\,n}\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + u_2^{\,n-1}\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\varphi_1^2 - 4\varphi_2}\left\{2(u_1^{\,n+1} + u_2^{\,n+1})\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \varphi_1 x\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + 2x\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + (u_1^{\,n-1} + u_2^{\,n-1})\varphi_1\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}\right\}.$$

La formula di NEWTON sulle somme delle potenze simili delle radici, applicata all'equazione (2), darà:

$$u_1^{\,n+1} + u_2^{\,n+1} + \varphi_1 x + \varphi_2(u_1^{\,n-1} + u_2^{\,n-1}) = 0$$

dalla quale:

$$u_1^{\,n+1} + u_2^{\,n+1} = -\varphi_1 x - \varphi_2(u_1^{\,n-1} + u_2^{\,n-1})$$

per cui, sostituendo, l'ultima espressione differenziale diventerà:

$$\frac{1}{\varphi_1^2-4\varphi_2}\left\{\left(2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}-\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right)x+(u_1^{\,n-1}+u_2^{\,n-1})\left(\varphi_1\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}-2\varphi_2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right)\right\}$$

e quindi:

$$(5)\qquad \begin{aligned} u_1^{\,n-1}\frac{d^2u_1}{dt^2}+u_2^{\,n-1}\frac{d^2u_2}{dt^2}=\frac{1}{\varphi_1^2-4\varphi_2}&\left\{\left(2\frac{d\varphi_2}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}\right)\frac{1}{n}\frac{dx}{dt}+\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2+\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}-2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}\right]x\right.\\ &\left.+(u_1^{\,n-1}+u_2^{\,n-1})\left(2\varphi_2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}-\varphi_1\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}+\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Con un metodo analogo otterremo:

$$(6)\qquad \begin{aligned} u_1^{\,n-2}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2+u_2^{\,n-2}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2&=u_1^{\,n-2}\frac{\left(u_1\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2}{(2u_1+\varphi_1)^2}+u_2\frac{\left(u_2\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{d\varphi_2}{dt}\right)}{(2u_2+\varphi_1)^2}\\ &=\frac{1}{\varphi_1^2-4\varphi_2}\left\{\left[u_1^2\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2+2u_1\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}\right]u_1^{\,n-2}\right.\\ &\qquad\left.+\left[u_2^2\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2+2u_2\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}\right]u_2^{\,n-2}\right\}\\ &=\frac{1}{\varphi_2-4\varphi_2}\left\{x\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2+(u_1^{\,n-2}+u_2^{\,n-2})\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2+2(u_1^{\,n-1}+u_2^{\,n-1})\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}\right\}\\ &=\frac{1}{\varphi_2-4\varphi_2}\left\{\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2-\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right]x-\left[\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2-2\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}\right](u_1^{\,n-1}+u_2^{\,n-1})\right\}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4) i valori (5) e (6), ricaveremo:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^2-4\varphi_2}{n}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{n}&\left(2\frac{d\varphi_2}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}\right)\frac{dx}{dt}+\left[n\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2+\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}-2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}-\frac{n-1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right]x\\ &+\left\{(2n-1)\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt}+2\varphi_2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}-\varphi_1\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}-(n-1)\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi^2}{dt}\right)^2\right\}(u_1^{\,n-1}+u_2^{\,n-1}). \end{aligned}$$

Per semplificare le formule, mettiamo:

$$\varphi_1^2-4\varphi_2=z$$

per cui sarà:

$$2\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}-4\frac{d\varphi_2}{dt}=\frac{dz}{dt},$$

$$2\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}+2\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2-4\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

l'equazione ultima diventerà perciò:

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\frac{z}{n}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2n}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}-\left\{\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}+(n-1)\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2-\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi^2}{dt}\right)^2\right]\right\}x=\lambda(u_1{}^{n-1}+u_2{}^{n-1})$$

avendo chiamato con λ il coefficiente di $u_1{}^{n-1}+u_2{}^{n-1}$ dell'ultima equazione.

La determinazione del secondo membro dell'equazione (7) si otterrà osservando che:

$$u_1-u_2=(\varphi_1^2-4\varphi_2)^{\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}$$

per cui la prima derivata dall'equazione (3) potrà scriversi:

$$\frac{1}{n}\frac{dx}{dt}=(u_1{}^{n-1}+u_2{}^{n-1})\frac{du_1}{dt}-\frac{1}{2z^{\frac{1}{2}}}u_2{}^{n-1}\frac{dz}{dt}$$

la quale darà:

$$u_1{}^{n-1}+u_2{}^{n-1}=-\frac{\dfrac{1}{n}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{2z^{\frac{1}{2}}}u_2{}^{n-1}\dfrac{dz}{dt}}{u_1\dfrac{d\varphi_1}{dt}+\dfrac{d\varphi_2}{dt}}z^{\frac{1}{2}}$$

Mettendo ora:

$$(8)\qquad \theta=\frac{\lambda}{u_1\dfrac{d\varphi_1}{dt}+\dfrac{d\varphi_2}{dt}}=\frac{(2n-1)\dfrac{d\varphi_1}{dt}\dfrac{d\varphi_2}{dt}+2\varphi_2\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2}-\varphi_1\dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2}-(n-1)\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(\dfrac{d\varphi_2}{dt}\right)^2}{u_1\dfrac{d\varphi_1}{dt}+\dfrac{d\varphi_2}{dt}}$$

l'equazione (7) si trasformerà nell'altra:

$$(9)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{1}{2z}\frac{dz}{dt}+\frac{\theta}{\sqrt{z}}\right)\frac{dx}{dt}-\left\{\frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{n(n-1)}{z}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2-\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right]\right\}x+\frac{n}{2z}\theta u_2{}^{n-1}\frac{dz}{dt}=0$$

la quale, paragonata con la (1), darà finalmente:

$$(10)\qquad \begin{aligned} f_1&=\frac{1}{2z}\frac{dz}{dt}+\frac{\theta}{\sqrt{z}}\\ -f_2&=\left\{\frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{n(n-1)}{z}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2-\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right]\right\}\\ f_3&=\frac{n}{2z}\theta u_2{}^{n-1}\frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Queste tre relazioni, assieme all'altra:

$$\varphi_1^2-4\varphi_2=z$$

potranno determinare quali funzioni di f_1, f_2, f_3 siano le φ_1, φ_2 e z, e quale relazione deve sussistere fra i coefficienti f_1, f_2, f_3 della (1) perchè la (3) sia un suo integrale particolare.

2. La risoluzione delle equazioni (10) conduce alla integrazione di altra equazione differenziale di secondo ordine più complicata della (1); abbandoneremo perciò questo metodo diretto per la integrazione della equazione data, e pur servendoci delle relazioni (10) trovate, per altra via giungeremo allo scopo prefissoci.

Supponiamo che l'equazione data sia mancante dell'ultimo termine, ossia che si abbia:

$$f_3 = 0$$

dovrà essere allora:

$$\frac{n}{2z}\theta u_2^{n-1}\frac{dz}{dt} = 0$$

e perciò dovrà verificarsi almeno una delle seguenti relazioni:

$$\theta = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Si abbia in primo luogo $\frac{dz}{dt} = 0$, l'equazione generale (9) diventerà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\theta}{\sqrt{z}}\frac{dx}{dt} - \frac{n(n-1)}{z}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right]x = 0$$

per cui le (10) si semplificheranno così:

$$\theta = f_1\sqrt{z}$$

(11)
$$-f_2 = \frac{n(n-1)}{z}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right].$$

Intanto essendo:

$$\varphi_1^2 - 4\varphi_2 = z$$

si avrà:

$$\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt} - 2\frac{d\varphi_2}{dt} = 0$$

e la seconda delle (11) diventerà allora:

$$-f_2 = \frac{n(n-1)}{z}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{4\varphi_2}\right)$$

ossia:

$$f_2 = \frac{n(n-1)}{\varphi_1^2 - z}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2$$

nella quale si vede che f_2 e $\varphi_1^2 - z$ debbono essere dello stesso segno. Se f_2 è negativo, sarà

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \sqrt{-f_2}\sqrt{\frac{z-\varphi_1^2}{n(n-1)}}$$

e separando le variabili ed integrando:

$$\varphi_1 = \sqrt{z}\,\mathrm{sen}\left[\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\int dt\sqrt{-f_2}\right]. \tag{12}$$

Se invece f_2 è positiva, con procedimento analogo a quello seguito per f_2 negativa, si perverrà alla relazione:

$$\varphi_1 = \sqrt{z}\cosh\left[\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\int dt\sqrt{f_2}\right]. \tag{13}$$

Richiamando ora il valore di θ dato dalla (8), e tenendo presente la relazione:

$$\varphi_1^2 - 4\varphi_2 = z$$

si ricaverà, dopo alcune trasformazioni:

$$\theta = -\frac{z\dfrac{n-1}{4}\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(\dfrac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \dfrac{z}{2}\dfrac{d^2\varphi_1}{dt}}{\dfrac{d\varphi_1}{dt}\left(u_1 + \dfrac{1}{2}\varphi_1\right)} = -\frac{\sqrt{z}\dfrac{n-1}{2}\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(\dfrac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \sqrt{z}\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2}}{\dfrac{d\varphi_1}{dt}}$$

per cui la prima della (11) darà:

$$\frac{n-1}{2}\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + f_1\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$$

la quale, tenendo presente le (12) e (13), si trasforma rispettivamente in una delle seguenti due condizioni:

$$f_1 = (2n-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{\int dt\sqrt{-f_2}}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{14}$$

ovvero:

$$f_1 = (2n-1)\,\mathrm{cotgh}\,\frac{\int dt\sqrt{f_2}}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{15}$$

a seconda che f_2 sia negativa o positiva.

Concluderemo perciò che se f_1 ed f_2 verificano una delle due (14) o (15), si è nel caso di $\frac{dz}{dt}=0$, e quindi riuscirà facile ottenere dalla (12) o (13) un integrale della equazione data.

Si abbia l'equazione:

$$(a) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+(2n-1)\operatorname{tg} t\frac{dx}{dt}-n(n-1)x=0\ldots$$

la quale verifica la (14), per cui si avrà:

$$\varphi_1=\sqrt{z}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\int\sqrt{n(n-1)}dt=\sqrt{z}\operatorname{sen} t$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4}(\varphi_1^2-z)=\frac{1}{4}(z\operatorname{sen}^2 t-z)=-\frac{1}{4}z\cos^2 t$$

ed un integrale particolare della data equazione sarà espresso da:

$$x=u_1{}^n+u_2{}^n$$

dove u_1 ed u_2 denotano le radici dell'equazione:

$$u^2+\sqrt{z}\operatorname{sen} t\, u-\frac{1}{4}z\cos^2 t=0.$$

Ora essendo:

$$u_1=-\frac{1}{2}\sqrt{z}\operatorname{sen} t+\frac{1}{2}\sqrt{z}=-\frac{1}{2}\sqrt{z}(\operatorname{sen} t+1)$$

$$u_2=-\frac{1}{2}\sqrt{z}\operatorname{sen} t-\frac{1}{2}\sqrt{z}=-\frac{1}{2}\sqrt{z}(\operatorname{sen} t-1)$$

ed essendo z costante, sarà:

$$(16) \qquad x=\left[-\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t+1)\right]^n+\left[-\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t-1)\right]^n.$$

3. Se $u_2=0$, sarà pure $\theta=0$, come può verificarsi esaminando la (8) e tenendo presente che dovrà essere:

$$\varphi_1=-u_1,\quad \varphi_2=0,\quad \varphi_1^2=z.$$

Le relazioni (10) in questo caso diventeranno:

$$f_1 = \frac{1}{2z}\frac{dz}{dt}$$

$$-f_2 = \frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{n(n-1)}{z}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2$$

nella prima, integrando, si otterrà:

$$z = e^{2\int f_1 dt}.$$

La seconda delle suindicate relazioni, coll'essere:

$$\frac{dz}{dt} = 2\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = 2\sqrt{z}\frac{d\varphi_1}{dt}$$

si trasformerà nell'altra:

$$(17) \qquad -f_2 = \frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{n(n-1)}{4z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

D'altra parte derivando la prima delle stesse indicate relazioni, si ottiene:

$$\frac{1}{2z}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{2}{4z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{df_1}{dt}$$

per cui la (14) diventerà:

$$-f_2 = n\frac{df_1}{dt} + \frac{2n}{4z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{n(n-1)}{4z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

la quale semplificata darà:

$$-f_2 = n\frac{df_1}{dt} + \left[\frac{2n}{4z^2} + \frac{n(n-1)}{4z^2}\right]4z^2 f_1^2$$

e cioè:

$$(18) \qquad n\frac{df_1}{dt} + n(n+1)f_1^2 + f_2 = 0$$

la quale indica la relazione che deve esistere fra i coefficienti dell'equazione data perchè sia $u_2 = 0$.

In questo caso, un integrale particolare sarà dato da:

$$(19) \qquad x = u_1{}^n = (-\varphi_1)^n = z^{\frac{n}{2}} = e^{n\int f_1 dt}.$$

Si abbia per esempio l'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} t \frac{dx}{dt} - a[\cos t + (a+1)\operatorname{sen}^2 t]x = 0$$

la quale per $n = a$ soddisfa la (18), per cui si avrà subito un integrale particolare espresso da:

$$x = e^{a\int f_1 dt} = e^{a\int \operatorname{sen} t dt} = e^{-a\cos t}.$$

Allorquando è data un'equazione differenziale lineare di secondo ordine, senza l'ultimo termine, se nel sostituire nella (18) ai coefficienti f_1 ed f_2 il valore in funzione della variabile t resta eliminata detta variabile e si ottiene una equazione con la sola incognita n, i valori di n, radici di tale equazione, ci condurranno ad altrettanti integrali particolari dell'equazione differenziale data.

Si abbia per esempio l'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{at}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{bt^2}x = 0$$

la (18) darà, dopo eseguite tutte le riduzioni:

$$bn^2 + (1-a)bn + a^2 = 0$$

per cui se n_1 ed n_2 denotano le radici di quest'ultima equazione, sarà:

$$z = e^{\frac{2}{a}\int f_1 dt} = e^{\frac{2}{a}\int\frac{dt}{t}} = e^{\frac{2}{a}\log t}$$

e quindi:

$$z = t^{\frac{2}{a}}$$

sicchè due integrali particolari della data equazione saranno:

$$x_1 = t^{\frac{2n_1}{a}}, \qquad x_2 = t^{\frac{2n_2}{a}}$$

e l'integrale generale sarà:

$$x = C_1 t^{\frac{2n_1}{a}} + C_2 t^{\frac{2n_2}{a}}.$$

4. Finalmente si abbia $\theta = 0$: vogliamo dimostrare che sarà pure $n_2 = 0$, e che perciò si ricade nel caso precedente, ed un integrale particolare dell'equazione lo si otterrà pure con la (19).

Essendo $\theta = 0$, l'equazione generale diventerà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2z}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{n(n-1)}{z}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_2^2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right] \right\} x = 0$$

per cui sarà:

$$f_1 = \frac{1}{2z}\frac{dz}{dt}$$

$$-f_2 = \frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{n(n-1)}{z}\left[\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2\right].$$

Da quest' ultima relazione, si ricava:

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 = \frac{-z}{n(n-1)}\left[f_2 + \frac{n}{2z}\frac{d^2z}{dt^2}\right].$$

Chiamando con F il secondo membro, e considerando il primo come differenza di due quadrati, sarà:

$$\frac{dv}{dt} \times \frac{dw}{dt} = F$$

dove:

$$(20) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{1}{\sqrt{\varphi_2}}\frac{d\varphi_2}{dt}$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{1}{\sqrt{\varphi_2}}\frac{d\varphi_2}{dt}$$

integrando queste ultime, dopo averle moltiplicate per dt, si avrà:

$$(21) \qquad v = \varphi_1 + 2\sqrt{\varphi_2}$$
$$w = \varphi_1 - 2\sqrt{\varphi_2};$$

moltiplicando si ricaverà:

$$vw = \varphi_1^2 - 4\varphi_2 = z,$$

differenziando rispetto a t ed eliminando v e $\frac{dv}{dt}$ mediante le relazioni precedenti, si ricaverà:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w}{2z}\left[\frac{dz}{dt} \pm \sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - 4zF}\right];$$

separando le variabili:

$$\frac{dw}{w} = \frac{1}{2z}\left[\frac{dz}{dt} \pm \sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - 4zF}\right]dt.$$

Analogamente si ricaverà:

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2z}\left[\frac{dz}{dt}\pm\sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-4zF}\right]dt.$$

D'altra parte se si sommano $\frac{dw}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$, e si tengono presenti le (20) e le (21), si avrà:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\varphi_1}{2z}\left[\frac{dz}{dt}\pm\sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-4zF}\right]$$

per cui:

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_1}=\frac{1}{2z}\left[\frac{dz}{dt}\pm\sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2-4zF}\right]dt;$$

dunque possiamo concludere che:

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_1}=\frac{dv}{v}=\frac{dw}{w}:$$

integrando:

(22) $$\varphi_1=v=w,$$

essendo le costanti della integrazione eguali a zero, come si può verificare tenendo presenti le (21).

Le relazioni (21) e (22) dimostrano poi che nel caso di $\theta=0$, sarà:

$$\varphi_2=0,$$

per cui la equazione (2) trasformandosi in questo caso nell'altra:

$$u^2+\varphi_1 u=0$$

fa concludere che una delle sue due radici u dovrà essere eguale a zero, così come si voleva dimostrare.

Osserviamo ora che essendo $\theta=0$, il numeratore del secondo membro della (8) dovrà essere zero; per cui, dopo eseguite alcune riduzioni, si ricaverà:

(23) $$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}+(2n-1)f_1\frac{d\varphi_1}{dt}+\left(\frac{df_1}{dt}+2f_1^2+\frac{2f_2}{n}\right)\varphi_1=0.$$

Intanto essendo:

$$\varphi_1^2=z$$

se deriviamo due volte rispetto a t, ed esprimiamo in funzione dei coefficienti f_1 ed f_2 le espressioni in z e delle sue derivate, si otterrà:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt} + f_1\frac{d\varphi_1}{dt} - \left(\frac{df_1}{dt} + 2f_1^2\right)\varphi_1 = 0.$$

Sottraendo quest'ultima dalla (23), si ricaverà nuovamente la (18), ossia la relazione che deve esistere fra i coefficienti f_1 ed f_2 per poter essere $\theta = 0$.

5. Allorquando data un'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\frac{dx}{dt} + f_2x = 0$$

i cui coefficienti f_1 ed f_2 soddisfino la (17), non è possibile col metodo indicato ottenere più d'un integrale particolare, si potrà determinare l'integrale generale applicando il brillante metodo di JACOBI.

Sia:

$$x_1 = A\mu(t) \tag{24}$$

l'integrale particolare, considerando A pure come funzione della variabile t, la si potrà determinare in modo che $A\mu(t)$ rappresenti l'integrale generale.

Derivando la (24) due volte rispetto a t e sostituendo, la equazione data diventerà:

$$\mu\frac{d^2A}{dt^2} + \left(2\frac{d\mu}{dt} + f_1\mu\right)\frac{dA}{dt} + \left(\frac{d^2\mu}{dt^2} + f_1\frac{d\mu}{dt} + f_2\mu\right)A = 0$$

e poichè μ è un integrale particolare della data equazione, il coefficiente del termine in A, sarà eguale a zero, e perciò:

$$\mu\frac{d^2A}{dt^2} + \left(2\frac{d\mu}{dt} + f_1\mu\right)\frac{dA}{dt} = 0$$

mettendo:

$$\frac{dA}{dt} = C$$

l'ultima equazione diventerà, dopo aver separate le variabili ed integrando:

$$\log C + 2\log\mu + \int f_1 dt = \text{cost.}$$

Ponendo:

$$\int f_1 dt = \log\psi(t)$$

si avrà:

$$C\mu^2\psi(t) = H$$

dove H rappresenta pure una costante, e quindi si avrà finalmente:

$$A = H\int \frac{dt}{\mu^2\psi(t)} + \text{cost.}$$

l'integrale generale dell'equazione data, sarà perciò:

$$x = \left[H\int \frac{dt}{\mu^2\psi(t)} + \text{cost.}\right]\mu(t). \tag{25}$$

Applicazione. — Abbiamo trovato che:

$$x_1 = Ae^{-a\cos t}$$

rappresenta un integrale particolare dell'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} t \frac{dx}{dt} - a[\cos t + (a+1)\operatorname{sen}^2 t]x = 0.$$

Per avere l'integrale generale supporremo A funzione di t, e la determineremo dalla (25).

Essendo:

$$\log \psi(t) = \int f_1 dt = \int \operatorname{sen} t dt = -\cos t$$

sarà:

$$\psi(t) = e^{-\cos t}$$

ed

$$\int \frac{dt}{\mu^2\psi(t)} = \int \frac{dt}{e^{-2a\cos t}e^{-\cos t}} = \int \frac{dt}{e^{-(2a+1)\cos t}} = \int e^{(2a+1)\cos t}dt$$

sicchè l'integrale generale dell'equazione in esame sarà:

$$x = \left[H\int e^{(2a+1)\cos t}dt + \text{cost.}\right]e^{-a\cos t}.$$

6. Da quanto finora si è esposto resta dimostrato che se i coefficienti f_1 ed f_2 d'una data equazione differenziale lineare di secondo ordine, mancante dell'ultimo termine, verificano la (18), si può subito, col metodo indicato, ottenere almeno un integrale particolare di tale equazione, il quale a sua volta ci conduce all'integrale generale mediante il metodo di Jacobi. Ma non tutte le equazioni differenziali lineari di secondo ordine soddisfano la (18); ci proponiamo perciò di determinare un fattore λ, funzione di t, il quale moltiplicato pei due ultimi termini dell'equazione data, dia una nuova equazione i cui coefficienti verifichino la (18).

Sia λ un tale fattore, l'equazione cercata sarà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda f_1 \frac{dx}{dt} + \lambda f_2 x = 0 \tag{26}$$

e poichè i coefficienti di questa equazione devono soddisfare la (18), dovrà aversi:

$$n\left(f_1 \frac{d\lambda}{dt} + \lambda \frac{df_1}{dt}\right) + n(n+1)\lambda^2 f_1^2 + \lambda f_2 = 0$$

e considerando λ come una funzione incognita si avrà, ordinando l'ultima equazione rispetto a λ:

$$\frac{d\lambda}{dt} + (n+1)f_1\lambda^2 + \left[\frac{f_2}{nf_1} + \frac{\frac{df_1}{dt}}{f_1}\right]\lambda = 0 \tag{27}$$

la quale integrata dirà quale funzione di t sia il fattore λ.

Per eseguire la integrazione facciamo dapprima astrazione dal secondo termine in λ^2, e consideriamo l'altra equazione:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} + \left[\frac{f_2}{nf_1} + \frac{\frac{df_1}{dt}}{f_1}\right]\lambda_1 = 0; \tag{28}$$

separando le variabili e integrando, mettendo:

$$\frac{1}{n}\int \frac{f_2}{f_1} dt = \log \psi$$

si ricaverà:

$$\log \lambda_1 f_1 \psi = \text{cost.}$$

e prendendo la costante arbitraria uguale ad uno:

$$\lambda_1 = \frac{1}{f_1 \psi} = \frac{1}{f_1 e^{\frac{1}{n}\int \frac{f_2}{f_1} dt}}.$$

Facciamo ora:

$$\lambda = C\lambda_1;$$

considerando C come una funzione di t, da determinare in modo che λ soddisfi la (27), si avrà differenziando:

$$\frac{d\lambda}{dt} = C\frac{d\lambda_1}{dt} + \lambda_1\frac{dC}{dt};$$

questo valore di $\frac{d\lambda}{dt}$ e quello di λ, debbono soddisfare la (27), per cui si otterrà:

$$C\left\{\frac{d\lambda_1}{dt} + \left[\frac{f_2}{nf_1} + \frac{\frac{df_1}{dt}}{f_1}\right]\lambda_1\right\} + \lambda_1\frac{dC}{dt} + (n+1)f_1C^2\lambda_1^2 = 0$$

e poichè λ_1, verifica la (28), la quantità in parentesi è uguale a zero, sicchè resta:

$$\frac{dC}{dt} + (n+1)f_1C^2\lambda_1 = 0$$

ossia:

$$\frac{dC}{C^2} + (n+1)f_1\lambda_1 dt = 0$$

e integrando:

$$\frac{1}{C} = (n+1)\int f_1\lambda_1 dt + \text{cost.}$$

Intanto per $C = \infty$, sarà $\frac{1}{C} = 0$, e perchè $\lambda = C\lambda_1$ risulti finita, dovrà verificarsi $\lambda_1 = 0$, e quindi la costante ultima dovrà essere uguale a zero, per cui risulterà:

$$C = \frac{1}{(n+1)\int f_1\lambda_1 dt}$$

e l'integrale della (27) verrà espresso così:

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)f_1\psi\int f_1\lambda_1 dt}$$

oppure, essendo:

$$f_1\lambda_1 = \frac{1}{\psi},$$

dall'altra forma più semplice:

(29)
$$\lambda = \frac{1}{(n+1)f_1\psi\int\frac{dt}{\psi}}$$

dove ricordiamo essere:

$$\psi = e^{\frac{1}{n}\int\frac{f_2}{f_1}dt}.$$

Si abbia l'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + t^3\frac{dx}{dt} + t^2x = 0$$

i cui coefficienti t^3 e t^2 non verificano la (18); sarà:

$$\psi = e^{\frac{1}{n}\int\frac{dt}{t}} = e^{\frac{1}{n}\log t}$$

e quindi:

$$\psi = t^{\frac{1}{n}}.$$

Dopo ciò si ricaverà:

$$\lambda = \frac{1}{(n+1)t^3t^{\frac{1}{n}}\int t^{-\frac{1}{n}}dt} = \frac{1}{(n+1)t^{3+\frac{1}{n}}\dfrac{t^{1+\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}}$$

ed eseguendo le riduzioni, si otterrà:

$$\lambda = \frac{n-1}{n(n+1)}t^{-4};$$

moltiplicando i due ultimi termini della data equazione per λ, si avrà la nuova equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{n-1}{n(n+1)}\frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{n-1}{n(n+1)}x = 0$$

i cui coefficienti soddisfano la (18), come si può facilmente verificare.

7. Determinato il fattore λ, la nuova equazione che si otterrà, siccome soddisfa la (18), si saprà integrare, e col metodo avanti esposto, si potrà ottenere prima un integrale particolare, eppoi quello generale.

Avuto l'integrale generale, passiamo a vedere come da esso si possa ottenere l'integrale generale dell'equazione omogenea data, applicando un ben noto procedimento.

Sia:

(30) $$X = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

l'integrale generale dell'equazione (26), dove C_1 e C_2 rappresentano due costanti arbitrarie, ed x_1 e x_2 due integrali particolari della detta equazione; ci proponiamo di determinare quali funzioni di t dovrebbero essere C_1 e C_2, perchè la (30) rappresenti invece l'integrale generale della equazione omogenea data.

Differenziando la (30) si otterrà:

$$\frac{dX}{dt} = C_1 \frac{dx_1}{dt} + C_2 \frac{dx_2}{dt} + x_1 \frac{dC_1}{dt} + x_2 \frac{dC_2}{dt}$$

e poichè sono due le funzioni da determinare, possiamo disporre di due condizioni, per cui fermo restando che C_1 e C_2 debbano verificare l'equazione, metteremo come seconda condizione la relazione:

(31) $$x_1 \frac{dC_1}{dt} + x_2 \frac{dC_2}{dt} = 0.$$

Si otterrà allora:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = C_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + C_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{dC_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}\frac{dC_2}{dt}.$$

Sostituendo i valori di X, $\frac{dX}{dt}$, $\frac{d^2X}{dt^2}$ nell'equazione data, dopo averla moltiplicata pel fattore λ, e ricordando che:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + f_1\lambda \frac{dx_1}{dt} + f_2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + f_1\lambda \frac{dx_2}{dt} + f_2\lambda x_2 = 0$$

si ricaverà:

$$(\lambda - 1)\left\{C_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + C_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}\right\} + \lambda\left(\frac{dC_1}{dt}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt}\frac{dx_2}{dt}\right) = 0.$$

Mettendo ora:

$$C_2 = C_1 z$$

l'ultima equazione diventerà:

(32) $$\frac{\lambda - 1}{\lambda} C_1 \left\{\frac{d^2x_1}{dt^2} + z\frac{d^2x_2}{dt^2}\right\} + \left\{\frac{dx_1}{dt} - \frac{x_1}{x_2}\frac{dx_2}{dt}\right\}\frac{dC_1}{dt} = 0.$$

D'altra parte:

$$\frac{dC_2}{dt} = z\frac{dC_1}{dt} + C_1\frac{dz}{dt};$$

questa equazione paragonata con la (31), darà:

$$z\frac{dC_1}{dt} + C_1\frac{dz}{dt} = -\frac{x_1}{x_2}\frac{dC_1}{dt}$$

ossia:

$$\frac{dC_1}{dt} = -\frac{C_1\frac{dz}{dt}}{z + \frac{x_1}{x_2}}; \tag{33}$$

questo valore di $\frac{dC_1}{dt}$ sostituito nella (32) cambierà tale equazione nell'altra:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda}\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + z\frac{d^2x_2}{dt^2}\right) = \frac{\frac{dx_1}{dt} - \frac{x_1}{x_2}\frac{dx_2}{dt}}{z + \frac{x_1}{x_2}}\frac{dz}{dt}$$

ovvero:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda}(x_1 + x_2 z)\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + z\frac{d^2x_2}{dt^2}\right) = \left(x_2\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dx_2}{dt}\right)\frac{dz}{dt}.$$

Ponendo:

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1}\left\{x_2\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dx_2}{dt}\right\} = \omega_1$$

$$x_1\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2\frac{d^2x_1}{dt^1} = \omega_2$$

si ricaverà l'equazione di primo ordine in z:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x_2}{\omega_1}\frac{d^2x_2}{dt^2}z^2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}z + \frac{x_1}{\omega_1}\frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{34}$$

la quale, integrata, farà conoscere quale funzione di t sia la z, e quindi la (33) darà:

$$\frac{dC_1}{C_1} = -\frac{\frac{dz}{dt}}{z + \frac{x_1}{x_2}}dt$$

per cui integrando si otterrà:

$$\log C_1 = -\int \frac{x_2 \frac{dz}{dt}}{x_1 + x_2 z}\, dt,$$

e finalmente:

$$C_1 = e^{-\int \frac{x_2 \frac{dz}{dt}}{x_1 + x_2 z} dt}$$

$$C_2 = z e^{-\int \frac{x_2 \frac{dz}{dt}}{x_1 + x_2 z} dt}.$$

8. Si abbia da integrare l'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = 0. \tag{35}$$

Mettendo $\lambda = t^{-1}$, e moltiplicando per λ i due ultimi termini dell'equazione data, si otterrà l'altra equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t^2} = 0 \tag{36}$$

la quale soddisfa la (18) ed ha per integrale generale l'espressione:

$$x = C_1 t^{-1} + C_2 t \tag{37}$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie.

Se si vuole che la (37) sia l'integrale generale della (35) e non della (36), supporremo C_1 e C_2 due funzioni di t, che determineremo col metodo esposto nel numero precedente. Richiamando i valori di ω_1 e di ω_2, si avrà:

$$\omega_1 = -\frac{2}{t(1-t)}, \quad \omega_2 = \frac{2}{t^2}$$

per cui l'equazione (34) diventerà nel caso in esame:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{1-t}{t} z + \frac{1-t}{t^3} = 0. \tag{38}$$

Per integrare questa equazione, faremo dapprincipio astrazione dell'ultimo termine, per cui avremo:

$$\frac{dz_1}{z_1} = -\frac{1-t}{t}\, dt;$$

integrando:

$$z_1 = \frac{1}{t} e^t.$$

Mettendo ora;

$$z = Hz_1$$

derivando e ricordando che z_1 soddisfa i primi due termini dell'equazione (38), si otterrà dopo eseguite tutte le riduzioni:

$$dH = -\frac{1-t}{t^2 e^t} dt,$$

la quale, integrata, darà:

$$H = \frac{1}{te^t} + 2\int \frac{dt}{te^t}:$$

quest'ultimo integrale si ottiene, come si sa, sviluppando in serie e^{-t}, ma noi tralasceremo tale sviluppo e ci basterà accennare che ottenuto la H in funzione di t, si otterrà subito:

$$z = Hz_1 = \frac{1}{t} e^t \left\{ \frac{1}{te^t} + 2S \right\} = t^{-2} + 2t^{-1}e^t S$$

avendo messo:

$$S = \int \frac{dt}{te^t}.$$

Ottenuto z in funzione di t, non vi saranno più difficoltà per ottenere le funzioni C_1 e C_2 della variabile t tali da rendere la (37) integrale generale della (35).

9. Allorquando il termine in f_3 non è zero, ossia allorquando l'equazione è della forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1 \frac{dx}{dt} + f_2 x + f_3 = 0, \tag{39}$$

si comincerà a trovare, com'è noto, l'integrale generale dell'equazione:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1 \frac{dx}{dt} + f_2 x = 0. \tag{40}$$

Sia X questo integrale, mettendo:

$$x = K \cdot X$$

la (39) darà:

$$X\frac{d^2K}{dt^2}+2\frac{dK}{dt}\frac{dX}{dt}+f_1X\frac{dK}{dt}+f_3=0$$

ossia:

$$X\frac{d^2K}{dt^2}+\left(2\frac{dX}{dt}+f_1X\right)\frac{dK}{dt}+f_3=0.$$

Ponendo:

$$\frac{dK}{dt}=u$$

sarà:

$$\frac{d^2K}{dt^2}=\frac{du}{dt}$$

per cui l'ultima equazione diventerà:

$$X\frac{du}{dt}+\left(2\frac{dX}{dt}+f_1X\right)u+f_3=0$$

la quale è facilmente integrabile e darà u in funzione di t; supponiamo perciò che si abbia avuto:

$$u=F(t),$$

si otterrà:

$$dK=F(t)dt$$

e quindi:

$$K=\int F(t)dt+\text{cost.}$$

e l'integrale generale della (39) sarà:

$$x=X\left\{\int F(t)dt+\text{cost.}\right\}.$$

Firenze, 16 novembre 1897.
Società Italiana per le Strade Ferrate Meridionali.

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA - 1928

NOTIFICAZIONE PRELIMINARE

Nei giorni dal 3 al 10 Settembre 1928 avrà luogo in Bologna il " Congresso Internazionale dei Matematici ,, indetto dalla Unione Matematica Internazionale e posto sotto gli auspici della R. Università di Bologna.

Il Capo del Governo, S. E. Benito Mussolini, ha accettato la Presidenza del Comitato d'Onore.

Il Rettore della R. Università di Bologna, Prof. Pasquale Sfameni, ha assunto la Presidenza del Comitato Ordinatore.

Il Congresso comprenderà le seguenti Sezioni:

1. Aritmetica - Algebra - Analisi.
2. Geometria.
3. Meccanica - Fisica matematica e teoretica - Astronomia - Geodesia.
4. Statistica - Economia matematica - Scienza attuariale (Teoria delle assicurazioni).
5. Ingegneria civile, meccanica, elettrotecnica - Architettura navale - Radiocomunicazioni - Arte militare - Aerodinamica.
6. Didattica e Matematiche elementari.
7. Filosofia e Storia delle matematiche.

LA COMMISSIONE ESECUTIVA

Prof. SALVATORE PINCHERLE, *presidente*

Prof. ENRICO BOMPIANI - Prof. PIETRO BURGATTI - Prof. FEDERICO GUARDUCCI - Prof. GUIDO HORN - Prof. QUIRINO MAJORANA - Prof. UMBERTO PUPPINI - Prof. LEONIDA TONELLI - Prof. DINO ZUCCHINI - Comm. GILDO BORSARI, tesoriere economo - Prof. ETTORE BORTOLOTTI, segr. gen.

UFFICI DEL CONGRESSO:

Istituto Matematico della R. Università - Via Zamboni 33, Bologna (Italia).

INDICE DEL TOMO IV DELLA SERIE 4ª